

$U(1)_{L_\mu-L_\tau}$ ゲージボソンと Majoron による Hubble Tension の緩和

2022 年度修了

埼玉大学大学院 理工学研究科 物理機能系専攻 物理学コース

学籍番号 21MP101

浅野 友哉

2023 年 2 月 6 日

概要

本論文では、標準模型 (SM) に追加の $U(1)$ 対称性を加えた繰り込み可能な $L_\mu - L_\tau$ 模型を扱う。この模型は $G_{\text{SM}} \times U(1)_{L_\mu - L_\tau} \times U(1)_L$ 対称性 (G_{SM} : SM の gauge 群) を持っており、標準模型の粒子に加え MeV 程度の質量を持つ Z' gauge boson、 $U(1)_L$ 対称性の破れから現れる Majoron が存在する。 $U(1)_L$ 対称性は Z' やニュートリノの質量起源を説明するために導入されている。

この模型は、ミューオンの異常磁気モーメントの測定値と SM での理論値との間にずれがあるという $g_\mu - 2$ anomaly、観測方法の違いにより Hubble 定数が異なるという Hubble Tension、これら 2 つの問題を同時に説明できる可能性がある。

$g_\mu - 2$ anomaly の解決方法として、電子には働かず、ミューオンには働くような相互作用を導入するというものがある。本論文で扱う模型はそのような模型の 1 つであり、 Z' は μ, τ の世代のレプトンのみと相互作用する。そのため、 Z' の導入により $g_\mu - 2$ anomaly を解決できる可能性がある。

また、Hubble Tension の解決方法として、相対論的な粒子種の有効数 N_{eff} を大きくするというものがある。 N_{eff} は光子とニュートリノのエネルギー密度の比 ρ_ν/ρ_γ に依存しており、何らかのメカニズムにより脱結合後のニュートリノのエネルギー密度を増やすことができれば、Hubble Tension を解決できる可能性がある。本論文の模型では Z' と Majoron はどちらもニュートリノへ崩壊することができるので、ニュートリノの脱結合後に崩壊し、ニュートリノのエネルギー密度を増やすようなパラメータが存在し得る。そのため、Hubble Tension を解決できる可能性がある。

本論文では、Hubble Tension の緩和に注目する。先行研究 [1] では、 Z' と Majoron が同時に存在しないという条件を置いているため、 Z' が全て崩壊していなくなった後に Majoron が生成されるというシナリオになっている。そのため、扱える Majoron の質量に上限がついている。本論文ではより一般的に、 Z' と Majoron が同時に存在する場合を考える。この場合 Z' と Majoron が関わる散乱過程が生じるため、この過程を取り入れて Boltzmann 方程式を解き、さまざまなパラメータに対して N_{eff} を計算し、Hubble Tension が緩和できるようなパラメータを検証する。

目次

1	導入	3
2	繰り込み可能な $L_\mu - L_\tau$ 模型	4
2.1	$L_\mu - L_\tau$ 模型	4
2.2	電子と Z' の結合	5
2.3	$g_\mu - 2$ anomaly	6
2.4	繰り込み可能な $L_\mu - L_\tau$ 模型	7
3	初期宇宙の時間発展	9
3.1	温度と化学ポテンシャルの時間発展方程式	9
3.2	時間発展方程式の具体形	11
3.3	粒子数遷移率・エネルギー遷移率	14
3.4	散乱過程の遷移率	18
3.5	散乱過程の u-channel diagram の発散	24
3.6	Majoron の有効反応率	25
4	結果	27
4.1	散乱を取り入れない場合	27
4.2	散乱を取り入れる場合	28
5	まとめ	32
	謝辞	34
付録 A	Bose, Fermi 分布関数	35
A.1	Bose 分布関数	35
A.2	Fermi 分布関数	36
付録 B	$1 + 2 \leftrightarrow 3 + 4$ に対する衝突項 (一般論)	37
付録 C	SM でのニュートリノの粒子数遷移率、エネルギー遷移率	40
C.1	$\nu_\alpha \bar{\nu}_\alpha \leftrightarrow e^- e^+$	40
C.2	$\nu_\alpha e^\pm \leftrightarrow \nu_\alpha e^\pm$	41
C.3	$\bar{\nu}_\alpha e^\pm \leftrightarrow \bar{\nu}_\alpha e^\pm$	43
付録 D	崩壊・逆崩壊過程の粒子数遷移率、エネルギー遷移率	43
付録 E	Z' のみが存在する場合の N_{eff}	44
付録 F	熱力学量	46
F.1	Fermi-Dirac 分布	46
F.2	Bose-Einstein 分布	47
付録 G	VEGAS 法	47
付録 H	化学ポテンシャルの時間発展における問題点	48

1 導入

$g_\mu - 2$ anomaly は古くから知られている問題である。同じレプトンである電子の異常磁気モーメントは、実験値と SM の理論値で 9 桁に渡り一致しているのに対し、ミューオンは電子と同じ測定方法にも関わらず、実験値と SM の理論値に 4.2σ のずれがある。このずれは、電子に対しては働かず、ミューオンに対しては働くような相互作用を導入することで解決できる可能性がある。 $L_\mu - L_\tau$ 模型はそのような模型の 1 つであり、 μ, τ 世代のレプトンとのみ相互作用を起こす $U(1)$ ゲージボソンの Z' が導入される。また、 Z' は初期宇宙に影響を与えうるため、他の SM の未解決問題も解決できる可能性がある。

そこで注目されたのが Hubble Tension である。Hubble Tension というのは、測定方法の違いにより Hubble 定数 H_0 の値に差異が生じているという問題である。 H_0 は現在の宇宙の膨張率を表しており、大きく分けて以下の 2 種類の測定方法で測られている。

方法 1 近傍宇宙の観測（直接測定）

近傍にある銀河の観測により、銀河までの距離 d_L と赤方偏移 z を測定し、Hubble の法則

$$cz = H_0 d_L \quad (c: \text{光速}) \quad (1.1)$$

により H_0 を求める。この観測では宇宙モデルは用いないため、直接測定という。

直接測定の代表的な実験である SH0ES 実験の結果は

$$H_0 = 72.53 \pm 0.99 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad (\text{SH0ES 2021 Cepheids+TRGB+SNe Ia}) \quad (1.2)$$

である [2]。

方法 2 遠方宇宙の観測と Λ CDM モデルにより推定（間接測定）

遠方宇宙の観測というのは、宇宙マイクロ波背景放射（CMB）の測定である。CMB の測定で代表的なものは Planck のデータで、

$$H_0 = 67.36 \pm 0.54 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad (\text{Planck 2018 TT,TE,EE+lowE+lensing}) \quad (1.3)$$

である [3]。

上の 2 つの値を比べると、誤差の範囲に収まらない差異があることがわかる。他にもさまざまな実験グループにより直接測定（MCP, H0LiCOW など）、間接測定（ACT, WMAP など）が行われ、両者の間には差異が生じることがわかった。どちらの方法でも観測は充分精度が良いと考えると、唯一の仮定である Λ CDM モデルを修正する必要があると考えられる。

Hubble Tension の緩和方法として本論文で扱うのは、相対論的な粒子種の有効数 N_{eff} を大きくする方法である。図 1.1 を見ると、Planck による制限は N_{eff} が大きくなると H_0 が大きい方に動くことが読み取れる。この制限によると、 $N_{\text{eff}} = 3.3 - 3.5$ 程度になると、 2σ の範囲では Hubble Tension が緩和されるといえる。

N_{eff} は

$$N_{\text{eff}} = \frac{8}{7} \left(\frac{11}{4} \right)^{4/3} \frac{\rho_\nu}{\rho_\gamma} \quad (1.4)$$

で求められる。ここで、 ρ_ν はニュートリノのエネルギー密度、 ρ_γ は光子のエネルギー密度である。SM では $N_{\text{eff}} = 3.044$ [6] である。

N_{eff} を大きくする方法として、初期宇宙において ρ_ν/ρ_γ を SM より大きな値にすることが考えられる。先行研究 [1] では、繰り込み可能な $L_\mu - L_\tau$ 模型を用いて、ニュートリノが脱結合した後に、初期宇宙で生成された $U(1)_{L_\mu - L_\tau}$ ゲージボソン Z' と Majoron ϕ がニュートリノへ崩壊することで ρ_ν を増やしていた。ただし、Majoron の生成時期が電子・陽電子対消滅後というシナリオで計算を行なっていたため、扱える Majoron の質量に $m_\phi \leq 30 \text{ keV}$ という上限がついていた。

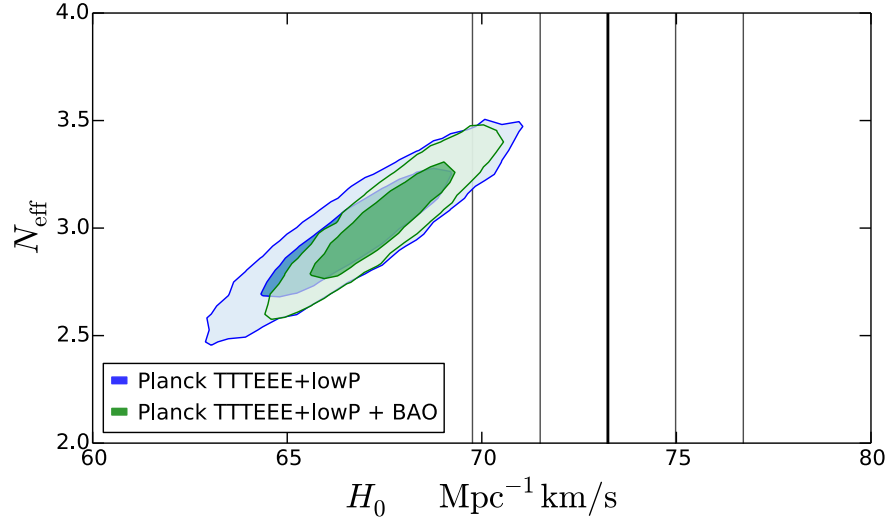


図 1.1 Planck 2015 のデータ (青色) と Planck 2015 + BAO のデータ (緑色) による N_{eff} vs. H_0 のパラメータへの制限 [4]。黒色と灰色の領域は SH0ES 実験 (2016 年) による結果 $H_0 = 73.24 \pm 1.74 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ である [5]。色の濃い領域が 1σ 、薄い領域が 2σ を表す。

本論文では、 Z' については先行研究 [7] で示されている $g_\mu - 2$ anomaly を解決できるパラメータを用い、Majoron のパラメータの検証に焦点を当てる。そして、Majoron の生成時期の制限を無くし、先行研究 [1] で扱われていない、 $m_\phi > 30 \text{ keV}$ のパラメータ領域を扱う。この場合、 Z' と Majoron が同時に存在する時期があり、そこでは Z' と Majoron が関わる散乱過程も存在する。そのような寄与も取り入れて Boltzmann 方程式を解き、 $N_{\text{eff}} = 3.3 - 3.5$ 程度になるような Majoron のパラメータを検証する。また、 Z' と Majoron の散乱過程がどの程度寄与するのかについても調べる。

本論文の構成は以下の通りである。2 章では、繰り込み可能な $L_\mu - L_\tau$ 模型の概説や $g_\mu - 2$ anomaly との関連を述べる。3 章では、初期宇宙の時間発展方程式がどのように記述されるかを議論する。4 章では、様々なパラメータに対して時間発展方程式を解き、 N_{eff} がどれくらい大きくなるかを計算する。また、目標とする $N_{\text{eff}} = 3.3 - 3.5$ が実現できるような Majoron のパラメータについて議論し、 Z' と Majoron の散乱過程を取り入れる場合と取り入れない場合を比較する。5 章では本論文のまとめを述べる。

2 繰り込み可能な $L_\mu - L_\tau$ 模型

$L_\mu - L_\tau$ 模型とは SM の $U(1)$ 拡張模型の 1 つである。この章では、まず $L_\mu - L_\tau$ 模型の詳細と、この模型の動機づけの 1 つである $g_\mu - 2$ anomaly との関わりについて説明する。その後、繰り込み可能な $L_\mu - L_\tau$ 模型について説明する。

2.1 $L_\mu - L_\tau$ 模型

$L_\mu - L_\tau$ 模型は、 $G_{\text{SM}} \times U(1)_{L_\mu - L_\tau}$ (G_{SM} : SM の gauge 群) という対称性を持つ模型である。この模型の Lagrangian は、SM の Lagrangian に

$$\partial_\rho \psi \rightarrow (\partial_\rho - ig_{\mu-\tau}(L_\mu - L_\tau)Z'_\rho)\psi \quad (2.1)$$

という置き換えを行うことで得られる。ここで、 $g_{\mu-\tau}$ は $U(1)_{L_\mu - L_\tau}$ ゲージ結合定数、 Z'_ρ は $U(1)_{L_\mu - L_\tau}$ ゲージ場である。 $L_{\mu,\tau}$ はそれぞれ μ, τ のレプトン数で、 $L_\mu - L_\tau$ は ψ に入る場によって次のようになる。

$$L_\mu - L_\tau = \begin{cases} 1 & (\psi = \ell_\mu, \mu_R) \\ -1 & (\psi = \ell_\tau, \tau_R) \end{cases} \quad (2.2)$$

この置き換えにより、模型の Lagrangian は

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{SM}} - \frac{1}{4} Z'^{\rho\sigma} Z'_{\rho\sigma} + g_{\mu-\tau} Z'_\rho J_{\mu-\tau}^\rho \quad (2.3)$$

$$Z'_{\rho\sigma} \equiv \partial_\rho Z'_\sigma - \partial_\sigma Z'_\rho \quad (2.4)$$

$$J_{\mu-\tau}^\rho \equiv \bar{\mu}\gamma^\rho\mu + \bar{\nu}_\mu\gamma^\rho P_L\nu_\mu - \bar{\tau}\gamma^\rho\tau - \bar{\nu}_\tau\gamma^\rho P_L\nu_\tau \quad (2.5)$$

となる。Lagrangian(2.3) 式には Z' boson の質量項は無いため、手で加える必要がある。よって、最終的に

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{SM}} - \frac{1}{4} Z'^{\rho\sigma} Z'_{\rho\sigma} + \frac{1}{2} m_{Z'}^2 Z'_\rho Z'^\rho + g_{\mu-\tau} Z'_\rho J_{\mu-\tau}^\rho \quad (2.6)$$

となる。ここで、 Z' boson の質量を手で加えたことにより、理論の $U(1)_{L_\mu-L_\tau}$ 対称性は破れていることに注意しなければならない。つまり、この模型は低エネルギーでの有効理論である。

2.2 電子と Z' の結合

(2.6) 式より、 Z' は tree level では電子とは結合しない。しかし、1-loop まで考えると図 2.1 のような結合を考えることができる。

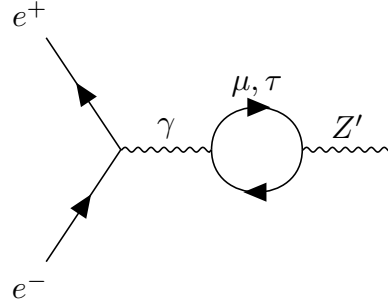


図 2.1 電子と Z' の 1-loop での結合

この diagram の評価のため、まずは光子と Z' の結合を評価する。

$$\begin{aligned} \text{Diagram} &= \sum_{l=\mu,\tau} (-ie)(ig_{\mu-\tau})(-1) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\gamma^\mu \frac{i}{\not{k} - m_l} \gamma^\nu \frac{i}{\not{k} + \not{q} - m_l} \right] \\ &= i(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \Pi(q^2) \end{aligned} \quad (2.7)$$

ここで、 ϵ を次のように定義する。

$$\begin{aligned} \epsilon = \Pi(q^2) &= \sum_{l=\mu,\tau} \frac{8g_{\mu-\tau} Q_l e}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx x(1-x) \frac{\Gamma(2-d/2)}{[m_l^2 - x(1-x)q^2]^{2-d/2}} \\ &= \sum_{l=\mu,\tau} \frac{g_{\mu-\tau} Q_l e}{2\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \left(\frac{2}{\epsilon} - \log[m_l^2 - x(1-x)q^2] - \gamma + \log 4\pi \right) \\ &= \frac{g_{\mu-\tau} e}{2\pi^2} \int_0^1 dx \log \left[\frac{m_\tau^2 - x(1-x)q^2}{m_\mu^2 - x(1-x)q^2} \right] \end{aligned} \quad (2.8)$$

Q_l は $L_\mu - L_\tau$ 電荷で、

$$Q_l = \begin{cases} 1 & (l = \mu) \\ -1 & (l = \tau) \end{cases} \quad (2.9)$$

である。これにより、 ϵ の積分で発散する部分が逆符号で打ち消し合い、キャンセルしている。さらに、本論文で考えるエネルギーが $\mathcal{O}(10\text{MeV})$ 以下であることから、

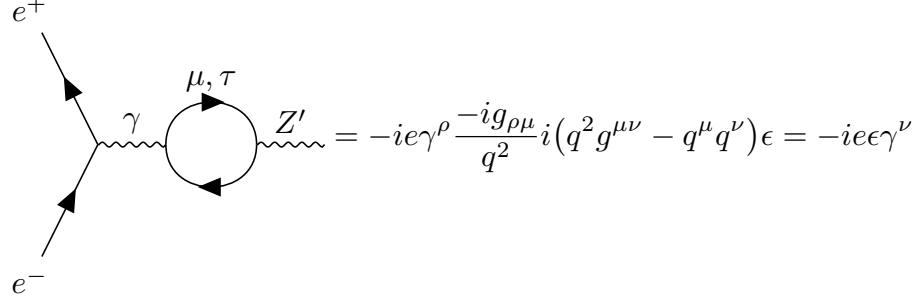
$$|q^2| \lesssim (10\text{MeV})^2 \ll m_\mu^2, m_\tau^2 \quad (2.10)$$

とすると、

$$\begin{aligned}\epsilon &= \frac{g_{\mu-\tau}e}{2\pi^2} \int_0^1 dx \log \frac{m_\tau^2}{m_\mu^2} \\ &= \frac{g_{\mu-\tau}e}{12\pi^2} \log \frac{m_\tau^2}{m_\mu^2} \simeq \frac{g_{\mu-\tau}}{70}\end{aligned}\quad (2.11)$$

という形になる。

この結果を用いて、 Z' と電子の結合を次のように評価することができる。



$$= -ie\gamma^\rho \frac{-ig_{\rho\mu}}{q^2} i(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \epsilon = -ie\epsilon\gamma^\nu \quad (2.12)$$

これより、 Z' と電子の 1-loop 結合を取り入れることは、Lagrangian(2.6) 式に

$$\mathcal{L} \supset -\epsilon e Z'_\mu \bar{e} \gamma^\mu e \quad (2.13)$$

という相互作用項を加えることと等価であることがわかる。

この相互作用より、 $m_{Z'} > m_e/2$ の場合に $Z' \rightarrow e^+ e^-$ という崩壊が起きる。この崩壊に対する崩壊幅は

$$\Gamma_{Z' \rightarrow e^+ e^-} = \frac{(\epsilon e)^2 m_{Z'}}{12\pi} \left(1 + \frac{2m_e^2}{m_{Z'}^2}\right) \sqrt{1 - \frac{4m_e^2}{m_{Z'}^2}} \quad (2.14)$$

となる。また、 $Z' \rightarrow \nu_{\alpha'} \bar{\nu}_{\alpha'}$ に対する崩壊幅は

$$\Gamma_{Z' \rightarrow \nu_{\alpha'} \bar{\nu}_{\alpha'}} = \frac{g_{\mu-\tau}^2 m_{Z'}}{24\pi} \quad (2.15)$$

である。ただしニュートリノ質量は無視した。これより、 $Z' \rightarrow e^+ e^-$ の分岐比は

$$\text{Br}_{Z' \rightarrow e^+ e^-} = \frac{\Gamma_{Z' \rightarrow e^+ e^-}}{\Gamma_{Z' \rightarrow e^+ e^-} + \Gamma_{Z' \rightarrow \nu_\mu \bar{\nu}_\mu} + \Gamma_{Z' \rightarrow \nu_\tau \bar{\nu}_\tau}} \simeq \left(\frac{\epsilon e}{g_{\mu-\tau}}\right)^2 \simeq 2 \times 10^{-5} \quad (2.16)$$

となり、これは $g_{\mu-\tau}$ に依らない値である。

2.3 $g_\mu - 2$ anomaly

スピン 1/2 をもつ粒子は磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}$ により磁場と相互作用する。その相互作用は

$$H_{\text{int}} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = g \frac{e}{2m} \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right) \cdot \mathbf{B} \quad (2.17)$$

で与えられる。ここで、 g は g 因子と呼ばれ、電磁場中のディラック方程式において非相対論的極限を取ることで $g = 2$ となる。しかし、観測結果によると g 因子の値は 2 からわずかにずれている。このずれのことを異常磁気モーメントと呼び、次の式で定義されている。

$$a = \frac{g - 2}{2} \quad (2.18)$$

異常磁気モーメントは量子論的効果によるものであり、電磁場との相互作用を表す図 2.2 の diagram を評価することで理論的に計算することができる。

電子とミュオンの異常磁気モーメントについては、理論と実験のどちらも詳細に計算されている。電子の異常磁気モーメントは

$$a_e^{\text{exp}} = 1159652180.252(95) \times 10^{-12} \quad (2.19)$$

$$a_e^{\text{SM}} = 1159652181.606(229)(11)(12) \times 10^{-12} \quad (2.20)$$

$$\Delta a_e = a_e^{\text{exp}} - a_e^{\text{SM}} = -0.88(36) \times 10^{-12} \quad (2.21)$$

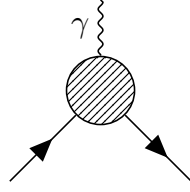


図 2.2 電磁場との相互作用 diagram

となっており [8, 9]、SM の理論値と実験値は 9 桁一致している。

一方で、ミューオンの異常磁気モーメントは

$$a_{\mu}^{\text{exp}} = 116592061(41) \times 10^{-11} \quad (2.22)$$

$$a_{\mu}^{\text{SM}} = 116591810(43) \times 10^{-11} \quad (2.23)$$

$$\Delta a_{\mu} = a_{\mu}^{\text{exp}} - a_{\mu}^{\text{SM}} = (251 \pm 59) \times 10^{-11} \quad (2.24)$$

となっており [10, 11]、SM の理論値と実験値には 4.2σ のずれがあることが報告されている。この問題は $g_{\mu} - 2$ anomaly と呼ばれており、SM では説明できない事象である。

異常磁気モーメントの測定原理には電子とミューオンに違いはないため、 $g_{\mu} - 2$ anomaly を解決するためには SM を拡張する必要がある。電子は精度良く測定できていることを考えると、電子には働かず、ミューオンには働くような相互作用を導入することで解決できる可能性があると考えられる。そして、 $L_{\mu} - L_{\tau}$ 模型はそのような模型の 1 つである。 $L_{\mu} - L_{\tau}$ 模型では、図 2.2 の diagram は

$$\text{Diagram} = \text{Diagram}_1 + \text{Diagram}_2 + \text{Diagram}_3 + \dots \quad (2.25)$$

となる。異常磁気モーメントは 2 つ目以降の diagram の寄与であるから、新たに加わった 3 つ目の diagram は異常磁気モーメントに寄与する。この diagram の寄与 $\Delta a_{\mu}^{Z'}$ は

$$\Delta a_{\mu}^{Z'} = \frac{g_{\mu-\tau}^2}{8\pi^2} \int_0^1 dx \frac{2m_{\mu}^2 x(1-x)^2}{m_{\mu}^2(1-x)^2 + m_{Z'}^2 x} \simeq 1.3 \times 10^{-10} \left(\frac{g_{\mu-\tau}}{10^{-4}} \right)^2 \quad (2.26)$$

となる。ただし $m_{\mu} \gg m_{Z'}$ とした。この寄与により (2.24) 式のずれが生じているとすれば、 $g_{\mu-\tau} \simeq (3-6) \times 10^{-4}$ であれば良いことがわかる。(2.26) 式で $g_{\mu} - 2$ anomaly が解決できるような Z' のパラメータ空間を図 2.3 に示す。

2.4 繰り込み可能な $L_{\mu} - L_{\tau}$ 模型

繰り込み可能な $L_{\mu} - L_{\tau}$ 模型 [12] は、§2.1 で紹介した $L_{\mu} - L_{\tau}$ 模型の対称性に global $U(1)_L$ 対称性を加えた、 $G_{\text{SM}} \times U(1)_{L_{\mu}-L_{\tau}} \times U(1)_L$ という対称性を持つ。global $U(1)_L$ 対称性が自発的に破れると、南部-Goldstone ボソン (NG ボソン) である ϕ が生じる。この ϕ を Majoron と呼ぶ。NG ボソンは massless だが、もともとの理論が持っていた $U(1)_L$ 対称性がわずかに破れていた場合、小さな質量を持つことができる。そのため、Lagrangian には $U(1)_L$ 対称性を破る項が含まれている (詳細な議論は [12] 参照)。この場合、Majoron は pseudo NG ボソンという。

Majoron はニュートリノと相互作用を起こす。その相互作用項は、

$$\mathcal{L} \supset h_{\alpha\beta} \bar{\nu}_{L,\alpha} \nu_{L,\beta}^c \phi + \text{h.c.} \quad (2.27)$$

である。ここで、 $h_{\alpha\beta} = h_{\beta\alpha}$ は結合定数である。 $\nu_{L,\beta}^c$ を荷電共役行列 C を用いて表すと、

$$\nu_{L,\beta}^c = C \bar{\nu}_{L,\beta}^T \quad (2.28)$$

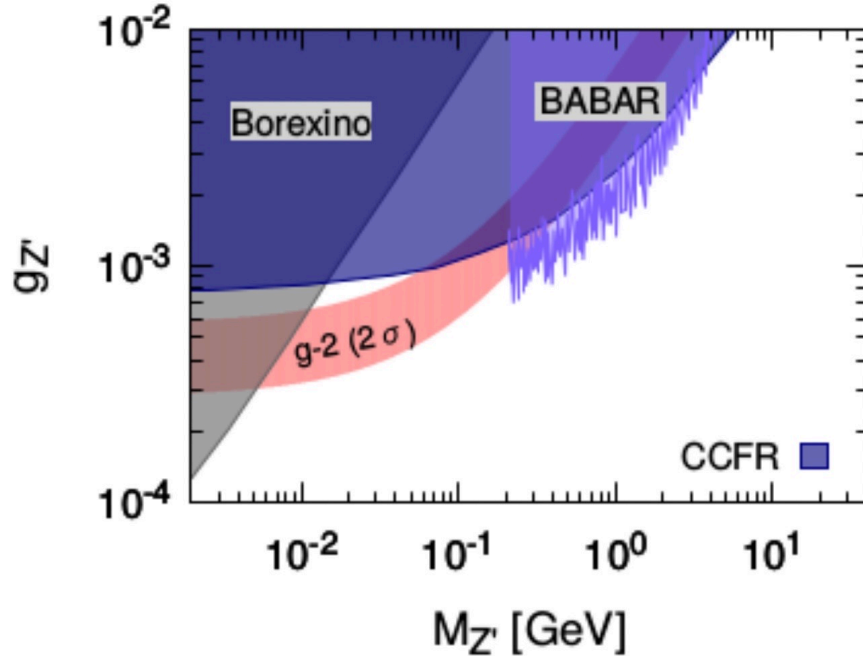


図 2.3 Z' のパラメータ空間 [7]。 $g_{Z'} = g_{\mu-\tau}$ である。赤色の領域は $g_{\mu} - 2$ anomaly を 2σ で解決できるパラメータを示している。青色と灰色の領域は Borexino 実験、BABAR 実験、CCFR 実験により排除されている。

となり、さらに $\nu_{L,\alpha} = P_L \nu_\alpha$ と射影演算子を抜き出して (2.27) 式を書き直すと、

$$\mathcal{L} \supset h_{\alpha\beta} \bar{\nu}_\alpha P_R C \bar{\nu}_\beta^T \phi + h_{\alpha\beta}^* \nu_\alpha^T C P_L \nu_\beta \phi \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{\alpha} h_{\alpha\alpha} \bar{\nu}_\alpha P_R C \bar{\nu}_\alpha^T \phi + 2 \sum_{\alpha < \beta} h_{\alpha\beta} \bar{\nu}_\alpha P_R C \bar{\nu}_\beta^T \phi \\ &\quad + \sum_{\alpha} h_{\alpha\alpha}^* \nu_\alpha^T C P_L \nu_\alpha \phi + 2 \sum_{\alpha < \beta} h_{\alpha\beta}^* \nu_\alpha^T C P_L \nu_\beta \phi \end{aligned} \quad (2.30)$$

s となる。

これより、Majoron とニュートリノの Feynman Rule は (2.31)、(2.32) 式のようにになる。

$$\begin{array}{c} \nu_{\alpha,a} \\ \nearrow \\ \phi \text{ --- } \text{---} \text{---} \text{---} \\ \searrow \\ \nu_{\beta,b} \end{array} = 2i h_{\alpha\beta} (P_R C)_{ab} \quad (2.31)$$

$$\begin{array}{c} \nu_{\alpha,a} \\ \nearrow \\ \phi \text{ --- } \text{---} \text{---} \text{---} \\ \searrow \\ \nu_{\beta,b} \end{array} = 2i h_{\alpha\beta}^* (C P_L)_{ab} \quad (2.32)$$

