令和 3 年度修士論文

ミューオン原子における ミューオン-陽電子転換と ミューオン-電子転換

埼玉大学大学院理工学研究科
物理機能系専攻物理学コース 素粒子研究室
菅原滉平

2022 年 9 月 17 日

概 要

論文では、レプトクォークが媒介するとき、ミューオン原子中でのミューオン-電子転換とミューオン-陽電子転換について調べた。現状、ミューオン-陽電子転換はミューオン-電子転換に比べ、観測が困難だと考えられている。これはミューオン-電子転換はレプトンフレーバーを破るような機構だけを持つのに対し、ミューオン-陽電子転換はレプトンフレーバーを破る機構に加え、粒子数を破る機構を持たなければいけないためである。しかし、そこで本当にミューオン陽電子転換がミューオン電子転換に比べて大きくなる場合はないのかについて議論した。 SU(2) 二重項型のレプトクォークと SU(2) 一重項型のレプトクォークとの結合が粒子数の破れの起源となることが先行研究から知られている。そして、このような相互作用とレプトクォークを自然に導入する模型として R-parity を破る (R-parity Violating; RPV) 相互作用を導入した最小超対称標準模型を用いて議論した。そして、そのようなレプトクォークとして sbottom を考える。 sbottom の質量と RPV 相互作用の現在の実験からの制限を考え、ミューオン原子中のミューオン-陽電子転換の分岐比を見積もった。その結果、ミューオン-電子転換が無視できるとき、ミューオン-陽電子転換の分岐比は最大で 10-18 のオーダーとなり、PRISM 実験の精度で検証可能である。ここから、ミューオン-電子転換が観測されなかった場合でも、ミューオン-陽電子転換が検証可能であるため、実験においてミューオン-陽電子転換の検証は新物理の探索に重要であるということが示せた。

目 次

表 目 次

図 目 次

第 1 章　序論

1.1　標準模型

標準理論、及び標準模型とは数学的手法として、群論を用いて対称性を理論の指針として構築された理論体系であり、”Noether の定理” より構築された、すなわち、自然界に存在する、あらゆる対称性に対して保存量が存在することなどを踏まえた理論になっている。その歴史は古く、多くの先人たちの功績によってまとめられた理論である。標準模型の基礎は、1961 年に S.L.Glashow がレプトンに正しい量子数を与え、$SU(2) \times U(1)_Y$ ゲージ対称性に基づく模型を提唱した。これは Higgs 粒子がない点を除き、現在の標準模型とほぼ同じである。後に、S.Weinberg と A.Salam がほぼ同じ時期に BEH 機構による素粒子（レプトン）の模型を提唱した (1967,68 年)。これらを踏まえて完成させられた理論であり、この標準理論における素粒子を表 1, 2 にまとめた。

spin $\frac{1}{2}$	クォーク		レプトン	
電荷	2/3	$-1/3$	0	-1
第 1 世代	u	d	ν_e	e
第 2 世代	s	c	ν_μ	μ
第 3 世代	t	b	ν_τ	τ

spin 1	ゲージ粒子	質量	電荷
強い相互作用	g	0	0
弱い相互作用	$W^\pm$	80.39(GeV)	$\pm$
	Z_0	91.19(GeV)	0
電磁相互作用	γ	0	0

スカラーボソン	質量	電荷	スピン
H	125.09(GeV)	0	0

表 1: 標準模型に属する粒子と量子数、物理定数 [1]

粒子	弱アイソスピン I	I_3	ハイパーチャージ Q	電荷 $Q = I_3 + \frac{Y}{2}$
ν_L	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	0
e_L		$-\frac{1}{2}$		-1
e_R	0	0	-2	-1
u_L	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
d_L		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{3}$
u_R	0	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$
d_R	0	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$

表 2: $SU(2) \times U(1)_Y$ の量子数

標準模型において、物質の構成要素であるスピン 1/2 を持つクォークとレプトン、および相互作用を媒介するスピン 1 を持つゲージ粒子がある。クォークは電荷 +2/3 を持つ u、c、t があり、電

荷-1/3 を持つ d、s、b の計 6 種が存在し、レプトンにも中性粒子のニュートリノ ν_e、ν_μ、ν_τ、電荷-1 を持つ e、μ、τ がある。

現在、この模型は多くの現象を説明しているが、標準模型では説明できない現象がされており、これらを解決するために標準模型を超えた模型（Beyond SM; BSM）の構築が盛んに成されている。本論文では、この中でも大統一理論を初めとした多くの理論模型において存在が予言されるレプトクォークに注目して議論を進めていく。第一部では、初めに標準模型の粒子について特に本論文に関わる粒子について述べ、次に標準模型では説明できない現象とレプトクォークについて考察していく。

1.1.1　レプトン

いわゆるレプトンは様々な功績によって発見され、標準模型の粒子とされてきた。はじめに J.J.Thomson が原子に含まれる粒子として、電子を発見した。彼は陰極線が粒子のビームであることを磁場による軌道の変化から正確に評価し、比電荷を精密に測定した (1897 年)。次に発見されたのがμ粒子である。Anderson と S.H.Neddermeyer によって電子に比べて物質中の透過性が高い粒子としてμ粒子が発見された (1937 年)。後に、μ粒子の崩壊現象でも重要な役割を果たす。L.Lederman, M.Schwartz と J.Steinberger はスパークチェンバーを使った有名な実験で、ニュートリノがミューオン型と電子型の二つがあることを発見した (1962 年)。様々な実験により、レプトンは発見されてきた。

レプトン	質量	寿命	レプトンフレーバー		
			L_e	L_μ	L_τ
e	0.51(MeV)	$\sim\infty$	1	0	0
μ	105.6(MeV)		0	1	0
τ			0	0	1
ν_e			1	0	0
ν_μ			0	1	0
ν_τ			0	0	1

表 3: レプトンに関わる物理量

標準理論の現在、電子 e、μ 粒子、τ 粒子の三種類が荷電レプトンとして知られている。反レプトンに関するレプトンフレーバーは負符号で定義される。それらの特徴を表 3 にまとめた。このレプトンフレーバーは標準模型において保存する量子数であり、これまでの多大な労量を賭して確認されてきた。電荷が 0 であるために直接観測が難しいニュートリノにおいても、標準模型においてはそのレプトンフレーバーが保存する。

本論文での議論の中心である $\mu-$ 粒子について、その崩壊の主モードと崩壊率について簡単に触

れておく。標準模型における自由ミューオンの崩壊過程は図 1 のダイアグラムによって記述され、式 (1) で与えたようにこの過程においてレプトンは各世代の粒子数を保存するように崩壊する。すなわち、

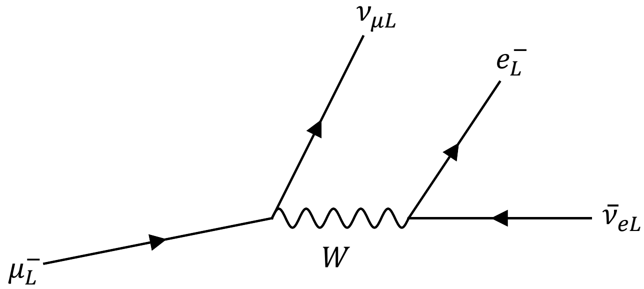


図 1: 標準模型における μ 粒子の崩壊

$$\begin{pmatrix} L_e \\ L_\mu \\ L_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_\mu \to \begin{pmatrix} 1+(-1) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{e\nu_\mu\bar{\nu}_e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{e\nu_\mu\bar{\nu}_e} \tag{1}$$

ということである。この過程の崩壊率は付 録 C で導出したように

$$\Gamma = \frac{{G_\mu}^2 {m_\mu}^5}{192\pi^3} \tag{2}$$

である。この崩壊率は自由 μ^- 粒子の崩壊において計算されたものであり、実際に物質中の μ^- 粒子は原子核に束縛されている。これについては後々説明する。

1.1.2　クォーク

π 中間子や核子は、それまで一つの素粒子であると考えられてきたが、実際にはクォークというさらに小さい素粒子によって構成された複合体であった。π 粒子と 8 重項を組む中間子や、核子と 8 重項を組むバリオンが発見されるにつれ、それらの対称性の持つ対称性から

$$\mathbf{3} \bigotimes \mathbf{3} \bigotimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \bigoplus \mathbf{8} \bigoplus \mathbf{8} \bigoplus \mathbf{10} \tag{3}$$

によって構成されており、基本粒子は $\mathbf{3}$ からなることがわかってきた。その基本粒子に対応するのがクォークである。

このクォークに対する研究はクォークが複合系に閉じ込められており、その複合系は 1(fm) の広がりを持つ。このような複合系をハドロンと呼ぶ。現在知られているクォークは表 1 に記した。

1.2　異種原子

ここでは我々の研究で用いる Muonic Atom について言及する。これらは一般的に異種原子と呼ばれ、様々な科学領域で注目されている。異種原子（exotic atom）は、いわゆる一般的な原子、すなわち、電子、中性子、陽子によって構成される原子とは異なり、上記の 3 つの構成要素以外の粒子（例えば、ミューオンや π 中間子など）を構成粒子の 1 つとする原子のことである。表 4 に、異種原子の例についてまとめた。

異種原子	構成
positronium	電子と陽電子が準安定に配置されたもの。
π 原子	正反のパイ中間子 ($\pi^{\pm}$) が準安定に配置されたもの。
protonium	陽子と反陽子 ($p^{\pm}$) が準安定に配置されたもの。
exciton	励起した半導体や絶縁体の中での、電子と正孔との束縛状態。
ミューオニウム	μ^{+} と e^{-} で構成される原子。
ミューオン原子	e^{-} の 1 つを負の電荷を持つ μ 粒子 μ^{-} で置き換えた原子。
中間子原子	e^{-} の 1 つもしくは複数を、負の電荷を持つ中間子で置き換えた原子。
反陽子ヘリウム	ヘリウム原子核 (α^{2+})、e^{-}、反陽子 (p^{-}) で構成される原子。

表 4: 異種原子

COMET 実験における $\mu - e$ conversion や、$\mu e \to ee$ において、Muonic Atom を用いることで高精度な実験が可能であり、実際に利用する、あるいは Muonic Atom 中での解析を行うため、Muonic Atom について知っておきたい。

1.2.1　ミューオン原子

物質中に μ^{-} 粒子を停止させると、原子核との Coulomb 相互作用によってミューオンは電気的に束縛される。これがミューオン原子であり、通常の原子において一つの電子をミューオンに置き換えたものになっている。原子核に束縛されたばかりのミューオンは、一般には励起状態にあるが、電子における Pauli の排他律が適用されないため、Auger 電子や光子を放出して速やかに 1S 状態へ遷移する。ミューオンの質量は $m_{\mu} = 105.6(\mathrm{MeV})$ 程度であり、電子に比べて約 207 倍重い。そのため、 Bohr 半径は電子の 1/207 であり、束縛された μ^{-} 粒子は原子核のかなり近くに局在することになる。したがって、ミューオンの波動関数は原子核の電荷分布などの詳細による影響を受ける。また、原子核の持つ有限な質量は電子に対してはほとんど影響を及ぼさないが、特に Z が小さい場合には μ^{-} 粒子の波動関数に影響する。ミューオン原子の寿命は、重い原子核ほど短くなり、約 80ns($Z = 94$) から約 2200ns($Z = 1$) である。重い原子核ほど原子核と μ^{-} 粒子が近くなり、周回速度が急速に速くなることで寿命は長くなりそうだが、ミューオン捕獲の影響もあり寿命

は短くなっていくのである。

1.2.2　ミューオン原子軌道上での μ^- 粒子の崩壊

原子軌道上のミューオン崩壊には Michal 崩壊 $\mu^- \to e^-\overline{\nu_e}\nu_\mu$ に加えて、ミューオン捕獲過程 $\mu^- + p \to \nu_\mu + n$ がある。原子軌道上のミューオンの崩壊率は

$$\Gamma_t = \Gamma_{\text{cap}} + Q\Gamma_d \tag{4}$$

である。このとき、Γ_d は Michal 崩壊 $\mu^- \to e^-\overline{\nu_e}\nu_\mu$ の崩壊率である。また、Q は Huff 因子で自由ミューオンに対して原子軌道上での Michel 崩壊の差異を表す因子である。本論文では μ^--capture から得られる物理が重要であるため、原子番号に対して捕獲率 Γ_{cap} がどのように変化するのかを確認する。まず、物理的な状況を考えると崩壊率は原子核が作るポテンシャルに相関を受けるため、1s 軌道にある μ^- 粒子は Bohr 半径の位置で軌道電子捕獲と似た捕獲率になると考えられる。

Bohr 半径は

$$a_{\text{Bohr}} = \frac{1}{m_\mu Z\alpha} \tag{5}$$

であるが、原子番号 Z の大きさに原子半径が比例するので、原子番号 $Z \sim 40$ で原子半径が Bohr 半径より小さくなる。このとき、μ^- が原子核に潜り込んでしまう。そのため、まずは $Z \leq 40$ の場合を考える。ミューオン捕獲の崩壊率は

$$\Gamma_{\text{cap}} = \frac{E_\nu^2}{2\pi^2}(\alpha Z)^2 |H_{fi}|^2 \tag{6}$$

$$|H_{fi}|^2 = |C_V|^2 \langle \mathbf{1} \rangle^2 + |C_A|^2 \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^2 \tag{7}$$

であり、ここで、$\langle \mathbf{1} \rangle$ は Fermi 核行列要素で、$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$ は Gamov-Tellar 核行列要素である。詳細は付録 B.4.2 を参照して欲しい。また、E_ν は終状態のニュートリノが持って行くエネルギーであり、終状態の原子核を指定しないと決まらない。このとき、水素原子において崩壊率を求めると

$$\langle \mathbf{1} \rangle^2 + \left|\frac{C_A}{C_V}\right|^2 \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^2 \sim 5.5 \tag{8}$$

であり、さらに $E_\nu \sim 80(\text{MeV})$ とすれば崩壊率は式 (9) のようになる。

$$\Gamma_{\text{cap}}^{\text{H}} \sim 170(\text{s}^{-1}) \tag{9}$$

次に、$Z \geq 40$ のときは μ^- 粒子は原子核内部に潜り込んでしまっているので有効陽子数 Z_{eff} を用いるのが良い [2, 3]。

$$Z_{\text{eff}} = Z\left[\int d^3\boldsymbol{r}\, |\psi_\mu(\boldsymbol{r})|^2\, \mathcal{D}(\boldsymbol{r})\right]^{\frac{1}{4}} \tag{10}$$

ここで、$\mathcal{D}(\boldsymbol{r})$ は原子核における陽子の密度関数である。ミューオン捕獲において原子核の中性子数は重要で、Pauli の排他律によって陽子から中性子の崩壊が制限される。この効果を含めて崩壊率を求めると

$$\Gamma_{\text{cap}} = Z_{\text{eff}}^4 X_1 \left[1 - X_2 \left(\frac{A - Z}{2A} \right) \right] \tag{11}$$

であり、ここで、X_1 は水素原子核に対する μ-capture の崩壊率 Γ_{cap} で式 (6) において $Z = 1$ の場合である。また、X_2 は中性子の排他律による崩壊率の減少効果を表している。それぞれ

$$X_1 = \Gamma_{\text{cap}}^{\text{H}} = 170(\text{s}^{-1}), \qquad X_2 = 3.125 \tag{12}$$

である [4, 5]。　以上の結果と式 (2) を比較すると自由ミューオンの崩壊率よりもミューオン原子上での μ^- 粒子の崩壊率が小さくなることがわかる。このとき、崩壊率が小さくなる理由は、次の 3 つの効果によるものと考えられる。まず一つ目は、ミューオンの束縛エネルギーによって終状態の位相空間が狭まる効果で、これによって崩壊率は小さくなる。二つ目は、原子核のクーロンポテンシャルによりミューオンと電子の波動関数が内側に引き寄せられ、波動関数の重なりが大きくなる効果である。この効果は崩壊率の上昇をもたらすが、電磁ゲージ対称性のために一つ目の効果とほとんど打ち消しあう。三つ目に、束縛されているミューオンが平均速度 $Z\alpha$ で運動していることによって相対論的な時間の遅れが生じ、崩壊率が小さくなる効果がある。以上の 3 つの効果を合わせると、特に原子番号があまり大きくない原子核においては、主に相対論的な時間の遅れによって崩壊率が小さくなる。

原子軌道上におけるミューオンの崩壊は、原子番号 Z が小さいものでは Michel 崩壊による寄与 Γ_d が主要であるが、Z が大きくなると原子核によるミューオン捕獲の寄与 Γ_{cap} が主に効いてくる。ミューオンの寿命の Z 依存性は、[6] に示されている。水素原子の場合は、自由粒子のときとほぼ同じ約 2.2ms の寿命で崩壊するが、鉛原子核になると寿命は約 75ns と非常に短くなる。

1.3　レプトンフレーバーの破れ

近年、様々な実験が行われるようになると、標準理論の範囲では保存しているかのように思われていたレプトンフレーバーを破るような新たな物理現象が観測されるようになってきた。

1.3.1　ニュートリノ振動

スーパーカミオカンデグループによるニュートリノ振動の観測により、世代の異なるニュートリノ間の混合が実証されることになった。観測されたニュートリノ振動は

$$\nu_\mu \to \nu_\tau \tag{13}$$

であり、これは実際に、ニュートリノの質量を保証するだけで無く、レプトンフレーバーを破る現象として、とても重要な意味を持つ。ここまでで述べてきたレプトンフレーバー数とは、

$L_i \equiv \int (i^\dagger i + {\nu_i}^\dagger \nu_i) d^3x$ のことであり、ここで、i は荷電レプトンを表している。

(ν_μ, ν_e) を区別する指標はレプトンフレーバー数であり、弱い相互作用の固有状態と考えられる。一般に、その状態は質量固有状態 (ν_1, ν_2) とは一致せずに混合が生じると予想される。ニュートリノ振動という状態の時間的遷移は質量の違いによって起こる。これは付 録 D にて説明する。

1.3.2　荷電レプトンフレーバーの破れ

付 録 D でみたように、ニュートリノは実際に弱い相互作用の固有状態に対しての混合がみられている。ここで、各ニュートリノと同じ世代の荷電レプトンは $SU(2)_L$ 二重項であり、同様にフレーバー固有状態の混合があり得るだろう。これにより、現在多くの実験により荷電レプトンに対するレプトンフレーバーの破れ (charged Lepton Flavor Violation; cLFV) となる現象の観測が試みられている。また、1.2 において述べた異種原子は運動量保存則とエネルギー保存則に注目すると cLFV 過程において重要な役割を果たすことがわかる。詳細は付 録 H に簡単にまとめたので参照して欲しい。また、実粒子は全て自身よりも重い粒子にのみ崩壊することに注意が必要である。

MEG 実験において、$\mu \to e\gamma$ の観測が試みられている。これはやはり、レプトンフレーバーを破っている。

レプトンフレーバーの変化は

$$\begin{pmatrix} L_\mu \\ L_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_\mu \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{e\gamma}$$

となり、レプトンフレーバー数はやはり破れている。これのように荷電レプトンフレーバーの破れ (cLFV) は他にもある。今後、荷電レプトンフレーバーの破れを cLFV と書く。cLFV の 1 つとして $\mu \to eee$ がある。この過程のレプトンフレーバーの変化は

$$\begin{pmatrix} L_\mu \\ L_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_\mu \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 + (-1) + 1 \end{pmatrix}_{eee}$$

であり、これもレプトンフレーバーが破れている。

また、この研究の目的に関わる実験として、COMET 実験というものがある。これらは主に Muonic Atom と呼ばれる異種原子中で起こる反応である。異種原子については次の節で述べる。そして、この実験は $\mu - e$conversion という現象の観測を目的としている。$\mu - e$connversion では原子核の軌道上で、原子核と μ 粒子が電磁相互作用をし、μ が束縛状態で起こる現象である。

これについてもレプトンフレーバーを破っていることを確認する。同じように、レプトンフレーバーの変化は

$$\begin{pmatrix} L_\mu \\ L_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_\mu \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{eee}$$

である。このように、弱い相互作用の固有状態は現象において混合している。現在、COMET 実験ではこの現象の観測のため、様々な技術開発、観測器の作成などを行っている。

1.4　レプトン数の破れ

レプトンフレーバーを破るような状況を簡単に見てきたが、レプトン数を破る過程も同様にBSM である。ニュートリノが Majorana 質量を持つとき、LNV 過程が起こりえる。LNV 過程は一般的にフレーバーを破る機構に加え、粒子数を破る機構が必要であるために、LFV のみの過程に比べ、その崩壊率は小さくなると考えられている。ニュートリノ質量については付 録 D で議論している。

ここでは、$\mu^- \to e^+$ 過程について考える。$\mu^- \to e^+$ 転換は Majorana 質量起源で引き起こされるとき、そのダイアグラムは次の図 2 のようになる。

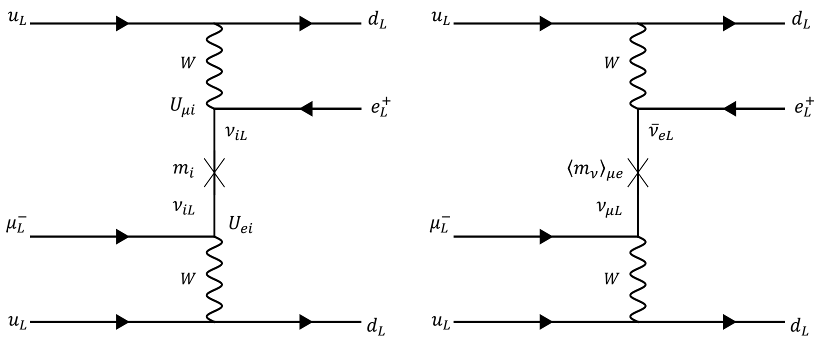


図 2: ニュートリノの Majorana 質量からの $\mu^- \to e^+$ 転換

このとき、Majorana 質量項は

$$\mathcal{L}_{mass} = m_i \overline{(\nu_i)^C} \nu_i \tag{14}$$

であり、$\mu^- \to e^+$ 転換は Majorana 質量項と弱い相互作用によって引き起こされる。この質量項を見ると、レプトン数が定義できなくなっていることがわかる。こういった過程を、レプトン数の破れと呼ぶ。ここで、図 2 にあるように質量固有状態に対して、弱い相互作用は

$$\mathcal{L}_{weak} = \frac{g}{2\sqrt{2}} \overline{\mu_L} \gamma^\mu \left(U_{\mu i} \nu_{iL} \right) W_\mu^- + \frac{g}{2\sqrt{2}} \overline{e_L} \gamma^\mu \left(U_{ei} \nu_{iL} \right) W_\mu^- + \text{h.c.} \tag{15}$$

であり、ここで、U_{li}(l はフレーバー固有状態、i は質量固有状態を表す添字) は、Maki-Nakagawa-Sakata 行列 (MNS 行列) である。このとき、粒子数の破れの起源となる Majorana 質量と MNS 行列から、有効質量 $\langle m_\nu \rangle_{\mu e} = U_{ei} U_{\mu i} m_i$ を構成する。

次に、Majorana 質量由来の $\mu^- \to e^+$ の分岐比について考える。[7] によれば、

$$\mathrm{Br}_{\mu^- \to e^+}^{(Majorana)} = 1.6 \times 10^{-25} \frac{\left| \langle m_\nu \rangle_{\mu e} \right|^2}{m_e^2} \tag{16}$$

となる。ここで、$\langle m_\nu \rangle_{\mu e}$ はニュートリノの階層ごとに図 3 となる。ニュートリノの normal

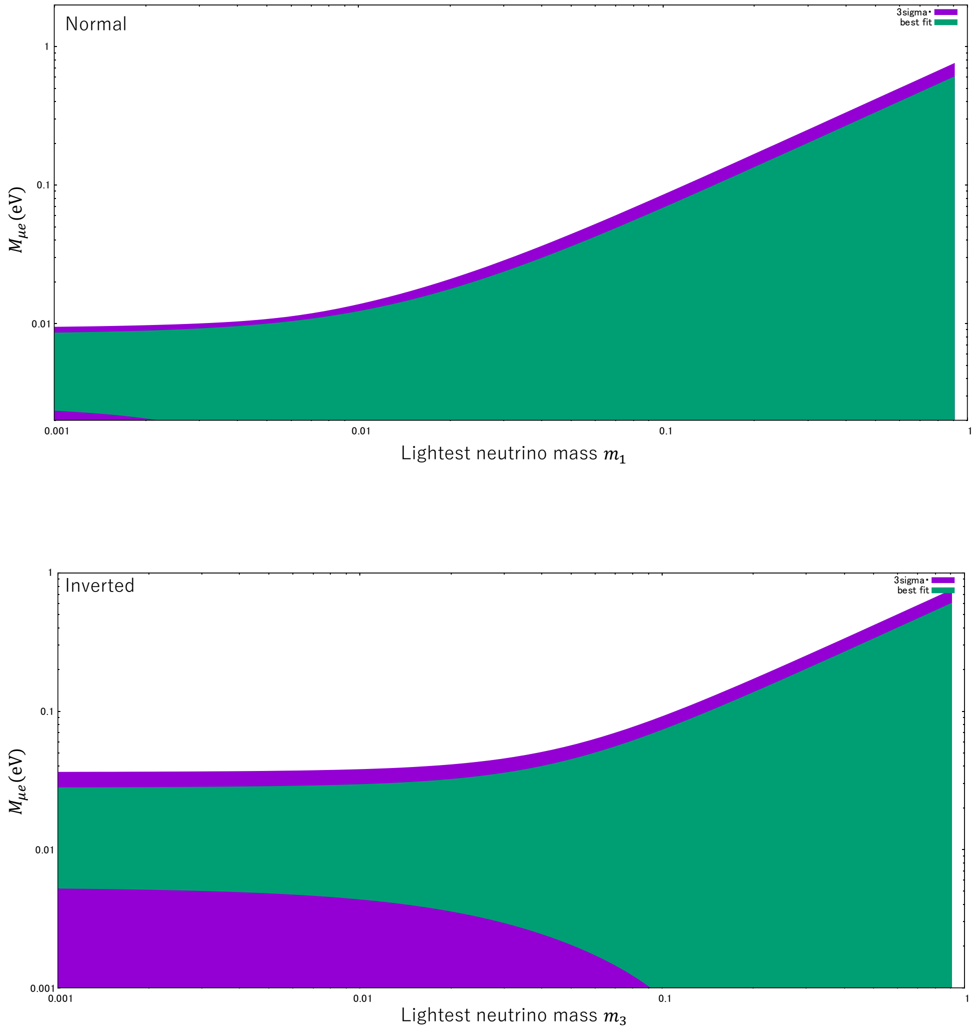


図 3: ニュートリノの最も軽い質量と $\langle m_\nu \rangle_{\mu e}$ の関係。標準的な階層 (最も軽い質量は m_1) と逆階層 (最も軽い質量は m_3)

hieralchy のとき、$\mu^- \to e^+$ の分岐比 $\mathrm{Br}^{(Majorana)}_{\mu^- \to e^+}$ は $10^{-33} - 10^{-37}$ であるから、将来実験の COMET phaseII や PRISM での精度では検証できないということがわかる。分岐比がここまで小さくなってしまうのは、Majorana 質量の大きさが小さいからである。粒子数の破れの起源を実験から小さいことが確かめられている Majorana 質量とすると、理論からの見積りは小さくなってしまう。

現在の実験から、以下のような結果が得られている。ここまで議論したように、Majorana 質量由来では観測が難しい。そのため、表 5 の上限付近で $\mu^- \to e^+$ 転換のシグナルが観測されたときに、理論的に説明がつかない。そのため、別の起源を考察することは重要である。

Process	Upper limit	Reference
$\mu^- \mathrm{Cu} \to e^+ \mathrm{Co}$	2.6×10^{-8}	(Bryman 1972)
$\mu^- \mathrm{S} \to e^+ \mathrm{Si}$	9×10^{-10}	(Badertsher 1982)
$\mu^- \mathrm{Ti} \to e^+ \mathrm{Ca(GS)}$	1.7×10^{-12}	(Kaulard 1998)
$\mu^- \mathrm{Ti} \to e^+ \mathrm{Ca(GDR)}$	3.6×10^{-11}	(Kaulard 1998)

表 5: ミューオン原子における $mu^- \to e^+$ 過程の分岐比の実験的上限値 (90% confidence level)

1.5　レプトクォーク

レプトクォークは、バリオン数とレプトン数の両方を持つ仮想の粒子である。 レプトクォークと SM フェルミ粒子との直接的な相互作用において結合定数が無次元であるという仮定と、ゲージ群の下でこれが不変であるという仮定によって、レプトクォークの可能な量子数が制限される。表 6 は、この仮定で可能なすべての量子数を示している。 表の $SU\ (3)_C$、$SU\ (2)_W$、および $U\ (1)_Y$ の列は、それぞれ QCD 表現、弱アイソスピン表現、およびハイパーチャージを示している。レプトクォーク状態のスピンは、1 あるいは 0 であり、それぞれベクトルレプトクォーク、スカラーレプトクォークである。

スピン	$3B+L$	$SU(3)_C$	$SU(2)_W$	$U(1)_Y$	可能な結合
0	-2	$\bar{3}$	1	1/3	$\overline{(q_L)^C} l_L$ or $\overline{(u_R)^C} e_R$
0	-2	$\bar{3}$	1	4/3	$\overline{(d_R)^C} e_R$
0	-2	$\bar{3}$	3	1/3	$\overline{(q_L)^C} l_L$
1	-2	$\bar{3}$	2	5/6	$\overline{(q_L)^C} \gamma^\mu e_R$ or $\overline{(d_R)^C} \gamma^\mu l_L$
1	-2	$\bar{3}$	2	$-1/6$	$\overline{(u_R)^C} \gamma^\mu l_L$
0	0	3	2	7/6	$\overline{q_L} e_R$ or $\overline{u_R} l_L$
0	0	3	2	1/6	$\overline{d_R} l_L$
1	0	3	1	2/3	$\overline{q_L} \gamma^\mu l_L$ or $\overline{u_R} \gamma^\mu e_R$
1	0	3	1	5/3	$\overline{u_R} \gamma^\mu e_R$
1	0	3	3	1/3	$\overline{q_L} \gamma^\mu l_L$

表 6: 可能なレプトクォークとその量子数

レプトクォーク状態は SM の様々な拡張において存在することが予想される。Pati-Salam 模型 [8] は、レプトクォーク状態の存在を予言する例である。レプトクォーク状態を含む SU(5) [9]、SO(10)[10] に基づく大統一理論にも存在する。Pati-Salam カラー SU(4)、およびより大きなゲー

ジ群。超対称性のスカラークォークは R-parity の破れを伴うモデルでは、leptoquark 型の湯川結合を持つ可能性もある。そのため レプトクォーク状態に関する境界は、R-parity を破る超対称モデル スカラー leptoquark が TeV スケールで存在すると予想されるのは拡張テクニカラー模型 [11, 12] では、レプトクォークの状態がテクニフェルミオンクォークとレプトンの複合性もまた 軽いレプトクォーク状態を持つ可能性がある [13]。

ここで、本論文では付 録 E で議論しているように、R-parity を破る相互作用を導入した MSSM を考えていく。R-parity を破る相互作用を導入した MSSM については付 録 E で説明する。以下では、まずは上の表 6 を下に、粒子数の破れを考えていく。

1.6　レプトクォークと粒子数の破れ

前の節でレプトクォークに関する定性的な性質を簡単に説明した。表 6 では、レプトクォークと標準模型粒子の相互作用を考えたが、レプトクォーク同士の相互作用を考えることもできる。その中でも粒子数を破る組み合わせは、$(\bar{3}, 1, 1/3)$ と $(\bar{3}, 2, 1/6)$ の組み合わせと、$(\bar{3}, 2, -1/6)$ と $(\bar{3}, 3, 1/3)$ の組み合わせである。このようなレプトクォークのうち、スピン 0 のレプトクォークを $\tilde{q}_{L(R)}$、スピン 1 のレプトクォークを $\tilde{q}^{\mu}_{L(R)}$ と書くことにする。

この組み合わせを考えると、二つのレプトクォークは Dirac 質量項を組むことで自然に結合するが、カイラリティに対応する量子数が変化している。このことにより、図 4 からわかるように、それぞれのレプトン数が破れることがわかる。例えば、二つのレプトクォークの組み合わせ

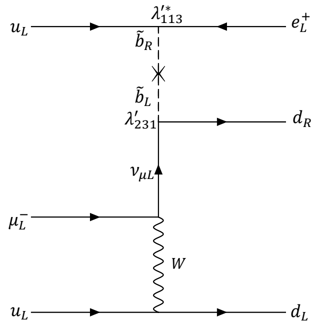


図 4: レプトクォークが媒介する $\mu^- \to e^+$ 転換の一例。

$(\bar{3}, 1, 1/3)$ と $(\bar{3}, 2, 1/6)$ を考えると、ラグランジアンは

$$\mathcal{L} \ni a_{ijk}\tilde{q}^*_{iL}\overline{(q_{jL})^C}l_{kL} + b_{ijk}\tilde{q}_{iR}\overline{d_{jR}}l_{kL} + m_{ii}\tilde{q}_{iL}\tilde{q}^*_{iR} + \mathrm{h.c.} \tag{17}$$

となる。図 4 のようになるとき、有効ラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{int} = a_{ij'k'}b_{ijk}m_{ii}(\overline{(q_{j'L})^C}l_{k'L})(\tilde{q}^*_{iL}\tilde{q}_{iL})(\tilde{q}^*_{iR}\tilde{q}_{iR})\overline{d_{jR}}l_{kL} \tag{18}$$

となるから、レプトン数が破れていることがわかる。このように、何らかの二種類のレプトクォークが結合することで粒子数の破れの起源となることがわかった。

　このような二種類のレプトクォークと、その相互作用を自然に導入したい。レプトクォークは大統一理論を考えることで導入される粒子であるが、大統一理論を記述する模型として注目されている MSSM を考えることにする。これに RPV 相互作用を導入すれば、SU(2) 二重項と SU(2) 一重項のレプトクォークを自然に導入できる。以下では、RPV 相互作用を導入した MSSM を用いて議論していく。

第 2 章　Benchmark Model

前節で述べたように、LNV の起源は Majorana 質量のみではなく、異なるレプトクォークの結合でもよいことがわかった。そして、異なる二種類のレプトクォークを導入する模型として、RPV な相互作用を導入した MSSM 模型を用いることにした。この模型を用いるため、Majorana 質量を起源としないため、$\mu^- \to e^+$ 転換が大きくなる可能性がある。

ゲージ不変な RPV 相互作用の超ポテンシャルは $\mathcal{W}_{\rm RPV} = \lambda'_{ijk} L_i Q_j D^c_k$ である [14, 15, 16]。ここで、D_i は $SU(2)_L$ 一重項の超場で、L_i と Q_i は $SU(2)_L$ 二重項の超場である。添字 i、j、 k は世代を表している。$\mu^- \to e^+$ 転換に関係する相互作用は

$$\mathcal{L}_{\lambda'} = \lambda'_{ijk}\left[\tilde{d}_{jL}\bar{d}_{kR}\nu_{iL} - \tilde{d}^*_{kR}\overline{(e_{iL})^c}u_{jL}\right] + \text{h.c..}, \tag{19}$$

ここで、d_{iL} は $SU(2)_L$ の二重項スクォークの down-tipe で、d_{iL} は $SU(2)_L$ の一重項スクォークの down-tipe である。多くの SUSY シナリオでは、sbottom は第 1 世代や第 2 世代のスクォークよりも軽いので、sbottom だけが大きな寄与をすることになる。実際、GUT の普遍質量を持つ SUSY スペクトルではそうであることが知られている [17]。そして、sbottom の質量が小さいだけでなく、sbottom の混合 $m^2_{LR} \propto m_b(A_b - \mu\tan\beta)$ に対する寄与が最大になる場合を考える。A_b はスカラー線形結合のパラメーターで、μ は higgsino の質量パラメーターであり、$\tan\beta$ は Higgs 場の真空期待値の比である。$\tilde{b}_L$ と $\tilde{b}_R$ が混合しているため、レプトン数（バリオン数も）を保存電荷として厳密に定義することができなくなる。sbottom の質量項は次のように対角化できて

$$-\mathcal{L}_{\tilde{b}-\text{mass}} = \begin{pmatrix}\tilde{b}^*_L & \tilde{b}^*_R\end{pmatrix}\begin{pmatrix} m^2_L & m^2_{LR} \\ m^2_{RL} & m^2_R\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{b}_L \\ \tilde{b}_R\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\tilde{b}^*_1 & \tilde{b}^*_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} m^2_1 & 0 \\ 0 & m^2_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2\end{pmatrix}, \tag{20}$$

となる。ここで、$m_1 \leq m_2$ とすると

$$\begin{pmatrix}\tilde{b}_L \\ \tilde{b}_R\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2\end{pmatrix}. \tag{21}$$

sbottom の LR mixing が最大混合 ($\theta = 45°$) のとき、$\tilde{b}_2$ の質量は $\tilde{b}_1$ に比べて十分大きくなる。

$$\begin{pmatrix} m^2_1 & 0 \\ 0 & m^2_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix} m^2_L & m^2_{LR} \\ m^2_{LR} & m^2_R\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \tag{22}$$

$$\tag{23}$$

となるから

$$m^2_1 = m^2_L\cos^2\theta - 2m^2_{LR}\sin\theta\cos\theta + m^2_R\sin\theta \tag{24}$$

$$m^2_2 = m^2_L\cos^2\theta + 2m^2_{LR}\sin\theta\cos\theta + m^2_R\sin\theta \tag{25}$$

$$m^2_L\sin\theta\cos\theta + m^2_{LR}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - m^2_R\sin\theta\cos\theta = 0 \tag{26}$$

このため、$m_L^2 \simeq m_R^2 \simeq m_{LR}^2$ であれば

$$m_1^2 \ll m_2^2 \tag{27}$$

$$\tan 2\theta = \frac{4m_{LR}^2}{m_L^2 - m_R^2}, \quad \theta = 45^\circ \tag{28}$$

となる。このようなとき、従って、$\mu^- \to e^+$ 転換に関連する RPV 相互作用は次のように書き直される。

$$\mathcal{L}_{\lambda'} \supset (\lambda'_{i31}\cos\theta)\,\widetilde{b}_1 \overline{d}_R \nu_{iL} + (\lambda'_{i13}\sin\theta)\,\widetilde{b}_1^* \overline{(e_{iL})^c} u_L + \text{h.c.}, \tag{29}$$

この相互作用は図 5 のような寄与を与える。このとき、λ'_{113} と λ'_{213} の両方が大きいと $\mu^- \to e^-$ 転換が引き起こされる。この論文では、λ'_{113} と λ'_{213} のどちらかが 0 であると仮定して、$\mu^- \to e^-$ 転換が小さくなる場合を scenario I, II として考え、最後に λ'_{113} と λ'_{213} のどちらも 0 ではない場合として scenario III を考える。

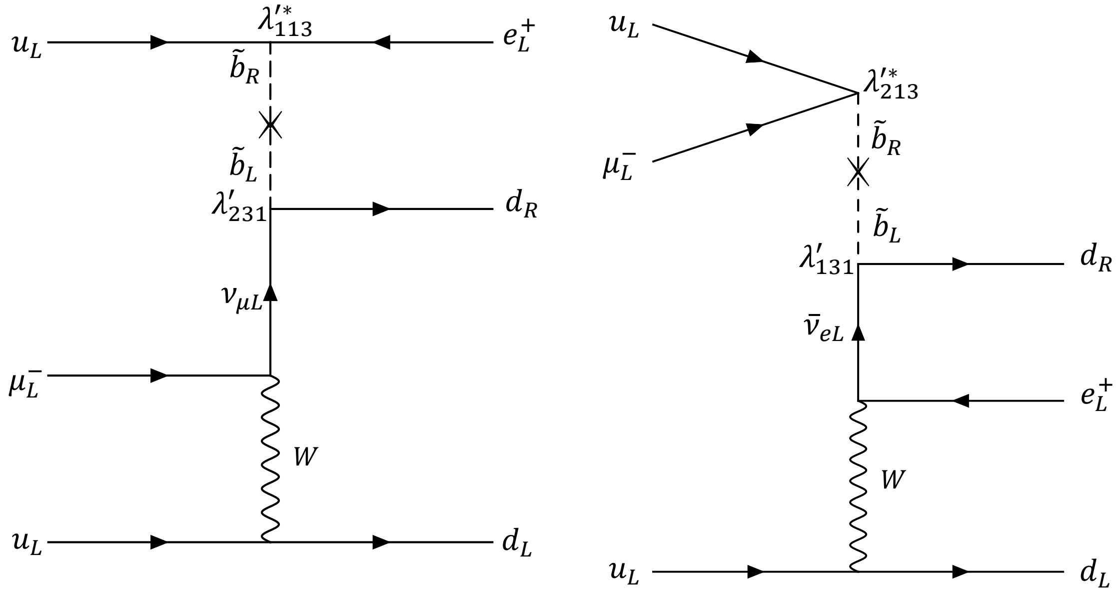


図 5: $\mu^- \to e^+$ 転換の Feynman ダイアグラム。λ'_{213} と λ'_{131} の組み合わせ (右)、λ'_{113} と λ'_{231} の組み合わせ (左)。

2.1　結合定数 λ'_{ijk} への制限

2.1.1　各パラメーターにおけるゲージ場からの制限

[18] に基づいて、関連する RPV 結合の制限を列挙する。一般に、制限はいくつかの独立した実験的な測定によって決定される。ここでは、それぞれの RPV 相互作用について、個別に与えられる最も厳しい制限と結合定数の組み合わせに対する制限を取り上げる。

2.1.1.1　λ'_{131} への制限

atomic parity violation (APV) と parity violating electron scattering (PVES) の測定はパリティを破る相互作用のテストになる。そういった相互作用の結合に関するパラメータは、$-(G_F/\sqrt{2})C_{1i}\bar{e}\gamma_\mu\gamma_5 e\bar{q}_i\gamma^\mu q_i$ である。そして、λ'_{131} はこの過程にさらに寄与を与える。

sbottom は APV と PVES において γ と Z ボソンと干渉し、実効的なカップリングは $C_{1d} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\sin^2\theta_w + \frac{m_W^2}{g^2}\frac{|\lambda'_{131}\cos\theta|}{m_{\tilde{t}_L}^2}$ である[*1]。C_{1d} は、Qweak 共同研究の結果と PVES データベースを組み込んだ grobal fit に APV の結果 $C_{1d} = 0.3389 \pm 0.0025$ (1σ) [20] を含めることで得られる。実験スケールで $\sin^2\theta_w = 0.2382$ とすると、その制限は

$$|\lambda'_{131}\cos\theta| \leq 6.6 \times 10^{-2}\left(\frac{m_{\tilde{t}_L}}{1.0\,\mathrm{TeV}}\right). \tag{30}$$

2.1.1.2　λ'_{231} への制限

λ'_{231} の相互作用によって sbottom を交換するサブプロセスは SM におけるニュートリノの深非弾性散乱 (Deep Inelastic Scattering; DIS)　$\nu_\mu d_R \to \nu_\mu d_R$ に寄与を与える。干渉を考慮すると、中性カレント ν_μ と d_R の結合は $g_R^d = \frac{1}{3}\sin^2\theta_W + \frac{m_W^2}{g^2}\frac{|\lambda'_{231}\cos\theta|^2}{m_{\tilde{b}_1}^2}$ である。ニュートリノ DIS の精密測定から $g_R^d = -0.027^{+0.077}_{-0.048}$ [1] であることが知られている。λ'_{231} の寄与が 1σ レベルで除外される。また、2σ レベルでの制限は

$$|\lambda'_{231}\cos\theta| \leq 1.8 \times 10^{-1}\left(\frac{m_1}{200\,\mathrm{GeV}}\right). \tag{31}$$

となる。

2.1.2　sbottom 質量条件からの制限

sbottom の質量は、コライダー実験によって制約されている。ATLAS 実験 [21, 22] によると、崩壊幅の比 $B = \Gamma(\tilde{b}_1 \to e_{lL}u_L)/\Gamma(\tilde{b}_1 \to \tilde{\chi}^0 b_{L/R})$ $(l = e, \mu)$ は $B \leq 0.01$ に制限されている。こ

*1 We neglect the QED corrections to the C_{1d} because it is small, $\left|C_{1d}^{\mathrm{w}} - C_{1d}^{\mathrm{w/o}}\right|/C_{1d}^{\mathrm{w/o}} \simeq \mathcal{O}(1)\,\%$ [19], and the resultant effect on the λ'_{131} bound is negligible.

のとき、$\tilde{b}_1 \to \tilde{\chi}^0 b_{L/R}$ の崩壊幅は付 録 F から

$$\Gamma_{(\tilde{b}_1\to\tilde{\chi}^0 b_{L/R})} = \frac{g_1^2}{16\pi m_1}\lambda\left(1, \frac{m_{\tilde{\chi}^0}^2}{m_1^2}, \frac{m_b^2}{m_1^2}\right) \times \left[(Y_L^2\cos^2\theta + Y_R^2\sin^2\theta)(m_1^2 - m_{\tilde{\chi}^0}^2 - m_b^2) - 8Y_L Y_R \sin\theta\cos\theta m_b m_{\tilde{\chi}^0}\right], \quad (32)$$

で与えられる。ここで、 $Y_L = \frac{1}{6}$ $(Y_R = -\frac{1}{3})$ は左巻の（あるいは、右巻の）クォークのハイパーチャージで $m_{\tilde{\chi}^0}$ はニュートリノ質量で、 m_b は sbottom の質量である。ここで、

$$\lambda(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2-2xy-2yz-2zx}. \quad (33)$$

とする。$\tilde{b}_1 \to e_{lL}u_L$ の崩壊幅は

$$\Gamma_{(\tilde{b}_1\to e_{lL}u_L)} = \frac{|\lambda'_{l13}\sin\theta|^2}{16\pi m_1}\lambda\left(1, \frac{m_{e_{lL}}^2}{m_1^2}, \frac{m_u^2}{m_1^2}\right)\left[m_1^2 - m_{e_{lL}}^2 - m_u^2\right]. \quad (34)$$

のように与えられる。

この崩壊幅の式を用いると、$B \le 0.01$ であるから次のように制限

$$|\lambda'_{l13}\sin\theta|^2 \le 0.01 \times \frac{16\pi m_1 \Gamma_{(\tilde{b}_1\to\tilde{\chi}^0 b_{L/R})}}{\lambda\left(1, m_{e_{lL}}^2/m_1^2, m_u^2/m_1^2\right)\left[m_1^2 - m_{e_{lL}}^2 - m_u^2\right]}, \quad (35)$$

を与えられる。

この場合、レプトクォークである sbottom の質量は、[21, 22] を下に決定した。これによると、$\tilde{b}_1 \to e_{lL}u_L$ 過程の崩壊率と $\tilde{b}_1 \to \tilde{\chi}^0 b_{L/R}$ 過程の崩壊率の比は、$B \le 0.01$ に制限される。このことは、この論文で考察した相互作用の結合定数に新たな制限を与える。また、$\tilde{b}_1 \to \tilde{\chi}^0 b_{L/R}$ 過程の崩壊率は

$$\Gamma_{(\tilde{b}_1\to\tilde{\chi}^0 b_{L/R})} = \frac{g_1^2}{8\pi m_1}\frac{\sqrt{(m_1^2+m_{\tilde{\chi}^0}^2-m_b^2)^2-4m_{\tilde{\chi}^0}^2 m_1^2}}{2m_1^2} \times \left[(Y_L^2\cos^2\theta + Y_R^2\sin^2\theta)(m_1^2 - m_{\tilde{\chi}^0}^2 - m_b^2) - 8Y_L Y_R \sin\theta\cos\theta m_b m_{\tilde{\chi}^0}\right].$$

によって与えられる。$\tilde{b}_1 \to e_{lL}u_L$ $(l = e, \mu)$ 過程の崩壊率は

$$\Gamma_{(\tilde{b}_1\to e_{lL}u_L)} = \frac{|\lambda'_{l13}\sin\theta|^2}{8\pi m_1}\frac{\sqrt{(m_1^2+m_{e_{lL}}^2-m_u^2)^2-4m_{e_{lL}}^2 m_1^2}}{2m_1^2}\left[m_1^2 - m_{e_{lL}}^2 - m_u^2\right].$$

である。$B \le 0.01$ のとき、λ_{l13} は

$$|\lambda'_{l13}\sin\theta|^2 \le 0.01 \times \frac{\Gamma_{(\tilde{b}_1\to\tilde{\chi}^0 b_{L/R})}}{\frac{1}{8\pi m_1}\frac{\sqrt{(m_1^2+m_{e_{lL}}^2-m_u^2)^2-4m_{e_{lL}}^2 m_1^2}}{2m_1^2}\left[m_1^2 - m_{e_{lL}}^2 - m_u^2\right]}.$$

で制限される。このとき、neutralino の質量は 140(GeV) で質量差は $\Delta m = m_1 - m_{\tilde{\chi}_0} - m_b = 40$ (GeV) である [23]。

$$|\lambda'_{l13}\sin\theta| \le 5.0 \times 10^{-3}. \quad (36)$$

2.1.3　$\mu^- \to e^-$ 転換

前述したとおり、$\lambda_{213}, \lambda_{113}$ のどちらも非零のとき、$\mu^- \to e^-$ 転換が大きくなる。$\mu^- \to e^-$ 転換において μ^- が原子核と W ボゾンを交換しないため、現在考えている状況で $\mu^- \to e^+$ 転換よりも大きくなってしまう可能性がある。scenario III では、$\lambda_{213}, \lambda_{113}$ が非零の場合を考えるので、$\mu^- \to e^-$ 転換から新たな制限が課せられることになる。$\mu^{\to} - e^-$ 転換の崩壊率は [24] より見積も

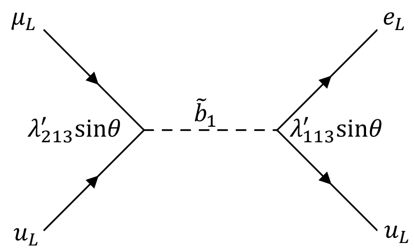


図 6: レプトクォークが媒介する $\mu^- \to e^-$ 転換のダイアグラム。

ることができて

$$Br^{\mu\to e} = \tilde{\tau}\frac{|\lambda'_{213}\sin\theta\lambda'_{113}\sin\theta|^2}{4m_1^4} \times \left(2V^{(p)} + V^{(n)}\right)^2 m_\mu^5 \tag{37}$$