$\alpha = \beta$ の場合も 2 倍がかかるのは、S 行列の計算において縮約の取り方が 2 通りあるためである。

この Feynman Rule を用いて Majoron の崩壊幅を計算すると、

$$\Gamma_{\phi \leftrightarrow \nu_\alpha \nu_\beta} = \Gamma_{\phi \leftrightarrow \bar{\nu}_\alpha \bar{\nu}_\beta} = \frac{|h_{\alpha\beta}|^2 m_\phi}{4\pi S_{\alpha\beta}} \quad (2.33)$$

となる。ここで $S_{\alpha\beta}$ は二重勘定を防ぐための対称性因子で、

$$S_{\alpha\beta} = \begin{cases} 2 & \alpha = \beta \\ 1 & \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (2.34)$$

である。よって、Majoron の全崩壊幅は、

$$\begin{aligned}
\Gamma_\phi &\equiv \left(\sum_{\alpha,\beta} \delta_{\alpha\beta} + \sum_{\alpha<\beta} \right) (\Gamma_{\phi \rightarrow \nu_\alpha \nu_\beta} + \Gamma_{\phi \rightarrow \bar{\nu}_\alpha \bar{\nu}_\beta}) = 2 \left(\sum_{\alpha,\beta} \delta_{\alpha\beta} + \sum_{\alpha<\beta} \right) \frac{|h_{\alpha\beta}|^2 m_\phi}{4\pi S_{\alpha\beta}} \\
&= \frac{m_\phi}{2\pi} \left(\sum_{\alpha} \frac{|h_{\alpha\alpha}|^2}{2} + \sum_{\alpha<\beta} |h_{\alpha\beta}|^2 \right) = \frac{m_\phi}{4\pi} \sum_{\alpha,\beta} |h_{\alpha\beta}|^2 \\
&= \frac{m_\phi}{4\pi} \text{tr}(h^\dagger h) \equiv \frac{m_\phi \lambda^2}{4\pi}
\end{aligned} \tag{2.35}$$

と表せる。全崩壊幅は粒子数・エネルギー遷移率の計算で現れる。

3 初期宇宙の時間発展

Z' と Majoron が初期宇宙に存在する場合の N_{eff} を求めるために、粒子の時間発展を求める必要がある。この章では、温度と化学ポテンシャルの時間発展方程式を導出し、計算結果を示す。

3.1 温度と化学ポテンシャルの時間発展方程式

初期宇宙の時間発展を求めるにあたり、Boltzmann 方程式を用いる。一様等方（ロバートソン-ウォーカー計量）で平坦な宇宙において、粒子種 a の分布関数 $f_a(|\mathbf{p}_a|, t)$ に対する Boltzmann 方程式は (3.1) 式で与えられる。

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} - \frac{\dot{R}}{R} |\mathbf{p}_a| \frac{\partial f_a}{\partial |\mathbf{p}_a|} = C[f_a] \tag{3.1}$$

ここで、 R はスケール因子、 $C[f_a]$ は粒子種 a に対する衝突項である。Hubble Parameter H は $H = \dot{R}/R$ で定義され、平坦な宇宙の Friedmann 方程式より

$$H^2 = \frac{8\pi\rho_{\text{tot}}}{3m_{Pl}^2} \tag{3.2}$$

である。ただし、 ρ_{tot} は全宇宙のエネルギー密度、 m_{Pl} は Planck 質量である。

衝突項 $C[f_a]$ は一般に次の式で与えられる。

$$C[f_a] = \sum_{X,Y} C_{a+X \leftrightarrow Y}[f_a] \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}
C_{a+X \leftrightarrow Y}[f_a] &= -\frac{1}{2E_a} \int \prod_i d\Pi_{X_i} \prod_j d\Pi_{Y_j} (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_a + \sum_i p_{X_i} - \sum_j p_{Y_j} \right) \\
&\times \left[\sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{a+X \rightarrow Y}|^2 f_a \prod_i f_{X_i} \prod_j (1 \pm f_{Y_j}) - \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{Y \rightarrow a+X}|^2 \prod_j f_{Y_j} (1 \pm f_a) \prod_i (1 \pm f_{X_i}) \right]
\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$d\Pi_{X_i} \equiv \frac{d^3 \mathbf{p}_{X_i}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{X_i}} \tag{3.5}$$

ここで、 X, Y は一般に多粒子状態を表す。また、 $\pm$ はそれぞれボソン、フェルミオンを表し、 $(1 \pm f)$ は Bose Enhancement、Pauli Blocking の効果を表す。(3.4) 式の積分を計算する際には、始状態および終状態に同種粒子が存在する場合は $n!$ で割り、同じ状態を多重に数えることを防ぐ必要がある。

(3.1) 式は、両辺に $d^3 \mathbf{p}_a / (2\pi)^3$ をかけて積分することで、粒子数密度 n_a の方程式に変形することができる。

$$\frac{dn_a}{dt} + 3Hn_a = \int \frac{d^3 \mathbf{p}_a}{(2\pi)^3} C[f_a] \equiv \frac{\delta n_a}{\delta t} \tag{3.6}$$

右辺の $\delta n_a/\delta t$ は粒子数遷移率と呼ばれ、(3.3)、(3.4) 式より

$$\frac{\delta n_a}{\delta t} = \sum_{X,Y} \frac{\delta n_a}{\delta t} \Big|_{a+X \leftrightarrow Y} \quad (3.7)$$

$$\frac{\delta n_a}{\delta t} \Big|_{a+X \leftrightarrow Y} = \int \frac{d^3 \mathbf{p}_a}{(2\pi)^3} C_{a+X \leftrightarrow Y}[f_a] \quad (3.8)$$

と表せる。(3.6) 式は、左辺第 2 項を移項して

$$\frac{dn_a}{dt} = -3Hn_a + \frac{\delta n_a}{\delta t} \quad (3.9)$$

という形にしておく。この式は、ある粒子種の粒子数密度の時間変化は、右辺第 1 項の宇宙膨張による粒子数密度の薄まりと、右辺第 2 項の相互作用による粒子数密度の変化によって計算されるということを表している。

同様に、(3.1) 式の両辺に $E_a d^3 \mathbf{p}_a / (2\pi)^3$ をかけて積分することで、エネルギー密度 ρ_a の方程式に変形することができる。

$$\frac{d\rho_a}{dt} + 3H(\rho_a + P_a) = \int \frac{d^3 \mathbf{p}_a}{(2\pi)^3} E_a C_{a+X \leftrightarrow Y}[f_a] \equiv \frac{\delta \rho_a}{\delta t} \quad (3.10)$$

ここで、 P_a は粒子種 a の圧力を表す。右辺の $\delta \rho_a/\delta t$ はエネルギー遷移率と呼ばれ、(3.3)、(3.4) 式より

$$\frac{\delta \rho_a}{\delta t} = \sum_{X,Y} \frac{\delta \rho_a}{\delta t} \Big|_{a+X \leftrightarrow Y} \quad (3.11)$$

$$\frac{\delta \rho_a}{\delta t} \Big|_{a+X \leftrightarrow Y} = \int \frac{d^3 \mathbf{p}_a}{(2\pi)^3} E_a C_{a+X \leftrightarrow Y}[f_a] \quad (3.12)$$

と表せる。(3.10) 式も上と同じように右辺第 2 項を移項して、

$$\frac{d\rho_a}{dt} = -3H(\rho_a + P_a) + \frac{\delta \rho_a}{\delta t} \quad (3.13)$$

となる。この式は、ある粒子種のエネルギー密度の時間変化は、右辺第 1 項の宇宙膨張によるエネルギー密度の薄まりと、右辺第 2 項の相互作用によるエネルギー密度の変化によって計算されることを表している。

粒子数密度とエネルギー密度は分布関数の積分から得られる。分布関数は基本的に

$$f_a(T_a, \mu_a) = \frac{1}{e^{(E_a - \mu_a)/T_a} \pm 1} \quad (3.14)$$

という形である。分母の $\pm$ はそれぞれ $+$ がボソン、 $-$ がフェルミオンの場合である。分布関数は温度 T_a 、化学ポテンシャル μ_a の関数であることから、 $n_a = n_a(T_a, \mu_a)$ 、 $\rho_a = \rho_a(T_a, \mu_a)$ と表せる。つまり、 n_a 、 ρ_a は温度と化学ポテンシャルを通して時間に依存している。そこで、次のような変形を行う。

$$\frac{dn_a}{dt} = \frac{\partial n_a}{\partial T_a} \frac{dT_a}{dt} + \frac{\partial n_a}{\partial \mu_a} \frac{d\mu_a}{dt} \quad (3.15)$$

$$\frac{d\rho_a}{dt} = \frac{\partial \rho_a}{\partial T_a} \frac{dT_a}{dt} + \frac{\partial \rho_a}{\partial \mu_a} \frac{d\mu_a}{dt} \quad (3.16)$$

この 2 式より、

$$\frac{dT_a}{dt} = \frac{1}{\det J_a} \left(\frac{\partial \rho_a}{\partial \mu_a} \frac{dn_a}{dt} - \frac{\partial n_a}{\partial \mu_a} \frac{d\rho_a}{dt} \right) \quad (3.17)$$

$$\frac{d\mu_a}{dt} = \frac{1}{\det J_a} \left(\frac{\partial n_a}{\partial T_a} \frac{d\rho_a}{dt} - \frac{\partial \rho_a}{\partial T_a} \frac{dn_a}{dt} \right) \quad (3.18)$$

$$\det J_a = \begin{pmatrix} \frac{\partial n_a}{\partial T_a} & \frac{\partial n_a}{\partial \mu_a} \\ \frac{\partial \rho_a}{\partial T_a} & \frac{\partial \rho_a}{\partial \mu_a} \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

となる。(3.17)、(3.18) 式に (3.9)、(3.10) 式を代入することで、温度と化学ポテンシャルの時間発展方程式が得られる。

$$\frac{dT_a}{dt} = -\frac{1}{\det J_a} \left[-3H \left((\rho_a + P_a) \frac{\partial n_a}{\partial \mu_a} - n_a \frac{\partial \rho_a}{\partial \mu_a} \right) + \frac{\partial n_a}{\partial \mu_a} \frac{\delta \rho_a}{\delta t} - \frac{\partial \rho_a}{\partial \mu_a} \frac{\delta n_a}{\delta t} \right] \quad (3.20)$$

$$\frac{d\mu_a}{dt} = \frac{1}{\det J_a} \left[-3H \left((\rho_a + P_a) \frac{\partial n_a}{\partial T_a} - n_a \frac{\partial \rho_a}{\partial T_a} \right) + \frac{\partial n_a}{\partial T_a} \frac{\delta \rho_a}{\delta t} - \frac{\partial \rho_a}{\partial T_a} \frac{\delta n_a}{\delta t} \right] \quad (3.21)$$

粒子数遷移率、エネルギー遷移率は反応過程に関わる粒子種の温度や化学ポテンシャルに依存するため、この時間発展方程式は各粒子種についての式を連立させて解く必要がある。

ただし、ここまでの式変形は粒子種 a が分布関数に従うことを前提としている。もし分布関数に従わない粒子種についての時間発展を求めたければ、(3.1) 式のまま解き、直接分布関数を求める必要がある（本研究ではそのような場合は扱わない）。

3.2 時間発展方程式の具体形

3.2.1 近似

時間発展方程式を考えるにあたり、用いる近似をまとめておく。

近似 1 全ての粒子は熱平衡分布関数 (3.14) 式に従う。

存在する粒子は光子、電子（陽電子）、ニュートリノ、 Z' 、Majoron である。十分高温では、SM 粒子は頻繁に反応を起こし熱平衡状態にあると考えられる。宇宙の温度が $T < 3\text{MeV}$ まで下がるとニュートリノが脱結合するが、この脱結合が一瞬で起きたとすると、脱結合前の分布関数の形を保つことができる。

Z' に関しては、 $g_{\mu-\tau} \gtrsim 10^{-5}$ のとき、 $Z'\nu_{\mu,\tau} \leftrightarrow Z'\nu_{\mu,\tau}$ によって運動学的平衡になるので、良い近似で熱平衡分布関数に従う。

Majoron に関しては非平衡過程（温度が下がってきたときの $\phi \leftrightarrow \nu\nu$ など）を含むため、一般には熱平衡分布関数に従わない。この場合、(3.1) 式を直接解く必要があるが、実際に解くのは難しい。本論文では簡単のために、Majoron が熱平衡分布関数に従うと仮定する。実際に、この仮定をした場合の結果と (3.1) 式を解いた結果に大きな差はないことが報告されている [13]。

近似 2 衝突項積分の中では Maxwell-Boltzmann 分布を用いる。

十分高温では、各粒子種は高いエネルギーまで分布するため、各状態の占有率は小さいと言える。つまり分布関数 f は $f \ll 1$ である。(3.14) 式から、これは $e^{(E-\mu)/T} \gg 1$ であると言い換えられる。よって分母の ± 1 を無視することができ、Maxwell-Boltzmann 分布 $f = e^{-(E-\mu)/T}$ で近似できる。また、 $f \ll 1$ であることから、 $1 \pm f \simeq 1$ が従う。

近似 3 SM の反応過程に対する衝突項の計算において、電子の質量を無視する。

電子が相対論的である間は massless として扱っても問題ない。宇宙の温度が $T \sim 3\text{MeV}$ 程度まで冷えてくると質量を無視する近似は悪くなるが、Boltzmann 方程式に対する衝突項の寄与が十分小さくなるため、massless として扱える。実際に電子の質量を無視したことによる誤差は数 % 以下であることが報告されている [14]。

近似 4 ニュートリノの質量を無視する。

ニュートリノ質量には Planck2018 から $\sum_i m_{\nu_i} < 0.15 \text{ eV}$ (normal hierarchy) という制限がついている [15]。本論文で考えたい温度領域は $\mathcal{O}(\text{keV}) \sim \mathcal{O}(\text{MeV})$ であるため、ニュートリノ質量はゼロとしてもよい。

近似 5 $T_{\nu_e} = T_{\nu_\mu} = T_{\nu_\tau} \equiv T_\nu$, $\mu_{\nu_e} = \mu_{\nu_\mu} = \mu_{\nu_\tau} \equiv \mu_\nu$ とする。

$T > 3\text{MeV}$ では、ニュートリノ同士の散乱 $\nu_\alpha \nu_\beta \leftrightarrow \nu_\alpha \nu_\beta$ により、各フレーバー同士が運動学的平衡になっている。また $T < 3\text{MeV}$ では、散乱はだんだん効かなくなるが、ニュートリノ振動の効果が分布関数を同じにするように働く [14]。つまり

$$\frac{1}{e^{(E-\mu_{\nu_\alpha})/T_{\nu_\alpha}} + 1} \simeq \frac{1}{e^{(E-\mu_{\nu_\beta})/T_{\nu_\beta}} + 1} \quad (3.22)$$

となるため、 $T_{\nu_\alpha} = T_{\nu_\beta}$, $\mu_{\nu_\alpha} = \mu_{\nu_\beta}$ は近似的に成り立つ。

近似 6 Z' が Bose-Einstein 分布関数に従い、 $T_{Z'} = T_{\nu_{\mu,\tau}}$ が成り立つ。

$g_{\mu-\tau} \gtrsim 10^{-5}$ のときは、 Z' は $Z' \nu_{\mu,\tau} \leftrightarrow Z' \nu_{\mu,\tau}$ が運動学的平衡である。よって、 Z' は近似的に熱平衡分布関数に従い、 $T_{Z'} = T_{\nu_{\mu,\tau}}$ が成り立つ。

3.2.2 各粒子種の時間発展方程式

ここでは、(3.20)、(3.21) 式から時間発展方程式の具体形を求める。massless 粒子に対しては、圧力とエネルギー密度の関係 $P_a = \rho_a/3$ を用いる。

化学ポテンシャルを考えない場合

化学ポテンシャルを考えない場合は変数は温度 T のみなので、(3.13) 式を変数変換する。

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial T_a} \frac{dT_a}{dt} = -3H(\rho_a + P_a) + \frac{\delta \rho_a}{\delta t} \quad (3.23)$$

これを用いて温度の発展方程式を求める。

まず T_ν について、近似 5 より T_ν の発展にはニュートリノと Z' の寄与がある。そのため、両者の寄与を足し合わせる必要がある。よって

$$\left(\frac{\partial \rho_{Z'}}{\partial T_\nu} + \frac{\partial \rho_\nu}{\partial T_\nu} \right) \frac{dT_\nu}{dt} = -3H(\rho_{Z'} + P_{Z'}) - 4H\rho_\nu + \frac{\delta \rho_{Z'}}{\delta t} + \frac{\delta \rho_\nu}{\delta t} \quad (3.24)$$

$$\frac{dT_\nu}{dt} = - \left(\frac{\partial \rho_{Z'}}{\partial T_\nu} + \frac{\partial \rho_\nu}{\partial T_\nu} \right)^{-1} \left[3H(\rho_{Z'} + P_{Z'}) + 4H\rho_\nu - \frac{\delta \rho_{Z'}}{\delta t} - \frac{\delta \rho_\nu}{\delta t} \right] \quad (3.25)$$

となる。

T_ϕ については、(3.23) 式のままでよいので、

$$\frac{dT_\phi}{dt} = - \left(\frac{\partial \rho_\phi}{\partial T_\phi} \right)^{-1} \left[3H(\rho_\phi + P_\phi) - \frac{\delta \rho_\phi}{\delta t} \right] \quad (3.26)$$

となる。

T_γ については、宇宙全体のエネルギー保存を用いることで求められる。

まず、(3.10) 式を全ての粒子種について和を取ることで、宇宙全体のエネルギー密度の発展方程式が得られる。

$$\frac{d\rho_{\text{tot}}}{dt} + 3H(\rho_{\text{tot}} + P_{\text{tot}}) = \sum_a \frac{\delta \rho_a}{\delta t} \quad (3.27)$$

右辺のエネルギー遷移率の和は、宇宙の外とエネルギーのやり取りがなければゼロになる（宇宙全体のエネルギー保存）。

$$\sum_a \frac{\delta \rho_a}{\delta t} = 0 \quad (3.28)$$

よって、宇宙全体のエネルギー密度の発展方程式は

$$\frac{d\rho_{\text{tot}}}{dt} + 3H(\rho_{\text{tot}} + P_{\text{tot}}) = 0 \quad (3.29)$$

となる。考えたい温度の領域で存在する粒子は、光子、電子、ニュートリノ、 Z' 、Majoron なので、(3.29) 式は

$$\frac{d\rho_\gamma}{dt} + \frac{d\rho_e}{dt} + \frac{d\rho_\nu}{dt} + \frac{d\rho_{Z'}}{dt} + \frac{d\rho_\phi}{dt} = -4H\rho_\gamma - 3H(\rho_e + P_e) - 4H\rho_\nu - 3H(\rho_{Z'} + P_{Z'}) - 3H(\rho_\phi + P_\phi) \quad (3.30)$$

と表せる。ここで、 $T_\gamma = T_e$ であることから、

$$\frac{d\rho_\gamma}{dt} = \frac{\partial\rho_\gamma}{\partial T_\gamma} \frac{dT_\gamma}{dt}, \quad \frac{d\rho_e}{dt} = \frac{\partial\rho_e}{\partial T_\gamma} \frac{dT_\gamma}{dt} \quad (3.31)$$

となる。これと、ニュートリノ、 Z' 、Majoron についての (3.13) 式を用いることで、

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\rho_\gamma}{\partial T_\gamma} + \frac{\partial\rho_e}{\partial T_\gamma} \right) \frac{dT_\gamma}{dt} &= -4H\rho_\gamma - 3H(\rho_e + P_e) - \frac{\delta\rho_\nu}{\delta t} - \frac{\delta\rho_{Z'}}{\delta t} - \frac{\delta\rho_\phi}{\delta t} \\ \frac{dT_\gamma}{dt} &= - \left(\frac{\partial\rho_\gamma}{\partial T_\gamma} + \frac{\partial\rho_e}{\partial T_\gamma} \right)^{-1} \left(4H\rho_\gamma + 3H(\rho_e + P_e) + \frac{\delta\rho_\nu}{\delta t} + \frac{\delta\rho_{Z'}}{\delta t} + \frac{\delta\rho_\phi}{\delta t} \right) \end{aligned} \quad (3.32)$$

となる。

化学ポテンシャルを考える場合

まず、 T_ν についての時間発展方程式を考える。化学ポテンシャルを考えない場合と同様に、 T_ν の発展にはニュートリノと Z' の寄与があるため、両者の寄与を足し合わせる必要がある。

T_ν へのニュートリノの寄与は

$$\frac{dT_\nu}{dt} = -\frac{1}{\det J_\nu} \left[-H \left(4\rho_\nu \frac{\partial n_\nu}{\partial \mu_\nu} - 3n_\nu \frac{\partial \rho_\nu}{\partial \mu_\nu} \right) + \frac{\partial n_\nu}{\partial \mu_\nu} \frac{\delta \rho_\nu}{\delta t} - \frac{\partial \rho_\nu}{\partial \mu_\nu} \frac{\delta n_\nu}{\delta t} \right] \quad (3.33)$$

となる。また、 T_ν への Z' の寄与は

$$\frac{dT_\nu}{dt} = -\frac{1}{\det J_{Z'}} \left[-3H \left((\rho_{Z'} + P_{Z'}) \frac{\partial n_{Z'}}{\partial \mu_{Z'}} - n_{Z'} \frac{\partial \rho_{Z'}}{\partial \mu_{Z'}} \right) + \frac{\partial n_{Z'}}{\partial \mu_{Z'}} \frac{\delta \rho_{Z'}}{\delta t} - \frac{\partial \rho_{Z'}}{\partial \mu_{Z'}} \frac{\delta n_{Z'}}{\delta t} \right] \quad (3.34)$$

となる。(3.33) と (3.34) を足し合わせると、

$$\begin{aligned} \frac{dT_\nu}{dt} &= -\frac{1}{\det J_\nu + \det J_{Z'}} \left[-H \left(4\rho_\nu \frac{\partial n_\nu}{\partial \mu_\nu} - 3n_\nu \frac{\partial \rho_\nu}{\partial \mu_\nu} + 3(\rho_{Z'} + P_{Z'}) \frac{\partial n_{Z'}}{\partial \mu_{Z'}} - 3n_{Z'} \frac{\partial \rho_{Z'}}{\partial \mu_{Z'}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial n_{Z'}}{\partial \mu_{Z'}} \frac{\delta \rho_{Z'}}{\delta t} - \frac{\partial \rho_{Z'}}{\partial \mu_{Z'}} \frac{\delta n_{Z'}}{\delta t} \right] \end{aligned} \quad (3.35)$$

となる。

μ_ν と $\mu_{Z'}$ について、 $Z' \leftrightarrow \nu_\alpha \bar{\nu}_\alpha$ が平衡であるときは化学平衡が成り立つので、 $\mu_{Z'} = 2\mu_\nu$ が成り立つが、平衡が切れると別々に扱う必要がある。そのため、初めから分けて発展を追う。 μ_ν の時間発展方程式は

$$\frac{d\mu_\nu}{dt} = \frac{1}{\det J_\nu} \left[-H \left(4\rho_\nu \frac{\partial n_\nu}{\partial T_\nu} - 3n_\nu \frac{\partial \rho_\nu}{\partial T_\nu} \right) + \frac{\partial n_\nu}{\partial T_\nu} \frac{\delta \rho_\nu}{\delta t} - \frac{\partial \rho_\nu}{\partial T_\nu} \frac{\delta n_\nu}{\delta t} \right] \quad (3.36)$$

となる。また、 $\mu_{Z'}$ の時間発展方程式は

$$\frac{d\mu_{Z'}}{dt} = \frac{1}{\det J_{Z'}} \left[-3H \left((\rho_{Z'} + P_{Z'}) \frac{\partial n_{Z'}}{\partial T_\nu} - n_{Z'} \frac{\partial \rho_{Z'}}{\partial T_\nu} \right) + \frac{\partial n_{Z'}}{\partial T_\nu} \frac{\delta \rho_{Z'}}{\delta t} - \frac{\partial \rho_{Z'}}{\partial T_\nu} \frac{\delta n_{Z'}}{\delta t} \right] \quad (3.37)$$

となる。

Majoron の時間発展方程式は、(3.20)、(3.21) 式のままでよく、

$$\frac{dT_\phi}{dt} = -\frac{1}{\det J_\phi} \left[-3H \left((\rho_\phi + P_\phi) \frac{\partial n_\phi}{\partial \mu_\phi} - n_\phi \frac{\partial \rho_\phi}{\partial \mu_\phi} \right) + \frac{\partial n_\phi}{\partial \mu_\phi} \frac{\delta \rho_\phi}{\delta t} - \frac{\partial \rho_\phi}{\partial \mu_\phi} \frac{\delta n_\phi}{\delta t} \right] \quad (3.38)$$

$$\frac{d\mu_\phi}{dt} = \frac{1}{\det J_\phi} \left[-3H \left((\rho_\phi + P_\phi) \frac{\partial n_\phi}{\partial T_\phi} - n_\phi \frac{\partial \rho_\phi}{\partial T_\phi} \right) + \frac{\partial n_\phi}{\partial T_\phi} \frac{\delta \rho_\phi}{\delta t} - \frac{\partial \rho_\phi}{\partial T_\phi} \frac{\delta n_\phi}{\delta t} \right] \quad (3.39)$$

となる。

T_γ については $\mu_\gamma = \mu_e = 0$ であるから、化学ポテンシャルを考える場合でも (3.32) 式を使うことができる。

3.3 粒子数遷移率・エネルギー遷移率

時間発展方程式を解く際には、粒子数遷移率とエネルギー遷移率を計算する必要がある。ここでは、様々な反応過程に対する遷移率を求める。§3.2 の結果から、計算すべき遷移率はニュートリノ、 Z' 、Majoron に関するものであるとわかる。以下ではそれぞれの粒子種について見ていく。

3.3.1 ニュートリノの遷移率

SM の反応過程

ニュートリノの遷移率に取り入れる SM での反応過程は、 $\nu_\alpha \bar{\nu}_\alpha \leftrightarrow e^- e^+$, $\nu_\alpha e^\pm \leftrightarrow \nu_\alpha e^\pm$, $\bar{\nu}_\alpha e^\pm \leftrightarrow \bar{\nu}_\alpha e^\pm$ の3つである。実際にはニュートリノが関与する反応過程として、 $\nu_\alpha \nu_\beta \leftrightarrow \nu_\alpha \nu_\beta$, $\nu_\alpha \bar{\nu}_\beta \leftrightarrow \nu_\alpha \bar{\nu}_\beta$, $\bar{\nu}_\alpha \bar{\nu}_\beta \leftrightarrow \bar{\nu}_\alpha \bar{\nu}_\beta$ もあるが、近似 1,4 のもとではこれらの反応の衝突項はゼロになることから、これらは考えなくて良い。このことは次のように説明できる。

$1 + 2 \leftrightarrow 3 + 4$ という反応過程において、衝突項内の分布関数の部分 $f_3 f_4 (1 \pm f_1)(1 \pm f_2)$ に注目する。上の3つの反応では全ての粒子の温度が等しいので、それを T とすると、近似 1 のもとでは

$$1 \pm f_a = f_a e^{(E_a - \mu_a)/T_a} \quad (3.40)$$

と変形できるので、

$$\begin{aligned} f_3 f_4 (1 \pm f_1)(1 \pm f_2) &= (1 \pm f_3) e^{-(E_3 - \mu_3)/T} (1 \pm f_4) e^{-(E_4 - \mu_4)/T} f_1 e^{(E_1 - \mu_1)/T} f_2 e^{(E_2 - \mu_2)/T} \\ &= f_1 f_2 (1 \pm f_3)(1 \pm f_4) e^{(\mu_3 + \mu_4 - \mu_1 - \mu_2)/T} \end{aligned} \quad (3.41)$$

となる。 $\nu_\alpha \nu_\beta \leftrightarrow \nu_\alpha \nu_\beta$, $\nu_\alpha \bar{\nu}_\beta \leftrightarrow \nu_\alpha \bar{\nu}_\beta$, $\bar{\nu}_\alpha \bar{\nu}_\beta \leftrightarrow \bar{\nu}_\alpha \bar{\nu}_\beta$ は $1 = 3$, $2 = 4$ であるから、

$$f_3 f_4 (1 \pm f_1)(1 \pm f_2) = f_1 f_2 (1 \pm f_3)(1 \pm f_4) \quad (3.42)$$

となる。よって、分布関数の部分がキャンセルし衝突項がゼロになる。(3.41) 式から、一般に同じ熱浴中で起こる化学平衡である反応過程の衝突項はゼロになると言える。

$\nu_\alpha \bar{\nu}_\alpha \leftrightarrow e^- e^+$, $\nu_\alpha e^\pm \leftrightarrow \nu_\alpha e^\pm$, $\bar{\nu}_\alpha e^\pm \leftrightarrow \bar{\nu}_\alpha e^\pm$ のそれぞれに対する粒子数遷移率、エネルギー遷移率は次のようになる (詳細な計算は付録 C 参照)。

$$\left. \frac{\delta n_{\nu_\alpha}}{\delta t} \right|_{\nu_\alpha \bar{\nu}_\alpha \leftrightarrow e^- e^+} = \left. \frac{\delta n_{\bar{\nu}_\alpha}}{\delta t} \right|_{\nu_\alpha \bar{\nu}_\alpha \leftrightarrow e^- e^+} = \frac{16 G_F^2 (g_{\alpha L}^2 + g_{\alpha R}^2)}{\pi^5} (T_\gamma^8 - T_\nu^8 e^{\frac{2\mu_\nu}{T_\nu}}) \quad (3.43)$$

$$\left. \frac{\delta \rho_{\nu_\alpha}}{\delta t} \right|_{\nu_\alpha \bar{\nu}_\alpha \leftrightarrow e^- e^+} = \left. \frac{\delta \rho_{\bar{\nu}_\alpha}}{\delta t} \right|_{\nu_\alpha \bar{\nu}_\alpha \leftrightarrow e^- e^+} = \frac{64 G_F^2 (g_{\alpha L}^2 + g_{\alpha R}^2)}{\pi^5} (T_\gamma^9 - T_\nu^9 e^{\frac{2\mu_\nu}{T_\nu}}) \quad (3.44)$$

$$\left. \frac{\delta n_{\nu_\alpha}}{\delta t} \right|_{\nu_\alpha e^\pm \leftrightarrow \nu_\alpha e^\pm} = \left. \frac{\delta n_{\bar{\nu}_\alpha}}{\delta t} \right|_{\bar{\nu}_\alpha e^\pm \leftrightarrow \bar{\nu}_\alpha e^\pm} = 0 \quad (3.45)$$

$$\left. \frac{\delta \rho_{\nu_\alpha}}{\delta t} \right|_{\nu_\alpha e^\pm \leftrightarrow \nu_\alpha e^\pm} = \left. \frac{\delta \rho_{\bar{\nu}_\alpha}}{\delta t} \right|_{\bar{\nu}_\alpha e^\pm \leftrightarrow \bar{\nu}_\alpha e^\pm} = \frac{112 G_F^2 (g_{\alpha L}^2 + g_{\alpha R}^2)}{\pi^5} e^{\frac{\mu_\nu}{T_\nu}} T_\gamma^4 T_\nu^4 (T_\gamma - T_\nu) \quad (3.46)$$

ここで、 $g_{\alpha L}, g_{\alpha R}$ は

$$g_{\alpha L} = \begin{cases} \frac{1}{2}(C_A + C_V + 2) = \frac{1}{2} + \sin^2 \theta_W & (\alpha = e) \\ \frac{1}{2}(C_A + C_V) = -\frac{1}{2} + \sin^2 \theta_W & (\alpha = \mu, \tau) \end{cases} \quad (3.47)$$

$$g_{\alpha R} = \frac{1}{2}(C_V - C_A) = \sin^2 \theta_W \quad (\alpha = e, \mu, \tau) \quad (3.48)$$

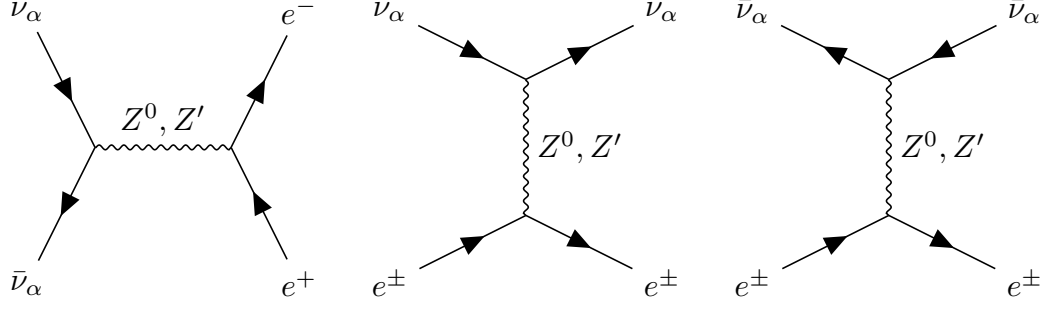


図 3.1 ニュートリノの遷移率に取り入れる電子との相互作用 diagram。ただし、中間状態が Z' になるのは $\alpha = \mu, \tau$ の時だけである。

である。これより、 $\nu_\alpha, \bar{\nu}_\alpha$ の SM での遷移率は

$$\left. \frac{\delta n_{\nu_\alpha}}{\delta t} \right|_{\text{SM}} = \left. \frac{\delta n_{\nu_\alpha}}{\delta t} \right|_{\nu_\alpha \bar{\nu}_\alpha \leftrightarrow e^- e^+} + \left. \frac{\delta n_{\nu_\alpha}}{\delta t} \right|_{\nu_\alpha e^\pm \leftrightarrow \nu_\alpha e^\pm} = \frac{16G_F^2(g_{\alpha L}^2 + g_{\alpha R}^2)}{\pi^5} (T_\gamma^8 - T_\nu^8 e^{2\mu_\nu/T_\nu}) \quad (3.49)$$

$$\left. \frac{\delta n_{\bar{\nu}_\alpha}}{\delta t} \right|_{\text{SM}} = \left. \frac{\delta n_{\bar{\nu}_\alpha}}{\delta t} \right|_{\nu_\alpha \bar{\nu}_\alpha \leftrightarrow e^- e^+} + \left. \frac{\delta n_{\bar{\nu}_\alpha}}{\delta t} \right|_{\bar{\nu}_\alpha e^\pm \leftrightarrow \bar{\nu}_\alpha e^\pm} = \frac{16G_F^2(g_{\alpha L}^2 + g_{\alpha R}^2)}{\pi^5} (T_\gamma^8 - T_\nu^8 e^{2\mu_\nu/T_\nu}) \quad (3.50)$$

$$\left. \frac{\delta \rho_{\nu_\alpha}}{\delta t} \right|_{\text{SM}} = \left. \frac{\delta \rho_{\nu_\alpha}}{\delta t} \right|_{\nu_\alpha \bar{\nu}_\alpha \leftrightarrow e^- e^+} + \left. \frac{\delta \rho_{\nu_\alpha}}{\delta t} \right|_{\nu_\alpha e^\pm \leftrightarrow \nu_\alpha e^\pm} = \frac{2G_F^2(g_{\alpha L}^2 + g_{\alpha R}^2)}{\pi^5} F(T_\gamma, T_\nu, \mu_\nu) \quad (3.51)$$

$$\left. \frac{\delta \rho_{\bar{\nu}_\alpha}}{\delta t} \right|_{\text{SM}} = \left. \frac{\delta \rho_{\bar{\nu}_\alpha}}{\delta t} \right|_{\nu_\alpha \bar{\nu}_\alpha \leftrightarrow e^- e^+} + \left. \frac{\delta \rho_{\bar{\nu}_\alpha}}{\delta t} \right|_{\bar{\nu}_\alpha e^\pm \leftrightarrow \bar{\nu}_\alpha e^\pm} = \frac{2G_F^2(g_{\alpha L}^2 + g_{\alpha R}^2)}{\pi^5} F(T_\gamma, T_\nu, \mu_\nu) \quad (3.52)$$

となる。ここで、 $F(T_\gamma, T_\nu, \mu_\nu)$ は

$$F(T_\gamma, T_\nu, \mu_\nu) = 32(T_\gamma^9 - T_\nu^9 e^{2\mu_\nu/T_\nu}) + 56e^{\mu_\nu/T_\nu} T_\gamma^4 T_\nu^4 (T_\gamma - T_\nu) \quad (3.53)$$

である。(3.49)~(3.52) 式を α について和を取ることで、SM の反応過程の遷移率が求められる。

$$\left. \frac{\delta n_\nu}{\delta t} \right|_{\text{SM}} = \sum_\alpha \left(\left. \frac{\delta n_{\nu_\alpha}}{\delta t} + \frac{\delta n_{\bar{\nu}_\alpha}}{\delta t} \right) \right|_{\text{SM}} = \frac{32G_F^2}{\pi^5} [(g_{eL}^2 + g_{eR}^2) + 2(g_{\mu L}^2 + g_{\mu R}^2)] (T_\gamma^8 - T_\nu^8 e^{2\mu_\nu/T_\nu}) \quad (3.54)$$

$$\left. \frac{\delta \rho_\nu}{\delta t} \right|_{\text{SM}} = \sum_\alpha \left(\left. \frac{\delta \rho_{\nu_\alpha}}{\delta t} + \frac{\delta \rho_{\bar{\nu}_\alpha}}{\delta t} \right) \right|_{\text{SM}} = \frac{4G_F^2}{\pi^5} [(g_{eL}^2 + g_{eR}^2) + 2(g_{\mu L}^2 + g_{\mu R}^2)] F(T_\gamma, T_\nu, \mu_\nu) \quad (3.55)$$

ここまでで考えた SM の反応過程には、 $L_\mu - L_\tau$ 模型を考えることで追加の寄与が現れる。図 3.1 にあるように、SM では Z^0 を中間状態とする反応であるが、 Z' を中間状態とする反応も追加される。その寄与は、散乱振幅を比較することで簡単に求められる。

例として $\nu_{\alpha'} \bar{\nu}_{\alpha'} \leftrightarrow e^- e^+$ ($\alpha' = \mu, \tau$) の反応で考える。散乱振幅は

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= \text{Diagram with } Z^0 \text{ exchange} + \text{Diagram with } Z' \text{ exchange} \\ &\simeq -i \frac{2G_F}{\sqrt{2}} \bar{u}(k) \gamma^\mu (C_V - C_A \gamma^5) v(k') \bar{v}(p') \gamma_\mu P_L u(p) + i L_{\alpha'} \frac{g_{\mu-\tau} e e}{m_{Z'}^2} \bar{u}(k) \gamma^\mu v(k') \bar{v}(p') \gamma_\mu P_L u(p) \end{aligned} \quad (3.56)$$

となる。ここで、 $L_{\alpha'}$ は

$$L_{\alpha'} = \begin{cases} 1 & (\alpha' = \mu) \\ -1 & (\alpha' = \tau) \end{cases} \quad (3.57)$$

である。第一項と第二項を比較すると、第一項を

$$G_F \rightarrow -L_{\alpha'} \frac{\sqrt{2}g_{\mu-\tau}ee}{2m_{Z'}^2}, \quad C_V \rightarrow 1, \quad C_A \rightarrow 0 \quad (3.58)$$

とすれば第二項が得られることがわかる。また、この置き換えにより、 $g_{\alpha'L}, g_{\alpha'R}$ は (3.47)、(3.48) 式から $g_{\alpha'L}, g_{\alpha'R} \rightarrow 1/2$ となる。よって、例えば粒子数遷移率は (3.49) 式より

$$\left. \frac{\delta n_{\nu_{\alpha'}}}{\delta t} \right|_{\text{SM}+Z'} = \left. \frac{\delta n_{\nu_{\alpha'}}}{\delta t} \right|_{\text{SM}} + \frac{4(g_{\mu-\tau}ee)^2}{\pi^5 m_{Z'}^4} (T_\gamma^8 - T_\nu^8 e^{2\mu_\nu/T_\nu}) + L_{\alpha'} \times (\text{cross term の寄与}) \quad (3.59)$$

となる。第三項の cross term の寄与は $L_{\alpha'}$ に比例するため、 $\alpha' = \mu$ と $\alpha' = \tau$ を足すとキャンセルする。 ν_e については、 Z' と結合しないので

$$\left. \frac{\delta n_{\nu_e}}{\delta t} \right|_{\text{SM}+Z'} = \left. \frac{\delta n_{\nu_e}}{\delta t} \right|_{\text{SM}} \quad (3.60)$$

である。以上より、ニュートリノと電子の反応 (SM の反応) についての粒子数遷移率は

$$\left. \frac{\delta n_\nu}{\delta t} \right|_{\text{SM}+Z'} = \left. \frac{\delta n_\nu}{\delta t} \right|_{\text{SM}} + \frac{8(g_{\mu-\tau}ee)^2}{\pi^5 m_{Z'}^4} (T_\gamma^8 - T_\nu^8 e^{2\mu_\nu/T_\nu}) \quad (3.61)$$

となる。エネルギー遷移率についても同様の変形を行うと、

$$\left. \frac{\delta \rho_\nu}{\delta t} \right|_{\text{SM}+Z'} = \left. \frac{\delta \rho_\nu}{\delta t} \right|_{\text{SM}} + \frac{(g_{\mu-\tau}ee)^2}{\pi^5 m_{Z'}^4} F(T_\gamma, T_\nu, \mu_\nu) \quad (3.62)$$

が得られる。

ニュートリノと Z' の反応過程

次にニュートリノと Z' の反応を考える。取り入れる反応過程は $Z' \leftrightarrow \nu_{\alpha'} \bar{\nu}_{\alpha'}$ ($\alpha' = \mu, \tau$) である。崩壊・逆崩壊過程の遷移率は付録 D より、

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta n_{\nu_{\alpha'}}}{\delta t} \right|_{Z' \leftrightarrow \nu_{\alpha'} \bar{\nu}_{\alpha'}} &= 2 \times \frac{3m_{Z'}^2}{2\pi^2} \left[T_\nu e^{\mu_{Z'}/T_\nu} K_1\left(\frac{m_{Z'}}{T_\nu}\right) - T_\nu e^{2\mu_\nu/T_\nu} K_1\left(\frac{m_{Z'}}{T_\nu}\right) \right] \Gamma_{Z' \rightarrow \nu_{\alpha'} \bar{\nu}_{\alpha'}} \\ &= \frac{3m_{Z'}^2}{\pi^2} T_\nu K_1\left(\frac{m_{Z'}}{T_\nu}\right) (e^{\mu_{Z'}/T_\nu} - e^{2\mu_\nu/T_\nu}) \Gamma_{Z' \rightarrow \nu_{\alpha'} \bar{\nu}_{\alpha'}} \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta \rho_{\nu_{\alpha'}}}{\delta t} \right|_{Z' \leftrightarrow \nu_{\alpha'} \bar{\nu}_{\alpha'}} &= \frac{3m_{Z'}^3}{2\pi^2} \left[T_\nu e^{2\mu_\nu/T_\nu} K_2\left(\frac{m_{Z'}}{T_\nu}\right) - T_\nu e^{\mu_{Z'}/T_\nu} K_2\left(\frac{m_{Z'}}{T_\nu}\right) \right] \Gamma_{Z' \rightarrow \nu_{\alpha'} \bar{\nu}_{\alpha'}} \\ &= \frac{3m_{Z'}^3}{2\pi^2} T_\nu K_2\left(\frac{m_{Z'}}{T_\nu}\right) (e^{\mu_{Z'}/T_\nu} - e^{2\mu_\nu/T_\nu}) \Gamma_{Z' \rightarrow \nu_{\alpha'} \bar{\nu}_{\alpha'}} \end{aligned} \quad (3.64)$$

となる。粒子数遷移率の $\times 2$ は、1 回の反応で粒子数が 2 だけ増える、または減ることによるものである。これらの式を α' について和を取ることで ν についての遷移率が得られる。(2.15) 式より、 $\alpha' = \mu, \tau$ で上の式に変化はないため、2 倍するだけで良い。よって、

$$\left. \frac{\delta n_\nu}{\delta t} \right|_{Z' \leftrightarrow \nu \bar{\nu}} = \frac{6m_{Z'}^2}{\pi^2} T_\nu K_1\left(\frac{m_{Z'}}{T_\nu}\right) (e^{\mu_{Z'}/T_\nu} - e^{2\mu_\nu/T_\nu}) \Gamma_{Z' \rightarrow \nu_{\alpha'} \bar{\nu}_{\alpha'}} \quad (3.65)$$

$$\left. \frac{\delta \rho_\nu}{\delta t} \right|_{Z' \leftrightarrow \nu \bar{\nu}} = \frac{3m_{Z'}^3}{\pi^2} T_\nu K_2\left(\frac{m_{Z'}}{T_\nu}\right) (e^{\mu_{Z'}/T_\nu} - e^{2\mu_\nu/T_\nu}) \Gamma_{Z' \rightarrow \nu_{\alpha'} \bar{\nu}_{\alpha'}} \quad (3.66)$$

となる。

ニュートリノと Majoron の反応過程

次にニュートリノと Majoron の反応を考える。取り入れる反応過程は $\phi \leftrightarrow \nu_\alpha \nu_\beta$, $\phi \leftrightarrow \bar{\nu}_\alpha \bar{\nu}_\beta$ ($\alpha, \beta = e, \mu, \tau$) である。 $Z' \leftrightarrow \nu_{\alpha'} \bar{\nu}_{\alpha'}$ と同様に、付録 D より

$$\left. \frac{\delta n_{\nu_\alpha}}{\delta t} \right|_{\phi \leftrightarrow \nu_\alpha \nu_\beta} = \left. \frac{\delta n_{\bar{\nu}_\alpha}}{\delta t} \right|_{\phi \leftrightarrow \bar{\nu}_\alpha \bar{\nu}_\beta} = 2 \times \frac{m_\phi^2}{2\pi^2} \left[T_\phi e^{\mu_\phi/T_\phi} K_1\left(\frac{m_\phi}{T_\phi}\right) - T_\nu e^{2\mu_\nu/T_\nu} K_1\left(\frac{m_\phi}{T_\nu}\right) \right] \Gamma_{\phi \rightarrow \nu_\alpha \nu_\beta} \quad (3.67)$$

$$\left. \frac{\delta \rho_{\nu_\alpha}}{\delta t} \right|_{\phi \leftrightarrow \nu_\alpha \nu_\beta} = \left. \frac{\delta \rho_{\bar{\nu}_\alpha}}{\delta t} \right|_{\phi \leftrightarrow \bar{\nu}_\alpha \bar{\nu}_\beta} = \frac{m_\phi^3}{2\pi^2} \left[T_\phi e^{\mu_\phi/T_\phi} K_2\left(\frac{m_\phi}{T_\phi}\right) - T_\nu e^{2\mu_\nu/T_\nu} K_2\left(\frac{m_\phi}{T_\nu}\right) \right] \Gamma_{\phi \rightarrow \nu_\alpha \nu_\beta} \quad (3.68)$$

である。 α, β について和を取る必要があるが、 α と β の入れ替えに対して同じになるので、重複を避けるように和を取ると、

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta n_\nu}{\delta t} \right|_{\phi \leftrightarrow \nu\nu} &= \left(\sum_{\alpha, \beta} \delta_{\alpha\beta} + \sum_{\alpha < \beta} \right) \left(\left. \frac{\delta n_{\nu_\alpha}}{\delta t} \right|_{\phi \leftrightarrow \nu_\alpha \nu_\beta} + \left. \frac{\delta n_{\bar{\nu}_\alpha}}{\delta t} \right|_{\phi \leftrightarrow \bar{\nu}_\alpha \bar{\nu}_\beta} \right) \\ &= \frac{m_\phi^2}{\pi^2} \left[T_\phi e^{\mu_\phi/T_\phi} K_1\left(\frac{m_\phi}{T_\phi}\right) - T_\nu e^{2\mu_\nu/T_\nu} K_1\left(\frac{m_\phi}{T_\nu}\right) \right] \Gamma_\phi \end{aligned} \quad (3.69)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta \rho_\nu}{\delta t} \right|_{\phi \leftrightarrow \nu\nu} &= \left(\sum_{\alpha, \beta} \delta_{\alpha\beta} + \sum_{\alpha < \beta} \right) \left(\left. \frac{\delta \rho_{\nu_\alpha}}{\delta t} \right|_{\phi \leftrightarrow \nu_\alpha \nu_\beta} + \left. \frac{\delta \rho_{\bar{\nu}_\alpha}}{\delta t} \right|_{\phi \leftrightarrow \bar{\nu}_\alpha \bar{\nu}_\beta} \right) \\ &= \frac{m_\phi^3}{2\pi^2} \left[T_\phi e^{\mu_\phi/T_\phi} K_1\left(\frac{m_\phi}{T_\phi}\right) - T_\nu e^{2\mu_\nu/T_\nu} K_1\left(\frac{m_\phi}{T_\nu}\right) \right] \Gamma_\phi \end{aligned} \quad (3.70)$$

となる ($\phi \leftrightarrow \nu\nu$ という書き方は反粒子への崩壊・逆崩壊も含むものとする)。

ニュートリノ、 Z' 、Majoron の散乱過程

ニュートリノ、 Z' 、Majoron が同時に存在する場合、 $Z' \nu_\alpha \leftrightarrow \phi \bar{\nu}_\beta$, $Z' \bar{\nu}_\alpha \leftrightarrow \phi \nu_\beta$, $Z' \phi \leftrightarrow \nu_\alpha \nu_\beta$, $Z' \phi \leftrightarrow \bar{\nu}_\alpha \bar{\nu}_\beta$ という散乱過程が存在する。これらの反応の遷移率は、

$$\left. \frac{\delta n_{\nu_\alpha}}{\delta t} \right|_{\text{scattering}} = - \int \frac{d^3 p_{\nu_\alpha}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2p_{\nu_\alpha}} \mathcal{I} \quad (3.71)$$

$$\left. \frac{\delta \rho_{\nu_\alpha}}{\delta t} \right|_{\text{scattering}} = - \int \frac{d^3 p_{\nu_\alpha}}{(2\pi)^3} p_{\nu_\alpha} \frac{1}{2p_{\nu_\alpha}} \mathcal{I} \quad (3.72)$$

で求められる。ここで、

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2(2\pi)^4} \int \frac{dp_2 p_2^2}{E_2} \frac{dp_3 p_3^2}{E_3} \Lambda(\{f_i\}) \int_{\max(\cos \theta_-, -1)}^{\min(\cos \theta_+, 1)} d\cos \theta \frac{1}{\sqrt{-a}} \int_0^\pi dx \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 \Theta(p_4^0) \quad (3.73)$$

である (導出は付録 B 参照)。この積分は解析的にできないため、数値計算によって求める必要がある。詳細な計算は §3.4 に記載する。

3.3.2 Z' の遷移率

Z' の遷移率に取り入れるる反応過程は、 $Z' \leftrightarrow e^- e^+$, $Z' \leftrightarrow \nu_{\alpha'} \bar{\nu}_{\alpha'}$, $Z' \nu_\alpha \leftrightarrow \phi \bar{\nu}_\beta$, $Z' \bar{\nu}_\alpha \leftrightarrow \phi \nu_\beta$, $Z' \phi \leftrightarrow \nu_\alpha \nu_\beta$, $Z' \phi \leftrightarrow \bar{\nu}_\alpha \bar{\nu}_\beta$ である。

$Z' \leftrightarrow e^- e^+$ について、付録 D より

$$\left. \frac{\delta n_{Z'}}{\delta t} \right|_{Z' \leftrightarrow e^- e^+} = \frac{3m_{Z'}^2}{2\pi^2} \left[T_\gamma K_1\left(\frac{m_{Z'}}{T_\gamma}\right) - T_\nu e^{\mu_{Z'}/T_\nu} K_1\left(\frac{m_{Z'}}{T_\nu}\right) \right] \Gamma_{Z' \rightarrow e^- e^+} \quad (3.74)$$

$$\left. \frac{\delta \rho_{Z'}}{\delta t} \right|_{Z' \leftrightarrow e^- e^+} = \frac{3m_{Z'}^3}{2\pi^2} \left[T_\gamma K_2\left(\frac{m_{Z'}}{T_\gamma}\right) - T_\nu e^{\mu_{Z'}/T_\nu} K_2\left(\frac{m_{Z'}}{T_\nu}\right) \right] \Gamma_{Z' \rightarrow e^- e^+} \quad (3.75)$$

となる。 $Z' \leftrightarrow \nu_{\alpha'} \bar{\nu}_{\alpha'}$ も同様に、

$$\left. \frac{\delta n_{Z'}}{\delta t} \right|_{Z' \leftrightarrow \nu \bar{\nu}} = 2 \left. \frac{\delta n_{Z'}}{\delta t} \right|_{Z' \leftrightarrow \nu_{\alpha'} \bar{\nu}_{\alpha'}} = \frac{3m_{Z'}^2}{\pi^2} \left[T_\nu e^{2\mu_\nu/T_\nu} K_1\left(\frac{m_{Z'}}{T_\nu}\right) - T_\nu e^{\mu_{Z'}/T_\nu} K_1\left(\frac{m_{Z'}}{T_\nu}\right) \right] \Gamma_{Z' \rightarrow \nu_{\alpha'} \bar{\nu}_{\alpha'}} \quad (3.76)$$

$$\left. \frac{\delta \rho_{Z'}}{\delta t} \right|_{Z' \leftrightarrow \nu \bar{\nu}} = 2 \left. \frac{\delta \rho_{Z'}}{\delta t} \right|_{Z' \leftrightarrow \nu_{\alpha'} \bar{\nu}_{\alpha'}} = \frac{3m_{Z'}^2}{\pi^2} \left[T_\nu e^{2\mu_\nu/T_\nu} K_2\left(\frac{m_{Z'}}{T_\nu}\right) - T_\nu e^{\mu_{Z'}/T_\nu} K_2\left(\frac{m_{Z'}}{T_\nu}\right) \right] \Gamma_{Z' \rightarrow \nu_{\alpha'} \bar{\nu}_{\alpha'}} \quad (3.77)$$

となる。各反応で粒子数保存やエネルギー保存が成り立っているので、

$$\left. \frac{\delta n_{Z'}}{\delta t} \right|_{Z' \leftrightarrow \nu_{\alpha'} \bar{\nu}_{\alpha'}} = -\frac{1}{2} \left. \frac{\delta n_{\nu_{\alpha'}}}{\delta t} \right|_{Z' \leftrightarrow \nu_{\alpha'} \bar{\nu}_{\alpha'}}, \quad \left. \frac{\delta \rho_{Z'}}{\delta t} \right|_{Z' \leftrightarrow \nu_{\alpha'} \bar{\nu}_{\alpha'}} = -\left. \frac{\delta \rho_{\nu_{\alpha'}}}{\delta t} \right|_{Z' \leftrightarrow \nu_{\alpha'} \bar{\nu}_{\alpha'}} \quad (3.78)$$

から求めることもできる。

散乱過程については、付録 B より、

$$\left. \frac{\delta n_{Z'}}{\delta t} \right|_{\text{scattering}} = - \int \frac{d^3 p_{Z'}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{Z'}} \mathcal{I} \quad (3.79)$$

$$\left. \frac{\delta \rho_{Z'}}{\delta t} \right|_{\text{scattering}} = - \int \frac{d^3 p_{Z'}}{(2\pi)^3} E_{Z'} \frac{1}{2E_{Z'}} \mathcal{I} \quad (3.80)$$

である（詳細は §3.4 参照）。

3.3.3 Majoron の遷移率

Majoron の遷移率に取り入れる反応過程は、 $\phi \leftrightarrow \nu_\alpha \nu_\beta$, $\phi \leftrightarrow \bar{\nu}_\alpha \bar{\nu}_\beta$, $Z' \nu_\alpha \leftrightarrow \phi \bar{\nu}_\beta$, $Z' \bar{\nu}_\alpha \leftrightarrow \phi \nu_\beta$, $Z' \phi \leftrightarrow \nu_\alpha \nu_\beta$, $Z' \phi \leftrightarrow \bar{\nu}_\alpha \bar{\nu}_\beta$ である。

$\phi \leftrightarrow \nu_\alpha \nu_\beta$, $\phi \leftrightarrow \bar{\nu}_\alpha \bar{\nu}_\beta$ については、付録 D より、

$$\left. \frac{\delta n_\phi}{\delta t} \right|_{\phi \leftrightarrow \nu \nu} = \frac{m_\phi^2}{2\pi^2} \left[T_\nu e^{2\mu_\nu/T_\nu} K_1\left(\frac{m_\phi}{T_\nu}\right) - T_\phi e^{\mu_\phi/T_\phi} K_1\left(\frac{m_\phi}{T_\phi}\right) \right] \Gamma_\phi \quad (3.81)$$

$$\left. \frac{\delta \rho_\phi}{\delta t} \right|_{\phi \leftrightarrow \nu \nu} = \frac{m_\phi^3}{2\pi^2} \left[T_\nu e^{2\mu_\nu/T_\nu} K_1\left(\frac{m_\phi}{T_\nu}\right) - T_\phi e^{\mu_\phi/T_\phi} K_1\left(\frac{m_\phi}{T_\phi}\right) \right] \Gamma_\phi \quad (3.82)$$

となる。これについても、粒子数保存・エネルギー保存が成り立っているので、

$$\left. \frac{\delta n_\phi}{\delta t} \right|_{\phi \leftrightarrow \nu \nu} = -\frac{1}{2} \left. \frac{\delta n_\nu}{\delta t} \right|_{\phi \leftrightarrow \nu \nu}, \quad \left. \frac{\delta \rho_\phi}{\delta t} \right|_{\phi \leftrightarrow \nu \nu} = -\left. \frac{\delta \rho_\nu}{\delta t} \right|_{\phi \leftrightarrow \nu \nu} \quad (3.83)$$