となる。ここで、各パラメーターは下の表 7 である。

原子	$V^{(n)}$	$V^{(p)}$
Ca	0.0347	0.0347
Al	0.0173	0.0161
Au	0.146	0.0974

表 7: $\mu - e$ conversion の崩壊率のパラメーター

この式 (37) と表 7 を用いて、現在の実験からの制限のうち、厳しい制限 $Br^{\mu\to e} < 7.0 \times 10^{-13}$ から、制限

$$|\lambda_{213}\sin\theta\lambda_{113}\sin\theta| < 1.63 \times 10^{-7}\left(\frac{m_1}{2.0\times 10^5(\mathrm{MeV})}\right)^2\left(\frac{R_{\mu-e}}{7.0\times 10^{-13}}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{38}$$

が与えられる。また、COMET 実験での精度を考えると制限は、PhaseII のとき

$$|\lambda_{213}\sin\theta\lambda_{113}\sin\theta| < 3.90 \times 10^{-9}\left(\frac{m_1}{2.0\times 10^5(\mathrm{MeV})}\right)^2\left(\frac{R_{\mu-e}}{1.0\times 10^{-16}}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{39}$$

となる。PRISM 実験での測定精度を考えると

$$|\lambda_{213}\sin\theta\lambda_{113}\sin\theta| < 3.90 \times 10^{-10}\left(\frac{m_1}{2.0\times 10^5(\mathrm{MeV})}\right)^2\left(\frac{R_{\mu-e}}{1.0\times 10^{-18}}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{40}$$

という制限になる。

2.1.4　$0\nu 2\beta$

$\mu^- \to e^-$ 転換だけでなく、$\lambda'_{131}, \lambda'_{213}$ のどちらも非零である場合を考える際、すなわち、scenario III のとき、RPV 相互作用の結合定数は全てある程度の大きさを持つと考えるので、$\lambda'_{113}, \lambda'_{113}$ のどちらも非零である。このとき、$\lambda'_{131}, \lambda'_{113}$ の組み合わせから、$0\nu 2\beta$ への寄与がある。$0\nu 2\beta$ は原

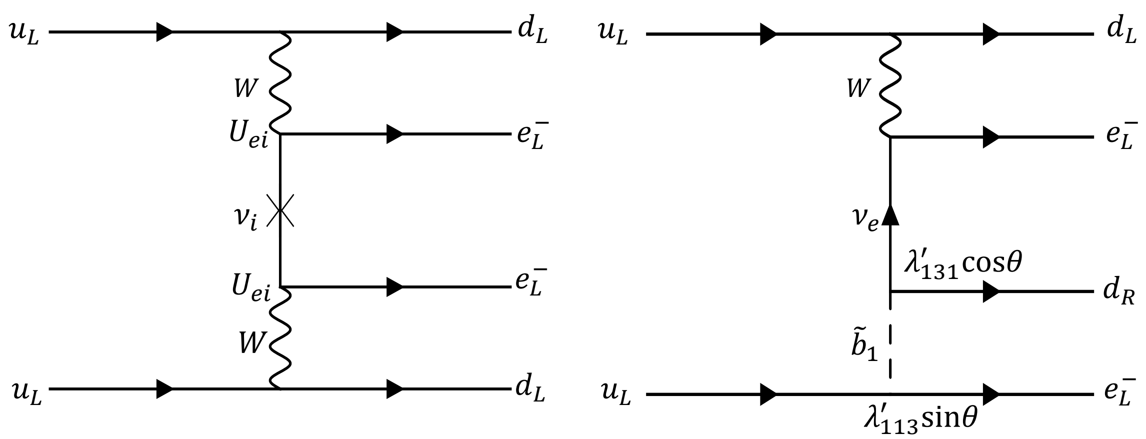


図 7: $0\nu\beta\beta$ を引き起こすダイアグラム。Majorana 質量由来 (左)、レプトクォーク (sbottom) 由来 (右)。

子核の遷移を評価して、その分岐比からニュートリノの Majorana 質量が評価される。このようなとき、ニュートリノの Majorana 質量を起源として、図 7 の過程によって引き起こされると考えられている。原子核の遷移に対する評価は本論文では取り扱わず、sbottom が伝播する過程と、Mojorana 質量を起源とする過程の原子核の遷移に関わらないパラメータの比較によって制限を考える。原子核の遷移に関わらないパラメータを比較すると

$$|\lambda'_{131}\sin\theta\lambda'_{113}\sin\theta| < \frac{8G_F}{\sqrt{2}} m_1^2 \cdot \frac{\sqrt{\langle M_{ee}^2\rangle}}{q} \tag{41}$$

$$= \frac{8G_F}{\sqrt{2}} m_1^2 \cdot \frac{\overline{M_{ee}}}{q} \tag{42}$$

となる。よって、ニュートリノの Majorana 質量は小さくても $\overline{M_{ee}} \leq 100(\text{meV})$ 前後 [1] であるから

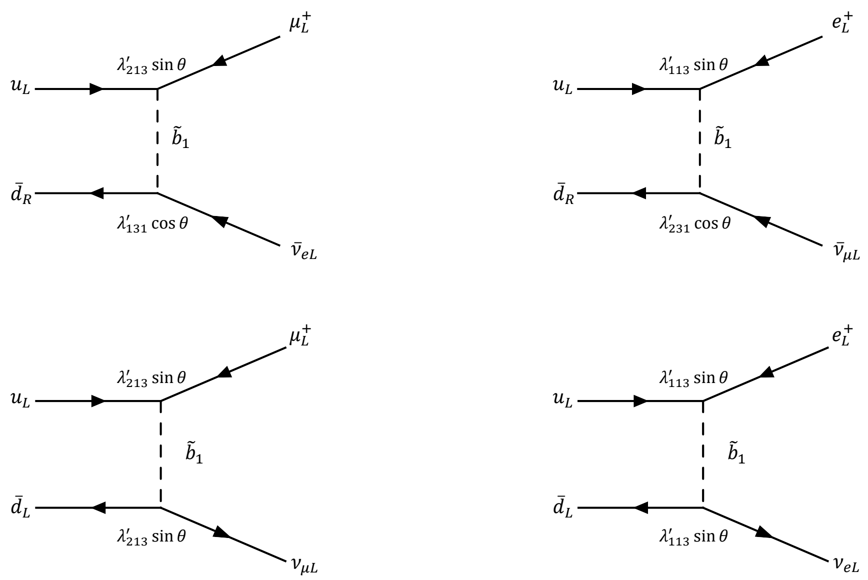
$$|\lambda_{131}\sin\theta\lambda_{113}\sin\theta| < 2.65\times 10^{-9}\left(\frac{q}{100(\text{MeV})}\right)^{-1}\left(\frac{m_1}{200(\text{GeV})}\right)^{2}\left(\frac{\overline{M_{ee}}}{100(\text{meV})}\right) \tag{43}$$

となる。

2.1.5　π 崩壊からの制限

2.1.5.1　π^+ の LNV 崩壊からの制限

π^+ の崩壊は、$\mu^- \to e^+$ 転換と強く相関がある。これに関しては、scenario I, II で詳しく述べる。scenario I, II の場合、RPV 相互作用は $\lambda'_{213}\sin\theta$ かあるいは、$\lambda'_{113}\sin\theta$ のいずれかが非零でもう一方は十分小さい場合を考えている。このとき、図 8a, 8b が各 scenario で π 粒子の崩壊に寄与する。このとき、それぞれの崩壊率は



(a)　　(b)

図 8: scenario I, II で可能な π 粒子の崩壊ダイアグラム。(a)$\lambda'_{213}\sin\theta$、$\lambda'_{131}\cos\theta$ の組み合わせ。(b)$\lambda'_{113}\sin\theta$、$\lambda'_{231}\cos\theta$ の組み合わせ。

$$\begin{aligned}\Gamma^{\mathrm{exotic}}_{e_L^+} =& \frac{1}{128}\left|\frac{\lambda'_{231}\cos\theta_{\tilde{b}}\lambda'_{113}\sin\theta_{\tilde{b}}}{m_1^2}\right|^2\left(\frac{m_\pi^2}{m_u+m_d}\right)^2\frac{1}{G_F^2 m_e^2}\Gamma^{\mathrm{SM}}_{\pi^+\to e^+\nu_\mu}\\ &+\left(\frac{1}{32}\left|\frac{\lambda'_{113}\sin\theta_{\tilde{b}}}{m_1}\right|^4+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left|\frac{\lambda'_{113}\sin\theta_{\tilde{b}}}{m_1}\right|^2 G_F\right)\frac{1}{G_F^2}\Gamma^{\mathrm{SM}}_{\pi^+\to e^+\nu_\mu}\end{aligned}\tag{44}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^{\mathrm{exotic}}_{\mu_L^+} =& \frac{1}{128}\left|\frac{\lambda'_{131}\cos\theta_{\tilde{b}}\lambda'_{213}\sin\theta_{\tilde{b}}}{m_1^2}\right|^2\left(\frac{m_\pi^2}{m_u+m_d}\right)^2\frac{1}{G_F^2 m_\mu^2}\Gamma^{\mathrm{SM}}_{\pi^+\to \mu^+\nu_\mu}\\ &+\left(\frac{1}{32}\left|\frac{\lambda'_{213}\sin\theta_{\tilde{b}}}{m_1}\right|^4+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left|\frac{\lambda'_{213}\sin\theta_{\tilde{b}}}{m_1}\right|^2 G_F\right)\frac{1}{G_F^2}\Gamma^{\mathrm{SM}}_{\pi^+\to \mu^+\nu_\mu}\end{aligned}\tag{45}$$

となる（導出は付 録 G 参照）。[25] により、π 粒子の崩壊過程における主モード $\pi^+ \to \mu^+ \overline{\nu}_\mu$ の誤差 $\mathrm{Er}_{\mu_\mathrm{L}^+} = 4.0 \times 10^{-7}$ の範囲内に収まるべきであるから

$$\frac{\Gamma_{\mu_L^+}^{\mathrm{exotic}}}{\Gamma_{\pi^+ \to \mu_L^+ \nu_\mu} + \Gamma_{\mu_L^+}^{\mathrm{exotic}}} < \mathrm{Er}_{\mu_\mathrm{L}^+} \tag{46}$$

また、π 粒子の崩壊過程におけるモード $\pi^+ \to e^+ \overline{\nu}_e$ の誤差 $\mathrm{Er}_{\mathrm{e}_\mathrm{L}^+} = 4.0 \times 10^{-7}$ の範囲内に収まるべきであるから

$$\frac{\Gamma_{e_L^+}^{\mathrm{exotic}}}{\Gamma_{\pi^+ \to \mu_L^+ \nu_\mu} + \Gamma_{e_L^+}^{\mathrm{exotic}}} < \mathrm{Er}_{\mathrm{e}_\mathrm{L}^+} \tag{47}$$

と制限される。これについて、$\lambda'_{213} \sin\theta_{\tilde{b}}, \lambda'_{131} \cos\theta_{\tilde{b}}$ と $\lambda'_{113} \sin\theta_{\tilde{b}}, \lambda'_{231} \cos\theta_{\tilde{b}}$ の組み合わせ同士の関係は次のようになる。

ニュートリノの長基線実験 [26, 27, 28, 29] において、これらの稀崩壊を測定することは非常に重要な帰結を与えることになる。

2.1.5.2　π^+ 崩壊の全崩壊モードからの制限

π 粒子の崩壊において、そのレプトンフレーバーの universalityβ_π に対しての制限は、理論計算に対して精度良く測定されていることが知られている。[1] より、RPV 相互作用からの寄与は $\mathrm{Er} = 2.3 \times 10^{-7}$ 以内に収まる必要がある。レプトンフレーバーの universalityβ_π は

$$\beta_\pi = \frac{\Gamma_{e\nu}^{SM} + \Gamma_{e\nu}^{RPV}}{\Gamma_{\mu\nu}^{SM} + \Gamma_{\mu\nu}^{RPV}} \tag{48}$$

となるからここで、$\beta = \frac{\Gamma_{e\nu}^{SM}}{\Gamma_{\mu\nu}^{SM}}$、$\epsilon = \frac{\Gamma_{e\nu}^{PPV}}{\Gamma_{\mu\nu}^{SM}}$、$\epsilon' = \frac{\Gamma_{\mu\nu}^{RPV}}{\Gamma_{\mu\nu}^{SM}}$ とすると、

$$\left| \frac{\Gamma_{e\nu}^{RPV}}{\Gamma_{\mu\nu}^{SM}} - \frac{\Gamma_{e\nu}^{SM}}{(\Gamma_{\mu\nu}^{SM})^2} \Gamma_{\mu\nu}^{RPV} \right| \leq Er \tag{49}$$

を満たせば良い。ここで、π 崩壊の RPV 相互症からの寄与であるダイアグラムは図 8 に加えて、図 9 の合計 8 つである。このため、ϵ, ϵ' は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\epsilon = \beta \frac{1}{128} & \frac{|\lambda'_{113} \sin\theta_{\tilde{b}} \lambda'_{231} \cos\theta_{\tilde{b}}|^2}{m_1^4} \left(\frac{m_\pi^2}{m_u + m_d} \right)^2 \frac{1}{G_F^2 m_e^2} \\
& + \beta \frac{1}{128} \frac{|\lambda'_{113} \sin\theta_{\tilde{b}} \lambda'_{131} \cos\theta_{\tilde{b}}|^2}{m_1^4} \left(\frac{m_\pi^2}{m_u + m_d} \right)^2 \frac{1}{G_F^2 m_e^2} \\
& + \beta \frac{1}{32 G_F^2} \left| \frac{\lambda'^2_{113} \sin\theta_{\tilde{b}}}{m_1^2} \right|^2 + \beta \frac{1}{2\sqrt{2} G_F} \left| \frac{\lambda'^2_{113} \sin\theta_{\tilde{b}}}{m_1^2} \right| + \beta \frac{1}{32 G_F^2} \left| \frac{\lambda'_{213} \sin\theta_{\tilde{b}} \lambda'_{113} \sin\theta_{\tilde{b}}}{m_1^2} \right|^2
\end{aligned} \tag{50}$$

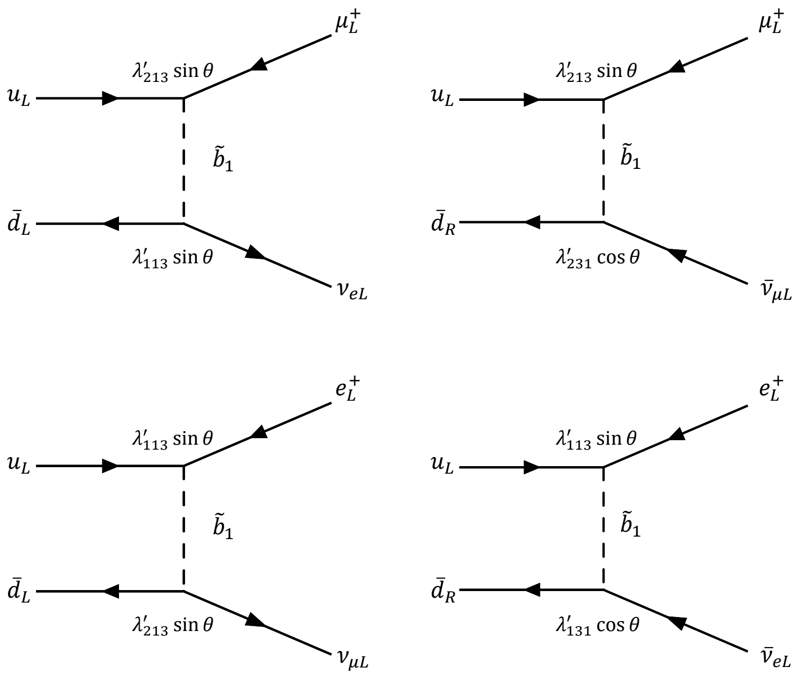


図 9: scenario III のとき、可能な π 粒子崩壊のダイアグラム。

$$
\begin{aligned}
\epsilon' = &\frac{1}{128}\frac{|\lambda'_{213}\sin\theta_{\tilde{b}}\lambda'_{231}\cos\theta_{\tilde{b}}|^2}{m_1^4}\left(\frac{m_\pi^2}{m_u+m_d}\right)^2\frac{1}{G_F^2 m_\mu^2} \\
&+\frac{1}{128}\frac{|\lambda'_{213}\sin\theta_{\tilde{b}}\lambda'_{131}\cos\theta_{\tilde{b}}|^2}{m_1^4}\left(\frac{m_\pi^2}{m_u+m_d}\right)^2\frac{1}{G_F^2 m_\mu^2} \\
&+\frac{1}{32G_F^2}\left|\frac{\lambda'^2_{213}\sin^2\theta_{\tilde{b}}}{m_1^2}\right|^2+\frac{1}{2\sqrt{2}G_F}\left|\frac{\lambda'^2_{213}\sin^2\theta_{\tilde{b}}}{m_1^2}\right|+\frac{1}{32G_F^2}\left|\frac{\lambda'_{213}\sin\theta_{\tilde{b}}\lambda'_{113}\sin\theta_{\tilde{b}}}{m_1^2}\right|^2
\end{aligned}
\tag{51}
$$

ここで、それぞれの崩壊モードの崩壊率と $\pi^+ \to \mu^+\nu_\mu(e^+\nu_e)$ との比を図示すると、以下の図 10 のようになる。このため、$\pi^+ \to e^+\overline{\nu}_\mu$ のモードが最も寄与として大きいことがわかる。

第 3 章　検証可能性

ここでは、$\mu^- \to e^+$ 転換の見積もり方を検討し、簡単のため、$\mu^- \to e^+$ 転換を起こしうる coupling の組み合わせごとにおける scenario I, II とそのどちらも考え得る状況での $\mu^- \to e^+$ 転換の既存の実験、あるいは現在計画されている実験での検証可能性を議論する。

3.1　$\mu^- \to e^+$ 転換における原子核の遷移の見積り

$\mu^- \to e^+$ 転換はミューオン原子中で引き起こされる。このとき、原子番号が 2 つ変化するため、原子核の遷移を考える必要がある。弱い相互作用を考えた際の原子核の遷移は付 録 B で議論して

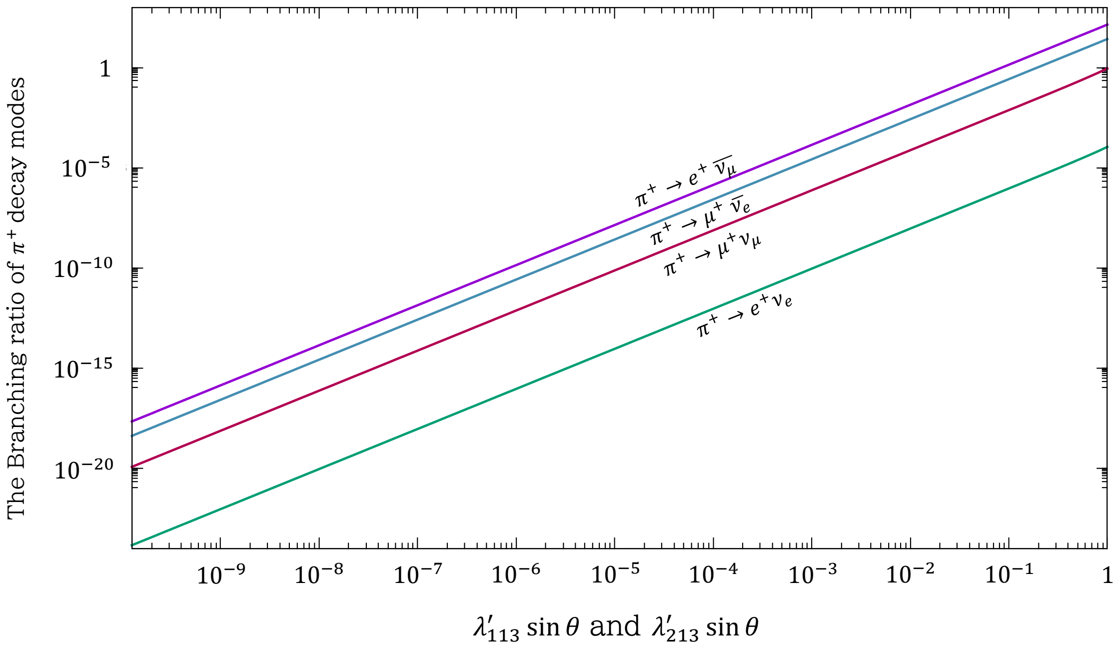


図 10: π 粒子の崩壊モードの崩壊率の比較。特に、$\lambda'_{l13}\sin\theta$ の関わるダイアグラムについて比較した。

いる。

以下では、原子核の遷移を考えていく。遷移行列要素 $\mathcal{M}_{\mu^-\to e^+}$ は 2 つの部分によって構成される:

$$\mathcal{M}_{\mu^-\to e^+} = \mathcal{M}^A_{\mu^-\to e^+} + \mathcal{M}^B_{\mu^-\to e^+}, \tag{52}$$

where

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^A_{\mu^-\to e^+} =& \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \frac{\lambda'_{213}\lambda'_{131}\cos\theta\sin\theta}{m_1^2} \int d^3r_1 d^3r_2 \langle N'(Z-2,A); e^+| \\ &\times \left\{\overline{(\mu_L(r_1))^c} u_L(r_1)\right\} \left\{\overline{d_R(r_1)} D_{\nu_e}(r_1 - r_2)\gamma_\alpha e_L(r_2)\right\} \\ &\times \left\{\overline{d(r_2)}\gamma^\alpha P_L u(r_2)\right\} |N(Z,A);\mu^-\rangle \end{aligned} \tag{53}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^B_{\mu^-\to e^+} =& \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \frac{\lambda'_{113}\lambda'_{231}\cos\theta\sin\theta}{m_1^2} \int d^3r_1 d^3r_2 \langle N'(Z-2,A); e^+| \\ &\times \left\{\overline{(e_L(r_1))^c} u_L(r_1)\right\} \left\{\overline{d_R(r_1)} D_{\nu_\mu}(r_1 - r_2)\gamma_\alpha \mu_L(r_2)\right\} \\ &\times \left\{\overline{d(r_2)}\gamma^\alpha P_L u(r_2)\right\} |N(Z,A);\mu^-\rangle . \end{aligned} \tag{54}$$

ここでは, $G_F = 1.166 \times 10^{-5}$ GeV^{-2} は Fermi 結合定数で、ニュートリノの伝播関数 $D_\nu(\boldsymbol{r})$ は

$$D_\nu(\boldsymbol{r}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{\not{q}}{q^2 + i\epsilon} \exp(i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}). \tag{55}$$

である。始状態と、終状態はそれぞれ $|N(Z,A);\mu^-\rangle$ と $|N'(Z-2,A);e^+\rangle$ と表す。ここで、Z は陽子数で、A は質量数を表す。Fierz 変換によって

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^A_{\mu^-\to e^+} =& \frac{4G_F}{\sqrt{2}}\frac{\lambda'_{213}\lambda'_{131}\cos\theta\sin\theta}{m_1^2}\int d^3r_1 d^3r_2 \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{d^3p_\mu}{(2\pi)^3} e^{i\boldsymbol{r}_1\cdot(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}_e)} e^{-i\boldsymbol{r}_2\cdot(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}_\mu)}\tilde{\psi}_\mu(\boldsymbol{p}_\mu)\\ &\times \frac{1}{8}\sum_{X=S,T}\overline{u}_e(p_e)\gamma_\alpha\frac{\not{q}}{q^2}XP_R u_\mu(p_\mu)\\ &\times\langle N'(Z-2,A)|\left(\bar{d}X'P_L u\right)_{\boldsymbol{r}_1}(\bar{d}\gamma^\alpha P_L u)_{\boldsymbol{r}_2}|N(Z,A)\rangle,\end{aligned} \tag{56}$$

$$\begin{aligned}S =& -2, S' = 1,\\ T =& -\sigma^{\lambda\kappa}, T' = \sigma_{\lambda\kappa},\end{aligned}$$

となる。ここで、$P_{L/R} = (1\mp\gamma_5)/2$ は左巻あるいは右巻の射影演算子であり、$\tilde{\psi}$ は μ^- 粒子の運動量空間での波動関数である。同様に、次の式を得る。

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^B_{\mu^-\to e^+} =& \frac{4G_F}{\sqrt{2}}\frac{\lambda'_{113}\lambda'_{231}\cos\theta\sin\theta}{m_1^2}\int d^3r_1 d^3r_2 \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{d^3p_\mu}{(2\pi)^3} e^{i\boldsymbol{r}_1\cdot(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}_e)} e^{-i\boldsymbol{r}_2\cdot(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}_\mu)}\tilde{\psi}_\mu(\boldsymbol{p}_\mu)\\ &\times \frac{1}{8}\sum_{X=S,T}\overline{u}_e(p_e)X\frac{\not{q}}{q^2}\gamma_\alpha P_L u_\mu(p_\mu)\\ &\times\langle N'(Z-2,A)|\left(\bar{d}X'P_L u\right)_{\boldsymbol{r}_2}(\bar{d}\gamma^\alpha P_L u)_{\boldsymbol{r}_1}|N(Z,A)\rangle.\end{aligned} \tag{57}$$