から求めることができる。

散乱過程については、付録 B より、

$$\left. \frac{\delta n_\phi}{\delta t} \right|_{\text{scattering}} = - \int \frac{d^3 p_\phi}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_\phi} \mathcal{I} \quad (3.84)$$

$$\left. \frac{\delta \rho_\phi}{\delta t} \right|_{\text{scattering}} = - \int \frac{d^3 p_\phi}{(2\pi)^3} E_\phi \frac{1}{2E_\phi} \mathcal{I} \quad (3.85)$$

である（詳細は §3.4 参照）。

3.4 散乱過程の遷移率

ここでは、ニュートリノ、 Z' 、Majoron の散乱過程の不変振幅や遷移率の計算について述べる。この散乱過程は $Z' \nu_\alpha \leftrightarrow \phi \bar{\nu}_\beta$, $Z' \phi \leftrightarrow \nu_\alpha \nu_\beta$ がある。4 元運動量の割り当てに関しては、§3.5 の計算のための割り当て方を述べる。他の場合については付録 G に記載する。

	$\beta = e$	$\beta = \mu, \tau$
$\alpha = e$	0	$\mathcal{M}^u$
$\alpha = \mu, \tau$	$\mathcal{M}^s$	$\mathcal{M}^s + \mathcal{M}^u$

表 3.1 $Z'\nu_\alpha \leftrightarrow \phi\bar{\nu}_\beta$ の α, β の組み合わせに対する不変振幅の形

3.4.1 $Z'\nu_\alpha \leftrightarrow \phi\bar{\nu}_\beta$ ($Z'\bar{\nu}_\alpha \leftrightarrow \phi\nu_\beta$)

$Z'\nu_\alpha \leftrightarrow \phi\bar{\nu}_\beta$ の diagram は図 3.2 の 2 通りである。 Z' は ν_μ, ν_τ とだけ結合するので、 $(\alpha, \beta) = (e, e)$ の反応はない。また、 α または β の一方が e の場合は、 $\mathcal{M}^s$ または $\mathcal{M}^u$ のどちらかのみになる。まとめると表 3.1 のようになる。

この散乱過程に対する振幅は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{Z'\nu_\alpha \leftrightarrow \phi\bar{\nu}_\beta}|^2 &= \frac{16g_\alpha^2 |h_{\alpha\beta}|^2}{(k+p)^4} \left[4(k \cdot p)(k \cdot p') + 4(k \cdot p)(p \cdot p') - m_{Z'}^2(p \cdot p') + \frac{4}{m_{Z'}^2}(k \cdot p)^2(p \cdot p') \right] \\
&+ \frac{16g_\beta^2 |h_{\alpha\beta}|^2}{(k-p')^4} \left[4(k \cdot p)(k \cdot p') - 4(k \cdot p')(p \cdot p') - m_{Z'}^2(p \cdot p') + \frac{4}{m_{Z'}^2}(k \cdot p')^2(p \cdot p') \right] \\
&+ \frac{16g_\alpha g_\beta |h_{\alpha\beta}|^2}{(k+p)^2(k-p')^2} \left[4(k \cdot p)(k \cdot p') - 2(k \cdot p)(p \cdot p') + 2(k \cdot p')(p \cdot p') + 4(p \cdot p')^2 \right. \\
&\quad \left. + m_{Z'}^2(p \cdot p') - \frac{4}{m_{Z'}^2}(k \cdot p)(k \cdot p')(p \cdot p') \right] \quad (3.86)
\end{aligned}$$

ただし、

$$g_\alpha = \begin{cases} 0 & (\alpha = e) \\ g_{\mu-\tau} & (\alpha = \mu) \\ -g_{\mu-\tau} & (\alpha = \tau) \end{cases} \quad (3.87)$$

である。この g_α の定義により、振幅が表 3.1 に従うようになっている。

遷移率の積分は、注目する粒子（どの粒子の遷移率か）により積分範囲や数式の中身が変わるため、それぞれの粒子について見ていく。

Z' に注目する場合

4 元運動量の割り当ては次のようにする。

$$(p_1, p_2, p_3, p_4) = (p_{Z'}, p_{\nu_\alpha}, p_{\bar{\nu}_\beta}, p_\phi) \quad (3.88)$$

(B.43) 式の最後にある $\Theta(p_4^0)$ より、

$$\begin{aligned}
E_\phi &= E_{Z'} + p_{\nu_\alpha} - p_{\bar{\nu}_\beta} \geq m_\phi \\
&\rightarrow p_{\bar{\nu}_\beta} \leq E_{Z'} + p_{\nu_\alpha} - m_\phi \quad (3.89)
\end{aligned}$$

という制限がつく。よって、遷移率は

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\delta n_{Z'}}{\delta t} \right|_{Z'\nu_\alpha \leftrightarrow \phi\bar{\nu}_\beta} &= -\frac{1}{2(2\pi)^6} \int_0^\infty dp_{Z'} \frac{p_{Z'}^2}{E_{Z'}} \int_0^\infty dp_{\nu_\alpha} p_{\nu_\alpha} \int_0^{E_{Z'}+p_{\nu_\alpha}-m_\phi} dp_{\bar{\nu}_\beta} p_{\bar{\nu}_\beta} \Lambda(\{f_i\}) \\
&\quad \times \int_{\max(\cos \theta_-, -1)}^{\min(\cos \theta_+, 1)} d\cos \theta \frac{1}{\sqrt{-a}} \int_0^\pi dx \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{Z'\nu_\alpha \leftrightarrow \phi\bar{\nu}_\beta}|^2 \quad (3.90)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\delta \rho_{Z'}}{\delta t} \right|_{Z'\nu_\alpha \leftrightarrow \phi\bar{\nu}_\beta} &= -\frac{1}{2(2\pi)^6} \int_0^\infty dp_{Z'} p_{Z'}^2 \int_0^\infty dp_{\nu_\alpha} p_{\nu_\alpha} \int_0^{E_{Z'}+p_{\nu_\alpha}-m_\phi} dp_{\bar{\nu}_\beta} p_{\bar{\nu}_\beta} \Lambda(\{f_i\}) \\
&\quad \times \int_{\max(\cos \theta_-, -1)}^{\min(\cos \theta_+, 1)} d\cos \theta \frac{1}{\sqrt{-a}} \int_0^\pi dx \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{Z'\nu_\alpha \leftrightarrow \phi\bar{\nu}_\beta}|^2 \quad (3.91)
\end{aligned}$$

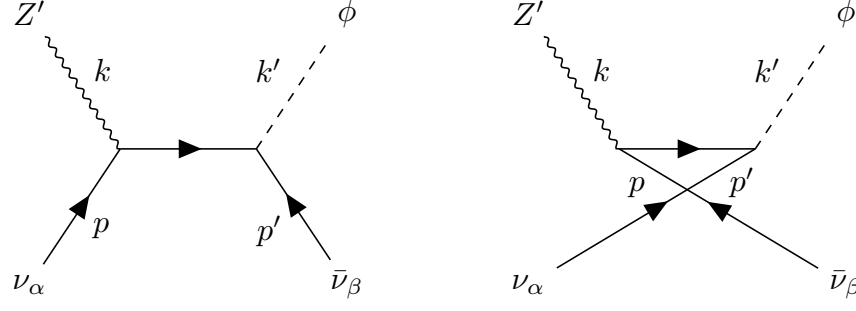


図 3.2 $Z'\nu_\alpha \leftrightarrow \phi\bar{\nu}_\beta$ の diagram。s-channel を $\mathcal{M}^s$ 、u-channel を $\mathcal{M}^u$ と表す。

となる。

ν_α に注目する場合

4 元運動量の割り当ては次のようにする。

$$(p_1, p_2, p_3, p_4) = (p_{\nu_\alpha}, p_{Z'}, p_\phi, p_{\bar{\nu}_\beta}) \quad (3.92)$$

(B.43) 式の最後にある $\Theta(p_4^0)$ より、

$$\begin{aligned} p_{\bar{\nu}_\beta} &= p_{\nu_\alpha} + E_{Z'} - E_\phi \geq 0 \\ &\rightarrow E_\phi \leq E_{Z'} + p_{\nu_\alpha} \\ &\rightarrow p_\phi \leq \sqrt{(E_{Z'} + p_{\nu_\alpha})^2 - m_\phi^2} \end{aligned} \quad (3.93)$$

という制限がつく。よって、遷移率は

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta n_{\nu_\alpha}}{\delta t} \right|_{Z'\nu_\alpha \leftrightarrow \phi\bar{\nu}_\beta} &= -\frac{1}{2(2\pi)^6} \int_0^\infty dp_{\nu_\alpha} p_{\nu_\alpha} \int_0^\infty dp_{Z'} \frac{p_{Z'}^2}{E_{Z'}} \int_0^{\sqrt{(E_{Z'}+p_{\nu_\alpha})^2-m_\phi^2}} dp_\phi \frac{p_\phi^2}{E_\phi} \Lambda(\{f_i\}) \\ &\quad \times \int_{\max(\cos\theta_-, -1)}^{\min(\cos\theta_+, 1)} d\cos\theta \frac{1}{\sqrt{-a}} \int_0^\pi dx \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{Z'\nu_\alpha \leftrightarrow \phi\bar{\nu}_\beta}|^2 \end{aligned} \quad (3.94)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta \rho_{\nu_\alpha}}{\delta t} \right|_{Z'\nu_\alpha \leftrightarrow \phi\bar{\nu}_\beta} &= -\frac{1}{2(2\pi)^6} \int_0^\infty dp_{\nu_\alpha} p_{\nu_\alpha}^2 \int_0^\infty dp_{Z'} \frac{p_{Z'}^2}{E_{Z'}} \int_0^{\sqrt{(E_{Z'}+p_{\nu_\alpha})^2-m_\phi^2}} dp_\phi \frac{p_\phi^2}{E_\phi} \Lambda(\{f_i\}) \\ &\quad \times \int_{\max(\cos\theta_-, -1)}^{\min(\cos\theta_+, 1)} d\cos\theta \frac{1}{\sqrt{-a}} \int_0^\pi dx \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{Z'\nu_\alpha \leftrightarrow \phi\bar{\nu}_\beta}|^2 \end{aligned} \quad (3.95)$$

となる。

ϕ に注目する場合

4 元運動量の割り当ては次のようにする。

$$(p_1, p_2, p_3, p_4) = (p_\phi, p_{\bar{\nu}_\beta}, p_{\nu_\alpha}, p_{Z'}) \quad (3.96)$$

(B.43) 式の最後にある $\Theta(p_4^0)$ より、

$$\begin{aligned} E_{Z'} &= E_\phi + p_{\bar{\nu}_\beta} - p_{\nu_\alpha} \geq m_{Z'} \\ &\rightarrow p_{\nu_\alpha} \leq E_\phi + p_{\bar{\nu}_\beta} - m_{Z'} \end{aligned} \quad (3.97)$$

という制限がつく。ただしこの右辺は、 $m_\phi < m_{Z'}$ のとき $p_\phi, p_{\bar{\nu}_\beta}$ の値によってはマイナスになりうるので、そのよ

うな領域は除外しなければならない。よって、遷移率は

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta n_\phi}{\delta t} \right|_{Z'\nu_\alpha \leftrightarrow \phi\bar{\nu}_\beta} &= -\frac{1}{2(2\pi)^6} \iint_D dp_\phi dp_{\bar{\nu}_\beta} \frac{p_\phi^2}{E_\phi} p_{\bar{\nu}_\beta} \int_0^{E_\phi + p_{\bar{\nu}_\beta} - m_{Z'}} dp_{\nu_\alpha} p_{\nu_\alpha} \Lambda(\{f_i\}) \\ &\quad \times \int_{\max(\cos\theta_-, -1)}^{\min(\cos\theta_+, 1)} d\cos\theta \frac{1}{\sqrt{-a}} \int_0^\pi dx \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{Z'\nu_\alpha \leftrightarrow \phi\bar{\nu}_\beta}|^2 \end{aligned} \quad (3.98)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta \rho_\phi}{\delta t} \right|_{Z'\nu_\alpha \leftrightarrow \phi\bar{\nu}_\beta} &= -\frac{1}{2(2\pi)^6} \iint_D dp_\phi dp_{\bar{\nu}_\beta} p_\phi^2 p_{\bar{\nu}_\beta} \int_0^{E_\phi + p_{\bar{\nu}_\beta} - m_{Z'}} dp_{\nu_\alpha} p_{\nu_\alpha} \Lambda(\{f_i\}) \\ &\quad \times \int_{\max(\cos\theta_-, -1)}^{\min(\cos\theta_+, 1)} d\cos\theta \frac{1}{\sqrt{-a}} \int_0^\pi dx \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{Z'\nu_\alpha \leftrightarrow \phi\bar{\nu}_\beta}|^2 \end{aligned} \quad (3.99)$$

となる。ここで、 D は $E_\phi + p_{\bar{\nu}_\beta} \geq m_{Z'}$ となる領域である。

$\bar{\nu}_\beta$ に注目する場合 4 元運動量の割り当ては次のようにする。

$$(p_1, p_2, p_3, p_4) = (p_{\bar{\nu}_\beta}, p_\phi, p_{Z'}, p_{\nu_\alpha}) \quad (3.100)$$

(B.43) 式の最後にある $\Theta(p_4^0)$ より、

$$\begin{aligned} p_{\nu_\alpha} &= p_{\bar{\nu}_\beta} + E_\phi - E_{Z'} \geq 0 \\ &\rightarrow E_{Z'} \leq p_{\bar{\nu}_\beta} + E_\phi \\ &\rightarrow p_{Z'} \leq \sqrt{(p_{\bar{\nu}_\beta} + E_\phi)^2 - m_{Z'}^2} \end{aligned} \quad (3.101)$$

という制限がつく。 ϕ に注目する場合と同様に、この右辺の根号の中身は $m_\phi < m_{Z'}$ のとき $p_{\bar{\nu}_\beta}, p_\phi$ の値によってはマイナスになりうるので、そのような領域は除外しなければならない。よって、遷移率は

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta n_\phi}{\delta t} \right|_{Z'\nu_\alpha \leftrightarrow \phi\bar{\nu}_\beta} &= -\frac{1}{2(2\pi)^6} \iint_D dp_{\bar{\nu}_\beta} dp_\phi p_{\bar{\nu}_\beta} \frac{p_\phi^2}{E_\phi} \int_0^{\sqrt{(p_{\bar{\nu}_\beta} + E_\phi)^2 - m_{Z'}^2}} dp_{Z'} \frac{p_{Z'}^2}{E_{Z'}} \Lambda(\{f_i\}) \\ &\quad \times \int_{\max(\cos\theta_-, -1)}^{\min(\cos\theta_+, 1)} d\cos\theta \frac{1}{\sqrt{-a}} \int_0^\pi dx \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{Z'\nu_\alpha \leftrightarrow \phi\bar{\nu}_\beta}|^2 \end{aligned} \quad (3.102)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta \rho_\phi}{\delta t} \right|_{Z'\nu_\alpha \leftrightarrow \phi\bar{\nu}_\beta} &= -\frac{1}{2(2\pi)^6} \iint_D dp_{\bar{\nu}_\beta} dp_\phi p_{\bar{\nu}_\beta}^2 \frac{p_\phi^2}{E_\phi} \int_0^{\sqrt{(p_{\bar{\nu}_\beta} + E_\phi)^2 - m_{Z'}^2}} dp_{Z'} \frac{p_{Z'}^2}{E_{Z'}} \Lambda(\{f_i\}) \\ &\quad \times \int_{\max(\cos\theta_-, -1)}^{\min(\cos\theta_+, 1)} d\cos\theta \frac{1}{\sqrt{-a}} \int_0^\pi dx \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{Z'\nu_\alpha \leftrightarrow \phi\bar{\nu}_\beta}|^2 \end{aligned} \quad (3.103)$$

となる。ここで、 D は $p_{\bar{\nu}_\beta} + E_\phi \geq m_{Z'}$ となる領域である。

$Z'\bar{\nu}_\alpha \leftrightarrow \phi\nu_\beta$ の遷移率については、ニュートリノの質量を無視する限り $|\mathcal{M}_{Z'\nu_\alpha \leftrightarrow \phi\bar{\nu}_\beta}|^2 = |\mathcal{M}_{Z'\bar{\nu}_\alpha \leftrightarrow \phi\nu_\beta}|^2$ となるので、遷移率は $Z'\nu_\alpha \leftrightarrow \phi\bar{\nu}_\beta$ と同じ式で計算することができる。つまり、微分方程式を解く際には $Z'\nu_\alpha \leftrightarrow \phi\bar{\nu}_\beta$ の遷移率を 2 倍すればよい。

3.4.2 $Z'\phi \leftrightarrow \nu_\alpha\nu_\beta$ ($Z'\phi \leftrightarrow \bar{\nu}_\alpha\bar{\nu}_\beta$)

$Z'\phi \leftrightarrow \nu_\alpha\nu_\beta$ の diagram は図 3.3 の 2 通りである。 $Z'\nu_\alpha \leftrightarrow \phi\bar{\nu}_\beta$ の場合と同様に、 α, β の組み合わせによって振幅の形が異なる。まとめると表 3.2 のようになる。

	$\beta = e$	$\beta = \mu, \tau$
$\alpha = e$	0	$\mathcal{M}^u$
$\alpha = \mu, \tau$	$\mathcal{M}^t$	$\mathcal{M}^t + \mathcal{M}^u$

表 3.2 $Z'\phi \leftrightarrow \nu_\alpha \nu_\beta$ の α, β の組み合わせに対する不変振幅の形

この散乱過程に対する振幅は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{Z'\phi \leftrightarrow \nu_\alpha \nu_\beta}|^2 &= \frac{16g_\alpha^2 |h_{\alpha\beta}|^2}{(k-p)^4} \left[4(k \cdot p)(k \cdot p') - 4(k \cdot p)(p \cdot p') - m_{Z'}^2(p \cdot p') + \frac{4}{m_{Z'}^2}(k \cdot p)^2(p \cdot p') \right] \\
&+ \frac{16g_\beta^2 |h_{\alpha\beta}|^2}{(k-p')^4} \left[4(k \cdot p)(k \cdot p') - 4(k \cdot p')(p \cdot p') - m_{Z'}^2(p \cdot p') + \frac{4}{m_{Z'}^2}(k \cdot p')^2(p \cdot p') \right] \\
&+ \frac{16g_\alpha g_\beta |h_{\alpha\beta}|^2}{(k-p)^2(k-p')^2} \left[4(k \cdot p)(k \cdot p') - 2(k \cdot p)(p \cdot p') - 2(k \cdot p')(p \cdot p') + 4(p \cdot p')^2 \right. \\
&\quad \left. - m_{Z'}^2(p \cdot p') - \frac{4}{m_{Z'}^2}(k \cdot p)(k \cdot p')(p \cdot p') \right] \quad (3.104)
\end{aligned}$$

§3.4.1 と同様に、それぞれの粒子について見ていく。

Z' に注目する場合

4 元運動量の割り当ては次のようにする。

$$(p_1, p_2, p_3, p_4) = (p_{Z'}, p_\phi, p_{\nu_\alpha}, p_{\nu_\beta}) \quad (3.105)$$

(B.43) 式の最後にある $\Theta(p_4^0)$ より、

$$\begin{aligned}
p_{\nu_\beta} &= E_{Z'} + E_\phi - p_{\nu_\alpha} \geq 0 \\
&\rightarrow p_{\nu_\alpha} \leq E_{Z'} + E_\phi
\end{aligned} \quad (3.106)$$

という制限がつく。よって、遷移率は

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\delta n_{Z'}}{\delta t} \right|_{Z'\phi \leftrightarrow \nu_\alpha \nu_\beta} &= -\frac{1}{2(2\pi)^6} \int_0^\infty dp_{Z'} \frac{p_{Z'}^2}{E_{Z'}} \int_0^\infty dp_\phi \frac{p_\phi^2}{E_\phi} \int_0^{E_{Z'}+E_\phi} dp_{\nu_\alpha} p_{\nu_\alpha} \Lambda(\{f_i\}) \\
&\times \int_{\max(\cos \theta_-, -1)}^{\min(\cos \theta_+, 1)} d \cos \theta \frac{1}{\sqrt{-a}} \int_0^\pi dx \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{Z'\phi \leftrightarrow \nu_\alpha \nu_\beta}|^2 \quad (3.107)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\delta \rho_{Z'}}{\delta t} \right|_{Z'\phi \leftrightarrow \nu_\alpha \nu_\beta} &= -\frac{1}{2(2\pi)^6} \int_0^\infty dp_{Z'} p_{Z'}^2 \int_0^\infty dp_\phi \frac{p_\phi^2}{E_\phi} \int_0^{E_{Z'}+E_\phi} dp_{\nu_\alpha} p_{\nu_\alpha} \Lambda(\{f_i\}) \\
&\times \int_{\max(\cos \theta_-, -1)}^{\min(\cos \theta_+, 1)} d \cos \theta \frac{1}{\sqrt{-a}} \int_0^\pi dx \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{Z'\phi \leftrightarrow \nu_\alpha \nu_\beta}|^2 \quad (3.108)
\end{aligned}$$

となる。

ϕ に注目する場合

4 元運動量の割り当ては次のようにする。

$$(p_1, p_2, p_3, p_4) = (p_\phi, p_{Z'}, p_{\nu_\alpha}, p_{\nu_\beta}) \quad (3.109)$$

(B.43) 式の最後にある $\Theta(p_4^0)$ より、

$$\begin{aligned}
p_{\nu_\beta} &= E_\phi + E_{Z'} - p_{\nu_\alpha} \geq 0 \\
&\rightarrow p_{\nu_\alpha} \leq E_\phi + E_{Z'}
\end{aligned} \quad (3.110)$$

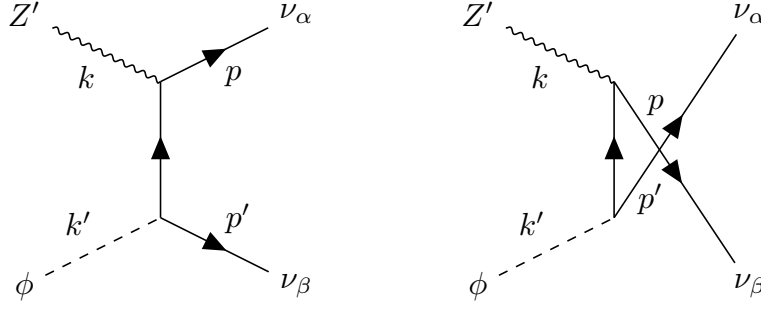


図 3.3 $Z'\phi \leftrightarrow \nu_\alpha \nu_\beta$ の diagram。t-channel を $\mathcal{M}^t$ 、u-channel を $\mathcal{M}^u$ と表す。

という制限がつく。よって、遷移率は

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta n_\phi}{\delta t} \right|_{Z'\phi \leftrightarrow \nu_\alpha \nu_\beta} &= -\frac{1}{2(2\pi)^6} \int_0^\infty dp_\phi \frac{p_\phi^2}{E_\phi} \int_0^\infty dp_{Z'} \frac{p_{Z'}^2}{E_{Z'}} \int_0^{E_\phi + E_{Z'}} dp_{\nu_\alpha} p_{\nu_\alpha} \Lambda(\{f_i\}) \\ &\quad \times \int_{\max(\cos \theta_-, -1)}^{\min(\cos \theta_+, 1)} d\cos \theta \frac{1}{\sqrt{-a}} \int_0^\pi dx \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{Z'\phi \leftrightarrow \nu_\alpha \nu_\beta}|^2 \end{aligned} \quad (3.111)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta \rho_\phi}{\delta t} \right|_{Z'\phi \leftrightarrow \nu_\alpha \nu_\beta} &= -\frac{1}{2(2\pi)^6} \int_0^\infty dp_\phi p_\phi^2 \int_0^\infty dp_{Z'} \frac{p_{Z'}^2}{E_{Z'}} \int_0^{E_\phi + E_{Z'}} dp_{\nu_\alpha} p_{\nu_\alpha} \Lambda(\{f_i\}) \\ &\quad \times \int_{\max(\cos \theta_-, -1)}^{\min(\cos \theta_+, 1)} d\cos \theta \frac{1}{\sqrt{-a}} \int_0^\pi dx \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{Z'\phi \leftrightarrow \nu_\alpha \nu_\beta}|^2 \end{aligned} \quad (3.112)$$

となる。

ν_α に注目する場合

4 元運動量の割り当ては次のようにする。

$$(p_1, p_2, p_3, p_4) = (p_{\nu_\alpha}, p_{\nu_\beta}, p_{Z'}, p_\phi) \quad (3.113)$$

(B.43) 式の最後にある $\Theta(p_4^0)$ より、

$$\begin{aligned} E_\phi &= p_{\nu_\alpha} + p_{\nu_\beta} - E_{Z'} \geq m_\phi \\ &\rightarrow E_{Z'} \leq p_{\nu_\alpha} + p_{\nu_\beta} - m_\phi \\ &\rightarrow p_{Z'} \leq \sqrt{(p_{\nu_\alpha} + p_{\nu_\beta} - m_\phi)^2 - m_{Z'}^2} \end{aligned} \quad (3.114)$$

という制限がつく。右辺は $p_{\nu_\alpha}, p_{\nu_\beta}$ の値によって根号の中身が負になりうるので、そのような領域は除外しなければならない。よって、遷移率は

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta n_{\nu_\alpha}}{\delta t} \right|_{Z'\phi \leftrightarrow \nu_\alpha \nu_\beta} &= -\frac{1}{2(2\pi)^6} \iint_D dp_{\nu_\alpha} dp_{\nu_\beta} p_{\nu_\alpha} p_{\nu_\beta} \int_0^{\sqrt{(p_{\nu_\alpha} + p_{\nu_\beta} - m_\phi)^2 - m_{Z'}^2}} dp_{Z'} \frac{p_{Z'}^2}{E_{Z'}} \Lambda(\{f_i\}) \\ &\quad \times \int_{\max(\cos \theta_-, -1)}^{\min(\cos \theta_+, 1)} d\cos \theta \frac{1}{\sqrt{-a}} \int_0^\pi dx \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{Z'\phi \leftrightarrow \nu_\alpha \nu_\beta}|^2 \end{aligned} \quad (3.115)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta \rho_{\nu_\alpha}}{\delta t} \right|_{Z'\phi \leftrightarrow \nu_\alpha \nu_\beta} &= -\frac{1}{2(2\pi)^6} \iint_D dp_{\nu_\alpha} dp_{\nu_\beta} p_{\nu_\alpha}^2 p_{\nu_\beta} \int_0^{\sqrt{(p_{\nu_\alpha} + p_{\nu_\beta} - m_\phi)^2 - m_{Z'}^2}} dp_{Z'} \frac{p_{Z'}^2}{E_{Z'}} \Lambda(\{f_i\}) \\ &\quad \times \int_{\max(\cos \theta_-, -1)}^{\min(\cos \theta_+, 1)} d\cos \theta \frac{1}{\sqrt{-a}} \int_0^\pi dx \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{Z'\phi \leftrightarrow \nu_\alpha \nu_\beta}|^2 \end{aligned} \quad (3.116)$$

となる。ここで、 D は $p_{\nu_\alpha} + p_{\nu_\beta} \geq m_{Z'} + m_\phi$ となる領域である。

ν_β に注目する場合

この場合については、 ν_α に注目する場合と違いはないため、(3.115)、(3.116) 式で計算できる。微分方程式を解く際は 2 倍すれば良い。

$Z'\phi \leftrightarrow \bar{\nu}_\alpha \bar{\nu}_\beta$ については、 $Z'\nu_\alpha \leftrightarrow \phi \bar{\nu}_\beta$ の場合と同様に、ニュートリノの質量を無視する限りは $Z'\phi \leftrightarrow \nu_\alpha \nu_\beta$ と同じ式で計算できる。よって 2 倍すれば良い。

3.5 散乱過程の u-channel diagram の発散

散乱過程の u-channel diagram は、中間状態が on-shell になることができるので発散が起きる。例えば $Z'\nu \leftrightarrow \phi \bar{\nu}$ では、 $Z' \rightarrow \nu \bar{\nu}$ で生成された on-shell の ν が $\nu \nu \rightarrow \phi$ を起こすという過程が考えられる。このような発散は、始状態が不安定粒子を含む場合に起きる可能性がある。実際の遷移率の積分においては、 $Z'\phi \leftrightarrow \nu \nu$ の発散が起きる点は、 $\cos \theta_\pm$ による積分範囲の制限により取り除かれているため発散の除去は考えなくても良い。しかし、 $Z'\nu \leftrightarrow \phi \bar{\nu}$ は発散する点が積分に寄与してしまうため、これを取り除く必要がある。

中間状態が不安定粒子の場合は、narrow width approximation により発散の除去が行えるが、今回考える散乱過程は中間状態がニュートリノであり崩壊しないため、narrow width approximation は使えない。on-shell の安定粒子による発散が起きる場合の理論的な解決方法は、[16, 17] で提案されている。

[16] の方法は次のとおりである。ガスと相互作用しながら伝搬する粒子を考える場合、全ての粒子の平均自由行程が有限なので「準粒子」であるといえる。そして、媒質中の粒子の自己エネルギーは虚部の寄与が存在するので、この虚部が準粒子の崩壊幅の役割をし、発散を正則化できる。しかし、この方法は高エネルギー領域でのみ有効な近似であるという結果になっているため、宇宙の時間発展を追うためには使えない。

[17] では、始状態の不安定粒子の質量を $m \rightarrow m - i\Gamma$ として複素にすることで、propagator の分母が有限になるようにするという方法が述べられている。しかしこの方法は、一般的に考えると終状態側の vertex でのエネルギー保存が成り立たなくなってしまうという問題がある。

このように、提案されている理論的な解決方法は不十分であり、まだ確立していないと思われる。そこで、今回は数学的な発散の除去を考案した。

u-channel diagram の振幅の 2 乗は

$$|\mathcal{M}_{Z'\nu_\alpha \leftrightarrow \phi \bar{\nu}_\beta}^u|^2 \propto \frac{1}{(m_{Z'}^2 - 2k \cdot p')^2}$$

という形である。そこで、 $2k \cdot p' = X$ と変数変換し、次のような積分を考える。

$$I = \int_0^\infty \frac{f(X)}{(m_{Z'}^2 - X)^2 + \varepsilon^2} dX \quad (3.117)$$

なぜ変数変換を行なったのかというと、元々の形だと複数の変数が発散に関わってしまい、発散の構造が複雑になってしまうからである。変数変換を行ない、発散を 1 変数に押しつけて扱いやすくしている。被積分関数は、 $X = m_{Z'}^2$ で $\mathcal{O}(1/\varepsilon^2)$ の発散を起こす。発散の幅は ε 程度だといえるので、 X 積分の結果を ε で展開すれば、

$$I = \frac{\alpha_{-1}}{\varepsilon} + \alpha_0 + \varepsilon \alpha_1 + \dots \quad (3.118)$$

と評価できる。第 1 項が $\varepsilon \rightarrow 0$ で発散する項、つまり中間状態が on-shell の寄与であり、第 2 項が off-shell の寄与である。第 3 項以降は $\varepsilon \rightarrow 0$ で消える。よって、 α_0 を取り出すことができれば、off-shell の寄与を計算できたことになる。

そこで、(3.118) 式の両辺に ε をかけて $\varepsilon \rightarrow 0$ とすることで α_{-1} を求め、それを全体から引いて α_0 を求める。 $F(\varepsilon)$ を

$$\begin{aligned} F(\varepsilon) &\equiv \int_0^\infty \frac{\varepsilon f(X)}{(m_{Z'}^2 - X)^2 + \varepsilon^2} dX \\ &= \alpha_{-1} + \varepsilon \alpha_0 + \dots \end{aligned} \quad (3.119)$$

とする。この積分は ε が有限な値であれば発散しないため、数値計算によって求めることができる。 ε が小さいとすれば、

$$\alpha_0 \simeq \frac{F(\varepsilon) - \alpha_{-1}}{\varepsilon} \quad (3.120)$$

と表せる。ここで、 X に対して変数変換

$$X - m_{Z'}^2 = \varepsilon \tilde{X} \quad (3.121)$$

を行うと、

$$\begin{aligned} F(\varepsilon) &= \int_{-\frac{m_{Z'}^2}{\varepsilon}}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\varepsilon f(m_{Z'}^2 + \varepsilon \tilde{X})}{\tilde{X}^2 + 1} \varepsilon d\tilde{X} \\ &= \int_{-\frac{m_{Z'}^2}{\varepsilon}}^{\infty} \frac{f(m_{Z'}^2 + \varepsilon \tilde{X})}{\tilde{X}^2 + 1} d\tilde{X} \end{aligned} \quad (3.122)$$

となる。これより、 α_{-1} は

$$\begin{aligned} \alpha_{-1} &= F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(m_{Z'}^2)}{\tilde{X}^2 + 1} d\tilde{X} \\ &= \pi f(m_{Z'}^2) \end{aligned} \quad (3.123)$$

となる。よって、off-shell の寄与 α_0 は

$$\alpha_0 = \frac{F(\varepsilon) - \pi f(m_{Z'}^2)}{\varepsilon} \quad (3.124)$$

で求められる。この式を、有限であるが小さい ε に対して計算することで、良い精度で off-shell の寄与を求めることができる。

3.6 Majoron の有効反応率

Majoron の有効反応率 Γ_{eff} を次のように定義しておく。

$$\Gamma_{\text{eff}} \equiv \left. \frac{\langle \Gamma_{\nu\nu \rightarrow \phi} \rangle}{H} \right|_{T_\nu = m_\phi/3} \quad (3.125)$$

ここで、 $\langle \Gamma_{\nu\nu \rightarrow \phi} \rangle$ は $\nu\nu \rightarrow \phi$ の反応率の熱平均であり、

$$\langle \Gamma_{\nu\nu \rightarrow \phi} \rangle = \frac{1}{n_\nu} \left. \frac{\delta n_\nu}{\delta t} \right|_{\nu\nu \rightarrow \phi} = \frac{\Gamma_\phi}{12} \left(\frac{m_\phi}{T_\nu} \right)^2 K_1 \left(\frac{m_\phi}{T_\nu} \right) \quad (3.126)$$

で求められる。また、放射優勢期の Hubble Parameter は近似的に

$$H(T_\nu) \simeq 1.66 g_*^{1/2} \frac{T_\nu^2}{m_{\text{Pl}}} = H(T_\nu = m_\phi/3) \frac{9T_\nu^2}{m_\phi^2} \quad (3.127)$$

で求められる。これより、 Γ_{eff} は

$$\Gamma_{\text{eff}} = \frac{3K_1(3)}{4} \frac{\Gamma_\phi}{H(T_\nu = m_\phi/3)} \simeq \left(\frac{\lambda}{4 \times 10^{-12}} \right)^2 \left(\frac{\text{keV}}{m_\phi} \right) \quad (3.128)$$

と表せる。

Γ_{eff} は Boltzmann 方程式を考えると意味がわかりやすい。 Γ_{eff} は

$$\Gamma_{\text{eff}} = \left. \frac{1}{H n_\nu} \frac{\delta n_\nu}{\delta t} \right|_{\nu\nu \rightarrow \phi} \quad (3.129)$$

と表せる。(3.9) 式に注目すると、 Γ_{eff} は factor の違いはあるが第一項と第二項の比になっていることがわかる。よって、相互作用の寄与が宇宙膨張の寄与よりも大きいかどうか、つまり初期宇宙において $\nu\nu \rightarrow \phi$ がどれくらい効くのかを示すパラメータであるといえる。

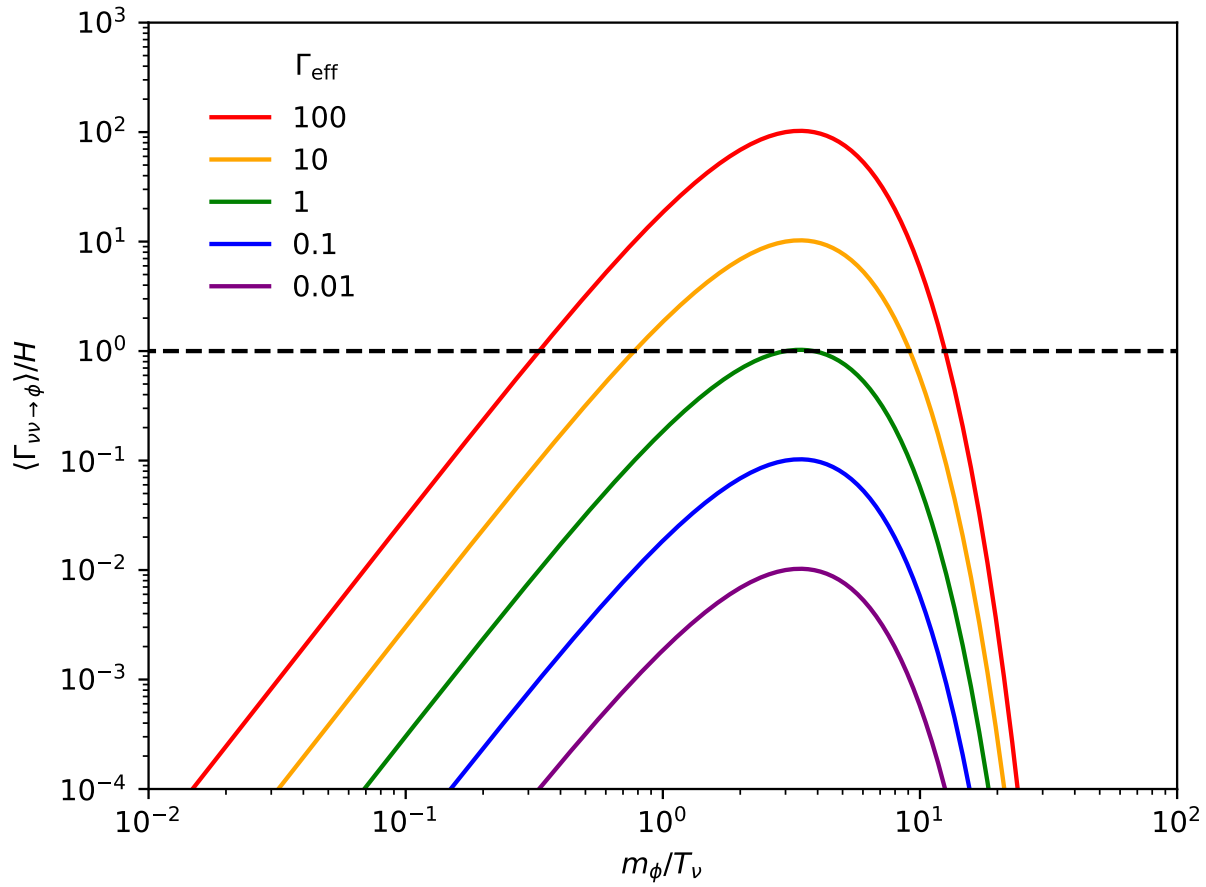


図 3.4 $\langle \Gamma_{\nu\nu \rightarrow \phi} \rangle / H$ のグラフ。山の頂上は $T_\nu = m_\phi/3$ のときであり、頂上の値が Γ_{eff} である。

Γ_{eff} を用いて $\langle \Gamma_{\nu\nu \rightarrow \phi} \rangle / H$ を書き直すと、

$$\frac{\langle \Gamma_{\nu\nu \rightarrow \phi} \rangle}{H} = \frac{\Gamma_{\text{eff}}}{81K_1(3)} \left(\frac{m_\phi}{T_\nu} \right)^4 K_1 \left(\frac{m_\phi}{T_\nu} \right) \quad (3.130)$$

となる。 m_ϕ/T_ν の関数として $\langle \Gamma_{\nu\nu \rightarrow \phi} \rangle / H$ をプロットしたものが図 3.4 である。温度が高いところでは、 m_ϕ 程度のエネルギーを持つニュートリノが少ないため、 $\nu\nu \rightarrow \phi$ が起きにくくなっている。宇宙が冷えてくると、ニュートリノのエネルギーがだんだん小さくなるので、 m_ϕ 程度のエネルギーを持つニュートリノが増え、 $\nu\nu \rightarrow \phi$ が起きやすくなる。その後 $T_\nu = m_\phi/3$ より低い温度になると、運動学的に Majoron を生成できなくなるので、急激に値が小さくなっていく。

計算を行う際には、この Γ_{eff} を結合定数の代わりに Majoron のパラメータとして変化させる。

4 結果

付録 H で述べるように、化学ポテンシャルを取り入れて Boltzmann 方程式を解くには課題が残っているため、今回は化学ポテンシャルの発展は追わず、(3.25)、(3.26)、(3.32) 式を用いて温度の時間発展を計算した。

考える Majoron の質量は、ニュートリノが脱結合するまでに Majoron が全て崩壊してしまわないように決める。もし脱結合前に全て崩壊してしまうと、 N_{eff} には全く寄与しなくなってしまうためである。図 3.4 を見ると、 $m_\phi/T_\nu \sim 20$ 付近で Majoron はほとんど生成されなくなるので、 $m_\phi/T_\nu = 20$ になるまでに脱結合が起こることを条件として、質量の上限を決める。ニュートリノの脱結合は付録 E より $T_\gamma = 0.5 \text{ MeV}$ 付近で起こるため、

$$\begin{aligned} T_\nu &= 0.05 m_\phi \leq 0.5 \text{ MeV} \\ \Rightarrow m_\phi &\leq 10 \text{ MeV} \end{aligned}$$

となる。よって、 m_ϕ は 10 MeV 以下とする。

4.1 散乱を取り入れない場合

Z' と ϕ の散乱がどの程度寄与するのかを見たいため、まずは散乱を取り入れない場合、つまり SM の過程と Z', ϕ の崩壊・逆崩壊過程のみを衝突項に取り入れて発展方程式を解いた。

初期条件は、Majoron が少ない時期から解くとして、

$$T_{0\gamma} = T_{0\nu} = 50 \text{ MeV}, \quad T_{0\phi} = 1 \text{ MeV} \quad (4.1)$$

とした。下付きの 0 は初期条件を意味する。調べたい Majoron の質量が 10 MeV 以下であることを考えると、図 3.4 より $T_\nu = 50 \text{ MeV}$ の時期には、 $\Gamma_{\text{eff}} = 100$, $m_\phi = 10 \text{ MeV}$ の場合で $\nu\nu \rightarrow \phi$ がちょうど効き始める頃であり、Majoron はまだ少ないと考えられるので、ここから解き始める。これらの初期条件については、 $T_{0\phi} = 1 \text{ MeV}$ 以下の場合には N_{eff} の値に初期条件の依存性がないことを確認したため、このように選んだ。

Z' の質量と結合定数は

$$m_{Z'} = 13 \text{ MeV}, \quad g_{\mu-\tau} = 5.0 \times 10^{-4} \quad (4.2)$$

とした。これは $g_\mu - 2$ anomaly を解決できるようなパラメータ領域内の値である（図 2.3 参照）。

Majoron のパラメータには、質量と Γ_{eff} （結合定数）がある。計算するパラメータは

$$m_\phi = 0.05, 0.1, 0.5, 1.0, 5.0, 10.0 \text{ [MeV]} \quad (4.3)$$

$$\Gamma_{\text{eff}} = 0.01, 0.1, 1.0, 10, 100 \quad (4.4)$$

とする。計算の終了条件は、 T_γ/T_ν が一定になるまでとした。時間発展を計算した結果が図 4.1～図 4.6 である。

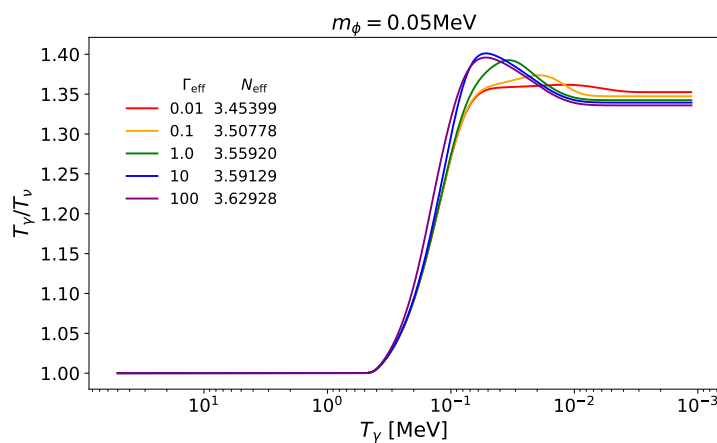


図 4.1 $m_\phi = 0.05 \text{ MeV}$ の場合の温度の発展。

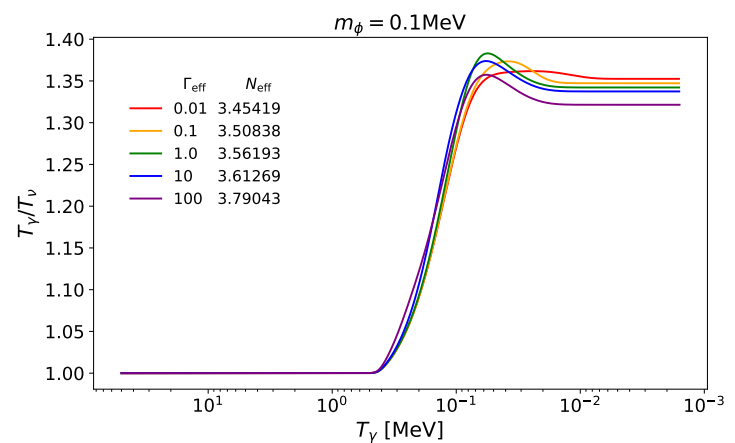


図 4.2 $m_\phi = 0.1 \text{ MeV}$ の場合の温度の発展。

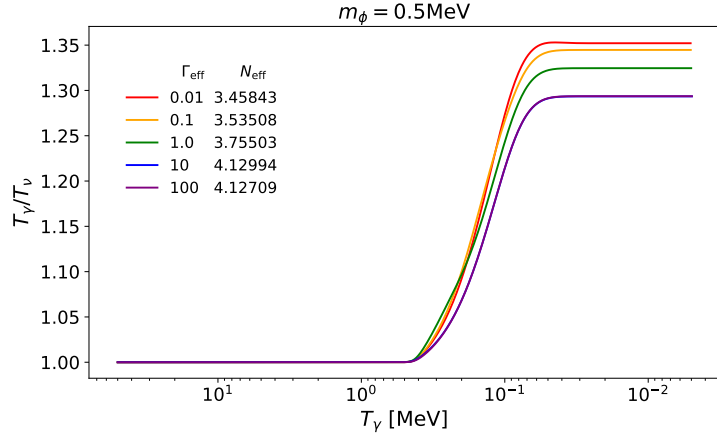


図 4.3 $m_\phi = 0.5 \text{ MeV}$ の場合の温度の発展。

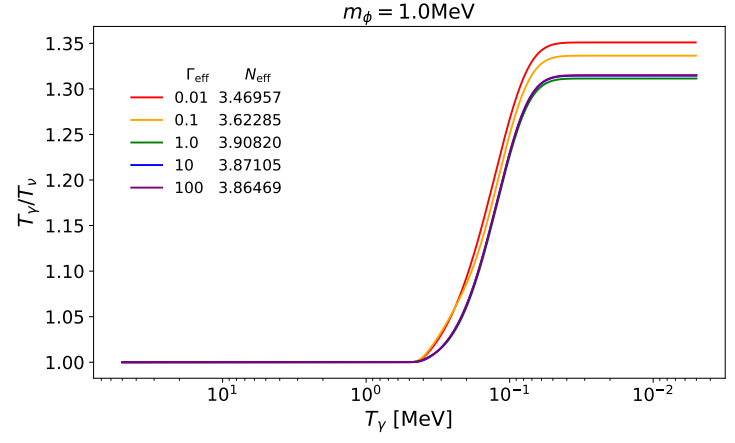


図 4.4 $m_\phi = 1.0 \text{ MeV}$ の場合の温度の発展。

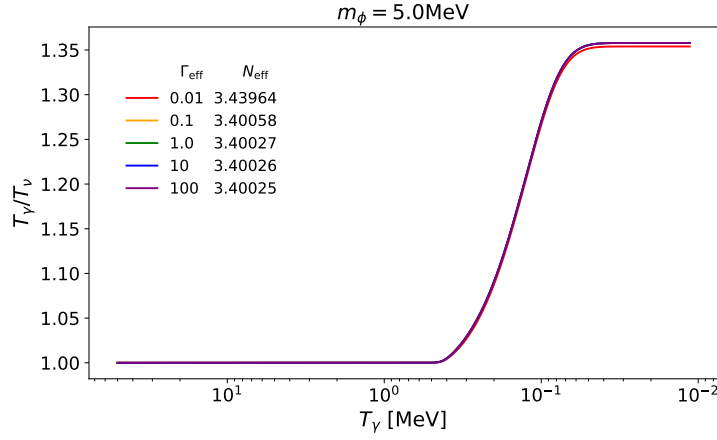


図 4.5 $m_\phi = 5.0 \text{ MeV}$ の場合の温度の発展。

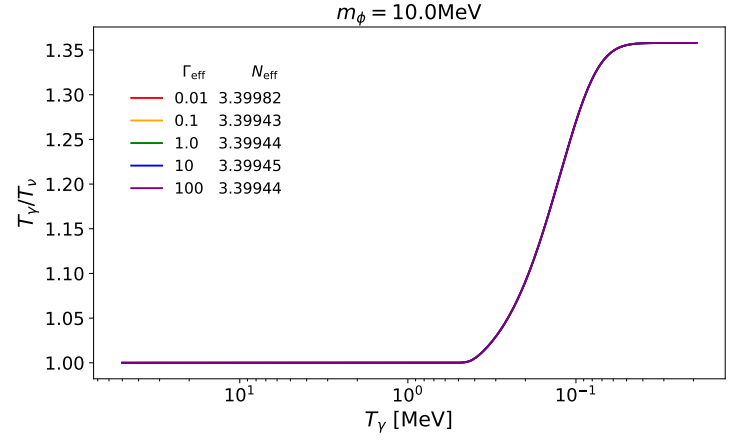


図 4.6 $m_\phi = 10.0 \text{ MeV}$ の場合の温度の発展。

全体を比較してみると、「 Γ_{eff} が大きいほど N_{eff} も大きくなる」というわけではなく、 m_ϕ が大きくなると、 Γ_{eff} が小さいほうが N_{eff} が大きくなる場合もあることがわかる。これは、質量が大きい場合は崩壊する時期が早いことと、 Γ_{eff} が大きい（結合定数が大きい）とそれだけ崩壊するのも早くなるため、ニュートリノが脱結合した後に残っている Majoron の数が減ってしまうためであると考えられる。

図 4.5, 4.6 を見ると $N_{\text{eff}} \simeq 3.4$ まで大きくなっているが、付録 E よりほぼ全てが Z' によるものだと考えられる。Majoron が重いため、ニュートリノが脱結合する前に崩壊しきってしまい、 N_{eff} を増やせていない。 $\Gamma_{\text{eff}} = 0.01$ の場合は結合定数が小さく Majoron の崩壊に時間がかかるため、ニュートリノ脱結合後も少しだけ Majoron が残っており、少し N_{eff} を増やすことができている。

目標としている $N_{\text{eff}} = 3.3 - 3.5$ を達成するには、おおまかに

- $m_\phi \lesssim 1.0 \text{ MeV}$ の場合は $\Gamma_{\text{eff}} \lesssim 0.01 - 0.1$ 程度
- $m_\phi \sim \mathcal{O}(1 \text{ MeV})$ の場合は、 $\Gamma_{\text{eff}} \lesssim 0.01$

であればよい。 $m_\phi \gtrsim 10 \text{ MeV}$ では N_{eff} に寄与しなくなるため、 Γ_{eff} への制限はつけられない。

4.2 散乱を取り入れる場合

次に散乱を取り入れた場合について述べる。散乱を取り入れた場合と取り入れていない場合で比較したいため、初期条件は §4.1 と同じものを使う。さらに、初期宇宙では散乱過程が大きな寄与をする可能性があるため、発展を解き始める段階で Majoron が平衡状態になっている場合も計算してみる。よって

$$T_{0\gamma} = T_{0\nu} = 50 \text{ MeV}, \quad T_{0\phi} = 1, 50 \text{ MeV} \quad (4.5)$$

の 2 通りで計算する。 Z' や ϕ のパラメータは §4.1 と同じとする。

また、簡単のために Majoron の結合定数 $h_{\alpha\beta}$ は全ての成分の絶対値が等しく、 $|h_{\alpha\beta}| = h_\phi$ とする。この場合、

$$\begin{aligned}\lambda^2 &= \text{tr}(h^\dagger h) = 9h_\phi^2 \\ \Rightarrow h_\phi &= \frac{\lambda}{3}\end{aligned}\tag{4.6}$$

となる。

4.2.1 $T_{0\phi} = 1 \text{ MeV}$ の場合

時間発展を計算した結果が図 4.7～図 4.12 である。また、§4.1 の N_{eff} との比較をまとめたものが表 4.1～表 4.6 である。

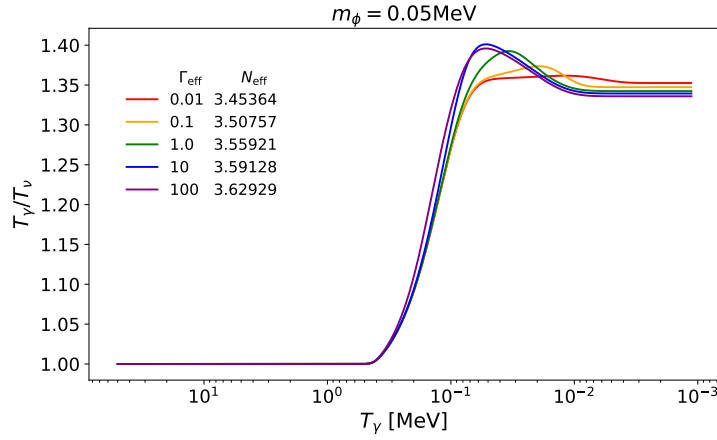


図 4.7 $m_\phi = 0.05 \text{ MeV}$ の場合の温度の発展。

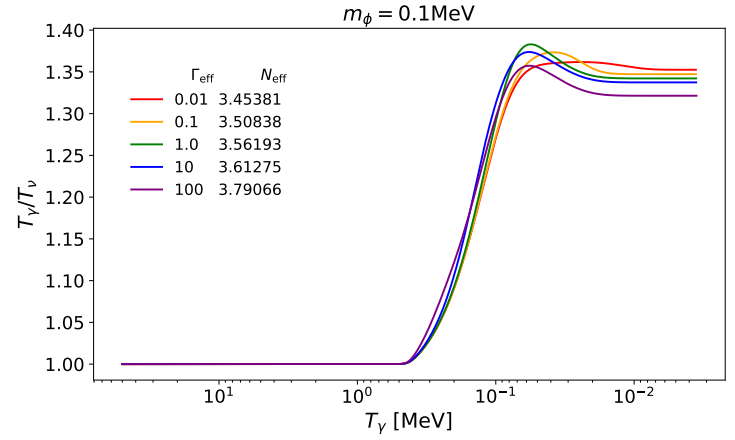


図 4.8 $m_\phi = 0.1 \text{ MeV}$ の場合の温度の発展。

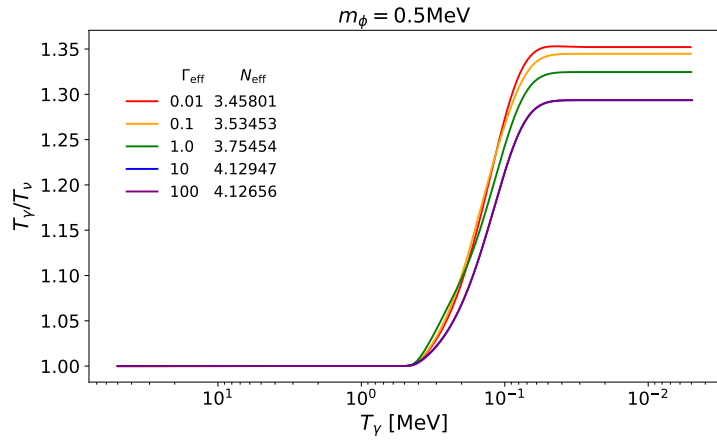


図 4.9 $m_\phi = 0.5 \text{ MeV}$ の場合の温度の発展。

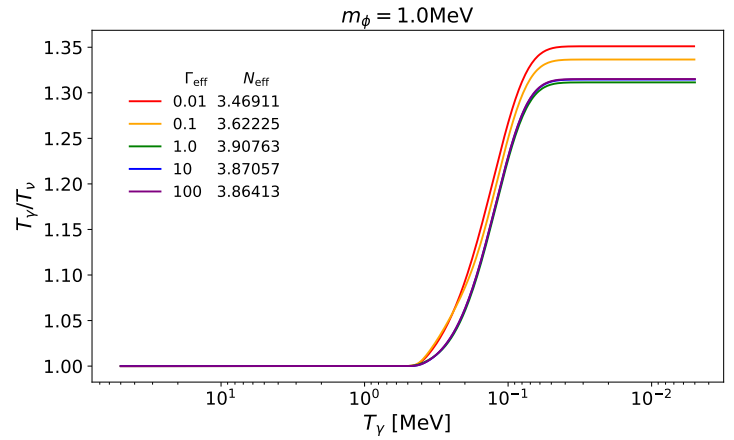


図 4.10 $m_\phi = 1.0 \text{ MeV}$ の場合の温度の発展。

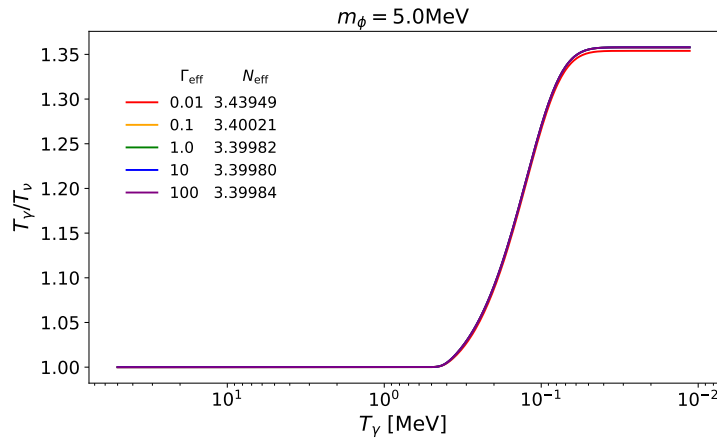


図 4.11 $m_\phi = 5.0 \text{ MeV}$ の場合の温度の発展。

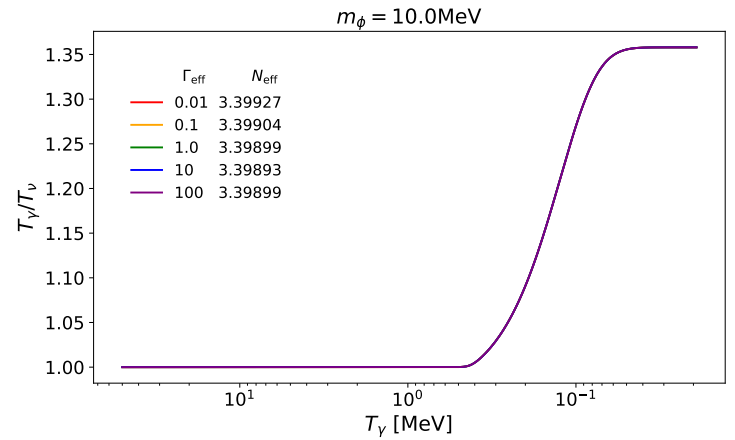


図 4.12 $m_\phi = 10.0 \text{ MeV}$ の場合の温度の発展。

Γ_{eff}	散乱なし	散乱あり
0.01	3.45399	3.45364
0.1	3.50778	3.50757
1.0	3.55920	3.55921
10	3.59129	3.59128
100	3.62928	3.62929