この不変散乱振幅を定量的に見積もるためには、原子核よ行列要素を詳細に計算する必要がある。ここでは、計算の詳細について立ち入らず、[30] を参考にして評価することにする。しかし、$\mu^- \to e^+$ 転換において原子核の原子番号は 2 つ分変化する。ここから、陽子が中性子になることで Pauli の排他律からの効果を考える必要がある。このことから、1.2.2 で参照した [4, 5] を [30] で用いられた次元解析に加えて、$\mu^- \to e^+$ 転換の分岐比を新しい解析方法で評価することにする。その評価式が

$$\begin{aligned}\mathrm{Br}_{\mu^-\to e^+} =& \tilde{\tau}_\mu\Gamma_{\mu^-\to e^+}\\ \simeq& \tilde{\tau}_\mu\frac{|\lambda'_{l13}\lambda'_{k31}\cos\theta\sin\theta|^2}{m_1^4}\left(\frac{G_F}{\sqrt{2}}\right)^2 Z_{\mathrm{eff}}^2\frac{Q'^8}{q^2}\frac{(m_\mu Z_{\mathrm{eff}}\alpha)^3}{\pi}\left(1-3.125\left(\frac{A-Z}{2A}\right)\right)^2\end{aligned} \tag{58}$$

である。ここで、Q は位相空間を含む典型的なエネルギースケールであり、原子核からの寄与をその質量次元と等しくなるようにおいたパラメータである。また、μ^- 粒子はその質量からミューオン原子中では 1S 軌道にあるので、そこから波動関数を

$$\tilde{\psi} = \frac{(m_\mu Z_{\mathrm{eff}}\alpha)^3}{\pi} \tag{59}$$

としている。また、q は図 11 で伝播しているニュートリノの四元運動量を表している。

式 58 で必要な原子核の情報は [31] を参考にした表 8 を用いている。

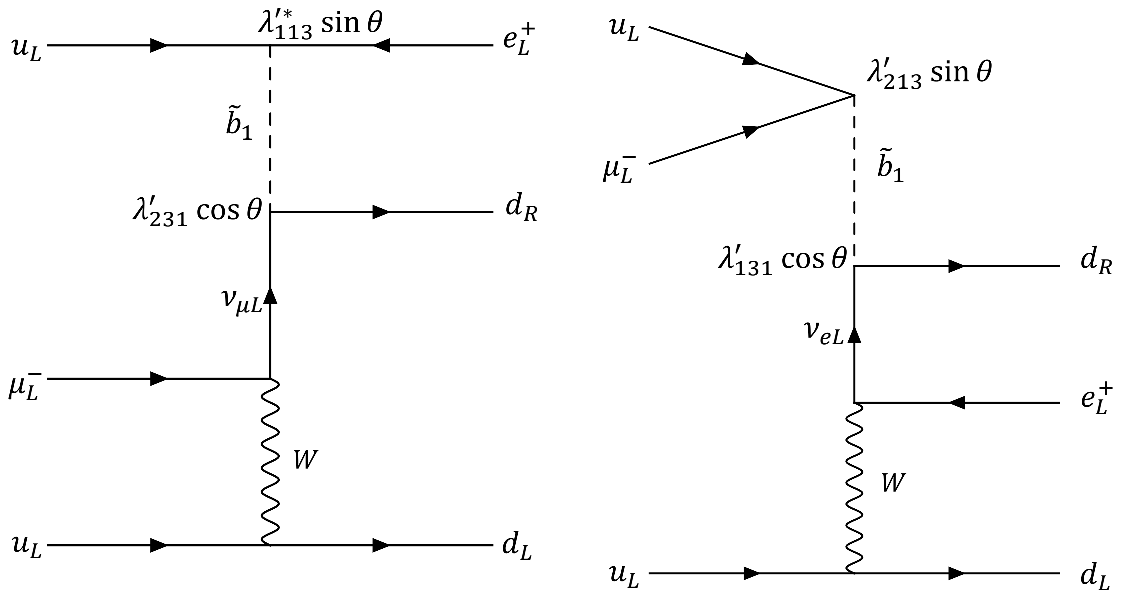


図 11: レプトクォーク $\tilde{b}_1$ が媒介する $\mu^- \to e^+$ 転換のダイアグラム。

原子核	原子番号	質量数	有効原子番号	ミューオン原子の寿命
Al	13	27	11.48	864 ± 2(ns)
Ca	20	40	16.15	333 ± 7(ns)
Ti	22	48	17.38	329.3 ± 1.3(ns)
Zn	30	65	21.61	161 ± 4(ns)
Ge	32	73	22.43	167.4 ± 1.8(ns)

表 8: 各 Scenario で用いる原子核の情報

3.1.1　Scenario I

3.1 で導出した式 (58) を用いて将来実験である COMET phase-II[32]、Mu2e[33]、PRISM[34] の精度や、NuFact[35] で生成される μ 粒子の数で検証が可能かを考察していく。Scenario I では簡単のために式 (19) で導入したラグランジアンのうち、$(\lambda'_{213}\sin\theta, \lambda'_{131}\cos\theta)$ の組み合わせのみが有効であるとして考えていく。このように考える理由として $\mu^- \to e^-$ 転換過程の分岐比は無視でき、かつ、$\mu^- \to e^+$ 転換過程の分岐比はより大きい場合を考えたいからである。この過程は 2.1.5.1 における LNV 過程の $\pi^+ \to \mu^+\overline{\nu_{eL}}$ との相関が強い。これは図 8a と図 11 の対応を表した下の図 12 からわかる。π 粒子の崩壊からの制限である式 (45) は、図 13 に示した。この LNV 過程である π^+ 崩壊過程は付録 G で議論したように chiral enhancement により大きい崩壊率を持つために、より厳しい制限として与えられることになる。そして、Scenario I のラグランジアンにおける各結合定数 $(\lambda'_{213}\sin\theta, \lambda'_{131}\cos\theta)$ に対する制限は表 9 である。

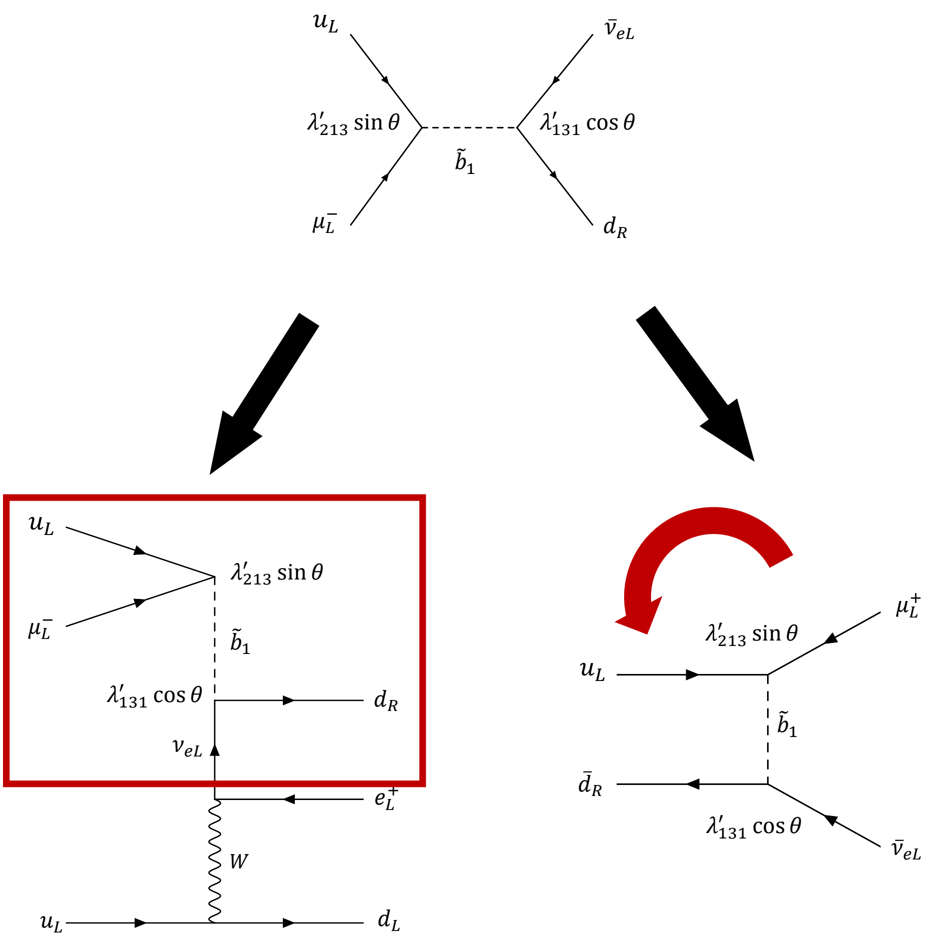


図 12: $\lambda'_{213}\sin\theta$、$\lambda'_{131}\cos\theta$ の組み合わせにおける $\mu^- \to e^+$ 転換と π 粒子の崩壊に共通するダイアグラム。

今回の見積りで用いる原子核は同位体の中で天然存在比が最も高い原子番号・質量数を用いている。まず、Ca 原子核のとき、分岐比は

$$\mathrm{Br}^{\mathrm{I}}_{\mu^- \to e^+} < 2.0 \times 10^{-18} \left(\frac{\lambda'_{131}\cos\theta\lambda'_{213}\sin\theta}{3.5 \times 10^{-3}}\right)^2 \left(\frac{100(\mathrm{MeV})}{q}\right)^2 \left(\frac{Q}{100(\mathrm{MeV})}\right)^8 \tag{60}$$

となる。また、Zn 原子のときは

$$\mathrm{Br}^{\mathrm{I}}_{\mu^- \to e^+} < 2.2 \times 10^{-18} \left(\frac{\lambda'_{131}\cos\theta\lambda'_{213}\sin\theta}{3.5 \times 10^{-3}}\right)^2 \left(\frac{100(\mathrm{MeV})}{q}\right)^2 \left(\frac{Q}{100(\mathrm{MeV})}\right)^8 \tag{61}$$

実験	coupling への制限値
$Q_{\rm weak}$ collaboration：APV, PVES	$\lambda'_{131}\cos\theta_1 \le 0.69\,(\,m_{\tilde{t}_L}/1.0(\mathrm{TeV})\,)$
ATLAS 実験：$\tilde{b}_1$ mass	$\lambda'_{213}\sin\theta_1 \le 5.0\times 10^{-3}$

表 9: Scenario I における各 coupling constant に対する制限

となる。Ge 原子のときは

$$\mathrm{Br}^{\mathrm{I}}_{\mu^-\to e^+} < 1.6\times 10^{-18}\left(\frac{\lambda'_{131}\cos\theta\lambda'_{213}\sin\theta}{3.5\times 10^{-3}}\right)^2\left(\frac{100(\mathrm{MeV})}{q}\right)^2\left(\frac{Q}{100(\mathrm{MeV})}\right)^8 \tag{62}$$

となる。Ti 原子のときは

$$\mathrm{Br}^{\mathrm{I}}_{\mu^-\to e^+} < 1.4\times 10^{-18}\left(\frac{\lambda'_{131}\cos\theta\lambda'_{213}\sin\theta}{3.5\times 10^{-3}}\right)^2\left(\frac{100(\mathrm{MeV})}{q}\right)^2\left(\frac{Q}{100(\mathrm{MeV})}\right)^8 \tag{63}$$

となる。Ni 原子のときは

$$\mathrm{Br}^{\mathrm{I}}_{\mu^-\to e^+} < 2.1\times 10^{-18}\left(\frac{\lambda'_{131}\cos\theta\lambda'_{213}\sin\theta}{3.5\times 10^{-3}}\right)^2\left(\frac{100(\mathrm{MeV})}{q}\right)^2\left(\frac{Q}{100(\mathrm{MeV})}\right)^8 \tag{64}$$

となる。このとき、精度が 10^{18} である将来実験の PRISM で検証可能である。また、このとき、図 14 からわかるように $\mu^- \to e^-$ は引き起こされない。このため、$(\lambda'_{213}\sin\theta, \lambda'_{131}\cos\theta)$ の組み合わせのみが有効である場合、$\mu^- \to e^-$ 転換が無視でき、かつ、$\mu^- \to e^+$ 転換が検証できるような状況が起こりえることがわかる。また、このシナリオの場合、$\mu^- \to e^+$ 転換が観測された際、$\mu^- \to e^-$ 転換が観測されないとき、$(\lambda'_{213}\sin\theta, \lambda'_{131}\cos\theta)$ は $\mu^- \to e^+$ 転換の大きさに応じて、図 13 の関係になる。

3.1.2　Scenario II

Scenario I では簡単のために式 (19) で導入したラグランジアンのうち、$(\lambda'_{213}\sin\theta, \lambda'_{131}\cos\theta)$ の組み合わせのみが有効であるとして考えていく。このように考える理由として $\mu^- \to e^-$ 転換の分岐比は無視でき、かつ、$\mu^- \to e^+$ 転換過程の分岐比はより大きい場合を考えたいからである。この過程は 2.1.5.1 における LNV 過程の $\pi^+ \to \mu^+\overline{\nu_{eL}}$ との相関が強い。これは図 8b と図 11 の対応を表した下の図 15 からわかる。そして、Scenario II のラグランジアンにおける各結合定数 $(\lambda'_{213}\sin\theta, \lambda'_{131}\cos\theta)$ に対する制限は表 10 である。

scenario I と同様の方法で見積もっていく。

$$Br^{\mathrm{II}}_{\mu^-\to e^+} < 4.8\times 10^{-22}\left(\frac{\lambda'_{131}\cos\theta\lambda'_{213}\sin\theta}{5.4\times 10^{-5}}\right)^2\left(\frac{100(\mathrm{MeV})}{q}\right)^2\left(\frac{Q}{100(\mathrm{MeV})}\right)^8 \tag{65}$$

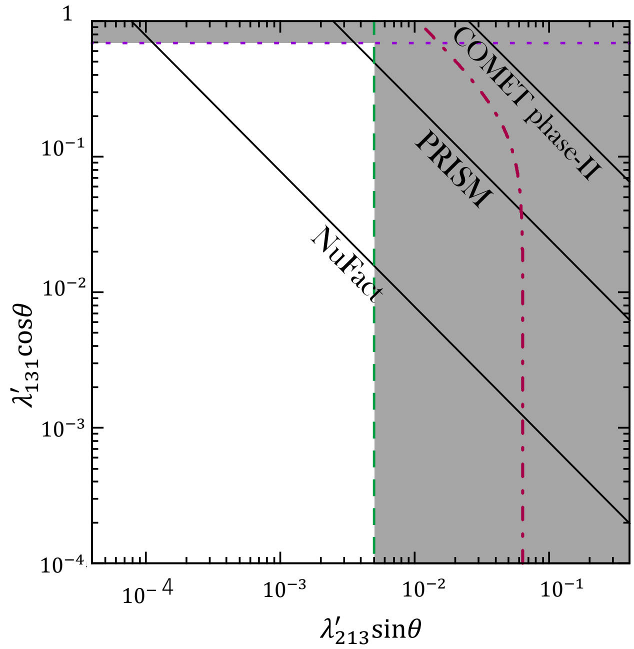


図 13: scenario I における結合定数 $\lambda'_{213}\sin\theta$、$\lambda'_{131}\cos\theta$ と分岐比の関係。点線が PVES、破線が sbottom decay、一点鎖線は π の崩壊。

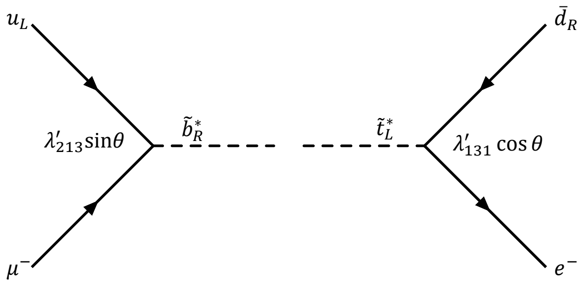


図 14: scenario I において $\mu^- \to e^-$ 転換を引き起こす vertex。中間状態が繋がらないため、このダイアグラムは不可能である。

となる。Zn 原子のときは

$$Br^{\mathrm{II}}_{\mu^-\to e^+} < 5.3\times 10^{-22}\left(\frac{\lambda'_{131}\cos\theta\lambda'_{213}\sin\theta}{5.4\times 10^{-5}}\right)^2\left(\frac{100(\mathrm{MeV})}{q}\right)^2\left(\frac{Q}{100(\mathrm{MeV})}\right)^8 \tag{66}$$

となる。Ge 原子のときは

$$Br^{\mathrm{II}}_{\mu^-\to e^+} < 3.9\times 10^{-22}\left(\frac{\lambda'_{131}\cos\theta\lambda'_{213}\sin\theta}{5.4\times 10^{-5}}\right)^2\left(\frac{100(\mathrm{MeV})}{q}\right)^2\left(\frac{Q}{100(\mathrm{MeV})}\right)^8 \tag{67}$$

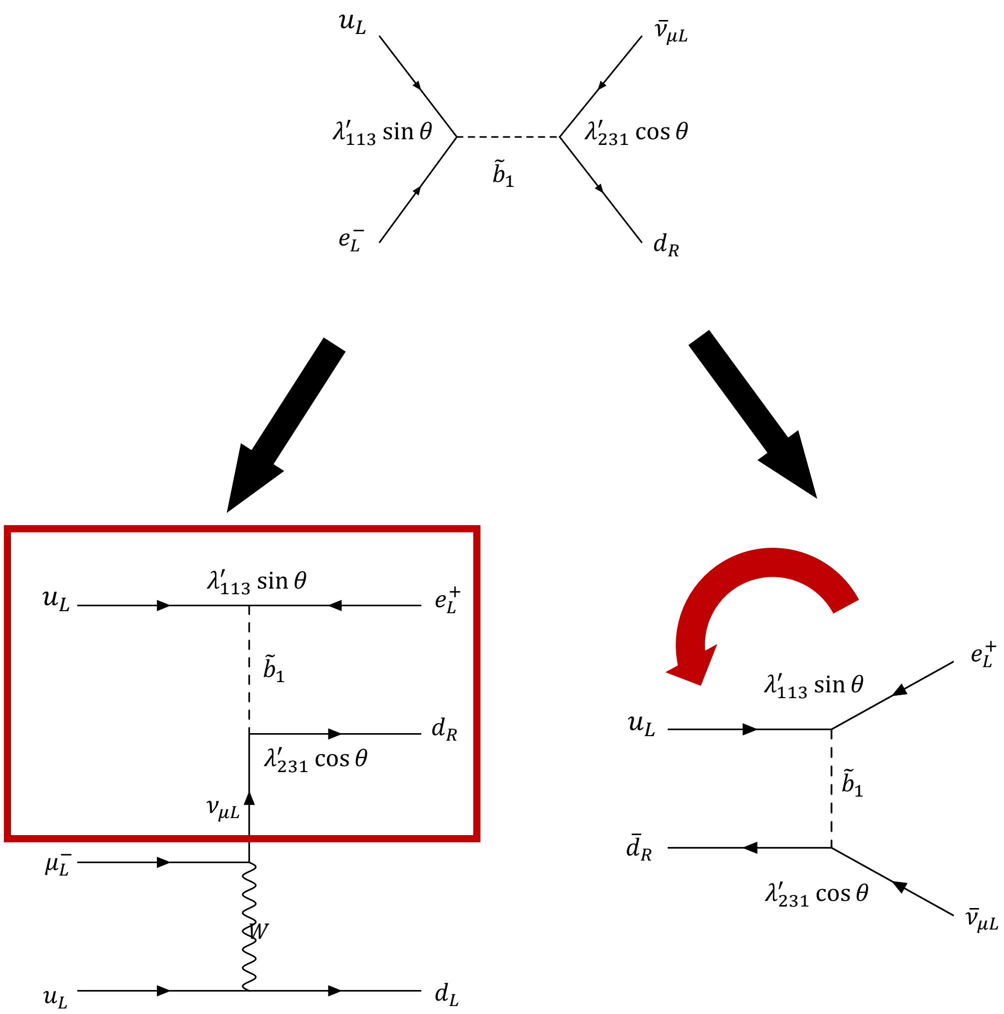


図 15: $\lambda'_{113}\sin\theta$、$\lambda'_{231}\cos\theta$ の組み合わせにおける $\mu^- \to e^+$ 転換と π 粒子の崩壊に共通するダイアグラム。

となる。Ti 原子のときは

$$Br^{\mathrm{II}}_{\mu^- \to e^+} < 3.4 \times 10^{-22} \left(\frac{\lambda'_{131}\cos\theta\lambda'_{213}\sin\theta}{5.4 \times 10^{-5}} \right)^2 \left(\frac{100(\mathrm{MeV})}{q} \right)^2 \left(\frac{Q}{100(\mathrm{MeV})} \right)^8 \tag{68}$$

となる。Ni 原子のときは

$$Br^{\mathrm{II}}_{\mu^- \to e^+} < 5.1 \times 10^{-22} \left(\frac{\lambda'_{131}\cos\theta\lambda'_{213}\sin\theta}{5.4 \times 10^{-5}} \right)^2 \left(\frac{100(\mathrm{MeV})}{q} \right)^2 \left(\frac{Q}{100(\mathrm{MeV})} \right)^8 \tag{69}$$

実験	coupling への制限値
DIS	$\lambda'_{231}\cos\theta_1 \leq 0.36\,(\ m_1/200(\mathrm{GeV})\ )$
ATLAS 実験：$\tilde{b}_1$ mass	$\lambda'_{113}\sin\theta_1 \leq 5.0\times10^{-3}$

表 10: Scenario II における各 coupling constant に対する制限

となる。このとき、使用可能なミューオン原子が 10^{-22} 個あれば検証可能である。以上の結果から、将来実験での検証は可能である。また、このとき、図 17 からわかるように $\mu^- \to e^-$ は引き起こされない。このため、$(\lambda'_{213}\sin\theta, \lambda'_{131}\cos\theta)$ の組み合わせのみが有効である場合、$\mu^- \to e^-$ 転換が無視でき、かつ、$\mu^- \to e^+$ 転換が検証できるような状況が起こりえることがわかる。また、このシナリオの場合、$\mu^- \to e^+$ 転換が観測された際、$\mu^- \to e^-$ 転換が観測されないとき、$(\lambda'_{213}\sin\theta, \lambda'_{131}\cos\theta)$ は $\mu^- \to e^+$ 転換の大きさに応じて、図 16 の関係になる。

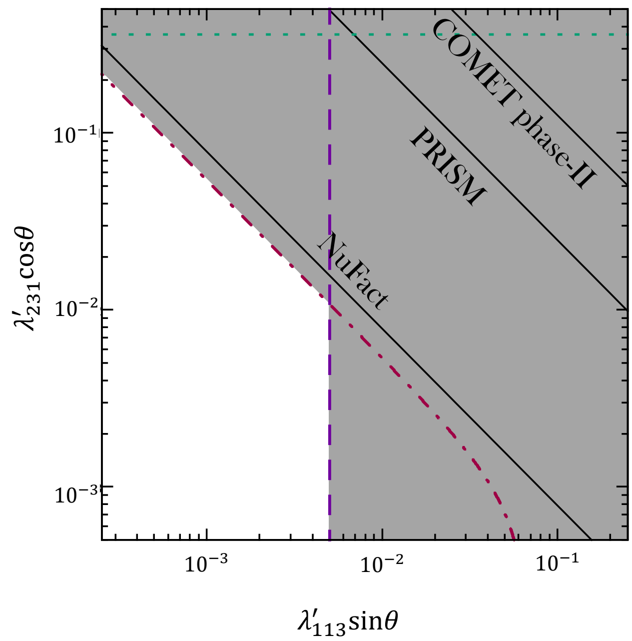


図 16: scenario I における結合定数 $\lambda'_{113}\sin\theta$、$\lambda'_{231}\cos\theta$ と分岐比の関係。点線が DIS、破線が sbottom decay、一点鎖線は π の崩壊。

3.1.3　Scenario III

scenario I、II では $\mu^- \to e^-$ 転換が無視できるほど小さくさせるために、$\lambda'_{213}\sin\theta$、$\lambda'_{113}\sin\theta$ の一方は非零であるような状況を考えた。scenario III では、どちらも非零である状況を考える。このとき、それぞれの scenario で考えた結合定数への制限に加え、新たに $\mu^- \to e^-$ 転換、$0\nu2\beta$ からの制限が追加される。π 粒子の崩壊からくる制限は図 18 - 23 の関係する部分に示した。

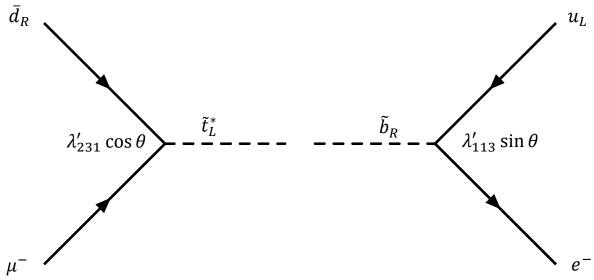


図 17: scenario II において $\mu^- \to e^-$ 転換を引き起こす vertex。中間状態が繋がらないため、このダイアグラムは不可能である。

experiment	bounds
$Q_{\rm weak}$ collaboration : APV, PVES	$\lambda'_{131}\cos\theta_1 \le 0.69\,\left(\,m_{\tilde{t}_L}/1.0(\mathrm{TeV})\,\right)$
DIS	$\lambda'_{231}\cos\theta_1 \le 0.36\,(\,m_1/200(\mathrm{GeV})\,)$
ATLAS : sbottom direct search	$\lambda'_{213}\sin\theta_1 \le 5.0\times10^{-3}$
	$\lambda'_{113}\sin\theta_1 \le 5.0\times10^{-3}$
$0\nu\beta\beta$	$\lambda'_{113}\sin\theta_1\lambda'_{131}\cos\theta_1 \le 2.65\times10^{-9}\,(\,m_1/200(\mathrm{GeV})\,)^2$
$\mu^- \to e^-$ conversion	$\lambda'_{213}\sin\theta_1\lambda'_{113}\sin\theta_1 \le 1.63\times10^{-7}\,(\,m_1/200(\mathrm{GeV})\,)^2$

表 11: coupling constant に対する制限

これらを満たすように coupling の相関を図 18 - 23 に示した。

結合定数への各制限を全て考慮して、$\mu^- \to e^-$ 転換と $\mu^- \to e^+$ 転換のそれぞれ一方が最大値になるとき、もう一方がどの程度の分岐比になるのか示した図が図 24 - 31 である。すなわち、$\mu^- \to e^-$ 転換と $\mu^- \to e^+$ 転換の分岐比、各結合定数を要素とした 6 次元超空間上で $\mu^- \to e^-$ 転換と $\mu^- \to e^+$ の一方が極大値をとるときを示したということである。

図 24 - 31 からわかるように、$\mu^- \to e^-$ 転換が観測出来なかった場合でも、PRISM の精度であれば $\mu^- \to e^+$ 転換が十分検証可能な大きさの分岐比になることがわかる。また、$\mu^- \to e^-$ 転換が観測された場合で、$\mu^- \to e^+$ 転換は必ずしも検証が不可能ではない。以上から、$\mu^- \to e^-$ 転換が $\mu^- \to e^+$ 転換より大きい状況が実現できることが示せた。そのため、将来実験で $\mu^- \to e^-$ 転換と $\mu^- \to e^+$ 転換の検証が可能な μ 粒子が生成されることを期待したい。

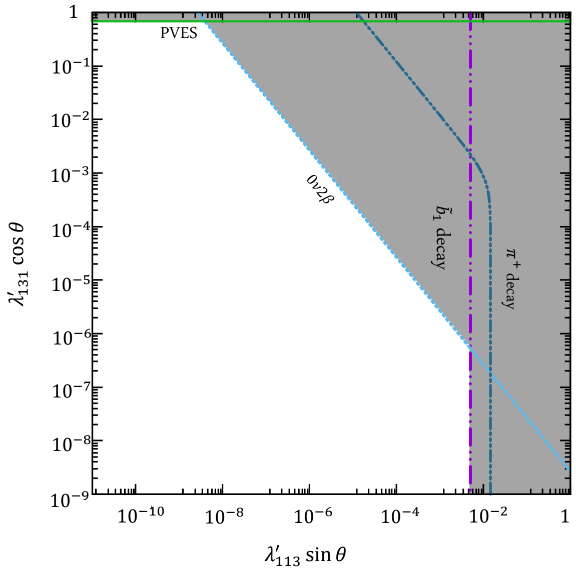


図 18: シナリオ III における λ'_{113} と λ'_{131} の相関。実線が PVES からの制限、三点鎖線が π^+ 崩壊の universality による制限、二点鎖線が $\tilde{b}_1$ 崩壊からの制限、点線が $0\nu2\beta$ による制限。$\lambda'_{213}\sin\theta$、$\lambda'_{231}\cos\theta$ はどちらも 0 としている。

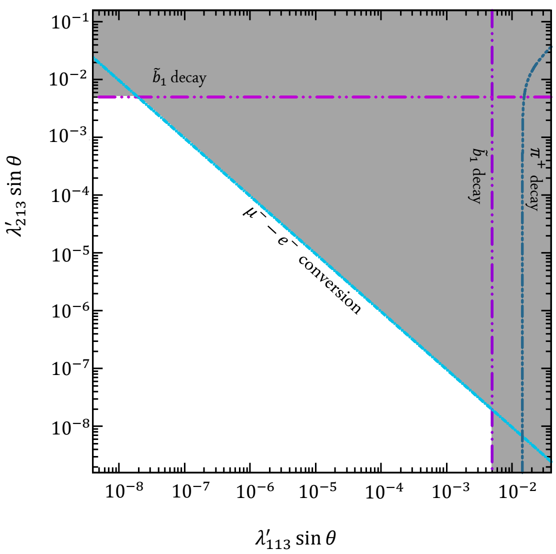


図 19: シナリオ III における λ'_{113} と λ'_{213} の相関。実線が PVES からの制限、一点鎖線が $\mu^- \to e^-$ 転換による制限、三点鎖線が π^+ 崩壊の universality による制限、二点鎖線が $\tilde{b}_1$ 崩壊からの制限。$\lambda'_{131}\cos\theta$、$\lambda'_{231}\cos\theta$ はどちらも 0 としている。

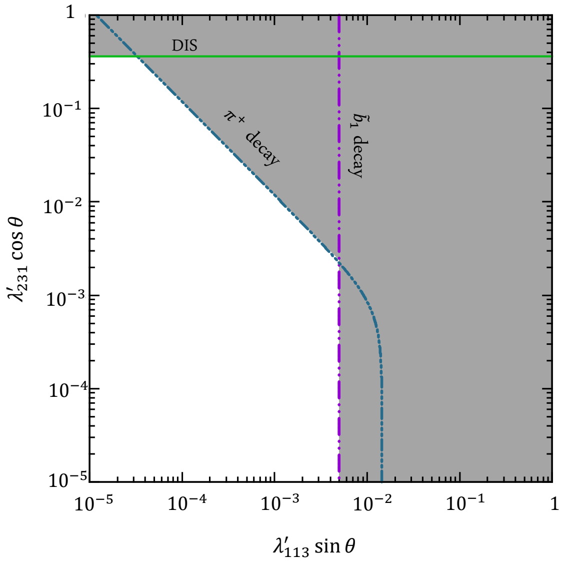


図 20: シナリオ III における λ'_{113} と λ'_{231} の相関。三点鎖線が π^+ 崩壊の universality による制限、二点鎖線が $\tilde{b}_1$ 崩壊による制値、実線が DIS による制限である。$\lambda'_{131}\cos\theta$、$\lambda'_{213}\sin\theta$ はどちらも 0 としている。

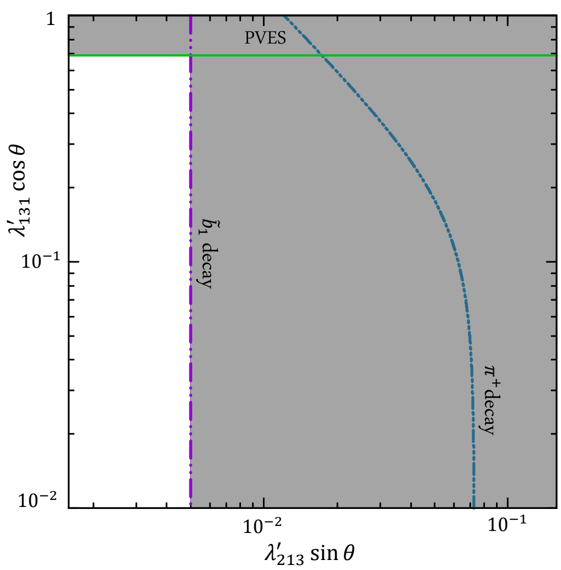


図 21: シナリオ III における λ'_{213} と λ'_{131} の相関。実線が PVES からの制限、三点鎖線が π^+ 崩壊による制限、二点鎖線が $\tilde{b}_1$ 崩壊による制限、三点鎖線が π^+ 崩壊による制限。$\lambda'_{113}\sin\theta$、$\lambda'_{231}\cos\theta$ はどちらも 0 としている。

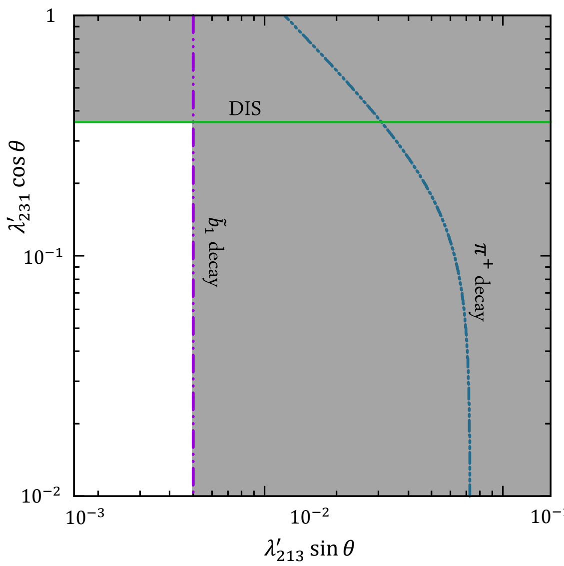


図 22: シナリオ III における λ'_{213} と λ'_{231} の相関。実線が PVES からの制限、三点鎖線の破線が π^+ 崩壊による制限、二点鎖線が $\tilde{b}_1$ 崩壊による制限による制限。$\lambda'_{113}\sin\theta$、$\lambda'_{131}\cos\theta$ はどちらも 0 としている。

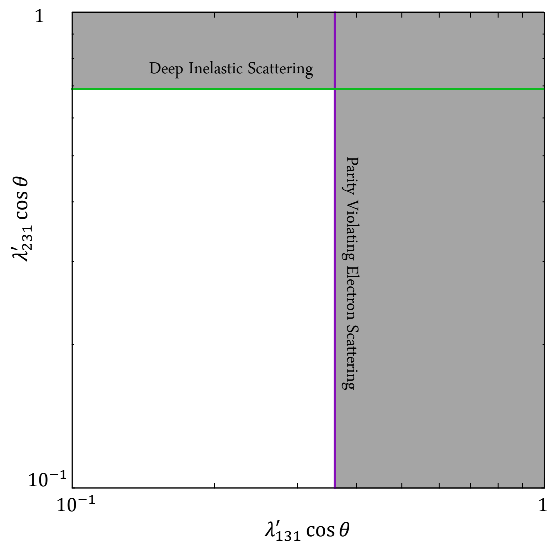


図 23: シナリオ III における λ'_{131} と λ'_{231} の相関。実線がそれぞれ PVES、DIS からの制限。$\lambda'_{113}\sin\theta$、$\lambda'_{113}\sin\theta$ はどちらも 0 としている。

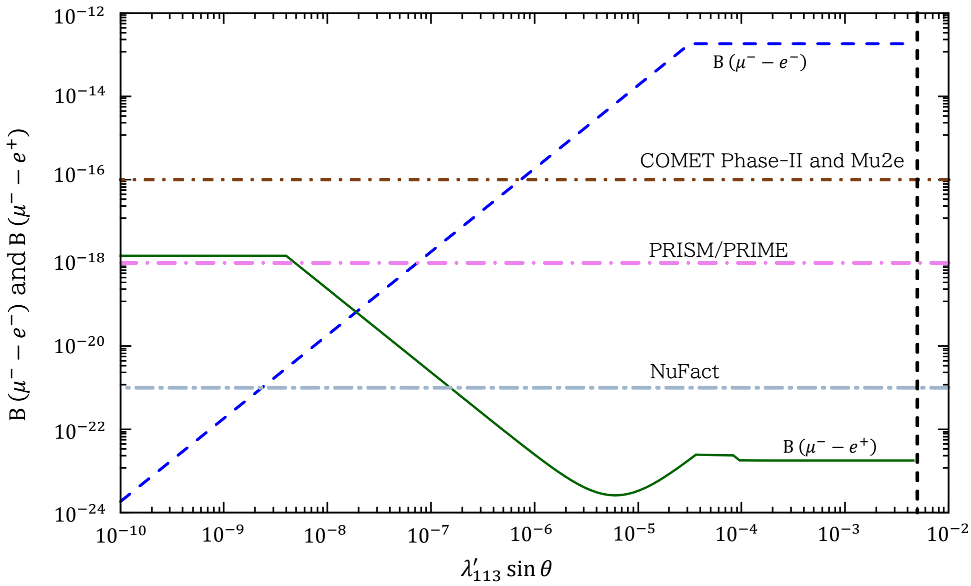


図 24: λ'_{113} と $\mu^- - e^-$ 転換、$\mu^- \to e^+$ 転換の分岐比の関係。$\mu^- \to e^+$ 転換 (実線) が最大になる条件のもとでの $\mu^- - e^-$ 転換の最大値 (点線)。一点鎖線は将来実験 COMET phase-II、PRISM における精度か、NuFact における μ 粒子の intensity。

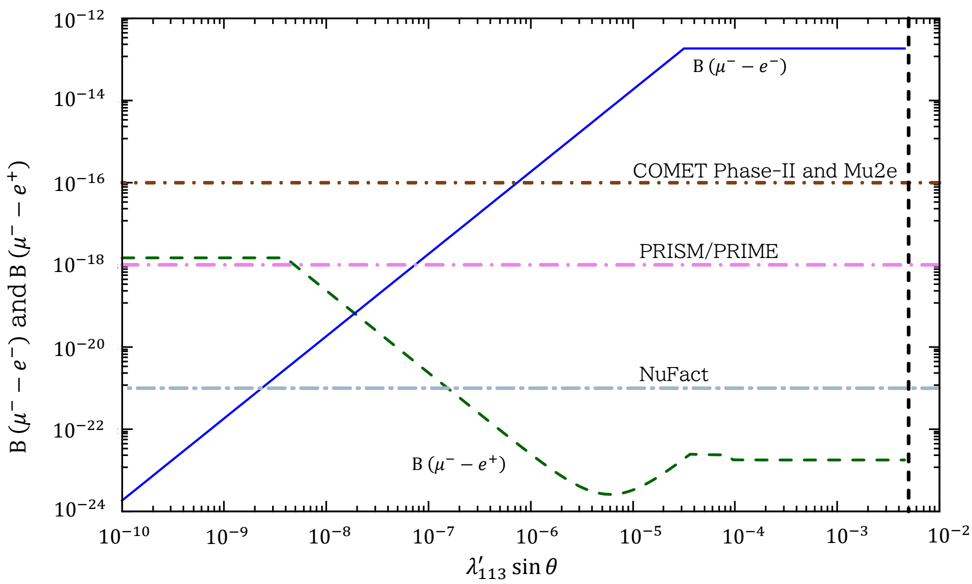


図 25: λ'_{113} と $\mu^- - e^-$ 転換、$\mu^- \to e^+$ 転換の分岐比の関係。$\mu^- \to e^-$ 転換 (実線) が最大になる条件のもとでの $\mu^- \to e^+$ 転換の最大値 (点線)。一点鎖線は将来実験 COMET phase-II、PRISM における精度か、NuFact における μ 粒子の intensity。

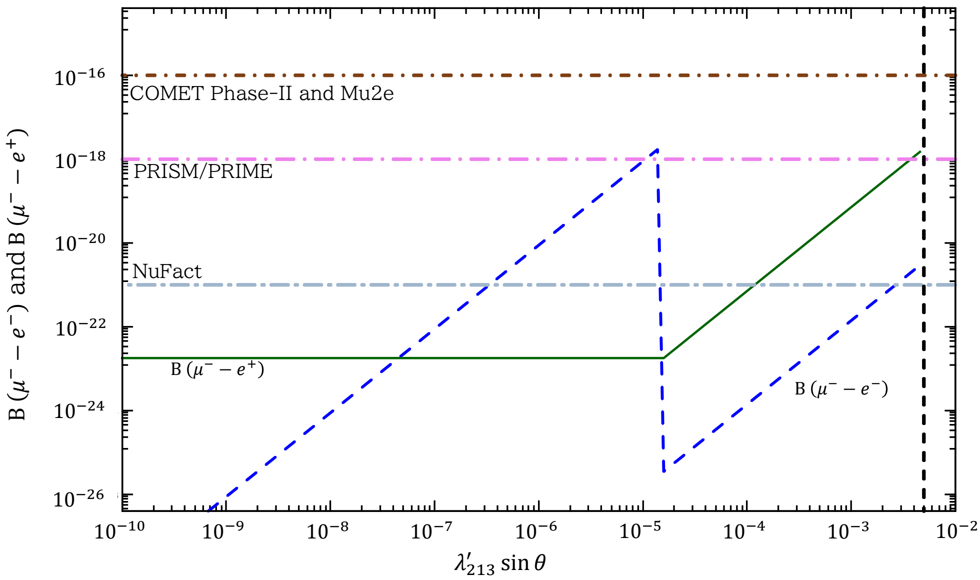


図 26: λ'_{213} と $\mu - e$ conversion、$\mu^- \to e^+$ の分岐比の関係。$\mu^- \to e^+$ 転換が最大になる条件のもとでの $\mu^- \to e^-$ 転換の最大値。各線に関しては図 24 と同様である。

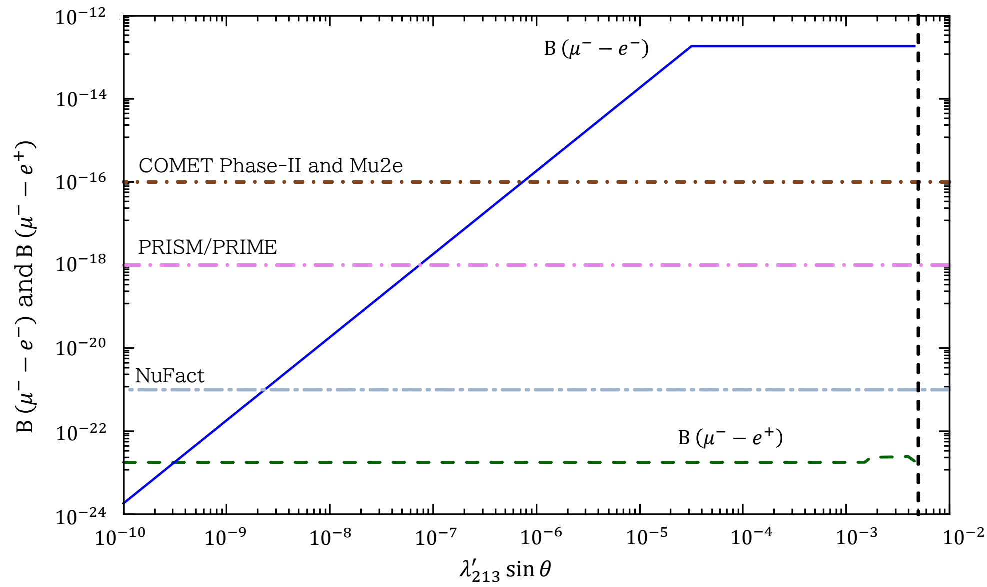


図 27: λ'_{213} と $\mu - e$ conversion、$\mu^- \to e^+$ の分岐比の関係。$\mu^- \to e^-$ 転換が最大になる条件のもとでの $\mu^- \to e^+$ 転換の最大値。各線に関しては図 25 と同様である。

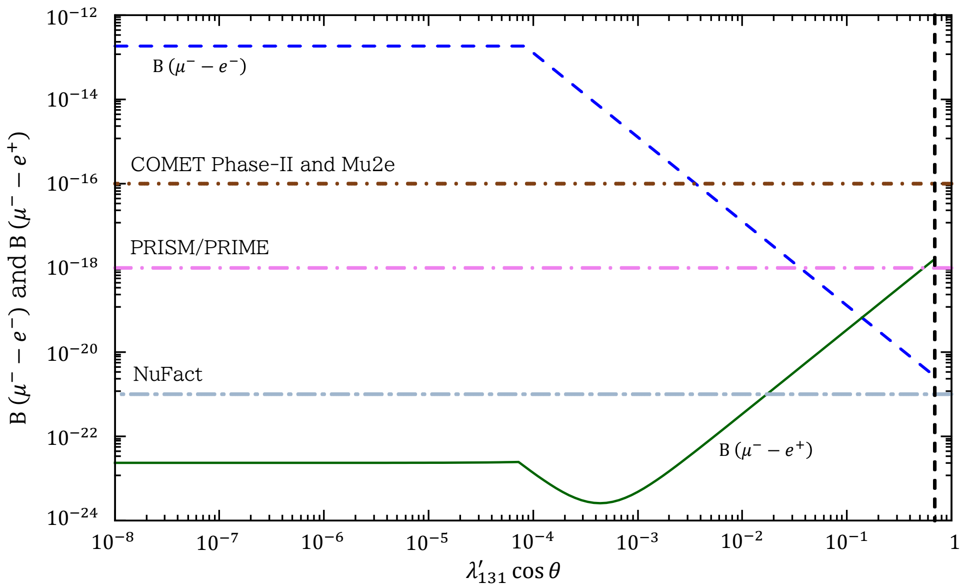


図 28: λ'_{131} と $\mu - e$ conversion、$\mu^- \to e^+$ の分岐比の関係。$\mu^- \to e^+$ 転換が最大になる条件のもとでの $\mu^- \to e^-$ 転換の最大値。各線に関しては図 24 と同様である。

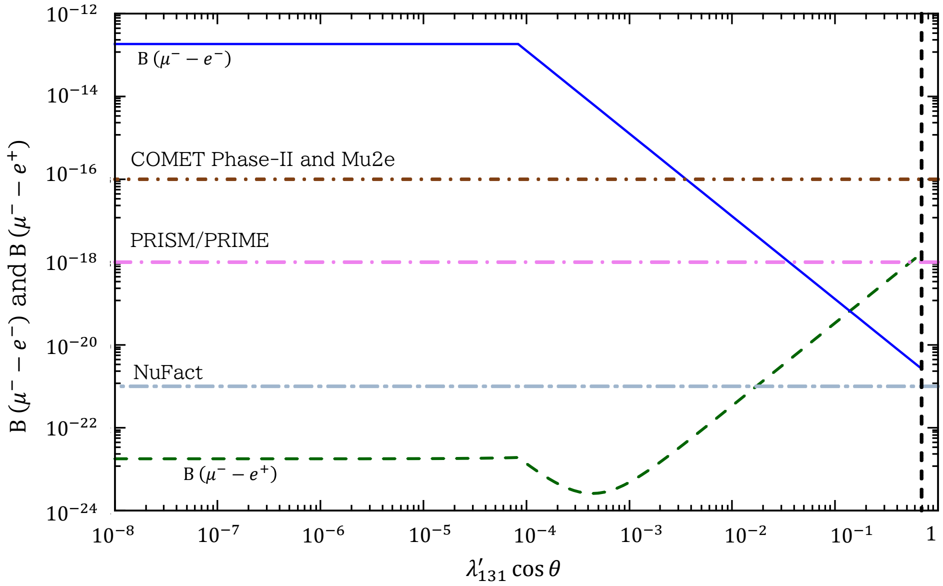


図 29: λ'_{131} と $\mu - e$ conversion、$\mu^- \to e^+$ の分岐比の関係。$\mu^- \to e^-$ 転換が最大になる条件のもとでの $\mu^- \to e^+$ 転換の最大値。各線に関しては図 25 と同様である。

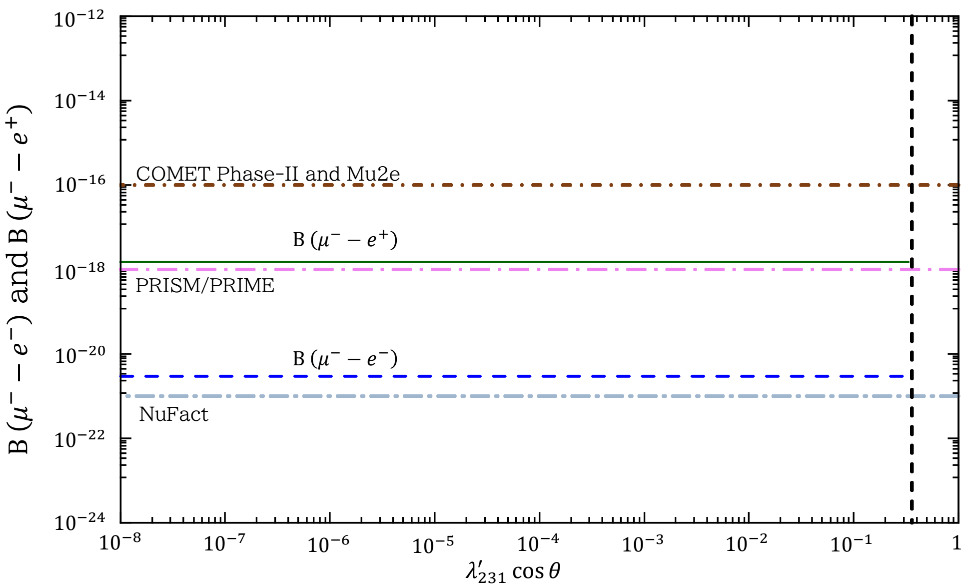


図 30: λ'_{231} と $\mu - e$ conversion、$\mu^- \to e^+$ の分岐比の関係。$\mu^- \to e^+$ 転換が最大になる条件のもとでの $\mu^- \to e^-$ 転換の最大値。各線に関しては図 24 と同様である。