表 4.1 $m_\phi = 0.05$ MeV の場合の N_{eff}

Γ_{eff}	散乱なし	散乱あり
0.01	3.45419	3.45381
0.1	3.50838	3.50838
1.0	3.56193	3.56193
10	3.61269	3.61275
100	3.79043	3.79066

表 4.2 $m_\phi = 0.1$ MeV の場合の N_{eff}

Γ_{eff}	散乱なし	散乱あり
0.01	3.45843	3.45801
0.1	3.53508	3.53453
1.0	3.75503	3.75454
10	4.12994	4.12947
100	4.12709	4.12656

表 4.3 $m_\phi = 0.5$ MeV の場合の N_{eff}

Γ_{eff}	散乱なし	散乱あり
0.01	3.46957	3.46911
0.1	3.62285	3.62225
1.0	3.90820	3.90763
10	3.87105	3.87057
100	3.86469	3.86413

表 4.4 $m_\phi = 1.0$ MeV の場合の N_{eff}

Γ_{eff}	散乱なし	散乱あり
0.01	3.43964	3.43949
0.1	3.40058	3.40021
1.0	3.40027	3.39982
10	3.40026	3.39980
100	3.40025	3.39984

表 4.5 $m_\phi = 5.0$ MeV の場合の N_{eff}

Γ_{eff}	散乱なし	散乱あり
0.01	3.39982	3.39927
0.1	3.39943	3.39904
1.0	3.39944	3.39899
10	3.39945	3.39893
100	3.39944	3.39899

表 4.6 $m_\phi = 10.0$ MeV の場合の N_{eff}

N_{eff} の値を比較すると、 $m_\phi \geq 0.5$ MeV では $\mathcal{O}(10^{-4})$ の変化ではあるが散乱ありの方が小さくなることからわかる。Majoron の崩壊より Z' の崩壊のほうがニュートリノへのエネルギー遷移が大きいことを考慮すると、これは $Z'\nu \rightarrow \phi\bar{\nu}$ があることにより、散乱なしの場合と比べて Z' が少なく、Majoron が多くなるため、ニュートリノへのエネルギー遷移が少なくなったからであると考えられる。

$m_\phi \leq 0.1$ MeV の場合は散乱を取り入れない場合とほとんど同じ値のものがいくつかあるが、傾向としては Γ_{eff} が小さいと散乱を取り入れたほうが小さくなり、 Γ_{eff} が大きいと散乱を取り入れたほうが大きくなっている。 N_{eff} の値が小さくなるのは $m_\phi \geq 0.5$ MeV の場合と同じ理由だと考えられる。 N_{eff} が大きくなる原因は Majoron の崩壊時期に関係していると考えられる。 $m_\phi \leq 0.1$ MeV では、Majoron が崩壊し始めるのは $T_\gamma \lesssim 0.1$ MeV と遅くなる。 Γ_{eff} が大きいことにより Majoron が多く生成されることと、Majoron の崩壊が遅いことにより、 $T_\phi > T_\nu$ となる時期が存在する（図 4.13 参照）。この時期に $\phi\bar{\nu} \rightarrow Z'\nu$ によって Z' が作られるため、 N_{eff} が大きくなったと考えられる。

散乱過程の有無の比較をまとめると、散乱過程を取り入れても N_{eff} の値は $\mathcal{O}(10^{-4})$ 程度の変化であるため、 Γ_{eff} への制限は散乱過程なしの場合とほとんど変化しない。よって、 $T_\gamma < 50$ MeV の時期では散乱過程を取り入れる必要性は低いと言える。

ただし、散乱過程は今回用いた初期条件の時期より前から存在しているはずで、それを考慮して $T_{0\phi}$ を決める必要がある。散乱過程の計算には時間がかかるため、初期条件を決定する際に散乱過程を考えて、時間発展を求める際は取り入れなくても良い可能性もある。

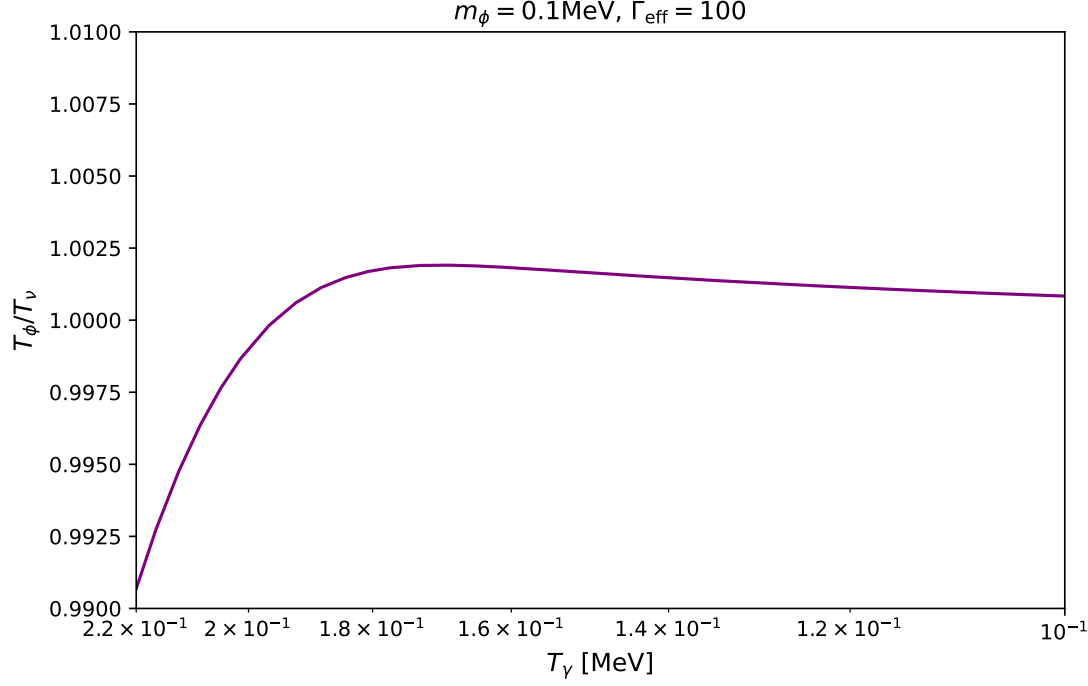


図 4.13 $m_\phi = 0.1 \text{ MeV}, \Gamma_{\text{eff}} = 100$ の場合の T_ϕ/T_ν のグラフ。わずかに 1 を越えている、つまり $T_\phi > T_\nu$ となる時期が存在する。

4.2.2 $T_{0\phi} = 50 \text{ MeV}$ の場合

時間発展を計算した結果が図 4.14～図 4.19 である。

$T_{0\phi} = 1 \text{ MeV}$ の場合と比較すると、 $m_\phi = 10.0 \text{ MeV}$ の場合を除いて N_{eff} の値が大きくなっていることがわかる。Majoron が多く存在しているところから計算を始めたので、ニュートリノ脱結合前に崩壊が始まって多くの Majoron が残ったことが原因であると考えられる。 Γ_{eff} が大きいほうが N_{eff} が小さくなっていることも根拠の 1 つであり、結合定数が大きいほうが脱結合前までに多く崩壊し、残る Majoron が少なくなるため、 N_{eff} が小さくなっている。 $m_\phi = 10.0 \text{ MeV}$ の場合は、 $T_{0\phi} = 50 \text{ MeV}$ から始めても脱結合前にほとんど崩壊していることがわかる。

目標としている $N_{\text{eff}} = 3.3 - 3.5$ を達成するには、初期条件の $T_{0\phi}$ はもっと低い温度である必要があると予測できる。 $\Gamma_{\text{eff}} > 100$ の場合はここでの結果よりもさらに N_{eff} が小さくなる可能性もあるが、散乱過程なしの場合で $\Gamma_{\text{eff}} \leq 0.1$ が好ましいという結果になっているので、より大きな Γ_{eff} は現実的ではない。よって、 $T_{0\phi}$ はもっと低い温度が適切で、少なくとも $T_\gamma = 50 \text{ MeV}$ の時期には Majoron は平衡状態になっていないことが好ましい。また、 $m_\phi \geq 10.0 \text{ MeV}$ では初期条件によらず N_{eff} を増やせないことがわかった。

ただし、今回の計算で用いた Z' のパラメータでは、 Z' のみの寄与で $N_{\text{eff}} \simeq 3.4$ まで増えている。 Z' がより重い場合を考えると Z' の寄与は減ると考えられるので、 $T_{0\phi} = 50 \text{ MeV}$ でも好ましいパラメータが存在する可能性はある。

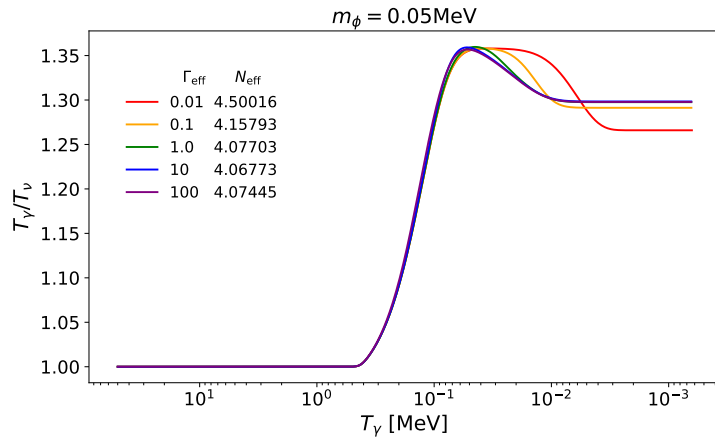


図 4.14 $m_\phi = 0.05 \text{ MeV}$ の場合の温度の発展。

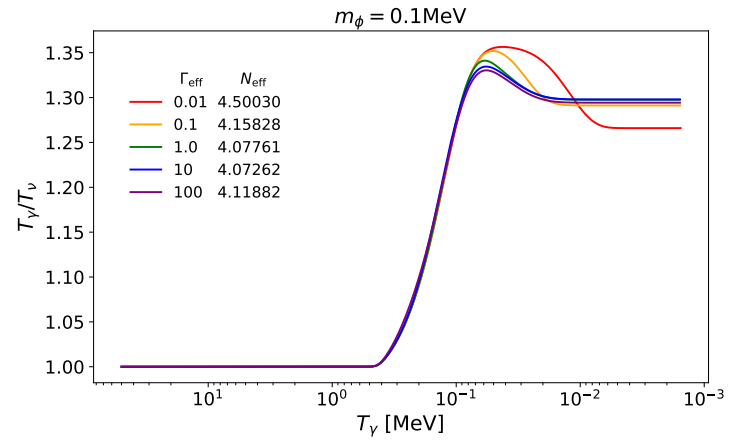


図 4.15 $m_\phi = 0.1 \text{ MeV}$ の場合の温度の発展。

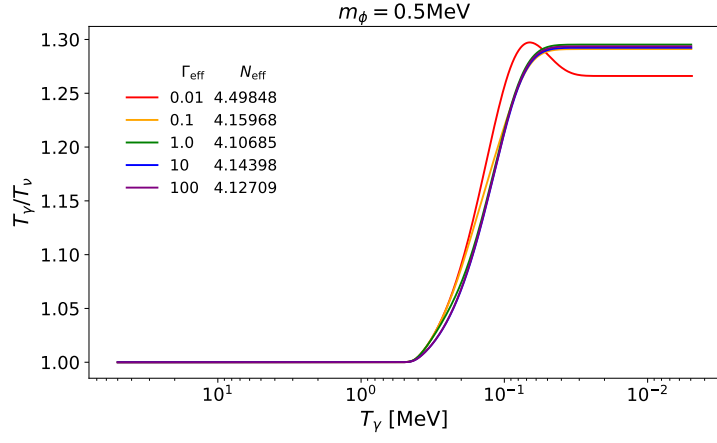


図 4.16 $m_\phi = 0.5 \text{ MeV}$ の場合の温度の発展。

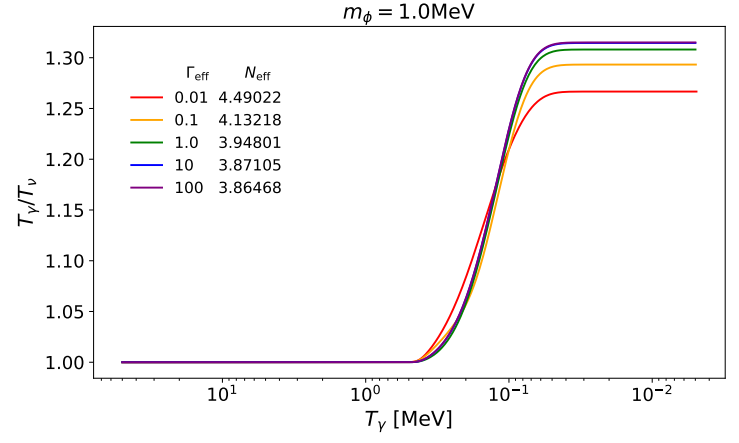


図 4.17 $m_\phi = 1.0 \text{ MeV}$ の場合の温度の発展。

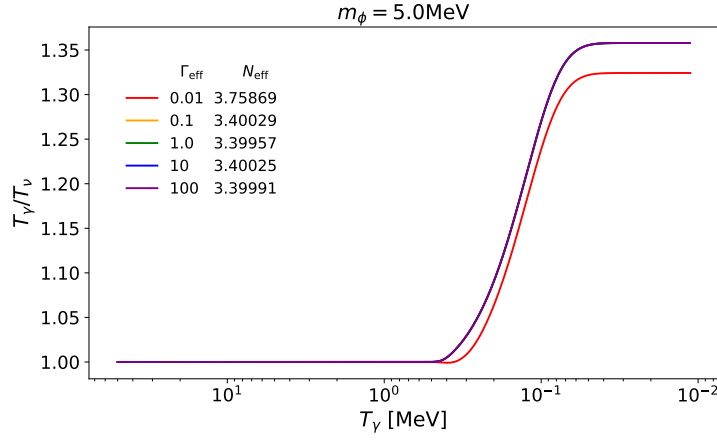


図 4.18 $m_\phi = 5.0 \text{ MeV}$ の場合の温度の発展。

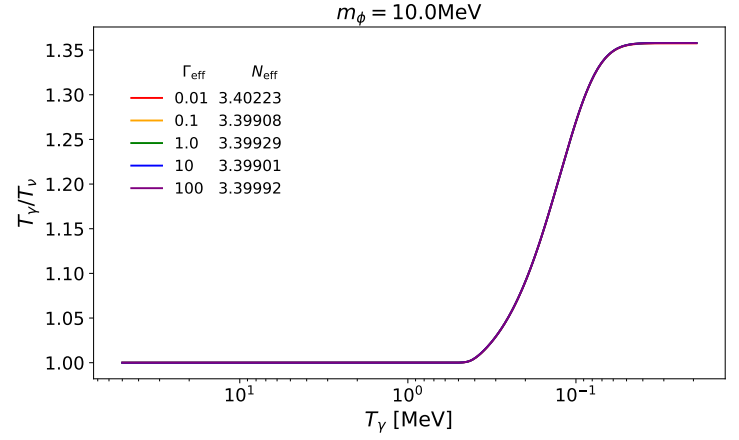


図 4.19 $m_\phi = 10.0 \text{ MeV}$ の場合の温度の発展。

5 まとめ

本論文では、繰り込み可能な $L_\mu - L_\tau$ 模型を用いて、 $g_\mu - 2$ anomaly が解決できるパラメータで Hubble Tension が緩和できるような Majoron のパラメータを検証した。また、 Z' と Majoron の散乱過程がどの程度寄与するのかについて調べた。

この模型では、新しい粒子として $U(1)_{L_\mu - L_\tau}$ ゲージボソンの Z' とスカラー粒子の Majoron, ϕ が導入される。初期宇宙において Z' と Majoron が同時に存在する場合は、 $Z'\nu \leftrightarrow \phi\bar{\nu}$ といった Z' と Majoron の散乱過程が存在する。この散乱過程を Boltzmann 方程式に取り入れて、 N_{eff} の値にどの程度寄与するのかを調べた。また、この散乱過程は中間状態が on-shell になり発散する場合があり、衝突項積分において数学的に発散を取り除く方法を考案した。

今回は Majoron のパラメータに注目するため、 Z' のパラメータは固定した。先行研究 [7] で示されている $g_\mu - 2$ anomaly を解決できるパラメータの中から、 $m_{Z'} = 13 \text{ MeV}$, $g_{\mu-\tau} = 5.0 \times 10^{-4}$ を選んだ。この Z' のみの寄与で $N_{\text{eff}} \simeq 3.4$ まで大きくなる。Hubble Tension を解決できる N_{eff} の値として、 $3.3 - 3.5$ を目標とした。この場合、Majoron のパラメータとして好ましいのは、

- $m_\phi \lesssim 1.0 \text{ MeV}$, $\Gamma_{\text{eff}} \lesssim 0.01 - 0.1$
- $m_\phi \sim \mathcal{O}(1 \text{ MeV})$, $\Gamma_{\text{eff}} \lesssim 0.01$

となった。また、 $m_\phi \gtrsim 10.0 \text{ MeV}$ では N_{eff} に寄与しないことがわかった。

Z' と Majoron の散乱過程は、 N_{eff} に対して $\mathcal{O}(10^{-4})$ の寄与をすることがわかったが、もともと SM の N_{eff} から $+0.3 \sim +0.5$ を目指しているため、時間発展の計算に取り入れる必要性は低いと言える。ただし、本論文で考えた宇宙よりもさらに高温の宇宙では散乱過程の寄与が大きくなる可能性があるため、初期条件を決める際には考える

べきであると言える。

今後の研究については、まずはより高温の宇宙において Z' と Majoron の散乱過程を考え、 $T_{0\phi}$ を決定することを目標としたい。そして Z' のパラメータも変化させて、さらなるパラメータの検証を行いたい。また、化学ポテンシャルの時間発展を求めるには問題があり、その解決も考えたい（付録 [H](#) 参照）。

謝辞

本論文の作成にあたり、佐藤丈教授には日々のゼミや授業、発表練習などで熱心なご指導をいただきました。横浜国立大学に栄転されてからも埼玉大学に足を運んでいただき、非常に感謝しております。

梁正樹氏は、ゼミや授業でお世話になっただけでなく、わからないところを質問に行った際、丁寧に教えていただいたり、一緒に議論をしてくださったりしました。東大宇宙線研の浅井健人氏は、お忙しい中オンラインでゼミに出席してくださり、議論をしていただきました。谷井義彰教授、仁尾真紀子氏には、授業やゼミでお世話になり、素粒子論の基礎である場の理論を学ぶことができました。皆様に厚くお礼申し上げます。

数値計算は、理化学研究所のスーパーコンピューター「HOKUSAI BigWaterfall」を使わせていただきました。感謝申し上げます。

最後に、6年間教え合い、高め合ってきた同期と、さまざまな面で支えてくれた家族に感謝したいです。

2023年2月6日 浅野 友哉

付録 A Bose, Fermi 分布関数

ここでは、Bose, Fermi 分布関数の導出を行う。

A.1 Bose 分布関数

まず、あるエネルギー E_i の状態数 w_i を求める。とりうる状態を Z_i 個、粒子数を N_i とする。このとき、

$$w_i = \frac{(Z_i + N_i - 1)!}{(Z_i - 1)!N_i!} \quad (\text{A.1})$$

となる。ボソンは1つの状態の粒子数に制限はないため、状態数は N_i 個の球を Z_i 個の箱に入れる時の組み合わせの総数から計算できる。

w_i の i についての総乗を計算することで、全てのエネルギーに対する状態数 W を求められる。

$$W = \prod_i w_i = \prod_i \frac{(Z_i + N_i - 1)!}{(Z_i - 1)!N_i!} \quad (\text{A.2})$$

系のエントロピー S は、ボルツマンの原理より

$$S = k_B \ln W \quad (\text{A.3})$$

で与えられる。ここで、 k_B はボルツマン定数である。エントロピーが極大であるときに熱平衡になるので、 S が極大になるような N_i の条件を探す。

ここでは、ラグランジュの未定乗数法を用いる。拘束条件として、

$$N = \sum_i N_i = \text{一定} \quad (\text{A.4})$$

$$U = \sum_i N_i E_i = \text{一定} \quad (\text{A.5})$$

を課す。これにより、

$$F(N_i, \alpha, \beta) \equiv \ln W - \alpha \left(N - \sum_i N_i \right) - \beta \left(U - \sum_i N_i E_i \right) \quad (\text{A.6})$$

を定義する。ただし k_B は定数なので省いた。この関数 f が極大になる点は、

$$\frac{\partial F(N_i, \alpha, \beta)}{\partial N_i} = 0 \quad (\text{A.7})$$

から求められる。簡単のために、 $Z_i, N_i \gg 1$ であると仮定する。この仮定を置くことでスターリングの公式

$$\ln A! \simeq A \ln A - A \quad (A \gg 1) \quad (\text{A.8})$$

を用いることができる。この公式を用いて $\ln W$ を変形すると、

$$\begin{aligned} \ln W &= \ln \left[\prod_i \frac{(Z_i + N_i - 1)!}{(Z_i - 1)!N_i!} \right] \\ &= \sum_i [\ln(Z_i + N_i - 1)! - \ln(Z_i - 1)! - \ln N_i!] \\ &\simeq \sum_i [(Z_i + N_i - 1) \ln(Z_i + N_i - 1) - (Z_i - 1) \ln(Z_i - 1) - N_i \ln N_i] \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

となる。これより、

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(N_i, \alpha, \beta)}{\partial N_i} &= \ln(Z_i + N_i - 1) + 1 - \ln N_i - 1 - \alpha - \beta E_i \\ &= \ln \frac{Z_i + N_i - 1}{N_i} - \alpha - \beta E_i \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

(A.7) 式より、

$$\begin{aligned}\ln \frac{Z_i + N_i - 1}{N_i} &= \alpha + \beta E_i \\ \frac{Z_i}{N_i} + 1 &= e^{\alpha + \beta E_i} \\ \frac{N_i}{Z_i} &= \frac{1}{e^{\alpha + \beta E_i} - 1}\end{aligned}\tag{A.11}$$

ここで、 $N_i \gg 1$ より $1/N_i$ は無視した。左辺は 1 つの状態に入る平均粒子数を表している。

あとは α, β を決定すれば良い。エントロピー S の全微分は、熱力学から

$$TdS = dU + pdV - \mu dN\tag{A.12}$$

と表される。ここで、 T は温度、 U は内部エネルギー、 p は圧力、 V は体積、 μ は化学ポテンシャル、 N は粒子数を表す。体積が変化しないとすれば、

$$TdS = dU - \mu dN\tag{A.13}$$

となる。また、(A.3) 式的全微分を考えると、

$$\begin{aligned}dS &= k_B d(\ln W) \\ &= k_B \sum_i \ln \frac{Z_i + N_i - 1}{N_i} dN_i \\ &= k_B \sum_i \ln e^{\alpha + \beta E_i} dN_i \\ &= k_B \alpha \sum_i dN_i + k_B \beta \sum_i E_i dN_i \\ &= k_B \alpha dN + k_B \beta dU\end{aligned}\tag{A.14}$$

と表される。(A.13)、(A.14) 式を比較すれば、

$$\alpha = -\frac{\mu}{k_B T}, \quad \beta = \frac{1}{k_B T}\tag{A.15}$$

となる。よって (A.11) 式は

$$\frac{N_i}{Z_i} = \frac{1}{e^{(E_i - \mu)/k_B T} - 1}\tag{A.16}$$

となる。 i が連続的だとすれば

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E - \mu)/k_B T} - 1}\tag{A.17}$$

となり、これが Bose 分布関数である。

A.2 Fermi 分布関数

Fermi 分布関数については、§A.1 と同じ方法で計算できる。フェルミオンは 1 つの状態には 1 個の粒子しか入れないため、状態数の計算に違いが生じる。

状態数 Z_i 、粒子数 N_i の場合、 Z_i 個の状態の中から粒子が入る状態を N_i 個選べば良いので、

$$w_i = z_i C_{N_i} = \frac{Z_i!}{N_i!(Z_i - N_i)!}\tag{A.18}$$

となる。当然だが $N_i \leq Z_i$ である。

あとは §A.1 と同じなので、計算結果のみ記載する。

$$\frac{\partial F(N_i, \alpha, \beta)}{\partial N_i} = \ln \frac{Z_i - N_i}{N_i} - \alpha - \beta E_i\tag{A.19}$$

となり、(A.7) 式より

$$\frac{N_i}{Z_i} = \frac{1}{e^{\alpha+\beta E_i} + 1} \quad (\text{A.20})$$

α, β は (A.15) 式と同じなので、

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/k_B T} + 1} \quad (\text{A.21})$$

となり、これが Fermi 分布関数である。

付録 B $1 + 2 \leftrightarrow 3 + 4$ に対する衝突項（一般論）

ここでは、[18-20] の方法に基づき、 $1 + 2 \leftrightarrow 3 + 4$ の反応過程に対する衝突項

$$C[f_1] = -\frac{1}{2E_1} \mathcal{I} \quad (\text{B.1})$$

$$\mathcal{I} \equiv \int d\Pi_2 d\Pi_3 d\Pi_4 \Lambda(\{f_i\}) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 \quad (\text{B.2})$$

$$d\Pi_i = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \mathbf{p}_i}{2E_i}, \quad \Lambda(\{f_i\}) = f_1 f_2 (1 \pm f_3)(1 \pm f_4) - f_3 f_4 (1 \pm f_1)(1 \pm f_2) \quad (\text{B.3})$$

を 4 重積分に変形する。

初めに、Lorentz 不変な積分測度に対する公式

$$\frac{d^3 \mathbf{p}_i}{2E_i} = d^4 p_i \delta(p_i^2 - m_i^2) \Theta(p_i^0) \quad (\text{B.4})$$

を用いて p_4 積分を実行することで、

$$\mathcal{I} = \int d\Pi_2 d\Pi_3 \Lambda(\{f_i\}) (2\pi) \delta(p_4^2 - m_4^2) \Theta(p_4^0) \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 \Big|_{p_4=p_1+p_2-p_3} \quad (\text{B.5})$$

となる。次に、 $\mathbf{p}_1$ が z 軸を向くような座標系を取ることで、4 元運動量を次のように表す。

$$p_1 = (E_1, 0, 0, p_1) \quad (\text{B.6})$$

$$p_2 = (E_2, p_2 \sin \alpha \cos \beta, p_2 \sin \alpha \sin \beta, p_2 \cos \alpha) \quad (\text{B.7})$$

$$p_3 = (E_3, p_3 \sin \theta \cos \mu, p_3 \sin \theta \sin \mu, p_3 \cos \theta) \quad (\text{B.8})$$

$$p_4 = p_1 + p_2 - p_3 \quad (\text{B.9})$$

ここで、 $p_i = |\mathbf{p}_i|$ である。この座標系では、 z 軸周りの回転対称性から β もしくは μ をゼロに選ぶことができる。ここでは $\mu = 0$ とする。よって、4 元運動量は

$$p_1 = (E_1, 0, 0, p_1) \quad (\text{B.10})$$

$$p_2 = (E_2, p_2 \sin \alpha \cos \beta, p_2 \sin \alpha \sin \beta, p_2 \cos \alpha) \quad (\text{B.11})$$

$$p_3 = (E_3, p_3 \sin \theta, 0, p_3 \cos \theta) \quad (\text{B.12})$$

$$p_4 = p_1 + p_2 - p_3 \quad (\text{B.13})$$

となる。これより、(B.5) 式の μ 積分はただちに実行でき、

$$\mathcal{I} = \frac{1}{4(2\pi)^4} \int \frac{dp_2 p_2^2}{E_2} \frac{dp_3 p_3^2}{E_3} \Lambda(\{f_i\}) \int d\cos \theta d\cos \alpha \int_0^{2\pi} d\beta \delta(p_4^2 - m_4^2) \Theta(p_4^0) \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 \Big|_{p_4=p_1+p_2-p_3} \quad (\text{B.14})$$