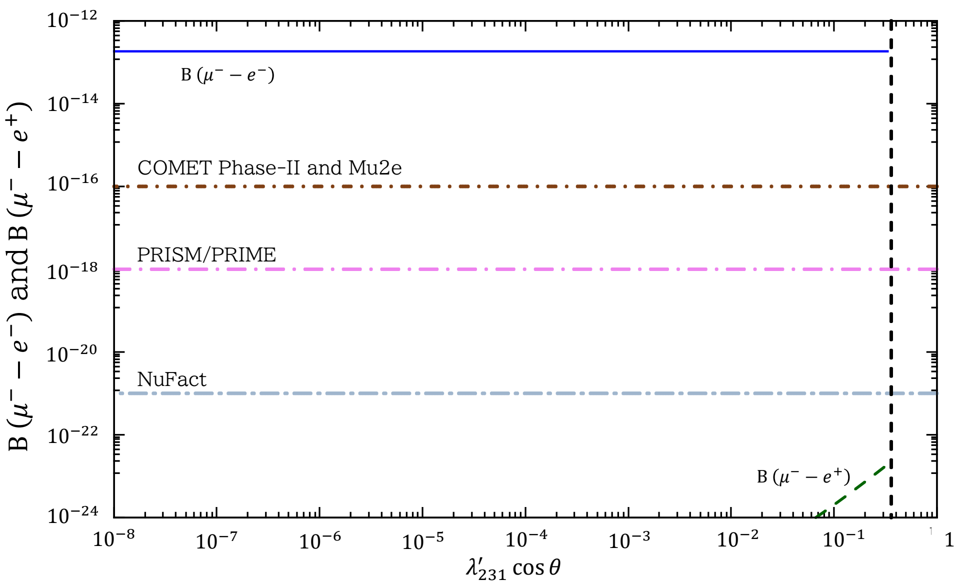


図 31: λ'_{231} と $\mu - e$ conversion$\mu^- \to e^+$ の分岐比の関係。$\mu^- \to e^-$ 転換が最大になる条件のもとでの $\mu^- \to e^+$ 転換の最大値。各線に関しては図 25 と同様である。

第 4 章　考察

今回の模型では、レプトクォークとして sbottom のみが $\mu^- \to e^+$ 転換へ大きな寄与を与えるとして考えたが、[36] によれば sbottom 質量が 200(GeV) のとき、neutralino の質量は 40(GeV) である。このとき、stop の質量は 1.0(TeV) 程度か、それよりも大きいことが示されている。このことから、stop からの寄与も含まれる場合についても同様に計算し、$\mu^- \to e^+$ 転換と $\mu^- \to e^-$ 転換の分岐比の比較を行った。まず、今回は stop が伝播するダイアグラムも寄与するため、$\mu^- \to e^-$

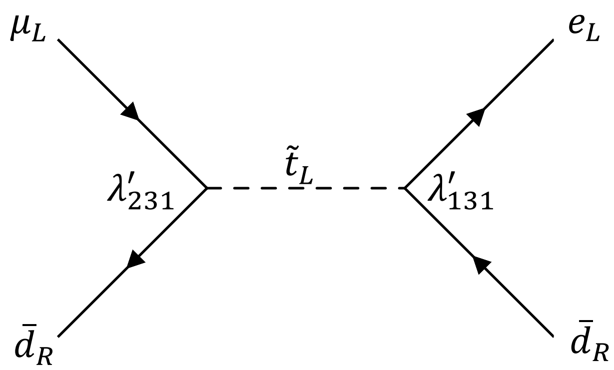


図 32: stop が媒介する $\mu^- \to e^-$ 転換のダイアグラム。

転換の分岐比の見積もりに式 (37) ではなく、次の式を用いる。

$$Br^{\mu\to e} = 4\tilde{\tau}\left(\frac{|\lambda'_{213}\sin\theta\lambda'_{113}\sin\theta|^2}{m_1^4} + \frac{|\lambda'_{231}\cos\theta\lambda'_{131}\cos\theta|^2}{m_{\tilde{t}_L}^4}\right) \times 2 \times \left(V^{(p)} + V^{(n)}\right)^2 m_\mu^5 \quad (70)$$

このとき、$\mu^- \to e^+$ 転換と $\mu^- \to e^-$ 転換の分岐比は次のようになる。

図 33 - 40 からわかるように、$\mu^- \to e^-$ 転換が観測出来なかった場合でも、PRISM の精度であれば $\mu^- \to e^+$ 転換が十分検証可能な大きさの分岐比になることがわかる。また、$\mu^- \to e^-$ 転換が観測された場合で、$\mu^- \to e^+$ 転換は必ずしも検証が不可能ではない。以上から、$\mu^- \to e^-$ 転換が $\mu^- \to e^+$ 転換より大きい状況が実現できることが示せた。そのため、将来実験で $\mu^- \to e^-$ 転換と $\mu^- \to e^+$ 転換の検証が可能な μ 粒子が生成されることを期待したい。

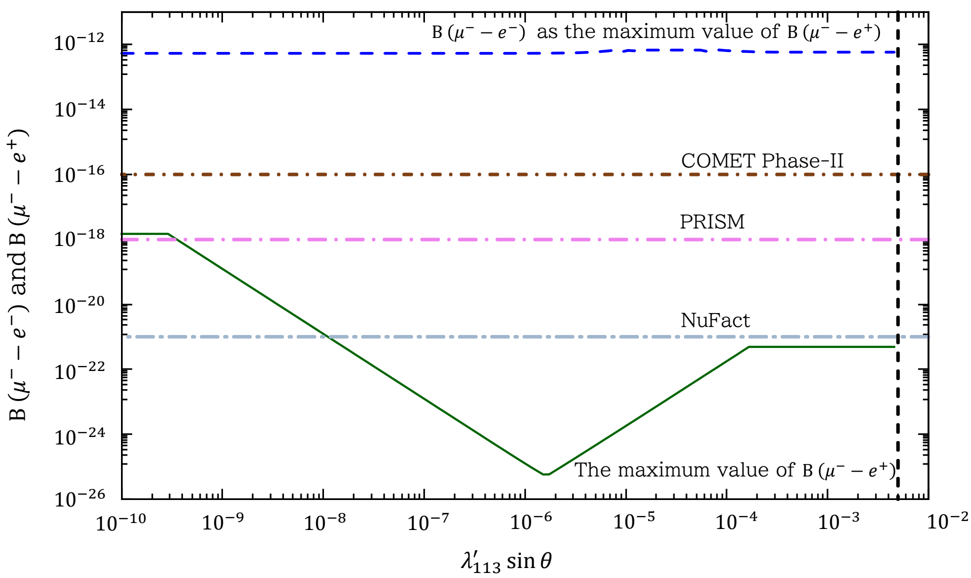


図 33: stop の寄与も含めた λ'_{113} と $\mu^- - e^-$ 転換、$\mu^- \to e^+$ 転換の分岐比の関係。$\mu^- \to e^+$ 転換 (実線) が最大になる条件のもとでの $\mu^- - e^-$ 転換の最大値 (点線)。一点鎖線は将来実験 COMET phase-II、PRISM における精度か、NuFact における μ 粒子の intensity。

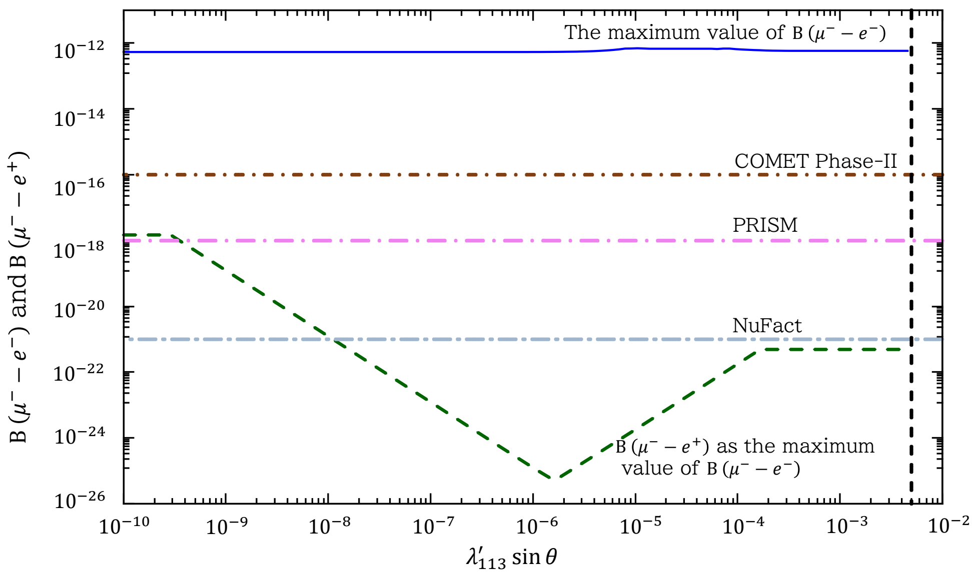


図 34: stop の寄与も含めた λ'_{113} と $\mu^- - e^-$ 転換、$\mu^- \to e^+$ 転換の分岐比の関係。$\mu^- \to e^-$ 転換 (実線) が最大になる条件のもとでの $\mu^- \to e^+$ 転換の最大値 (点線)。一点鎖線は将来実験 COMET phase-II、PRISM における精度か、NuFact における μ 粒子の intensity。

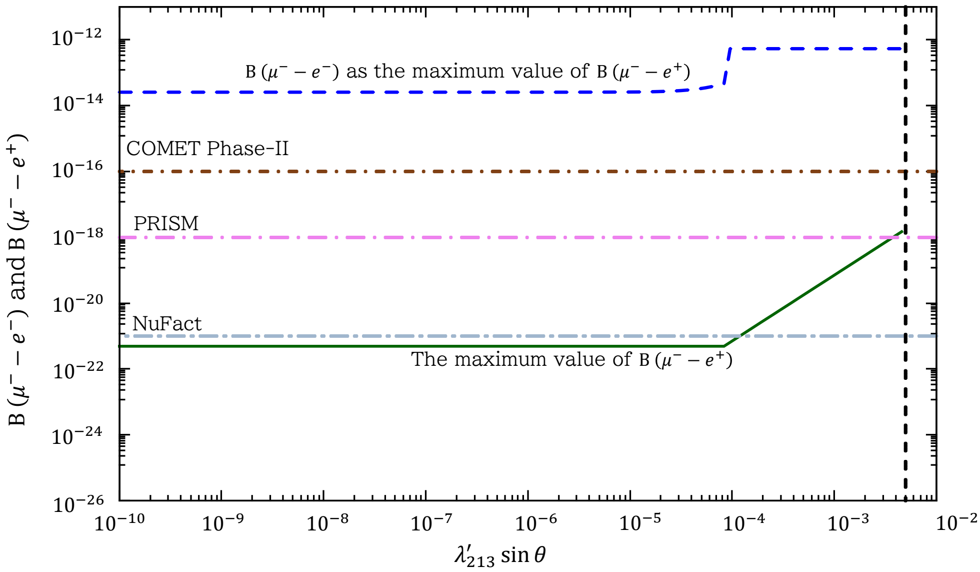


図 35: stop の寄与も含めた λ'_{213} と $\mu - e$ conversion、$\mu^- \to e^+$ の分岐比の関係。$\mu^- \to e^+$ 転換が最大になる条件のもとでの $\mu^- \to e^-$ 転換の最大値。各線に関しては図 33 と同様である。

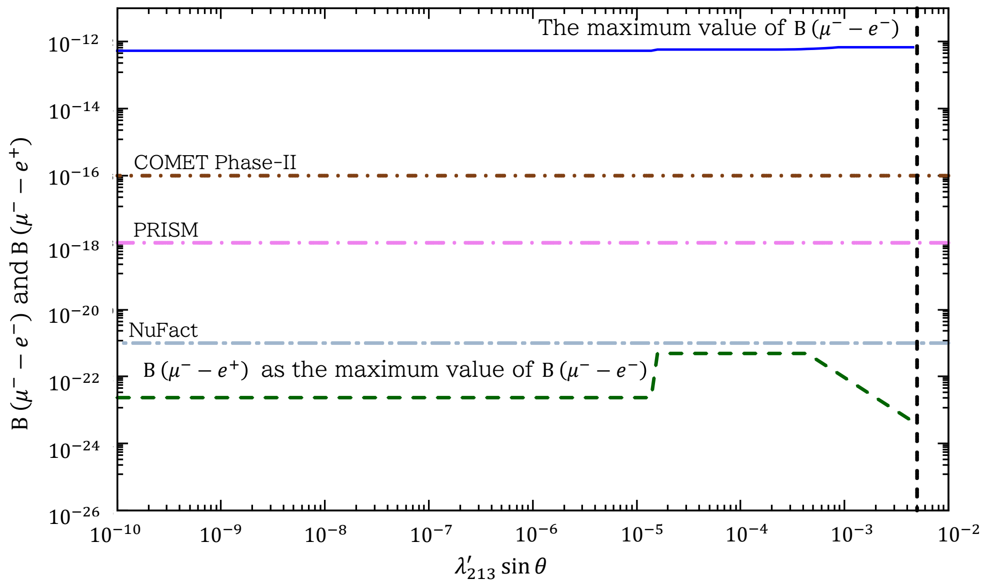


図 36: stop の寄与も含めた λ'_{213} と $\mu - e$ conversion、$\mu^- \to e^+$ の分岐比の関係。$\mu^- \to e^-$ 転換が最大になる条件のもとでの $\mu^- \to e^+$ 転換の最大値。各線に関しては図 34 と同様である。

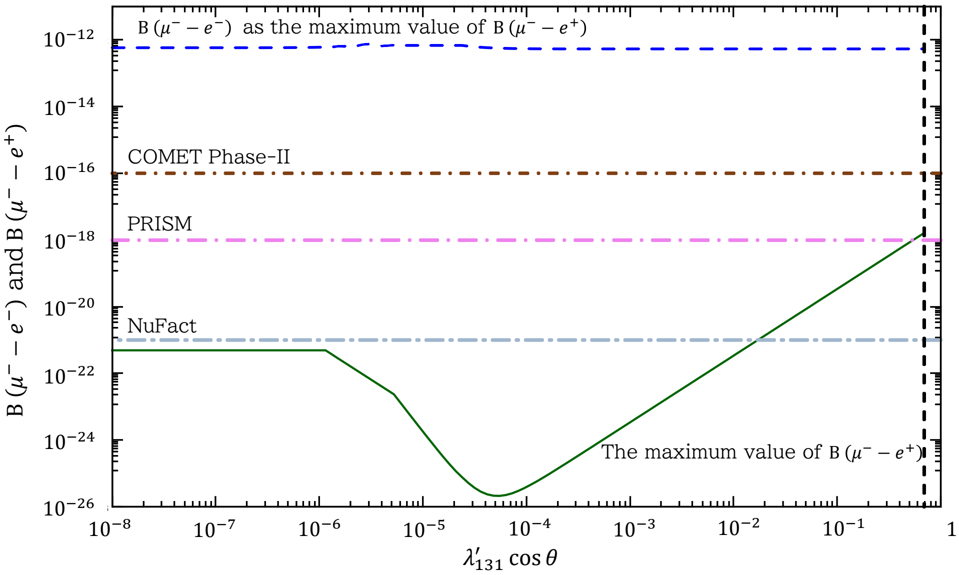


図 37: stop の寄与も含めた λ'_{131} と $\mu - e$ conversion、$\mu^- \to e^+$ の分岐比の関係。$\mu^- \to e^+$ 転換が最大になる条件のもとでの $\mu^- \to e^-$ 転換の最大値。各線に関しては図 33 と同様である。

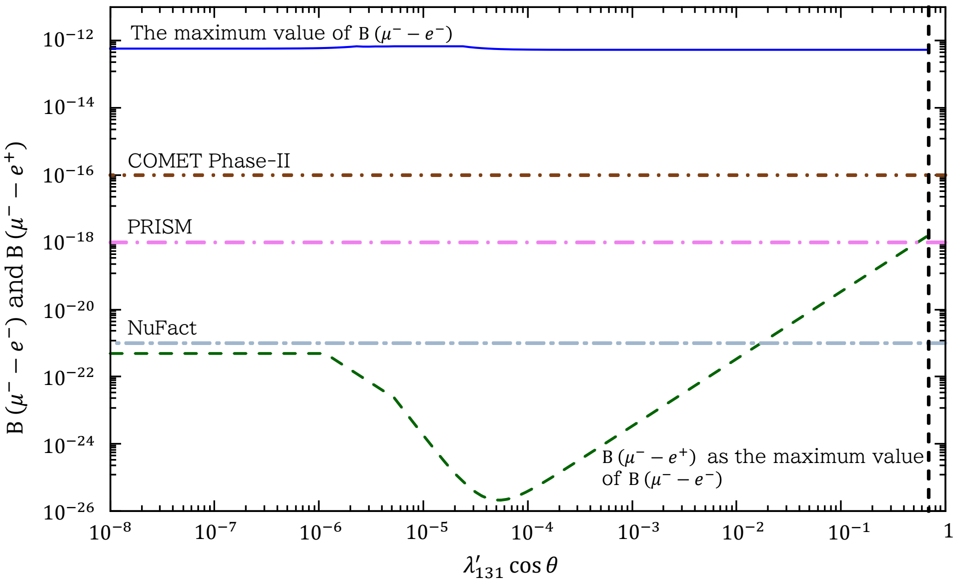


図 38: stop の寄与も含めた λ'_{131} と $\mu - e$ conversion、$\mu^- \to e^+$ の分岐比の関係。$\mu^- \to e^-$ 転換が最大になる条件のもとでの $\mu^- \to e^+$ 転換の最大値。各線に関しては図 34 と同様である。

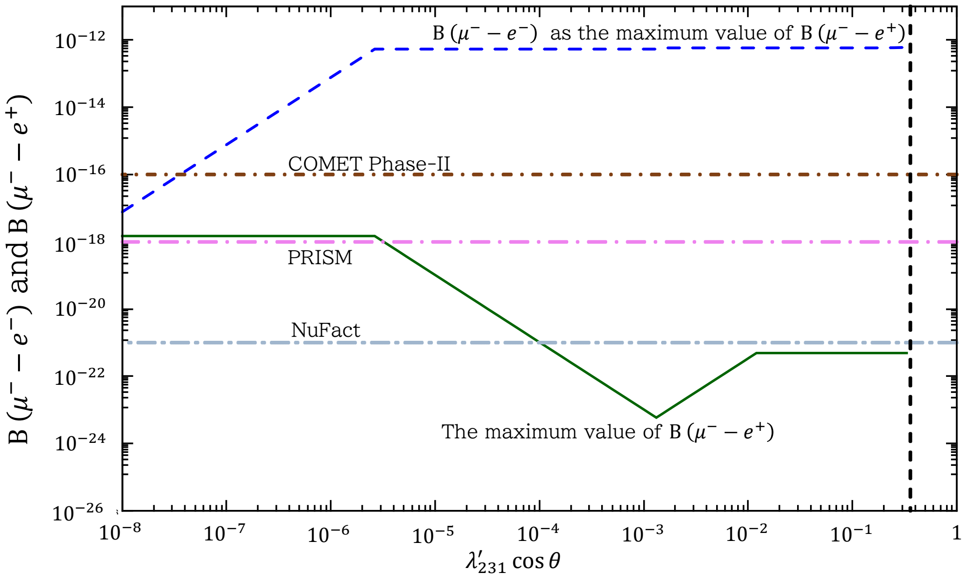


図 39: stop の寄与も含めた λ'_{231} と $\mu - e$ conversion、$\mu^- \to e^+$ の分岐比の関係。$\mu^- \to e^+$ 転換が最大になる条件のもとでの $\mu^- \to e^-$ 転換の最大値。各線に関しては図 33 と同様である。

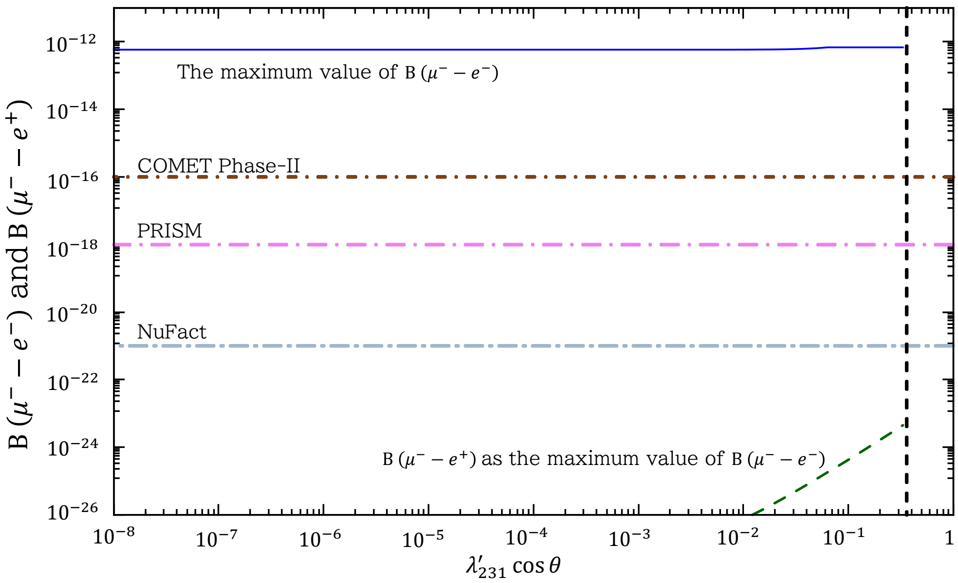


図 40: stop の寄与も含めた λ'_{231} と $\mu - e$ conversion$\mu^- \to e^+$ の分岐比の関係。$\mu^- \to e^-$ 転換が最大になる条件のもとでの $\mu^- \to e^+$ 転換の最大値。各線に関しては図 34 と同様である。

第 5 章　まとめ・課題

本論文では、観測が困難であると考えられがちである LNV の $\mu^- \to e^+$ 転換の分岐比が大きくなる場合として、レプトクォークの $SU(2)$ 二重項型と $SU(2)$ 一重項型のレプトクォークが結合する場合を考えた。そうした模型として、レプトクォークの $SU(2)$ 二重項型と $SU(2)$ 一重項型のレプトクォークを自然に導入し、それらのレプトクォークが結合する模型である、RPV 相互作用を導入した MSSM を考えた。この場合に、LFV 過程である $\mu^- \to e^-$ 転換と $\mu^- \to e^+$ 転換の分岐比との比較を行った。

そうした議論の結果として、$\mu^- \to e^-$ 転換が観測出来なかった場合で PRISM の精度ならば $\mu^- \to e^+$ 転換が十分検証可能な大きさの分岐比になり、$\mu^- \to e^-$ 転換が観測された場合で $\mu^- \to e^+$ 転換は必ずしも検証が不可能ではないということがわかった。

本論文では、背景事象になりうる $\mu^- \to e^- e^- e^+ \nu_\mu \overline{\nu}_e$ の分岐比については比較していない。そのため、実験的観点から、$\mu^- \to e^- e^- e^+ \nu_\mu \overline{\nu}_e$ と $\mu^- \to e^+$ 転換の分岐比の比較は重要であるから、この場合について議論する必要がある。また、この五体崩壊 $\mu^- \to e^- e^- e^+ \nu_\mu \overline{\nu}_e$ は付 録 I で議論しているようなミューオン原子中の μ 粒子の波動関数を考え、そのうえで崩壊先のスピンについて対称性の観点から Wigner の 12j symbol を用いることでより正確な議論が可能である。ただし、実際、本論文で議論の中心であった $\mu^- \to e^+$ 転換は崩壊後の電子が持つエネルギーが 100(MeV) 前後であるので、分割関数 (splitting function) を用いて近似的にも計算可能である。これらの方法から背景事象となる $\mu^- \to e^- e^- e^+ \nu_\mu \overline{\nu}_e$ との比較をし、$\mu^- \to e^+$ 転換の検証可能性を議論する。

付 録 A　Notation

本論文で、計量テンソル $\eta_{\mu\nu}$ は次のように決める。

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

加えて、常に自然単位系を採用する。また、以下次のように定義し、断り無く記号を用いることにする。

・電子の質量：m_e

・電子の電荷：e

【四元ベクトル】

・四元座標：$x^\mu = (x^0, \boldsymbol{x}) = (t, x, y, z),\quad x_\mu = (x^0, -\boldsymbol{x})$

・四元運動量：$p^\mu = (p^0, \boldsymbol{p}) = (E, p_x, p_y, p_z),\quad p_\mu = (p^0, -\boldsymbol{p})$

・内積：$a^\mu b_\mu = a^\mu \eta_{\mu\nu} b^\nu = a^0 b^0 - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$

・四元運動量演算子：$\hat{p}^\mu = i\partial^\mu$

【パウリ行列】

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

【γ 行列 (Dirac 表示)】

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

γ 行列ではないが、次の行列も定義する。

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\quad \alpha^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\alpha^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \alpha^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

また、次の公式は断り無く用いる。

【パウリ行列に対する公式】

$$\{\sigma^i, \sigma\} \equiv \sigma^i\sigma^j + \sigma^j\sigma^i = 2\delta^{ij} \tag{71}$$

$$[\sigma^i, \sigma^j] \equiv \sigma^i\sigma^j - \sigma^j\sigma^i = 2i\sum_{k=1}^{3}\varepsilon^{ijk}\sigma^k \tag{72}$$

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})I + i\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\cdot}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) \tag{73}$$

最後に、γ 行列の Dirac 表示と Chiral 表示を書いておく。ただし、これ以降はどの計算においても Dirac 表示を用いている。

（Dirac 表示）

$$\begin{aligned}
&\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \\
&\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \\
&\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{74}$$

（Chiral 表示）

$$\begin{aligned}
&\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \\
&\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \\
&\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{75}$$

付 録 B　β 崩壊

B.1　弱い相互作用

素粒子や原子核の崩壊現象に関わる相互作用として弱い相互作用というものがある。

例　β 崩壊

$$n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$$

弱い相互作用は他にも π の崩壊現象など、様々な崩壊現象に関わる。

このような弱い相互作用は次のような性質がある。

(1) 現象に依らず、結合定数がほぼ等しい。

(2) 物理学上の非連続変換（パリティ、粒子・反粒子の対称性）において不変性がない。

この性質 (2) を一旦忘れて、Fermi の理論をまず考えることにする。上の例で上げた崩壊現象の行列要素は中間のベクトルボソンを含めると次のように書ける。

$$i\mathcal{M} = \langle p| J_\mu |n\rangle \left[\frac{-g^{\mu\nu} + q^\mu q^\nu / M_W^2}{q^2 - M_W^2}\right] \langle e\nu_e| J_\nu |0\rangle \tag{76}$$

ここで、J_μ は純粋なベクトルカレントである。一般的に M_W は充分に重いので、適切なゲージを取って中間のベクトルボソンは次のような形で書かれる。

$$i\mathcal{M} = \langle p| J'_\mu |n\rangle \langle e\nu_e| J'^\mu |0\rangle \tag{77}$$

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2} \tag{78}$$

これは次の図のように相互作用を書き換えたことに対応する。

次の節では、この弱い相互作用の性質について簡単に説明する。

B.2　弱い相互作用のパリティ非保存

弱い相互作用はパリティ非保存であるという Lee と Yang の予言 (1956 年) が、1957 年、Wu たちの実験によって確認された。これは前節で性質 (2) として述べた。このことから、ベクトルカレントはパリティを保存するから、前節での Fermi の理論におけるカレント J_μ を書き直さなくてはならない。

ここで、左巻ニュートリノについて考える。この場合、ニュートリノの質量の影響はないものとする。すなわち、ニュートリノのスピノルは次のように表せば、それぞれはヘリシティの固有状態として混ざりがないということになる。

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \tag{79}$$

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix},\ \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \gamma^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{80}$$

ここで、Dirac 方程式に代入すれば、次を得られる。

$$E\psi = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{p})\,\psi \tag{81}$$
$$E\xi = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p})\,\xi \tag{82}$$
$$E\eta = -\,(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p})\,\eta \tag{83}$$

ここで、$E = |\boldsymbol{p}|$ とすれば、

$$\xi = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{p}})\,\xi \tag{84}$$
$$\eta = -\,(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{p}})\,\eta \tag{85}$$

上式はそれぞれがヘリシティの固有状態であることを示している。ここで、弱い相互作用に関して、反ニュートリノのヘリシティは弱い相互作用が例外を除き、非常に良い近似で CP 変換に関して不変であるから、右巻の反ニュートリノのスピノル成分は CP 変換により、左巻の負エネルギー状態のニュートリノのスピノルに対応する。これにより右巻の反ニュートリノのスピノルは $(1-\gamma^5)/2\ v_\nu$ という結合で現れる。

ゆえに、

$$\begin{aligned} \bar{u}\gamma_\mu u &= (u_R^\dagger + u_L^\dagger)(\gamma_0\gamma_\mu)(u_R + u_L) \\ &= u_R^\dagger(\gamma_0\gamma_\mu)u_R + u_L^\dagger(\gamma_0\gamma_\mu)u_L \end{aligned} \tag{86}$$

となるから、ヘリシティ保存である。同様の議論により、軸性ベクトルカレント $\bar{u}\gamma_\mu\gamma_5 u$ もヘリシティを不変に保つ。1 つのヘリシティ状態のみが関与することは、弱い相互作用がパリティを保存姿子とを示している。というのも、この 2 つのカレントはパリティ変換に対して不変にはならないからである。ゆえに、この軸性カレントを弱い相互作用に関与することがわかった。

したがって、弱い相互作用は V-A 型の相互作用として次のように書き直される。

$$\mathcal{L}_I = \frac{G_F}{\sqrt{2}}\left[\bar{\psi}_1\gamma^\mu(1-\gamma^5)\psi_2\right]\left[\bar{\psi}_3\gamma_\mu(1-\gamma^5)\psi_4\right] \tag{87}$$

この場合、ψ はレプトンを考えている。(詳細な議論は Ref.[1] を参照。)

ここまでの議論はパリティの非保存を論じること前提にスカラー、擬スカラーの相互作用成分は考えていないが歴史上、これらの成分も考えられていた。(Ref.[2] を参照。)

B.3　β 崩壊

歴史上、上の 2 つの議論のように、β 崩壊の相互作用の形式が決定されてきた。それが次の形である。(Ref.[2] を参考。)

$$-\mathcal{L}_I = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \left[\bar{p}\gamma^\mu(1 - 1.26\gamma^5)n\right] \left[\bar{e}_3\gamma_\mu(1 - \gamma^5)\nu_e\right] \tag{88}$$

ここで原子核部分は非相対論的に取り扱うことができるので、この原子核部分について議論する。

$$\gamma^\mu = (\beta, \beta\boldsymbol{\alpha}) \tag{89}$$

このとき、次の非相対論的近似により、原子核部分を記述し直す。ここで陽子、中性子は平面波として取り扱うことにすると、

$$\langle p|\, \bar{p}\gamma^\mu(1 - 1.26\gamma^5)n\, |n\rangle \sim \bar{u}(p')\gamma^\mu(1 - 1.26\gamma^5)u(p)e^{-i(p-p')\cdot x} \tag{90}$$

$$\bar{u}\gamma^\mu(1 - 1.26\gamma^5)u = \bar{u}\gamma^\mu u - 1.26\ \bar{u}\gamma^\mu\gamma^5 u \simeq \delta^{\mu 0}u^\dagger(1 - 1.26\boldsymbol{\sigma})u \tag{91}$$

となるから、これより

$$\begin{aligned}\int_V d^3x\ \delta^{\mu0}\bar{u}(1 - 1.26\boldsymbol{\sigma})u &= \delta^{\mu0}\ \left(u_p^\dagger u_n - \frac{C_{GT}}{C_F}u_p^\dagger\boldsymbol{\sigma}u_n\right)\delta^3(\boldsymbol{p}_p - \boldsymbol{p}_n) \\ &\equiv \delta^{\mu0}\left(\langle 1\rangle - \frac{C_{GT}}{C_F}\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle\right)\end{aligned} \tag{92}$$

と書けることがわかった。ここで、アイソスピンを取り入れると陽子、中性子の波動関数は

$$\Psi = \begin{pmatrix} u_p \\ u_n \end{pmatrix} \tag{93}$$

として、この反応は

$$\langle p|\, \bar{p}\gamma^\mu(1 - 1.26\gamma^5)n\, |n\rangle \sim \Psi^\dagger\left(1 - \frac{C_{GT}}{C_F}\boldsymbol{\sigma}\right)\tau_+\Psi \tag{94}$$

以上から、これは次のように書き直される。

$$\langle 1\rangle = \int_V \prod_{i=1}^{A} d^3x_i\Psi^\dagger 1\sum_{k=1}^{A}\tau_+^{(k)}\Psi \tag{95}$$

$$\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle = \int_V \prod_{i=1}^{A} d^3x_i\Psi^\dagger\boldsymbol{\sigma}\sum_{k=1}^{A}\tau_+^{(k)}\Psi \tag{96}$$

式 (95) を Fermi 核行列要素、式 (96) を Gamov-Teller 核行列要素と呼ぶ。それぞれの核行列要素を見ると、異なった遷移に対応することがわかる。式 (95) の場合を Fermi 遷移といい、このとき、原子核のスピンは変わらない。式 (96) のようなとき、これを Gamov-Teller 遷移と言い、原子核のスピンは変わるが、パリティは変わらない。次の節以降で説明する。

B.4　選択則・禁止度と遷移

B.4.1　ft 値

上で得られた遷移の遷移確率は次の式で与えられる。

$$P = \frac{mG_F^2}{2\pi^3}\left[|\langle 1\rangle|^2 + \left(\frac{C_{GT}}{C_F}\right)^2 |\langle \boldsymbol{\sigma}\rangle|^2\right]\cdot \mathcal{F}(Z) \tag{97}$$

ここで、$\mathcal{F}(Z)$ は積分された Fermi 関数と呼ばれる。

また、ベータ崩壊の平均寿命 τ と半減期 $t_{\frac{1}{2}}$ は

$$P = \frac{1}{\tau} = \frac{\ln 2}{t_{\frac{1}{2}}} \tag{98}$$

であるから、式 (1.4.1) と等しいとみれば、

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tau} = \frac{\ln 2}{t_{\frac{1}{2}}} &= \frac{mG_F^2}{2\pi^3}\left[|\langle 1\rangle|^2 + \left(\frac{C_{GT}}{C_F}\right)^2 |\langle \boldsymbol{\sigma}\rangle|^2\right]\cdot \mathcal{F}(Z) \\ \mathrm{ft} \equiv \mathcal{F}t_{\frac{1}{2}} &= \frac{2\pi^3 \ln 2}{mG_F^2}\frac{1}{|\langle 1\rangle|^2 + \left(\frac{C_{GT}}{C_F}\right)^2 |\langle \boldsymbol{\sigma}\rangle|^2}\end{aligned} \tag{99}$$

この ft 値は実験により求められることで遷移の指標として導入された。この ft 値と遷移の関係は以下である。

log　ft	禁止度
～3	超許容遷移
～5	許容遷移
～7	第一禁止遷移
⋮	⋮

表 12: 禁止度

このように、ft 値をみることで遷移の禁止度を知ることができる。理論からこの ft 値を求めることで禁止度を知ることができる。

B.4.2　Fermi 遷移と Gamov-Teller 遷移

次から、前節で導出した遷移状態と選択則について見ていく。

B.4.2.1　Fermi 遷移

Fermi 遷移が許容する遷移は、原子核のスピン変化とパリティ変化のない遷移である。それ以外の遷移で、Fermi 核行列要素は 0 になる。

（例）パリティ変化

このとき、終状態は始状態からパリティが反対になっているような状態なので次のようになる。

$$\mathrm{P}\Psi = \eta_P \gamma^0 \Psi$$

よって、

$$\langle 1 \rangle' = \int_V \prod_{i=1}^{A} d^3 x_i \Psi^\dagger \eta_P \gamma^0 1 \sum_{k=1}^{A} \tau_+^{(k)} \Psi \tag{100}$$

このとき、ガンマ行列は p、n の各スピノール成分にかかるので、各スピノール成分に注目すると、

$$\psi_N^\dagger \eta_P \gamma^0 1 \sum_{k=1}^{A} \tau_+^{(k)} \psi_N = \psi_{N_L}^\dagger \eta_P 1 \sum_{k=1}^{A} \tau_+^{(k)} \psi_{N_L} - \psi_{N_R}^\dagger \eta_P 1 \sum_{k=1}^{A} \tau_+^{(k)} \psi_{N_R} \tag{101}$$

ここで、弱い相互作用はヘリシティに依らず、同程度に効くので、この差は 0 になる。ゆえに、パリティが変化するような場合、Fermi 核行列要素は 0 になる。

$$\langle 1 \rangle' = 0 \tag{102}$$

このように、Fermi 核行列要素が許す遷移は、スピンの変化とパリティの変化がない遷移のみである。このように遷移を分類してあげることにより、禁止度と併せて、Fermi の選択則を次のように与えることができる。

禁止度	スピン変化 ΔJ	パリティ変化
許容遷移	0	No

B.4.2.2　Gamov-Teller 遷移

上の議論と同様に考えると、核子はスピン 1/2 の粒子で、$\boldsymbol{\sigma}$ は Pauli 行列であるから、原子核のスピンの変化は許されるが、パリティの変化は許されない。このことから、Gamov-Teller の選択則は次のようになる。

禁止度	スピン変化 ΔJ	パリティ変化
許容遷移	0 , ± 1	No

禁止度	スピン変化 ΔJ	パリティ変化
許容遷移	0 , ±1	No
第一禁止遷移	0,$\pm1, \pm2$	Yes
第二禁止遷移	$\pm2, \pm3$	No
第三禁止遷移	$\pm3, \pm4$	Yes
第 n 禁止遷移	$\pm n, \pm(n+1)$	$(-1)^n$

表 13: 禁止則

以上のことを踏まえて、禁止度とスピン変化、パリティ変化の関係を書くと次のようになる。ここで、パリティ変化の表記、$(-1)^n$ は-1 ならば Yes、+1 ならば No の意味である。

以下、禁止度とそれぞれの核行列要素の構造を簡単に記す。まず、系の角運動量 L と系の固有スピン S としたとき、核行列要素の階数 $J \equiv L+S$ を考える。これはレプトン系を考えることで重要になってくる。ここでは深入りせずに、第二禁止遷移まで、核行列要素の構造を記すに留める。

$$\text{Fermi 遷移}\quad \langle 1 \rangle,\quad \text{Gamov-Teller 遷移}\quad \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle,\quad \text{第二禁止遷移} \begin{pmatrix} \langle \boldsymbol{r} \rangle \\ \langle \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r} \rangle \\ \langle \boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{r} \rangle \\ \langle B_{ij} \rangle \end{pmatrix}$$

ここで、

$$B_{ij} = x_i\sigma_j + x_j\sigma_i - \frac{2}{3}\delta_{ij}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\sigma}$$

である。

付 録 C　自由ミューオンの崩壊

標準理論の枠組において、β 崩壊の媒介粒子としての W ボソンを導入することで記述されるのだが、Fermi 相互作用は媒介粒子の伝達を 4 点相互作用として置き換えることで現象を精度良く記述している。これは W ボソンの質量が大変重いことに起因している。β 崩壊に関しては付 録 B にて議論しているのでそちらを参照して欲しい。

μ 粒子は標準模型の枠組みでは電子とニュートリノに崩壊する。

$$\mu^-(p_1) \rightarrow e^-(p_4) + \bar{\nu}_e(p_2) + \nu_\mu(p_3) \tag{103}$$

このラグラジアンを Fermi 相互作用で記述すると、普遍 V-A 型の相互作用になっているので

$$\mathcal{L}_I = -(G_\mu/\sqrt{2})[\bar{\nu}_\mu \gamma^\mu (1-\gamma^5)\mu][\bar{e}\gamma(1-\gamma^5)\nu_e] \tag{104}$$

と書ける。G_μ は Fermi 結合定数である。ここで振幅は

$$T_{fi} = (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - p_3 - p_4)(G_\mu/\sqrt{2})[\bar{u}(p_3)\gamma^\mu(1-\gamma^5)u(p_1)][\bar{u}(p_4)\gamma_\mu(1-\gamma^5)v(p_2)] \tag{105}$$

であり、偏極していない μ 粒子の場合、スピン和と平均をとって

$$\begin{aligned}
d\Gamma &= (1/2m_\mu)|\bar{\mathcal{M}}|^2 dLIPS &(106)\\
dLIPS &= (2\pi)^4\delta^4(p_1 - p_2 - p_3 - p_4)\frac{d^3p_2}{(2\pi)^9}\frac{d^3p_3 d^3p_4}{2E_2 2E_3 2E_4} &(107)\\
|\bar{\mathcal{M}}|^2 &= (G_\mu/\sqrt{2})^2 8 K_L{}^{\mu\nu}(p_1, p_3) K_{L\mu\nu}(p_2, p_4) &(108)
\end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned}
K_L{}^{\mu\nu} &= (1/4)\Sigma\bar{u}(p_3)\gamma^\mu(1-\gamma^5)u(p_1)\{\bar{u}(p_3)\gamma^\nu(1-\gamma^5)u(p_1)\}^* \\
&= 2[\{p_1{}^\mu p_3{}^\nu - g^{\mu\nu}(p_1p_3)\} + i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_{1\rho}p_{3\sigma}] \\
&\equiv P^{\mu\nu} + Q^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{109}$$

である。ここで

$$\begin{aligned}
P^{\mu\nu}(p_1, p_3)P_{\mu\nu}(p_2, p_4) &= 8\{(p_1p_2)(p_3p_4) + (p_1p_4)(p_2p_3)\} \\
Q^{\mu\nu}(p_1, p_3)Q_{\mu\nu}(p_2, p_4) &= 8\{(p_1p_2)(p_3p_4) - (p_1p_4)(p_2p_3)\} \\
P^{\mu\nu}Q_{\mu\nu} = P_{\mu\nu}Q^{\mu\nu} &= 0
\end{aligned} \tag{110}$$

を使えば、

$$\begin{aligned}
K_L{}^{\mu\nu}K_{L\mu\nu} &= 16(p_1p_2)(p_3p_4) \\
|\bar{\mathcal{M}}|^2 &= 64 G_\mu{}^2(p_1p_2)(p_3p_4) \\
d\Gamma &= \frac{64G_\mu{}^2(p_1p_2)(p_3p_4)}{2m_\mu \pi^5}\frac{d^3p_2 d^3p_3 d^3p_4}{2E_2 2E_3 2E_4}\delta^4(p_1 - p_2 - p_3 - p_4)
\end{aligned} \tag{111}$$

ここで、ニュートリノ質量を 0 として計算すると

$$S^{\mu\nu} \equiv \int \frac{d^3p_2 d^3p_3}{2E_2 2E_3}\delta^4(p_1 - p_2 - p_3 - p_4){p_2}^{\mu}{p_3}^{\nu} = \frac{\pi}{24}[g^{\mu\nu}\Delta^2 + 2\Delta^{\mu}\Delta^{\nu}]$$
$$\Delta^{\mu} = {p_1}^{\mu} - {p_4}^{\mu} = {p_2}^{\mu} + {p_3}^{\mu}, \Delta^2 = \Delta_{\mu}\Delta^{\mu} \tag{112}$$

であり、これを (1.3.8) に代入すれば

$$d\Gamma = \frac{{G_{\mu}}^2(p_{1\mu}S^{\mu\nu}p_{4\nu})}{2m_{\mu}\pi^5}\frac{d^3p_4}{E_4} \tag{113}$$

電子のエネルギーが最小となるのは、μ 粒子の静止系で電子が静止してつくられる場合で、最大となるのは 2 個のニュートリノの運動が Back to Back であり、電子に対して垂直に飛ぶ時である。μ 粒子の静止系では $p_1 = (m_{\mu}, 0, 0, 0)$ であるので、電子の質量を無視すれば

$$\frac{d\Gamma}{dx} = \frac{{G_{\mu}}^2{m_{\mu}}^2}{96\pi^3}x^2(3 - 2x),$$
$$x = \frac{E_4}{m_{\mu}/2}, \quad 0 \leq x \leq 1 \tag{114}$$

という電子のエネルギースペクトルを得る。これを図示すると次のようになる。このスペクトルは実験の結果とよく合っている。そして、これをエネルギー積分することで、次の全断面積を得る。

$$\Gamma = \frac{{G_{\mu}}^2{m_{\mu}}^5}{192\pi^3} \tag{115}$$

電子の質量を含めると次のようになる。

$$\Gamma = \frac{{G_{\mu}}^2{m_{\mu}}^5}{192\pi^3}f(\frac{{m_{\mu}}^2}{{m_e}^2})$$
$$f(y) = 1 - 8y + 8y^3 - y^4 - 12y^2\ln y \tag{116}$$

となる。しかし、実際の実験の環境では偏極 μ 粒子を用いた、高精度な実験が可能となっているので μ 粒子が偏極していて、電子の質量を無視する近似で

$$\frac{1}{\Gamma}\frac{d\Gamma}{dx d\cos\theta} = 4x^2\left[3(1-x) + \frac{2}{3}\rho(4x-3) - P_{\mu}\xi\cos\theta\left\{1 - x + \frac{2}{3}\delta(4x-3)\right\}\right] \tag{117}$$

ここで、ρ、ξ、δ は Michel パラメータであり、P_{μ}、θ はそれぞれ μ の偏極度、μ 粒子のスピンと電子の運動量との間の角であり、$x = (2E_e/m_{\mu})$ である。Michel パラメータは実験による値であり、これを決定することは一つの目標である。μ 粒子の崩壊に対しての崩壊率は上で求めた通りであり、これに対する数値計算は少し状況が異なるが重要である。詳細な議論は [37, 38, 39] を参考にして欲しい。

付 録 D　ニュートリノ質量と模型

D.1　ニュートリノ振動とフレーバーの混合

2 種類の固有状態の間の関係は次で与えられる。

$$\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} \tag{118}$$

ここで、θ は混合角である。質量の固有状態が従う方程式は次で与えられる。

$$i\hbar\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} |\nu_1(t)\rangle \\ |\nu_2(t)\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\nu_e(t)\rangle \\ |\nu_\mu(t)\rangle \end{pmatrix} \tag{119}$$

ここで、$E_i(Ei = 1, 2)$ は ν_i のエネルギーで、Einstein の関係により、ν_i の質量 (m_i) および三元運動量 (p) の間に次の式が成り立つ。

$$E_i = p\sqrt{1 + \left(\frac{m_i}{p}\right)^2} = p + \frac{{m_i}^2}{2p} + \cdots \tag{120}$$

解 $(|\nu_i(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}E_i t}\,|\nu_i(0)\rangle)$ を使って、弱い相互作用の固有状態 $(|\nu_e(t)\rangle\,, |\nu_\mu(t)\rangle)$ は次のように表される。

$$\begin{aligned} |\nu_e(t)\rangle &= \cos\theta\,|\nu_1(t)\rangle + \sin\theta\,|\nu_2(t)\rangle \\ &= (\cos^2\theta e^{-iE_1t} + \sin^2\theta e^{-iE_2t})\,|\nu_e(0)\rangle + \sin\theta\cos\theta(e^{-iE_1t} - e^{-iE_2t})\,|\nu_\mu(0)\rangle \end{aligned} \tag{121}$$

$$\begin{aligned} |\nu_\mu(t)\rangle &= \cos\theta\,|\nu_1(t)\rangle + \sin\theta\,|\nu_2(t)\rangle \\ &= (\cos^2\theta e^{-iE_2t} + \sin^2\theta e^{-iE_1t})\,|\nu_\mu(0)\rangle + \sin\theta\cos\theta(e^{-iE_1t} - e^{-iE_2t})\,|\nu_e(0)\rangle \end{aligned} \tag{122}$$

となる。これより電子ニュートリノから μ ニュートリノへの遷移確率は次によって得る。

$$\begin{aligned} P(\nu_e \to \nu_\mu; t) &= |\,\langle\nu_e(t)|\nu_\mu(0)\rangle\,|^2 = \left|\sin\theta\cos\theta\left(e^{-iE_1t} - e^{-iE_2t}\right)\right|^2 \\ &= \sin^2 2\theta\sin^2\frac{(E_2 - E_1)}{2}t = \sin^2 2\theta\sin^2\frac{({m_2}^2 - {m_1}^2)}{2p}t \end{aligned} \tag{123}$$

これにより、質量の差異があることで遷移確率が 0 にならず、ニュートリノ振動が必然であることを説明している。標準模型の範囲では、ニュートリノの混合は考えていないため、ニュートリノ質量は 0 としてきた。梶田氏らの研究により、ニュートリノ振動は実証され、これにより、LFV の実証とニュートリノの質量の存在を同時に示した。また、ニュートリノの質量に関してはニュートリノの質量の相対的な大きさを理解するための一般的な理論モデルとして用いられる See-Saw 模型によって求められる値が実験の結果と非常に良く一致していることが知られている。これは大統一理論の枠組みを支持する論拠とされている。

D.2　ニュートリノ混合と Maki-Nakagawa-Sakata 行列

実際にニュートリノの混合を記述する際には、Maki-Nakagawa-Sakata 行列を用いる。これは次の式 (124) である。

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_{23} & \sin\theta_{23} \\ 0 & -\sin\theta_{23} & \cos\theta_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_{13} & 0 & \sin\theta_{13}e^{-i\delta_{\mathrm{CP}}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_{13}e^{i\delta_{\mathrm{CP}}} & 0 & \cos\theta_{13} \end{pmatrix}$$
$$\times \begin{pmatrix} \cos\theta_{12} & \sin\theta_{12} & 0 \\ -\sin\theta_{12} & \cos\theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} \tag{124}$$

これを次の式 (125) ように書くことにする。

$$\begin{aligned} U &= \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu 1} & U_{\mu 2} & U_{\mu 3} \\ U_{\tau 1} & U_{\tau 2} & U_{\tau 3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_{13}c_{12} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{\mathrm{CP}}} \\ -s_{12}c_{23} - s_{23}c_{12}s_{13}e^{i\delta_{\mathrm{CP}}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{\mathrm{CP}}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{\mathrm{CP}}} & -s_{23}c_{12} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{\mathrm{CP}}} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{125}$$

ここで、$c_{ij} = \cos\theta_{ij}, s_{ij} = \sin\theta_{ij}$ である。

ニュートリノの混合についてクォークの質量項と同様に記述されるが、これは MNS 行列を用いることでフレーバー固有状態を混合する質量項を記述しているからである。実際に物理的に伝播しているニュートリノは質量固有状態である。これは $\mu^- \to e^+$ 転換過程を例に考えるとわかりやすい。Majorana 質量の寄与を受けて、この過程が起こるとき、次のダイアグラム (図 41) で記述される。伝播しているニュートリノの表記を見ればわかりやすい。