となる。

残っているデルタ関数を β 積分に用いるために、引数を

$$\begin{aligned} f(\beta) &\equiv p_4^2 - m_4^2 \\ &= m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 - m_4^2 + 2p_1 \cdot p_2 - 2p_2 \cdot p_3 - 2p_3 \cdot p_1 \\ &= \omega + 2[p_2 p_3 (\sin \alpha \sin \theta \cos \beta + \cos \alpha \cos \theta) - p_1 p_2 \cos \alpha] \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

とする。ここで、

$$\omega \equiv Q + 2(\gamma + p_1 p_3 \cos \theta) \quad (\text{B.16})$$

$$Q \equiv m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 - m_4^2 \quad (\text{B.17})$$

$$\gamma \equiv E_1 E_2 - E_2 E_3 - E_3 E_1 \quad (\text{B.18})$$

である。さらに、デルタ関数の公式

$$\delta(f(\beta)) = \sum_i \frac{1}{|f'(\beta_i)|} \delta(\beta - \beta_i) \quad (\text{B.19})$$

を用いる。 β_i は $f(\beta) = 0$ の解である。 $f(\beta_i) = 0$ より、

$$\cos \beta_i = -\frac{1}{2p_2 p_3 \sin \alpha \sin \theta} [\omega + 2(p_2 p_3 \cos \alpha \cos \theta - p_1 p_2 \cos \alpha)] \quad (\text{B.20})$$

が得られる。よって、 $\beta_i = \pm \beta_0$ ($0 \leq \beta_0 \leq \pi$) という2つの解が存在する。 $\beta_i = \pm \beta_0$ のとき、

$$\begin{aligned} |f'(\beta_i)| &= |\mp 2p_2 p_3 \sin \alpha \sin \theta \sin \beta_0| \\ &= |2p_2 p_3 \sin \alpha \sin \theta \sqrt{1 - \cos^2 \beta_0}| \\ &= |2p_2 p_3 \sin \alpha \sin \theta| \frac{1}{|2p_2 p_3 \sin \alpha \sin \theta|} \\ &\quad \times \sqrt{(2p_2 p_3 \sin \alpha \sin \theta)^2 - [\omega + 2(p_2 p_3 \cos \alpha \cos \theta - p_1 p_2 \cos \alpha)]^2} \\ &= \sqrt{a \cos^2 \alpha + b \cos \alpha + c} \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

と表せる。ここで、

$$a = -4p_2^2(p_1^2 + p_3^2 - 2p_1 p_3 \cos \theta) \quad (\text{B.22})$$

$$b = 4\omega p_2(p_1 - p_3 \cos \theta) \quad (\text{B.23})$$

$$c = 4p_2^2 p_3^2 \sin^2 \theta - \omega^2 \quad (\text{B.24})$$

である。 $\sum |\mathcal{M}|^2$ の β 依存性は $\cos \beta$ の形だけなので、 $\beta = \pm \beta_0$ のどちらも同じ寄与になる。よって、 β 積分を実行すると、

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\beta \delta(f(\beta)) \Theta(p_4^0) \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} d\beta \sum_i \frac{1}{|f'(\beta_i)|} \delta(\beta - \beta_i) \Theta(p_4^0) \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 \\ &= \frac{2}{|f'(\beta_0)|} \Theta(p_4^0) \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2|_{\beta=\beta_0} \Theta(\sin^2 \beta_0) \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

となる。 $\Theta(\sin^2 \beta_0)$ は (B.20) 式の右辺が $[-1, 1]$ の値を取ることが保証されないため、かけておく必要がある (範囲外の値を取った場合、 $\sin^2 \beta_0 < 0$ となるため、この形にする)。また、この階段関数は

$$\begin{aligned} \Theta(\sin^2 \beta_0) &= \Theta((2p_2 p_3 \sin \alpha \sin \theta)^2 \sin^2 \beta_0) \\ &= \Theta(|f'(\beta_0)|^2) \\ &= \Theta(a \cos^2 \alpha + b \cos \alpha + c) \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

と書き換えられるので、 β 積分の最終結果は

$$\int_0^{2\pi} d\beta \delta(f(\beta)) \Theta(p_4^0) \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{2}{\sqrt{a \cos^2 \alpha + b \cos \alpha + c}} \Theta(p_4^0) \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2|_{\beta=\beta_0} \Theta(a \cos^2 \alpha + b \cos \alpha + c) \quad (\text{B.27})$$

となる。

次に、 $\cos \theta, \cos \alpha$ 積分に注目する。 $\mathcal{I}$ を次のように表す。

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2(2\pi)^4} \int \frac{dp_2 p_2^2}{E_2} \frac{dp_3 p_3^2}{E_3} \Lambda(\{f_i\}) \times \mathcal{J} \quad (\text{B.28})$$

$$\mathcal{J} = \int d\cos \theta d\cos \alpha \frac{1}{\sqrt{a \cos^2 \alpha + b \cos \alpha + c}} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 \Theta(a \cos^2 \alpha + b \cos \alpha + c) \Theta(p_4^0) \quad (\text{B.29})$$

$\cos \alpha$ 積分は、階段関数により $a \cos^2 \alpha + b \cos \alpha + c > 0$ となる領域だけが積分値に寄与する。この領域は、(B.22) 式より $a \leq 0$ であるから、 $a \cos^2 \alpha + b \cos \alpha + c = 0$ が 2 つの実数解を持つ場合である。つまり、

$$\Theta(a \cos^2 \alpha + b \cos \alpha + c) = \Theta(b^2 - 4ac) \quad (\text{B.30})$$

と置き換えられる。また、積分領域は 2 つの実数解 $\cos \alpha_{\pm} = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$ の間になる ($\cos \alpha_{\pm}$ は常に $\cos \alpha_{+} \leq 1$, $\cos \alpha_{-} \geq -1$ である)。よって、

$$\mathcal{J} = \int d \cos \theta F(\{p_i\}, \cos \theta) \Theta(b^2 - 4ac) \Theta(p_4^0) \quad (\text{B.31})$$

$$F(\{p_i\}, \cos \theta) = \int_{\cos \alpha_{-}}^{\cos \alpha_{+}} d \cos \alpha \frac{1}{\sqrt{a \cos^2 \alpha + b \cos \alpha + c}} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 \quad (\text{B.32})$$

と書ける。さらに、 $F(\{p_i\}, \cos \theta)$ は変数変換を行うことでもう少し簡単な形にできる。

$$\begin{aligned} F(\{p_i\}, \cos \theta) &= \frac{1}{\sqrt{-a}} \int_{\cos \alpha_{-}}^{\cos \alpha_{+}} d \cos \alpha \frac{1}{\sqrt{-(\cos \alpha - \cos \alpha_{+})(\cos \alpha - \cos \alpha_{-})}} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{-a}} \int_{\cos \alpha_{-}}^{\cos \alpha_{+}} d \cos \alpha \frac{1}{\sqrt{B^2 - (\cos \alpha - A)^2}} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

と変形する。ここで、 $A = (\cos \alpha_{+} + \cos \alpha_{-})/2$, $B = (\cos \alpha_{+} - \cos \alpha_{-})/2$ である。そして、

$$\cos \alpha - A = B \cos x \quad (\text{B.34})$$

と変数変換することで、

$$\begin{aligned} F(\{p_i\}, \cos \theta) &= \frac{1}{\sqrt{-a}} \int_{\pi}^0 dx \frac{-B \sin x}{\sqrt{B^2 - B^2 \cos^2 x}} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{-a}} \int_0^{\pi} dx \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

となる。

$\cos \theta$ 積分は、階段関数により $b^2 - 4ac > 0$ となる領域だけが積分値に寄与する。この条件は、

$$b^2 - 4ac = (4p_2 p_3 \sin \theta)^2 (a' \cos^2 \theta + b' \cos \theta + c') > 0 \quad (\text{B.36})$$

$$\longrightarrow a' \cos^2 \theta + b' \cos \theta + c' > 0 \quad (\text{B.37})$$

と書き換えられる。ただし

$$a' = -4p_1^2 p_3^2 \quad (\text{B.38})$$

$$b' = -4p_1 p_3 (Q + 2\gamma + 2p_2^2) \quad (\text{B.39})$$

$$c' = 4p_2^2 (p_1^2 + p_3^2) - (Q + 2\gamma)^2 \quad (\text{B.40})$$

である。 $a' \leq 0$ より、 $a' \cos^2 \theta + b' \cos \theta + c' > 0$ は $a' \cos^2 \theta + b' \cos \theta + c' = 0$ が 2 つの実数解を持つことに対応し、積分範囲は実数解

$$\cos \theta_{\pm} = -\frac{Q + 2\gamma + 2p_2^2 \mp 2p_2 \sqrt{Q + 2\gamma + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}{2p_1 p_3} \quad (\text{B.41})$$

の間の領域になる。ただし、 $\cos \theta_{\pm}$ は $[-1, 1]$ の値を取ることが保証されないので、積分範囲の上限、下限に気をつけると、

$$\mathcal{J} = \int_{\max(\cos \theta_{-}, -1)}^{\min(\cos \theta_{+}, 1)} d \cos \theta F(\{p_i\}, \cos \theta) \Theta(p_4^0) \quad (\text{B.42})$$

となる。

以上より、 $\mathcal{I}$ は

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2(2\pi)^4} \int \frac{dp_2 p_2^2}{E_2} \frac{dp_3 p_3^2}{E_3} \Lambda(\{f_i\}) \int_{\max(\cos \theta_{-}, -1)}^{\min(\cos \theta_{+}, 1)} d \cos \theta \frac{1}{\sqrt{-a}} \int_0^{\pi} dx \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 \Theta(p_4^0) \quad (\text{B.43})$$

となる。

付録 C ニュートリノの SM 反応過程の粒子数遷移率、エネルギー遷移率

ここでは、ニュートリノの SM 反応過程の粒子数遷移率、エネルギー遷移率を導出する。

C.1 $\nu_\alpha \bar{\nu}_\alpha \leftrightarrow e^- e^+$

§3.2.1 の近似 3, 4 より全ての粒子を massless として扱えるので、衝突項は近似 2 を用いると、

$$\begin{aligned}
 C_{\nu_\alpha \bar{\nu}_\alpha \leftrightarrow e^- e^+}[f_{\nu_\alpha}] &= -\frac{1}{2E_1} \int d\Pi_2 d\Pi_3 d\Pi_4 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \\
 &\quad \times (f_{\nu_\alpha}(p_1) f_{\bar{\nu}_\alpha}(p_2) - f_{e^-}(p_3) f_{e^+}(p_4)) \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{\nu_\alpha \bar{\nu}_\alpha \leftrightarrow e^- e^+}|^2 \\
 &= -\frac{1}{2E_1} \int d\Pi_2 \left(e^{-(p_1 + p_2 - 2\mu_\nu)/T_\nu} - e^{-(p_1 + p_2)/T_\gamma} \right) \\
 &\quad \times \int d\Pi_3 d\Pi_4 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{\nu_\alpha \bar{\nu}_\alpha \leftrightarrow e^- e^+}|^2
 \end{aligned} \tag{C.1}$$

となる。最後の等号では、最後の等号では、エネルギー保存（積分内の $\delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4)$ ）を用いた。

初めに p_3, p_4 積分を実行する。この積分を

$$I = \int d\Pi_3 d\Pi_4 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{\nu_\alpha \bar{\nu}_\alpha \leftrightarrow e^- e^+}|^2 \tag{C.2}$$

と置く。 I は Lorentz 不変なので、積分値は慣性系に依らない。よって、重心系 ($\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$, $\theta_{\text{CM}} : \mathbf{p}_1$ と $\mathbf{p}_3$ のなす角) を選ぶ。このとき Mandelstam 変数は

$$s = 4p_1^2 \tag{C.3}$$

$$t = -2p_1 \cdot p_3 = -2p_1^2(1 - \cos \theta_{\text{CM}}) = -\frac{1}{2}s(1 - \cos \theta_{\text{CM}}) \tag{C.4}$$

$$u = -2p_1 \cdot p_4 = -2p_1^2(1 + \cos \theta_{\text{CM}}) = -\frac{1}{2}s(1 + \cos \theta_{\text{CM}}) \tag{C.5}$$

となる。これを用いて、振幅の二乗は

$$\begin{aligned}
 \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{\nu_\alpha \bar{\nu}_\alpha \leftrightarrow e^- e^+}|^2 &= 128G_F^2 [g_{\alpha L}^2(p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) + g_{\alpha R}^2(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4)] \\
 &= 8G_F^2 s^2 [g_{\alpha L}^2(1 + \cos \theta_{\text{CM}})^2 + g_{\alpha R}^2(1 - \cos \theta_{\text{CM}})]
 \end{aligned} \tag{C.6}$$

となる。ここで、

$$g_{\alpha L} = \begin{cases} \frac{1}{2}(C_A + C_V + 2) = \frac{1}{2} + \sin^2 \theta_W & (\alpha = e) \\ \frac{1}{2}(C_A + C_V) = -\frac{1}{2} + \sin^2 \theta_W & (\alpha = \mu, \tau) \end{cases} \tag{C.7}$$

$$g_{\alpha R} = \frac{1}{2}(C_V - C_A) = \sin^2 \theta_W \quad (\alpha = e, \mu, \tau) \tag{C.8}$$

である。 $g_{\alpha L}$ がフレーバーによって異なるのは、 $\nu_{eL} \bar{\nu}_{eR} \leftrightarrow e_L^- e_R^+$ の反応過程のみ、中間状態が W ボソンになる diagram が存在するためである。よって I は、 $p_1 = p_2$, $p_3 = p_4$ であることを用いると、

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{16\pi^2} \int d^3p_3 \frac{1}{p_3^2} \frac{1}{2} \delta(p_1 - p_3) \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{\nu_\alpha \bar{\nu}_\alpha \leftrightarrow e^- e^+}|^2 \\
 &= \frac{1}{16\pi} 8G_F^2 s^2 \int_{-1}^1 d\cos \theta_{\text{CM}} [g_{\alpha L}^2(1 + \cos \theta_{\text{CM}})^2 + g_{\alpha R}^2(1 - \cos \theta_{\text{CM}})] \\
 &= \frac{4G_F^2(g_{\alpha L}^2 + g_{\alpha R}^2)}{3\pi} s^2
 \end{aligned} \tag{C.9}$$

となる。

次に p_2 積分を実行する。 $\mathbf{p}_1$ が z 軸方向を向くような座標系 ($\theta: \mathbf{p}_1$ と $\mathbf{p}_2$ のなす角) を取る。このとき Mandelstam 変数の s は

$$s = (p_1 + p_2)^2 = 2p_1 p_2 (1 - \cos \theta) \quad (\text{C.10})$$

となる。よって

$$\begin{aligned} C_{\nu_\alpha \bar{\nu}_\alpha \leftrightarrow e^- e^+}(p_1) &= -\frac{1}{2p_1} \int d\Pi_2 \left(e^{-(p_1+p_2-2\mu_\nu)/T_\nu} - e^{-(p_1+p_2)/T_\gamma} \right) \frac{4G_F^2(g_{\alpha L}^2 + g_{\alpha R}^2)}{3\pi} s^2 \\ &= -\frac{G_F^2(g_{\alpha L}^2 + g_{\alpha R}^2)}{3\pi^3} \int_0^\infty dp_2 \left(e^{-p_1/T_\nu} e^{-p_2/T_\nu} e^{2\mu_\nu/T_\nu} - e^{-p_1/T_\gamma} e^{-p_2/T_\gamma} \right) \int_{-1}^1 d\cos\theta (1 - \cos\theta)^2 \\ &= \frac{16G_F^2(g_{\alpha L}^2 + g_{\alpha R}^2)}{3\pi^3} p_1 \left(T_\gamma^4 e^{-p_1/T_\gamma} - T_\nu^4 e^{-p_1/T_\nu} e^{2\mu_\nu/T_\nu} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

となるので、粒子数遷移率とエネルギー遷移率は

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta n_{\nu_\alpha}}{\delta t} \right|_{\nu_\alpha \bar{\nu}_\alpha \leftrightarrow e^- e^+} &= \frac{8G_F^2(g_{\alpha L}^2 + g_{\alpha R}^2)}{3\pi^5} \int_0^\infty dp_1 p_1^3 \left(T_\gamma^4 e^{-p_1/T_\gamma} - T_\nu^4 e^{-p_1/T_\nu} e^{2\mu_\nu/T_\nu} \right) \\ &= \frac{16G_F^2(g_{\alpha L}^2 + g_{\alpha R}^2)}{\pi^5} \left(T_\gamma^8 - T_\nu^8 e^{2\mu_\nu/T_\nu} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta \rho_{\nu_\alpha}}{\delta t} \right|_{\nu_\alpha \bar{\nu}_\alpha \leftrightarrow e^- e^+} &= \frac{8G_F^2(g_{\alpha L}^2 + g_{\alpha R}^2)}{3\pi^5} \int_0^\infty dp_1 p_1^4 \left(T_\gamma^4 e^{-p_1/T_\gamma} - T_\nu^4 e^{-p_1/T_\nu} e^{2\mu_\nu/T_\nu} \right) \\ &= \frac{64G_F^2(g_{\alpha L}^2 + g_{\alpha R}^2)}{\pi^5} \left(T_\gamma^9 - T_\nu^9 e^{2\mu_\nu/T_\nu} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

と表される。

C.2 $\nu_\alpha e^\pm \leftrightarrow \nu_\alpha e^\pm$

§C.1 と同様に、衝突項は

$$\begin{aligned} C_{\nu_\alpha e^\pm \leftrightarrow \nu_\alpha e^\pm}[f_{\nu_\alpha}] &= C_{\nu_\alpha e^- \leftrightarrow \nu_\alpha e^-}[f_{\nu_\alpha}] + C_{\nu_\alpha e^+ \leftrightarrow \nu_\alpha e^+}[f_{\nu_\alpha}] \\ &= -\frac{1}{2E_1} \int d\Pi_2 d\Pi_3 d\Pi_4 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \\ &\quad \times \left(e^{-p_1/T_\nu} e^{-p_2/T_\gamma} - e^{-p_3/T_\nu} e^{-p_4/T_\gamma} \right) \left[\sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{\nu_\alpha e^- \leftrightarrow \nu_\alpha e^-}|^2 + \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{\nu_\alpha e^+ \leftrightarrow \nu_\alpha e^+}|^2 \right] \\ &= -\frac{1}{2E_1} \left[e^{-p_1/T_\nu} \int d\Pi_2 e^{-p_2/T_\gamma} \int d\Pi_3 d\Pi_4 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \right. \\ &\quad \left. - \int d\Pi_2 d\Pi_3 d\Pi_4 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) e^{-p_3/T_\nu} e^{-p_4/T_\gamma} \right] \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{\nu_\alpha e^\pm \leftrightarrow \nu_\alpha e^\pm}|^2 \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

と表せる。ここで、

$$\begin{aligned} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{\nu_\alpha e^\pm \leftrightarrow \nu_\alpha e^\pm}|^2 &= \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{\nu_\alpha e^- \leftrightarrow \nu_\alpha e^-}|^2 + \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{\nu_\alpha e^+ \leftrightarrow \nu_\alpha e^+}|^2 \\ &= 128G_F^2 \left[g_{\alpha L}^2 \left(\frac{s}{2} \right)^2 + g_{\alpha R}^2 \left(\frac{u}{2} \right)^2 \right] + 128G_F^2 \left[g_{\alpha L}^2 \left(\frac{u}{2} \right)^2 + g_{\alpha R}^2 \left(\frac{s}{2} \right)^2 \right] \\ &= 128G_F^2 (g_{\alpha L}^2 + g_{\alpha R}^2) \left[\left(\frac{s}{2} \right)^2 + \left(\frac{u}{2} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

である。

前半の積分は、§C.1 と同様に計算できる。

$$I_1 = \int d\Pi_3 d\Pi_4 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{\nu_\alpha e^\pm \leftrightarrow \nu_\alpha e^\pm}|^2 \quad (\text{C.16})$$

と置くと、重心系を取れるので、

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{16\pi} 32G_F^2 (g_{\alpha L}^2 + g_{\alpha R}^2) \int_{-1}^1 d\cos\theta_{\text{CM}} \left[s^2 + \frac{s^2}{4} (1 + \cos\theta_{\text{CM}})^2 \right] \\ &= \frac{16G_F^2 (g_{\alpha L}^2 + g_{\alpha R}^2)}{3\pi} s^2 \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

となる。そして $\mathbf{p}_1$ を z 軸方向に取ると、

$$\begin{aligned} (\text{C.14 式前半}) &= -\frac{4G_F^2 (g_{\alpha L}^2 + g_{\alpha R}^2)}{3\pi^3} p_1 e^{-p_1/T_\nu} \int_0^\infty dp_2 p_2^3 e^{-p_2/T_\gamma} \int_{-1}^1 d\cos\theta (1 - \cos\theta)^2 \\ &= -\frac{64G_F^2 (g_{\alpha L}^2 + g_{\alpha R}^2)}{3\pi^3} p_1 T_\gamma^4 e^{-p_1/T_\nu} \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

となる。

後半の積分については、分布関数にも p_3, p_4 積分がかかるため、§C.1 の方法は使えない。そのため、付録 B の方法を用いる必要がある。

p_1 が z 軸を向くような座標系を取り、運動量を次のように表す。

$$p_1 = (p_1, 0, 0, p_1) \quad (\text{C.19})$$

$$p_2 = (p_2, p_2 \sin\alpha \cos\beta, p_2 \sin\alpha \sin\beta, p_2 \cos\alpha) \quad (\text{C.20})$$

$$p_3 = (p_3, p_3 \sin\theta, 0, p_3 \cos\theta) \quad (\text{C.21})$$

$$p_4 = p_1 + p_2 - p_3 \quad (\text{C.22})$$

このとき Mandelstam 変数は

$$s = 2p_1 \cdot p_2 = 2p_1 p_2 (1 - \cos\alpha) \quad (\text{C.23})$$

$$t = -2p_1 \cdot p_3 = -2p_1 p_3 (1 - \cos\theta) \quad (\text{C.24})$$

$$u = -s - t = -2p_1 p_2 (1 - \cos\alpha) + 2p_1 p_3 (1 - \cos\theta) \quad (\text{C.25})$$

となる。 u は $s + t + u = \sum m_i = 0$ を用いた。これより、

$$\begin{aligned} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{\nu_\alpha e^\pm \leftrightarrow \nu_\alpha e^\pm}|^2 &= 128G_F^2 (g_{\alpha L}^2 + g_{\alpha R}^2) \left[p_1^2 p_2^2 (1 - \cos\alpha)^2 + (-p_1 p_2 (1 - \cos\alpha) + p_1 p_3 (1 - \cos\theta))^2 \right] \\ &= 256G_F^2 (g_{\alpha L}^2 + g_{\alpha R}^2) p_1^2 \left[p_2^2 \cos^2\alpha + p_2 (-2p_2 + p_3 (1 - \cos\theta)) \cos\alpha \right. \\ &\quad \left. + p_2 (p_2 - p_3 (1 - \cos\theta)) + \frac{1}{2} p_3^2 (1 - \cos\theta)^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

となる。これを用いると、(B.32) 式は

$$\begin{aligned} F(\{p_i\}, \cos\theta) &= 256G_F^2 (g_{\alpha L}^2 + g_{\alpha R}^2) p_1^2 \frac{\pi}{\sqrt{-a}} \left[p_2^2 \frac{3b^2 - 4ac}{8a^2} + p_2 (-2p_2 + p_3 (1 - \cos\theta)) \frac{-b}{2a} \right. \\ &\quad \left. + p_2 (p_2 - p_3 (1 - \cos\theta)) + \frac{1}{2} p_3^2 (1 - \cos\theta)^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

となる。ただし、

$$\int_\alpha^\beta dx \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{\pi}{\sqrt{-a}} \quad (\text{C.28})$$

$$\int_\alpha^\beta dx \frac{x}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{\pi}{\sqrt{-a}} \frac{-b}{2a} \quad (\text{C.29})$$

$$\int_\alpha^\beta dx \frac{x^2}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{\pi}{\sqrt{-a}} \frac{3b^2 - 4ac}{8a^2} \quad (\text{C.30})$$

を用いた (α, β ($\alpha < \beta$) は $ax^2 + bx + c = 0$ ($a < 0$) の解)。また、(B.3) 式の $\Lambda(\{f_i\})$ は

$$\begin{aligned}\Lambda(\{f_i\}) &= e^{-p_3/T_\nu} e^{-p_4/T_\gamma} \\ &= e^{-p_3/T_\nu} e^{-(p_1+p_2-p_3)/T_\gamma}\end{aligned}\tag{C.31}$$

$$= e^{-p_1/T_\gamma} e^{-p_2/T_\gamma} e^{-p_3(T_\gamma-T_\nu)/T_\gamma T_\nu}\tag{C.32}$$

と書き直せる。よって、

$$\begin{aligned}(\text{C.14 式後半}) &= \frac{256G_F^2(g_{\alpha L}^2 + g_{\alpha R}^2)}{2p_1 2(2\pi)^4} p_1^2 \pi e^{-p_1/T_\gamma} \int_0^\infty dp_2 \int_0^{p_1+p_2} dp_3 \int_{\max(\cos\theta_-, -1)}^1 d\cos\theta \\ &\quad \times p_2 e^{-p_2/T_\gamma} p_3 e^{-p_3(T_\gamma-T_\nu)/T_\gamma T_\nu} \frac{1}{\sqrt{-a}} \left[p_2^2 \frac{3b^2 - 4ac}{8a^2} + p_2(-2p_2 + p_3(1 - \cos\theta)) \frac{-b}{2a} \right. \\ &\quad \left. + p_2(p_2 - p_3(1 - \cos\theta)) + \frac{1}{2} p_3^2(1 - \cos\theta)^2 \right] \\ &= \frac{4G_F^2(g_{\alpha L}^2 + g_{\alpha R}^2)}{\pi^3} p_1 e^{-p_1/T_\gamma} \frac{4T_\gamma^2 T_\nu^2}{p_1^3(T_\nu - T_\gamma)^3} e^{-p_1/T_\nu} \left[-e^{p_1/T_\nu} T_\gamma^2 \{p_1^2(T_\gamma - T_\nu)^2 \right. \\ &\quad + 2p_1 T_\gamma(T_\gamma - T_\nu)^2 + 2T_\gamma^2(2T_\gamma^2 - 2T_\gamma T_\nu + T_\nu^2)\} + 2e^{p_1/T_\gamma} T_\gamma^2 \{p_1^2(T_\gamma - T_\nu)^2 \\ &\quad \left. + p_1 T_\nu(2T_\gamma^2 - 3T_\gamma T_\nu + T_\nu^2) + T_\nu^2(2T_\gamma^2 - 2T_\gamma T_\nu + T_\nu^2)\} \right]\end{aligned}\tag{C.33}$$

となる。

以上より衝突項は

$$\begin{aligned}C_{\nu_\alpha e^\pm \leftrightarrow \nu_\alpha e^\pm}(p_1) &= \frac{16G_F^2(g_{\alpha L}^2 + g_{\alpha R}^2)T_\gamma^2}{3p_1^2\pi^3(T_\nu - T_\gamma)^3} e^{-p_1/T_\nu} \left[-6\left(-1 + e^{p_1(1/T_\nu - 1/T_\gamma)}\right) T_\gamma^2 T_\nu^4(2T_\gamma^2 - 2T_\gamma T_\nu + T_\nu^2) \right. \\ &\quad + 4p_1^3 T_\gamma^2(T_\gamma - T_\nu)^3 + 3p_1^2 T_\nu^2(T_\gamma - T_\nu)^2(2T_\gamma^2 - e^{p_1(1/T_\nu - 1/T_\gamma)} T_\nu^2) \\ &\quad \left. + 6p_1 T_\gamma T_\nu^3(T_\gamma - T_\nu) \left\{ 2T_\gamma^2 - \left(1 + e^{p_1(1/T_\nu - 1/T_\gamma)}\right) T_\gamma T_\nu + e^{p_1(1/T_\nu - 1/T_\gamma)} T_\nu^2 \right\} \right]\end{aligned}\tag{C.34}$$

となり、遷移率は

$$\left. \frac{\delta n_{\nu_\alpha}}{\delta t} \right|_{\nu_\alpha e^\pm \leftrightarrow \nu_\alpha e^\pm} = 0\tag{C.35}$$

$$\left. \frac{\delta \rho_{\nu_\alpha}}{\delta t} \right|_{\nu_\alpha e^\pm \leftrightarrow \nu_\alpha e^\pm} = \frac{112G_F^2(g_{\alpha L}^2 + g_{\alpha R}^2)}{\pi^5} T_\gamma^4 T_\nu^4 (T_\gamma - T_\nu)\tag{C.36}$$

となる。粒子数遷移率が 0 になるのは、 $\nu_\alpha e^\pm \leftrightarrow \nu_\alpha e^\pm$ の反応では粒子数が変化しないためである。

C.3 $\bar{\nu}_\alpha e^\pm \leftrightarrow \bar{\nu}_\alpha e^\pm$

ニュートリノを massless として扱う場合、計算上は粒子・反粒子の違いはない。そのため、 $\bar{\nu}_\alpha e^\pm \leftrightarrow \bar{\nu}_\alpha e^\pm$ に対する遷移率は、 $\nu_\alpha e^\pm \leftrightarrow \nu_\alpha e^\pm$ に対する遷移率と同じである。よって

$$\left. \frac{\delta n_{\bar{\nu}_\alpha}}{\delta t} \right|_{\bar{\nu}_\alpha e^\pm \leftrightarrow \bar{\nu}_\alpha e^\pm} = 0\tag{C.37}$$

$$\left. \frac{\delta \rho_{\bar{\nu}_\alpha}}{\delta t} \right|_{\bar{\nu}_\alpha e^\pm \leftrightarrow \bar{\nu}_\alpha e^\pm} = \frac{112G_F^2(g_{\alpha L}^2 + g_{\alpha R}^2)}{\pi^5} T_\gamma^4 T_\nu^4 (T_\gamma - T_\nu)\tag{C.38}$$

となる。

付録 D 崩壊・逆崩壊過程の粒子数遷移率、エネルギー遷移率

ここでは、崩壊・逆崩壊過程の粒子数遷移率、エネルギー遷移率の一般形を導出する。粒子種 a (温度 T_a 、化学ポテンシャル μ_a) と粒子種 i, j (温度 T 、化学ポテンシャル μ) の $a \leftrightarrow i + j$ という反応を考える。衝突項では Maxwell-Boltzmann 分布を用いる。

$a \leftrightarrow i + j$ に対する衝突項は

$$C_{a \leftrightarrow i+j}[f_a] = -\frac{1}{2E_a S_{ij}} \int d\Pi_i d\Pi_j (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_a - p_i - p_j) \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{a \leftrightarrow i+j}|^2 \\ \times [f_a(1 \pm f_i)(1 \pm f_j) - f_i f_j(1 \pm f_a)] \quad (\text{D.1})$$

である。ここで、 S_{ij} は対称性因子で、

$$S_{ij} = \begin{cases} 2 & i = j \\ 1 & i \neq j \end{cases} \quad (\text{D.2})$$

である。 i と j が同じ粒子種だった場合の二重勘定を防ぐために必要である。

分布関数は Maxwell-Boltzmann 分布を用いるので、 $1 \pm f \simeq 1$ と近似できるとする。分布関数の部分に注目すると、

$$f_a - f_i f_j = e^{-(E_a - \mu_a)/T_a} - e^{-(E_i - \mu)/T} e^{-(E_j - \mu)/T} \\ = e^{-(E_a - \mu_a)/T_a} - e^{-(E_i + E_j - 2\mu)/T} \\ = e^{-(E_a - \mu_a)/T_a} - e^{-(E_a - 2\mu)/T} \quad (\text{D.3})$$

と変形できる。最後の等号では、エネルギー保存（積分内の $\delta(E_a - E_i - E_j)$ ）を用いた。この変形により分布関数は積分の外に出すことができ、

$$C_{a \leftrightarrow i+j}(p_a) = -\frac{g_a m_a}{E_a} \left(e^{-(E_a - \mu_a)/T_a} - e^{-(E_a - 2\mu)/T} \right) \\ \times \frac{1}{2g_a m_a S_{ij}} \int d\Pi_i d\Pi_j (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_a - p_i - p_j) \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{a \leftrightarrow i+j}|^2 \\ = -\frac{g_a m_a \Gamma_a}{E_a} \left(e^{-(E_a - \mu_a)/T_a} - e^{-(E_a - 2\mu)/T} \right) \quad (\text{D.4})$$

となる。ただし、 g_a は粒子種 a の自由度、 Γ_a は粒子種 a の崩壊幅である。

これより、 $a \leftrightarrow i + j$ に対する粒子数遷移率、エネルギー遷移率は、

$$\left. \frac{\delta n_a}{\delta t} \right|_{a \leftrightarrow i+j} = \int \frac{d^3 p_a}{(2\pi)^3} C_{a \leftrightarrow i+j}(p_a) \\ = \frac{g_a m_a \Gamma_a}{2\pi^2} \int_0^\infty dp_a \frac{p_a^2}{E_a} \left(e^{-(E_a - 2\mu)/T} - e^{-(E_a - \mu_a)/T_a} \right) \\ = \frac{g_a m_a^2 \Gamma_a}{2\pi^2} \left[T e^{2\mu/T} K_1\left(\frac{m_a}{T}\right) - T_a e^{\mu_a/T_a} K_1\left(\frac{m_a}{T_a}\right) \right] \quad (\text{D.5})$$

$$\left. \frac{\delta \rho_a}{\delta t} \right|_{a \leftrightarrow i+j} = \int \frac{d^3 p_a}{(2\pi)^3} E_a C_{a \leftrightarrow i+j}(p_a) \\ = \frac{g_a m_a \Gamma_a}{2\pi^2} \int_0^\infty dp_a p_a^2 \left(e^{-(E_a - 2\mu)/T} - e^{-(E_a - \mu_a)/T_a} \right) \\ = \frac{g_a m_a^3 \Gamma_a}{2\pi^2} \left[T e^{2\mu/T} K_2\left(\frac{m_a}{T}\right) - T_a e^{\mu_a/T_a} K_2\left(\frac{m_a}{T_a}\right) \right] \quad (\text{D.6})$$

となる。ただし、 K_1, K_2 は第 2 種変形 Bessel 関数である。

付録 E Z' のみが存在する場合の N_{eff}

ここでは、 Z' のみが存在する場合に、温度の時間発展が SM と比較してどのように変わるのかをみる。簡単のため、§3.2.1 の近似と、化学ポテンシャルを無視する近似のもとで解く。その場合、 Z' の遷移率に関わる反応過程は $Z' \leftrightarrow e^- e^+$ のみになる。なぜなら、化学ポテンシャルを無視する場合、(3.77) 式より $Z' \leftrightarrow \nu \bar{\nu}$ の遷移率はゼロになるからである。

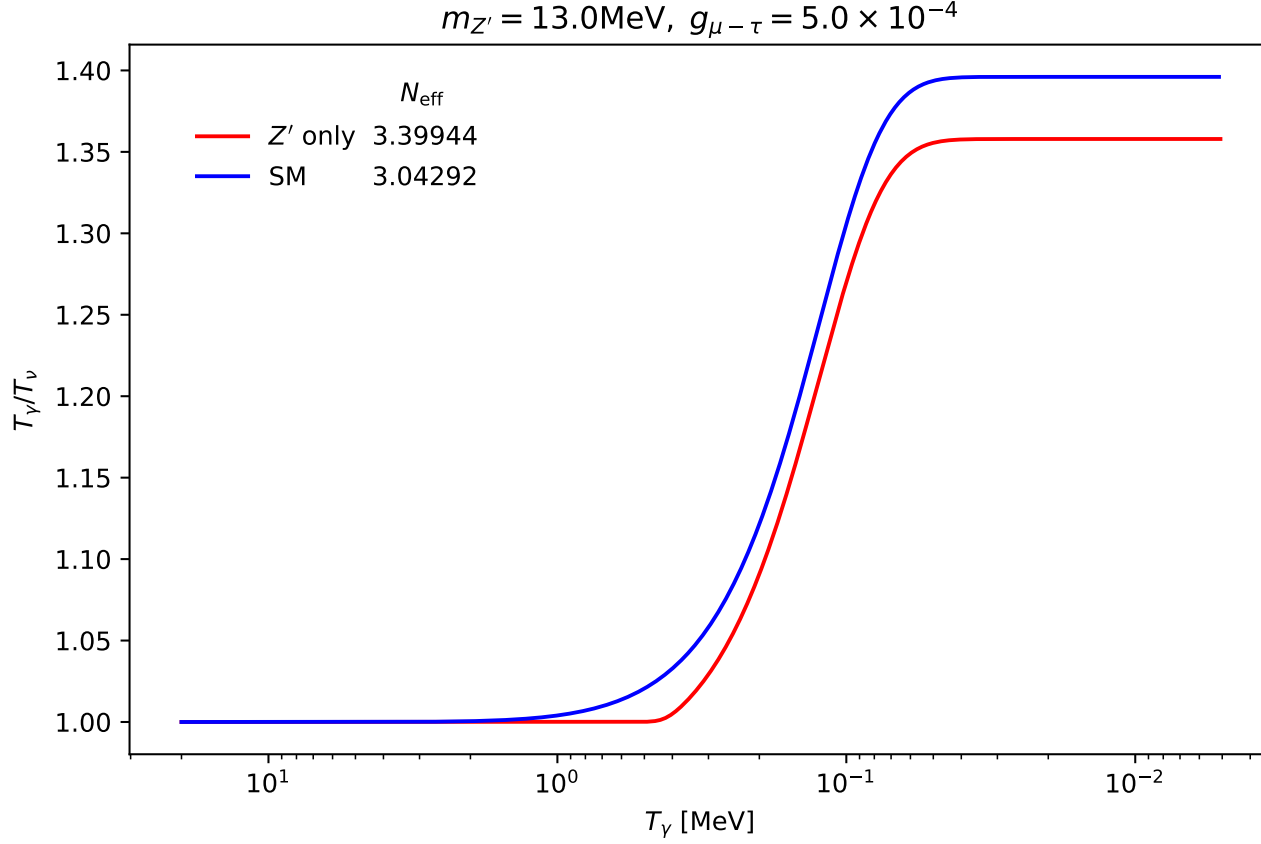


図 E.1 Z' のみが存在する場合（赤色）と、SM で計算した場合（青色）の時間発展の様子。
SM の $N_{\text{eff}} = 3.04292 \simeq 3.043$ は、より厳密に計算した $N_{\text{eff}} = 3.044$ [6] とよく一致している。

Z' に関するパラメータは本論文で用いた値で、

$$m_{Z'} = 13.0 \text{ MeV}, \quad g_{\mu-\tau} = 5.0 \times 10^{-4} \quad (\text{E.1})$$

とする。この場合、時間発展方程式は

Z' のみが存在する場合

$$\frac{dT_\gamma}{dt} = - \left(\frac{\partial \rho_\gamma}{\partial T_\gamma} + \frac{\partial \rho_e}{\partial T_\gamma} \right)^{-1} \left[4H\rho_\gamma + 3H(\rho_e + P_e) + \frac{\delta \rho_\nu}{\delta t} + \frac{\delta \rho_{Z'}}{\delta t} \right] \quad (\text{E.2})$$

$$\frac{dT_\nu}{dt} = - \left(\frac{\partial \rho_{Z'}}{\partial T_\nu} + \frac{\partial \rho_\nu}{\partial T_\nu} \right)^{-1} \left[3H(\rho_{Z'} + P_{Z'}) + 4H\rho_\nu - \frac{\delta \rho_{Z'}}{\delta t} - \frac{\delta \rho_\nu}{\delta t} \right] \quad (\text{E.3})$$

SM の場合

$$\frac{dT_\gamma}{dt} = - \left(\frac{\partial \rho_\gamma}{\partial T_\gamma} + \frac{\partial \rho_e}{\partial T_\gamma} \right)^{-1} \left[4H\rho_\gamma + 3H(\rho_e + P_e) + \frac{\delta \rho_\nu}{\delta t} \right] \quad (\text{E.4})$$

$$\frac{dT_\nu}{dt} = - \left(\frac{\partial \rho_\nu}{\partial T_\nu} \right)^{-1} \left[4H\rho_\nu - \frac{\delta \rho_\nu}{\delta t} \right] \quad (\text{E.5})$$

となる。この時間発展方程式を解いた結果が図 E.1 である。

SM の場合と比較して大きく異なるのは、ニュートリノの脱結合の時期である。 Z' が存在する場合は、ニュートリノの脱結合が $T_\gamma \simeq 0.5 \text{ MeV}$ まで遅くなる。これは、 $Z' \leftrightarrow e^-e^+$ が存在することで、SM の反応過程は平衡状態が切れているが、 $Z' \rightarrow \nu\bar{\nu} \rightarrow e^-e^+ \rightarrow Z'$ という一連の反応により、 Z', ν の熱浴と $\gamma, e^\pm$ の熱浴の間で平衡状態が達成されているためである。 $T_\gamma \simeq 0.5 \text{ MeV}$ よりも低い温度になると、電子・陽電子対消滅が始まり Z' を生成できなくなるため、このあたりで上記の平衡が切れてニュートリノが脱結合する。

付録 F 熱力学量

ここでは、温度と化学ポテンシャルの時間発展方程式の中に現れる熱力学量の計算式をまとめる。内部自由度を g 、粒子の質量を m 、温度を T 、化学ポテンシャルを μ とする。また、積分変数は無次元化しておく。

F.1 Fermi-Dirac 分布

$$n = \frac{g}{2\pi^2} T^3 \int_{m/T}^{\infty} dx \frac{x \sqrt{x^2 - m^2/T^2}}{e^{x-\mu/T} + 1} \quad (\text{F.1})$$

$$\rho = \frac{g}{2\pi^2} T^4 \int_{m/T}^{\infty} dx \frac{x^2 \sqrt{x^2 - m^2/T^2}}{e^{x-\mu/T} + 1} \quad (\text{F.2})$$

$$P = \frac{g}{6\pi^2} T^4 \int_{m/T}^{\infty} dx \frac{(x^2 - m^2/T^2)^{3/2}}{e^{x-\mu/T} + 1} \quad (\text{F.3})$$

$$\frac{\partial n}{\partial T} = \frac{g}{2\pi^2} T^2 \int_{m/T}^{\infty} dx x \sqrt{x^2 - m^2/T^2} \frac{x - m/T}{4} \cosh^{-2} \left(\frac{x - \mu/T}{2} \right) \quad (\text{F.4})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial T} = \frac{g}{2\pi^2} T^3 \int_{m/T}^{\infty} dx x^2 \sqrt{x^2 - m^2/T^2} \frac{x - m/T}{4} \cosh^{-2} \left(\frac{x - \mu/T}{2} \right) \quad (\text{F.5})$$

$$\frac{\partial n}{\partial \mu} = \frac{g}{2\pi^2} T^2 \int_{m/T}^{\infty} dx x \sqrt{x^2 - m^2/T^2} \frac{1}{2} \left[\cosh \left(x - \frac{\mu}{T} \right) + 1 \right]^{-1} \quad (\text{F.6})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \mu} = \frac{g}{2\pi^2} T^3 \int_{m/T}^{\infty} dx x^2 \sqrt{x^2 - m^2/T^2} \frac{1}{2} \left[\cosh \left(x - \frac{\mu}{T} \right) + 1 \right]^{-1} \quad (\text{F.7})$$

massless の場合

$$n = -g \frac{T^3}{\pi^2} \text{Li}_3(-y) \quad (\text{F.8})$$

$$\rho = -g \frac{3T^4}{\pi^2} \text{Li}_4(-y) \quad (\text{F.9})$$

$$P = \frac{\rho}{3} \quad (\text{F.10})$$

$$\frac{\partial n}{\partial T} = g \frac{T}{\pi^2} [\mu \text{Li}_2(-y) - 3T \text{Li}_3(-y)] \quad (\text{F.11})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial T} = g \frac{3T^2}{\pi^2} [\mu \text{Li}_3(-y) - 4T \text{Li}_4(-y)] \quad (\text{F.12})$$

$$\frac{\partial n}{\partial \mu} = -g \frac{T^2}{\pi^2} \text{Li}_2(-y) \quad (\text{F.13})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \mu} = -g \frac{3T^3}{\pi^2} \text{Li}_3(-y) \quad (\text{F.14})$$

massless かつ $\mu = 0$ の場合

$$n = g \frac{3}{4} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3 \quad (\text{F.15})$$

$$\rho = g \frac{7}{8} \frac{\pi^2}{30} T^4 \quad (\text{F.16})$$

$$P = \frac{\rho}{3} \quad (\text{F.17})$$

$$\frac{\partial n}{\partial T} = \frac{3n}{T} \quad (\text{F.18})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial T} = \frac{4\rho}{T} \quad (\text{F.19})$$

ただし、 $y = e^{\mu/T}$ 、 $\text{Li}_s(z)$ は多重対数関数である。

F.2 Bose-Einstein 分布

$$n = \frac{g}{2\pi^2} T^3 \int_{m/T}^{\infty} dx \frac{x \sqrt{x^2 - m^2/T^2}}{e^{x-\mu/T} - 1} \quad (\text{F.20})$$

$$\rho = \frac{g}{2\pi^2} T^4 \int_{m/T}^{\infty} dx \frac{x^2 \sqrt{x^2 - m^2/T^2}}{e^{x-\mu/T} - 1} \quad (\text{F.21})$$

$$P = \frac{g}{6\pi^2} T^4 \int_{m/T}^{\infty} dx \frac{(x^2 - m^2/T^2)^{3/2}}{e^{x-\mu/T} - 1} \quad (\text{F.22})$$

$$\frac{\partial n}{\partial T} = \frac{g}{2\pi^2} T^2 \int_{m/T}^{\infty} dx x \sqrt{x^2 - m^2/T^2} \frac{x - m/T}{4} \sinh^{-2} \left(\frac{x - \mu/T}{2} \right) \quad (\text{F.23})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial T} = \frac{g}{2\pi^2} T^3 \int_{m/T}^{\infty} dx x^2 \sqrt{x^2 - m^2/T^2} \frac{x - m/T}{4} \sinh^{-2} \left(\frac{x - \mu/T}{2} \right) \quad (\text{F.24})$$

$$\frac{\partial n}{\partial \mu} = \frac{g}{2\pi^2} T^2 \int_{m/T}^{\infty} dx x \sqrt{x^2 - m^2/T^2} \frac{1}{4} \sinh^{-2} \left(\frac{x - \mu/T}{2} \right) \quad (\text{F.25})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \mu} = \frac{g}{2\pi^2} T^3 \int_{m/T}^{\infty} dx x^2 \sqrt{x^2 - m^2/T^2} \frac{1}{4} \sinh^{-2} \left(\frac{x - \mu/T}{2} \right) \quad (\text{F.26})$$

massless の場合

$$n = g \frac{T^3}{\pi^2} \text{Li}_3(y) \quad (\text{F.27})$$

$$\rho = g \frac{3T^4}{\pi^2} \text{Li}_4(y) \quad (\text{F.28})$$

$$P = \frac{\rho}{3} \quad (\text{F.29})$$

$$\frac{\partial n}{\partial T} = g \frac{T}{\pi^2} [3T \text{Li}_3(y) - \mu \text{Li}_2(y)] \quad (\text{F.30})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial T} = g \frac{3T^2}{\pi^2} [4T \text{Li}_4(y) - \mu \text{Li}_3(y)] \quad (\text{F.31})$$

$$\frac{\partial n}{\partial \mu} = g \frac{T^2}{\pi^2} \text{Li}_2(y) \quad (\text{F.32})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \mu} = g \frac{3T^3}{\pi^2} \text{Li}_3(y) \quad (\text{F.33})$$

massless かつ $\mu = 0$ の場合

$$n = g \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3 \quad (\text{F.34})$$

$$\rho = g \frac{\pi^2}{30} T^4 \quad (\text{F.35})$$

$$P = \frac{\rho}{3} \quad (\text{F.36})$$

$$\frac{\partial n}{\partial T} = \frac{3n}{T} \quad (\text{F.37})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial T} = \frac{4\rho}{T} \quad (\text{F.38})$$

ただし、 $y = e^{\mu/T}$ 、 $\text{Li}_s(z)$ は多重対数関数である。

付録 G VEGAS 法

ここでは、散乱過程の遷移率の計算で用いた VEGAS 法について解説する。VEGAS 法のアルゴリズム等については [21] に詳しく書かれているため、主にプログラム内でどのように用いたか、VEGAS 法を使っている気づいたことなどを解説する。

VEGAS 法はモンテカルロ積分の手法の 1 つである。モンテカルロ積分というのは、乱数を用いる積分手法である。VEGAS 法を簡単に説明すると、

1. 積分変数に対して乱数を振り、被積分関数の期待値を計算する。
2. 期待値が大きい部分に乱数の分布を偏らせ、新しい乱数の分布を作る。
3. 新しい分布で積分変数に乱数を振り、被積分関数の期待値を計算する。

という作業を繰り返し行なう。乱数の分布を偏らせていくのがポイントで、積分結果に大きく寄与する部分に乱数が集まるため、積分値が正確に得られる。

運動量積分のような無限大の積分区間がある場合は、無限大の範囲に乱数を振るのは不可能なため、変数変換を用いて積分範囲を有限にする必要がある。今回行った変数変換は、元の積分変数を p 、変換後を x として、

$$\text{積分範囲：} 0 \text{ から } \infty \Rightarrow p = \frac{1-x}{x} \quad (x: 1 \text{ から } 0) \quad (\text{G.1})$$

$$\text{積分範囲：} -\infty \text{ から } \infty \Rightarrow p = \frac{x}{1-x^2} \quad (x: -1 \text{ から } 1) \quad (\text{G.2})$$

というものである。ごく稀に分母が正確に 0 になってしまい、0 割りでエラーになってしまうことがある。(このようなエラーが出ない変数変換を思いついたら是非教えていただきたい。)

VEGAS 法では、乱数が積分に大きく寄与する部分に集まるように乱数の確率分布が更新されていく。そのため、鋭いピークを持つような関数の場合は工夫したほうが良い場合もある。例えば、被積分関数を次のように書き直せるか考えてみる。

$$\int_a^b dx [f(x) + g(x)] \quad (\text{G.3})$$

ここで、 $f(x)$ が鋭いピークを持つ部分で、 $g(x)$ がそれ以外のなだらかな部分の関数である。このように書き直すことができるのであれば、 $f(x)$ の積分と $g(x)$ の積分という形で 2 つに分けるほうがよいと考えられる (ただし計算時間との相談にはなる)。

$f(x) + g(x)$ のまま積分することを想定すると、 $f(x)$ は鋭いピークを持つため、そのピークの周りに乱数が偏るように分布が更新されていく。しかし、例えばそのピークの周りでの $g(x)$ の値が大きな寄与をしないとすると、偏った分布での $g(x)$ の積分は正確ではないと推測される。さらに、分布の更新が $g(x)$ にも引っ張られてしまい、 $f(x)$ の積分にも最適な分布ではなくなってしまう。そのため、余分に計算時間がかかってしまうが、 $f(x)$ と $g(x)$ で別々の積分を用意したほうが正確な値が得られるはずである (余分な時間を極力減らすために計算の並列化を推奨する)。本論文で行った計算では、 $Z'\nu \leftrightarrow \phi\bar{\nu}$ の u-channel ダイアグラムが鋭いピークを持つ関数だったので、s-channel ダイアグラムの積分と u-channel ダイアグラムの積分は別々のプログラムで計算して、後で足し合わせるようにしている。

§3.4 で述べた 4 元運動量の割り当ては、§3.5 の計算に適するように割り当てている。具体的には、 X が $\cos \alpha$ に依存すると、運動量の積分を X の積分に直すのが困難になるため、 $k \cdot p'$ が $\cos \alpha$ に依存しないように割り当てた。しかし、s-channel や $Z'\phi \leftrightarrow \nu\nu$ の場合は発散はないので、u-channel の場合とは異なる割り当て方をした。最終的な積分に関わらない p_4 に質量を持った粒子を割り当てると、積分の中の数式が多少簡単になる。例えば $Z'\nu \leftrightarrow \phi\bar{\nu}$ の s-channel で Z' に注目する場合、

$$(p_1, p_2, p_3, p_4) = (p_{Z'}, p_{\nu_\alpha}, p_{\bar{\nu}_\beta}, p_\phi) \quad (\text{G.4})$$

としている。ただし計算時間が目に見えるレベルで変わるなどの差はないと思われる。

付録 H 化学ポテンシャルの時間発展における問題点

化学ポテンシャルの時間発展方程式は §3.2.2 で導出した。温度と化学ポテンシャルの時間発展方程式にするために行なった変数変換は

$$(\rho, n) \rightarrow (T, \mu) \quad (\text{H.1})$$

というものであった。しかし非相対論的な粒子の場合、 $\rho = mn$ という関係式が成り立つ。つまり ρ と n が独立ではなくなってしまう。このことによって、変数変換におけるヤコビアンが 0 になってしまうという問題が起きる。つまり時間発展方程式の右辺にある $\det J$ が 0 になり、右辺が発散してしまう。何らかの解決方法を考える必要がある。

参考文献

- [1] Takeshi Araki, Kento Asai, Kei Honda, Ryuta Kasuya, Joe Sato, Takashi Shimomura, and Masaki J S Yang. Resolving the Hubble tension in a $U(1)_{L_\mu-L_\tau}$ model with the Majoron. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, Vol. 2021, No. 10, 2021. 103B05.
- [2] Adam G. Riess, Wenlong Yuan, Lucas M. Macri, et al. A comprehensive measurement of the local value of the hubble constant with $1 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ uncertainty from the hubble space telescope and the sh0es team. *The Astrophysical Journal Letters*, Vol. 934, No. 1, p. L7, 2022.
- [3] Planck Collaboration, Aghanim, N., Akrami, Y., et al. Planck 2018 results - vi. cosmological parameters. *A&A*, Vol. 641, p. A6, 2020.
- [4] José Luis Bernal, Licia Verde, and Adam G. Riess. The trouble with h_0 . *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, Vol. 2016, No. 10, p. 019, 2016.
- [5] Adam G. Riess, Lucas M. Macri, Samantha L. Hoffmann, et al. A 2.4% determination of the local value of the hubble constant. *The Astrophysical Journal*, Vol. 826, No. 1, p. 56, 2016.
- [6] Kensuke Akita and Masahide Yamaguchi. A precision calculation of relic neutrino decoupling. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, Vol. 2020, No. 08, p. 012, 2020.
- [7] T. Araki, S. Hoshino, T. Ota, J. Sato, and T. Shimomura. Detecting the $L_\mu - L_\tau$ gauge boson at belle ii. *Phys. Rev. D*, Vol. 95, p. 055006, 2017.
- [8] L. Morel, Z. Yao, P. Cladé, et al. Determination of the fine-structure constant with an accuracy of 81 parts per trillion. *Nature*, Vol. 588, pp. 61 – 65, 2020.
- [9] T. Aoyama, T. Kinoshita, and M. Nio. Theory of the anomalous magnetic moment of the electron. *Atoms*, Vol. 7, No. 1, 2019.
- [10] T. Aoyama, N. Asmussen, M. Benayoun, et al. The anomalous magnetic moment of the muon in the standard model. *Physics Reports*, Vol. 887, pp. 1–166, 2020. The anomalous magnetic moment of the muon in the Standard Model.
- [11] B. Abi, T. Albahri, S. Al-Kilani, et al. Measurement of the positive muon anomalous magnetic moment to 0.46 ppm. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 126, p. 141801, 2021.
- [12] T. Araki, K. Asai, J. Sato, and T. Shimomura. Low scale seesaw models for low scale $U(1)_{L_\mu-L_\tau}$ symmetry. *Phys. Rev. D*, Vol. 100, p. 095012, 2019.
- [13] Miguel Escudero Abenza. Precision early universe thermodynamics made simple: Neff and neutrino decoupling in the standard model and beyond. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, Vol. 2020, No. 05, p. 048, 2020.
- [14] Miguel Escudero. Neutrino decoupling beyond the standard model: Cmb constraints on the dark matter mass with a fast and precise neff evaluation. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, Vol. 2019, No. 02, p. 007, 2019.
- [15] Shouvik Roy Choudhury and Steen Hannestad. Updated results on neutrino mass and mass hierarchy from cosmology with planck 2018 likelihoods. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, Vol. 2020, No. 07, p. 037, 2020.
- [16] Bohdan Grzadkowski, Michał Iglicki, and Stanisław Mrówczyński. t-channel singularities in cosmology and particle physics. *Nuclear Physics B*, Vol. 984, p. 115967, 2022.
- [17] Ilya F. Ginzburg. Initial particle instability in muon collisions. *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements*, Vol. 51, No. 1, pp. 85–89, 1996.
- [18] Christina D. Kreisch, Francis-Yan Cyr-Racine, and Olivier Doré. Neutrino puzzle: Anomalies, interactions, and cosmological tensions. *Phys. Rev. D*, Vol. 101, p. 123505, 2020.

- [19] A. Fradette, M. Pospelov, J. Pradler, and A. Ritz. Cosmological beam dump: Constraints on dark scalars mixed with the higgs boson. *Phys. Rev. D*, Vol. 99, p. 075004, 2019.
- [20] S. Hannestad and J. Madsen. Neutrino decoupling in the early universe. *Phys. Rev. D*, Vol. 52, pp. 1764–1769, 1995.
- [21] G. Peter Lepage. Adaptive multidimensional integration: vegas enhanced. *Journal of Computational Physics*, Vol. 439, p. 110386, 2021.