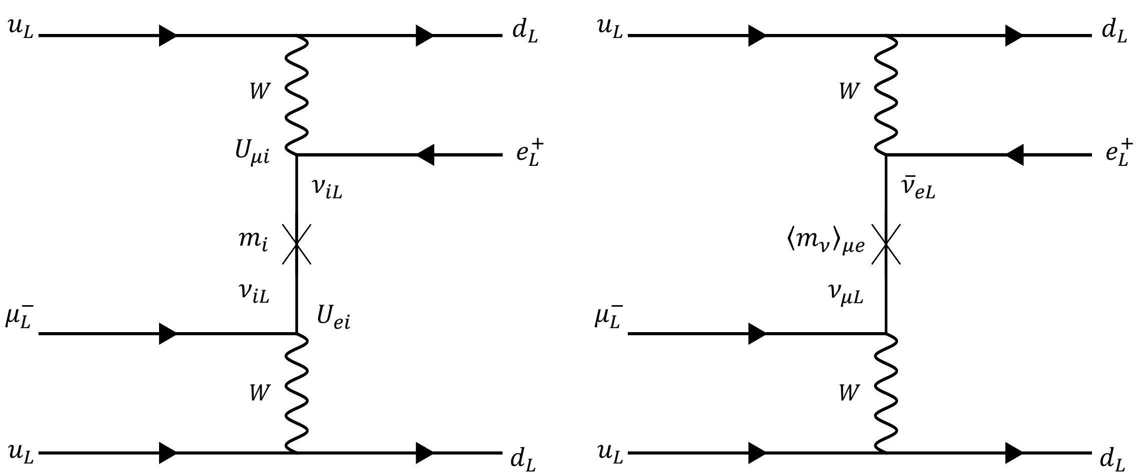


図 41: ニュートリノの Majorana 質量からの寄与のダイアグラム。

D.3　See-Saw 模型

See-Saw 模型における左巻ニュートリノと右巻ニュートリノの質量関係について簡単にまとめる。See-Saw 模型を考えた際、ニュートリノの質量項は次のように書ける。

$$\mathcal{L}_{\text{mass}} = \begin{pmatrix} \overline{(\nu_L)^C} & \overline{\nu_R} \end{pmatrix} \boldsymbol{M}_\nu \begin{pmatrix} \nu_L \\ (\nu_R)^C \end{pmatrix} \tag{126}$$

$$\boldsymbol{M}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix} \tag{127}$$

ここで、

$$\nu_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ \nu_{\mu L} \\ \nu_{\tau L} \end{pmatrix} \tag{128}$$

$$(\nu_R)^C = \begin{pmatrix} (\nu_{eR)^C} \\ (\nu_{\mu R})^C \\ (\nu_{\tau R})^C \end{pmatrix} \tag{129}$$

である。このとき、$\boldsymbol{M}_\nu$ は対角行列であり、See-Saw 模型では $|\mathbf{m}_D^2| \ll |\mathbf{m}_R^2|$ であるから、次のように対角化できて

$$\begin{pmatrix} iI & -im_D^T m_R^{*-1} \\ m_R^{-1} m_D^* & I \end{pmatrix} \boldsymbol{M}_\nu \begin{pmatrix} iI & m_R^{-1} m_D^* \\ -im_D^T m_R^{*-1} & I \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} m_D^T (m_R^*)^- 1 m_D & 0 \\ 0 & m_R^* \end{pmatrix} \tag{130}$$

となる。これから、左巻ミュートリノの質量が

$$m_{\nu L} = m_D^T (m_R^*)^- 1 m_D \tag{131}$$

となる。これは対称行列であるから、ユニタリ行列 U によって

$$U^T m_{\nu L} U = \mathrm{diag}(m_1, m_2, m_3) \tag{132}$$

と対角化される。ユニタリ行列 U は MNS 行列である。Dirac 型質量項に関しては

$$U^\dagger m_{\nu L} V = \mathrm{diag}(m_1, m_2, m_3) \tag{133}$$

という双ユニタリ変換で対角化される。この対角化の違いは通常のニュートリノ振動を考える際は現れない。ニュートリノ振動を媒介する右巻ニュートリノは 2 回のカイラリティフリップを通して、Dirac 質量行列と自身のエルミート共役の積の形で現れるから

$$m_D^\dagger m_D = U \mathrm{diag}(m_1^2, m_2^2, m_3^2) U^\dagger \tag{134}$$

で現れるのに対して、カイラリティフリップしないとき

$$m_{\nu L}^\dagger m_{\nu L} = U \mathrm{diag}(m_1^2, m_2^2, m_3^2) U^\dagger \tag{135}$$

となる。このため、ニュートリノ振動において、ニュートリノの質量型の特定はできないという重要な結果を得ることができる。

付 録 E　Minimal Supersymmetric Standard Model

E.1　超対称理論

場の量子論において、粒子を記述する波動関数における性質であるスピンとその統計性によって分類される。複数の同種粒子が存在する系内において、その波動関数が反交換関係となるときに Fermi 粒子、交換関係になるときに Bose 粒子と呼ぶ。熱平衡状態にある粒子群からなる体系の従う量子統計はそれぞれ Fermi 粒子では Fermi-Dirac 統計、Bose 粒子では Bose-Einstein 統計である。この統計性の異なる粒子である Bose 粒子と Fermi 粒子の間での取り替えの変換である超対称変換の下での不変性を超対称性と呼ぶ。この超対称性を導入した諸々の理論を超対称性模型と呼び、以下で述べる問題の解決の糸口として期待されている。ここでは、[40, 41] を参考に必要事項をまとめている。

E.1.1　超対称性の代数と群

まずは、超対称性について議論する。Bose 粒子と Fermi 粒子の間の変換であるから、その変換の生成子はスピン $\frac{1}{2}$ を持つ。これは生成子が反交換関係を満たすことがわかるが、それによって Coleman-Mandula の不可能定理 (no-go theorem) によって許されない対称性に含まれない。それはゲージ対称性やポアンカレ対称性の積で表現される内部対称性の Lie 群だけでなく、超対称性の反交換関係まで含めた階層付き Lie 代数 (graded Lie algebra) を考えることにより、超対称性が不可能定理におけるポアンカレ対称性の唯一可能な拡張であることが示されているからだ。

この超対称性変換の生成子の代数は次の式で与えられる。超対称変換の生成子を $Q_\alpha, \overline{Q}_{\dot{\alpha}}$ とする。

$$\{Q_\alpha, \overline{Q}_{\dot{\alpha}}\} = 2\left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot{\alpha}} P_\mu \tag{136}$$

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \{\overline{Q}_{\dot{\alpha}}, \overline{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0 \tag{137}$$

$$[P_\mu, Q_\alpha] = [P_\mu, \overline{Q}_{\dot{\alpha}}] = 0 \tag{138}$$

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \tag{139}$$

式 (136) から式 (139) によって代数が閉じている。ここで、超対称変換の生成子がスピノールとして変換するローレンツ変換に関する交換関係は省略している。

この超対称代数は大域的なカイラル対称性の下で不変になる。

$$Q = \begin{pmatrix} Q_\alpha \\ \overline{Q}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \to Q' = e^{i\lambda\gamma_5} Q = \begin{pmatrix} e^{-i\lambda} Q_\alpha \\ e^{i\lambda} \overline{Q}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \tag{140}$$

ここで、実パラメータ λ は定数である。この対称性 $U(1)_R$ を R 対称性と呼ぶ。$Q_\alpha, \overline{Q}_{\dot{\alpha}}$ は R 電荷 ∓ 1 を持つので、$U(1)_R$ の生成子を R とかくと

$$[R, Q_\alpha] = -Q_\alpha, \quad [R, \overline{Q}_{\dot{\alpha}}] = \overline{Q}_{\dot{\alpha}} \tag{141}$$

という交換関係を満たすことになる。この R 対称性は後に R-parity に繋がる重要な概念である。

また、複数の超対称変換の生成子があるとき、その超対称変換の生成子に対する反交換関係は

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \epsilon_{\alpha\beta}\hat{c}^{[i,j]} \quad (i, j = 1 \cdots \mathcal{N}) \tag{142}$$

という項も可能になる。このとき、$\hat{c}^{[i,j]}$ は中心電荷と呼ばれるものである。ここで、$\mathcal{N} = 4$ のとき、超対称ゲージ理論は量子補正が完全に有限になるという性質がある。本論文では $\mathcal{N} = 1$ のときのみを考える。

微小パラメータをマヨラナスピノール $\epsilon_\alpha, \bar{\epsilon}_{\dot{\alpha}}$ の形で導入すると、

$$\begin{pmatrix} \epsilon_\alpha \\ \bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \tag{143}$$

とかくと、超対称変換の無限小変換は次の交換関係を満たすことになる。

$$[\epsilon^\alpha Q_\alpha, \bar{\epsilon}_{\dot{\alpha}}\overline{Q}^{\dot{\alpha}}] = [\epsilon Q, \bar{\epsilon}\overline{Q}] = 2\left(\epsilon^\alpha (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}}\right) P_\mu \tag{144}$$

また、$\epsilon^\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}} = \epsilon^\mu$ とする。また、この超対称性が局所的であるとすれば

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x^\mu) \tag{145}$$

という微小な一般座標変換の下で不変となる。このような局所超対称性を考えるとき、超重力理論が必然的に導かれることになる。本論文では、大域的な超対称変換のみを考えることとする。

超対称変換の代数がわかったので、その Lie 群が得られる。変換

$$e^{i(\epsilon^\mu p_\mu + \epsilon Q + \bar{\epsilon}\overline{Q})} \tag{146}$$

の集合として超対称変換と空間並進のなす群を定義できる。ヤン-ミルズ理論において、クォークやレプトンがゲージ群の既約表現として二重項を成すように、超対称変換においても、標準模型粒子とその超対称パートナーの二重項を成す。以下では、変換と多重項について注目して議論していく。

E.1.2　超空間と超場の導入

超対称代数の式 (136) からわかるように超対称変換は空間並進などの時空座標の変換の拡張である。また、2 つのスピン $\frac{1}{2}$ を対称に組むことでスピン 1 が構成できるように、時空座標はスピノールの二次形式によって構成できる。超対称変換の生成子によって得られた Lie 群の要素にある ϵ^μ はスピノールの二次形式であり、時空並進の微小量を示していることがわかる。これから、超対称変換は時空並進と同様に、スピノール $\epsilon_\alpha, \overline{\epsilon}_{\dot{\alpha}}$ だけの並進と捉えることが出来る。

こういった考え方から、座標 $(x^\mu, \theta^\alpha, \overline{\theta}^{\dot{\alpha}})$ を持つ点の集合である超空間を考えることが出来る。群多様体として、要素 $G(x^\mu, \theta^\alpha, \overline{\theta}^{\dot{\alpha}}) = e^{i(x^\mu p_\mu + \theta Q + \overline{\theta Q})}$ の積を考えていく。まずは、$G(0, \epsilon, \overline{\epsilon})$ と $G(x^\mu, \theta, \overline{\theta})$ の積を考えることで、グラスマン的な座標の並進になることがわかる。これは、Baker-Housdorff の公式で計算すれば、$G(x^\mu - i\theta\sigma^\mu\overline{\epsilon} + i\epsilon\sigma^\mu\overline{\theta}, \theta + \epsilon, \overline{\theta} + \overline{\epsilon})$ となることがわかる。ここから、超対称変換の生成子は微分演算子で表される。

$$iQ_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu \tag{147}$$

$$i\overline{Q}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i\theta^\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu \tag{148}$$

群多様体を用いて議論することで、この変換が自動的に超対称代数を満たすことがわかる。実際に、この微分演算子 (147), (148) は式 (136), (137) を満たすことがわかる。

空間が超空間に拡張されたことに伴って、素粒子を表す場も超空間上に変更される。そのような場である超場 $\phi(x, \theta, \overline{\theta})$ を導入すると、式 (147), (148) はこうした超場に対する微分演算子と見なすことができる。この超場に対して、グラスマン座標での Maclaurin 展開を考えると

$$\begin{aligned}\phi(x, \theta, \overline{\theta}) = C(x) + \theta\chi(x) + \overline{\theta\chi'}(x) + \theta\theta M(x) + \overline{\theta\theta}N(x) \\ + \theta\sigma^\mu\overline{\theta}V_\mu(x) + \theta\theta\overline{\theta\lambda}(x) + \overline{\theta\theta}\theta\psi(x) + \theta\theta\overline{\theta\theta}D(x)\end{aligned} \tag{149}$$

ここで、C, M, N, V_μ, D は bosonic な場で、$\chi, \overline{\chi'}, \overline{\lambda}, \psi$ は Fermionic な場である。素粒子との類推で考えると、超対称多重項はカイラル多重項とベクトル多重項と考えられる。カイラル多重項は複素スカラー場と左巻、右巻 Fermi 粒子を超対称パートナーとする多重項である。ベクトル多重項はゲージ相互作用を媒介する boson 場とその超対称パートナーであるマヨラナスピノールのゲージーノの多重項である。それぞれを含む超場をカイラル超場とベクトル超場と呼ぶ。式 (149) はゲージ群での既約表現にはなっておらず、可約表現である。これは今述べたように、超対称多重項はスピン $\frac{1}{2}$ だけ異なる構成場のみであるはずだからである。そのため、既約表現に対応するカイラル多重項とベクトル多重項のみが存在し、その超場であるカイラル超場とベクトル超場の二種類が存在することになる。以下では、その 2 つの超場について議論し、超対称性を導入し、標準模型を拡張していく。

E.1.3　カイラル超場

式 (149) からわかるように、カイラル超場は θ に関する展開でのみ現れることがわかる。すなわち、超空間の座標は $(x,\theta,\overline{\theta})$ から (x,θ) のみに依存するように考えるのが良さそうだが、超場 ϕ が (x,θ) のみに依存するとき

$$\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}}\phi = 0 \tag{150}$$

を満たす。このとき、

$$\left\{Q_\alpha, \frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}}\right\} \neq 0 \tag{151}$$

である。もし、この反交換関係が 0 になるとき、

$$\left\{Q_\alpha, \frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}}\right\}\phi = \frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}}(Q_\alpha\phi) = 0 \tag{152}$$

から、超場の超対称変換自体が 0 になってしまうことがわかる。しかし、これはそうなるとはいえないのである。そのため、超対称変換の生成子と反交換可能な微分演算子が必要であるということがわかる。そのような共役な微分演算子は次のように与えられる。

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu \tag{153}$$

$$\overline{D}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}} + i\theta^\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu \tag{154}$$

これは、実際に次の反交換関係を満たすことがわかる。

$$\{Q_\alpha, D_\beta\} = \{Q_\alpha, \overline{D}_{\dot{\alpha}}\} = \{\overline{Q}_{\dot{\alpha}}, D_\alpha\} = \left\{\overline{Q}_{\dot{\alpha}}, \overline{D}_{\dot{\beta}}\right\} = 0 \tag{155}$$

これから、θ^α は左巻のワイルスピノールであるから、左巻カイラル超場は θ^α に依存する。そのため、左巻カイラル超場が満たす条件は

$$\overline{D}_{\dot{\alpha}}\phi = 0 \tag{156}$$

である。また、右巻カイラル超場の場合には

$$D_\alpha\phi = 0 \tag{157}$$

ここで、時空座標に関しては

$$\overline{D}_{\dot{\alpha}}x^\mu = i\theta\left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot{\alpha}} \tag{158}$$

となってしまう。ゆえに、次のように時空座標も変更される。

$$y^\mu = x^\mu - i\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right) \tag{159}$$

このように変更する場合、共役な微分演算子を作用すると 0 に修正されることがわかる。この座標に依存するように超場 ϕ は変更される。

$$\begin{aligned}\phi(y,\theta) &= A(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta\theta F(y)\\ &= e^{-i\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\partial_\mu}\left(A(x) + \sqrt{2}\theta\psi(x) + \theta\theta F(x)\right)\\ &= A(x) - i\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\partial_\mu A(x) - \frac{1}{4}\theta\theta\overline{\theta\theta}\Box A(x)\\ &\quad + \sqrt{2}\theta\psi(x) + \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\left(\partial_\mu\psi\right)\sigma^\mu\overline{\theta} + \theta\theta F(x)\end{aligned} \tag{160}$$

ここで、$\Box$ は d'Alembert 演算子である。

カイラル超場を考える際、カイラル多重項の構成場であるスピノールとスカラー場の他に、スピン 1 の場 F が自然と現れていることがわかる。この場は質量次元が $d = 2$ であり、二次形式では質量次元が $d = 4$ となってしまうため、ラグランジアンに微分項を持たず、自身で伝播することができないということがわかる。

微小超対称変換 (147), (148) を y^μ, θ^α を用いて修正すると

$$i[\epsilon Q + \overline{\epsilon}\overline{Q}]\phi(y,\theta) = \left(\epsilon^\alpha\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - 2i\theta^\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu\right)\phi(y,\theta) \tag{161}$$

これを式 (160) の一行目に作用させれば

$$\delta A = \sqrt{2}\epsilon\psi \tag{162}$$

$$\delta\psi = -\sqrt{2}i\sigma^\mu\overline{\epsilon}\partial_\mu A + \sqrt{2}\epsilon F \tag{163}$$

$$\delta F = \sqrt{2}i\sigma^\mu\overline{\epsilon}\partial_\mu\psi \tag{164}$$

となる。これからわかるように、F 項の変化は全微分で与えられるので、何らかの F 項をラグラジアン密度に与えれば、超対称変換のもとで不変に保たれる。F は自身で伝播することはなく、他の場と結合し、Euler-Lagrange 方程式という代数方程式によって消去することができ、物理的な自由度を保つ。このような場を補助場という。

カイラル超場 $\phi_1, \phi_2, \cdots$ に関する任意の関数 $W(\phi_1, \phi_2, \cdots)$ は、θ に関する Talyer 展開をすれば、1 つのカイラル超場として振る舞う。その F 項を考えれば、超対称変換の下で不変なラグラジアン密度を与えることになる。この W は場に対する微分を含まないので、超ポテンシャル、あるいは super-potential と呼ばれる。

また、カイラル多重項を構成する運動項は、場の二次形式で与えられる。カイラル多重項の二次

形式として $\phi(y,\theta)^\dagger\phi(y,\theta)$ を考えれば

$$\begin{aligned}
\phi(y,\theta)^\dagger\phi(y,\theta) &= \left(e^{-i\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\partial_\mu}\phi(x,\theta)\right)^\dagger\left(e^{-i\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\partial_\mu}\phi(x,\theta)\right) \\
&= A(x)^*A(x) - iA(x)^*\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\partial_\mu A(x) - \frac{1}{4}\theta\theta\overline{\theta\theta}A(x)^*\Box A(x) \\
&+ \sqrt{2}\theta\psi(x)A(x)^* + \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\left(\partial_\mu\psi\right)\sigma^\mu\overline{\theta}A(x)^* + \theta\theta F(x)A(x)^* \\
&+ iA(x)\left(\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\theta\right)\partial_\mu A(x)^* + \frac{1}{2}(\partial_\mu A(x)^*)(\partial^\mu A(x)) + i\left(\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\theta\right)\partial_\mu A(x)^*\sqrt{2}\theta\psi(x) \\
&- \frac{1}{4}\theta\theta\overline{\theta\theta}A(x)\Box A(x)^* \\
&+ \sqrt{2}\overline{\theta\psi}(x)A(x) - i\sqrt{2}\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\overline{\theta\psi}(x)\partial_\mu A(x) + 2\overline{\theta\psi}(x)\theta\psi(x) \\
&+ \frac{i}{2}\theta\theta\overline{\theta\theta}\left(\partial_\mu\psi\right)\sigma^\mu\overline{\psi}(x) + \sqrt{2}\theta\theta\overline{\theta\psi}(x)F(x) \\
&- \frac{i}{\sqrt{2}}\overline{\theta\theta}\left(\partial_\mu\overline{\psi}\right)\overline{\sigma}^\mu\theta A(x) - \frac{i}{2}\theta\theta\overline{\theta\theta}\left(\partial_\mu\overline{\psi}\right)\overline{\sigma}^\mu\sqrt{2}\psi(x) \\
&+ \overline{\theta\theta}F(x)^*A(x) + \sqrt{2}\overline{\theta\theta}F(x)^*\theta\psi(x) + \theta\theta\overline{\theta\theta}F(x)^*F(x)
\end{aligned} \tag{165}$$

となる。この中でも、式 (149) の D に対応する項である D 項が運動項に対応する。D 項、つまり、運動項は次のように与えられる。

$$\mathcal{L}_{\mathrm{kin}} = (\partial_\mu A^*)(\partial^\mu A) + i\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu(\partial_\mu\psi) + F^*F + (\text{全微分項}) \tag{166}$$

これからわかるように F に関する微分項は含まれない。運動方程式から F を消去し、物理的な自由度のみで表すことができる。

今議論した式 (166) に対し、ϕ^4 理論の場合のスカラーポテンシャルのような超ポテンシャル W を導入した理論が Wess-Zumino 模型である。この場合の超ポテンシャルは次のように与えられる。

$$W(\phi) = \chi_i\phi_i + \frac{1}{2}m_{ij}\phi_i\phi_j + \frac{1}{6}y_{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k \tag{167}$$

実際に、カイラル超場が ϕ のみの場合を考えると、Wess-Zumino 模型のラグランジアンは次のように与えられる。

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Wess-Zumino}} = (\partial_\mu A^*)(\partial^\mu A) + i\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu(\partial_\mu\psi) + \left[\left(\frac{1}{2}m - yA\right)\psi^2 + \mathrm{h.c.}\right] - |mA - yA|^2 \tag{168}$$

この Wess-Zumino 模型を用いて、スカラー場 A の質量二乗に対する二次発散は A の方が ψ に比べ、質量が大きいときは完全に相殺する。超対称性理論は現在のエネルギースケールで破れているので、その破れの度合いを示す M_{SUSY} を用いて、

$$m_A^2 = m_\psi^2 + M_{\mathrm{SUSY}}^2 \tag{169}$$

と表わせるとき、こうした場合にスカラー場 A の質量二乗に対する二次発散は相殺し、現れない。この質量関係が逆であるときは議論は難しくなるが、ここでは議論しない。

E.1.4　ベクトル超場

ベクトル超場は超対称多重項にゲージ粒子を含む場合である。ゲージ粒子は実場であるので、超場 V に実場という条件を課すと、次のようになる。

$$V^\dagger = V \tag{170}$$

超対称変換の生成子は Majorana スピノールであり、実場であるから Majorana 条件から式 (171) を満たすことがわかる。

ゲージ対称性と超対称性はお互いに独立な対称性であるから、ゲージ群を非可換群に容易に拡張が出来る。式 (171) を満たす超場の構成場は

$$\begin{aligned} V &= C + i\theta\chi - i\overline{\theta}\overline{\chi} + \frac{i}{2}\theta\theta(M+iN) - \frac{i}{2}\overline{\theta\theta}(M-iN) \\ &\quad + \theta\sigma^\mu\overline{\theta}V_\mu + i\theta\theta\overline{\theta}\left(\overline{\lambda} - \frac{1}{3}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi\right) - i\overline{\theta\theta}\theta\left(\lambda - \frac{1}{3}\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\chi}\right) + \frac{1}{2}\theta\theta\overline{\theta\theta}\left(D - \frac{1}{2}\Box C\right) \end{aligned} \tag{171}$$

となる。この超場には、グラスマン座標の次数のより高い項に、それよりも次数の低い構成場の微分項が含まれているが、超対称化されたゲージ変換によって完全に消去される。そのため、これらの場はゲージ変換の自由度を表す場であり、物理的な結果には寄与しない。

実際に、このことは次のようなゲージ変換によって確認される。

$$V \to V' = V + i(\Lambda - \Lambda^\dagger) \tag{172}$$

$$\Lambda = A(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta\theta F(y) \tag{173}$$

というゲージ変換を考えるとき、超場 V の構成場は次のように修正される。

$$C \to C' = C + i(A - A^*) \tag{174}$$

$$\chi \to \chi' = \chi + \sqrt{2}\psi \tag{175}$$

$$M + iN \to M' + iN' = M + iN + 2F \tag{176}$$

$$V_\mu \to V'_\mu = V_\mu + \partial_\mu(A + A^*) \tag{177}$$

$$\lambda \to \lambda' = \lambda, \quad \overline{\lambda} \to \overline{\lambda}' = \overline{\lambda} \tag{178}$$

$$D \to D' = D \tag{179}$$

$$\tag{180}$$

これより、A, ψ の取り方次第では次のように書き直せる。

$$V = \theta\sigma^\mu\overline{\theta}V_\mu + i(\theta\theta\overline{\theta\lambda} - \overline{\theta\theta}\theta\lambda) + \frac{1}{2}\theta\theta\overline{\theta\theta}D \tag{181}$$

このような形にするために、課した条件を Wess-Zumino ゲージ条件という。

ここまでの議論から、ベクトル超場の構成場は補助場 D も含めて、V_μ, λ, D であることがわかる。それぞれのスピンは $1, 3/2, 2$ である。

場の理論では、場の強さという概念が伝播を考える上で重要であったように、ベクトル超場に対しても場の強さテンソルを構成することで伝播を可能とする。場の強さテンソルを導出する上で、ゲージ変換に対して不変という条件と、ベクトル超場に対して微分することで得られるということを念頭に考えなければ奈良にことに注意する。

ここで、ゲージーノ λ はゲージ不変であるから、ゲージーノをグラスマン座標に関するテイラー展開の最低次になるような超場を構成することができれば、場の強さの候補になり得る。そして、そのような超場は $\overline{DD}D_\alpha V$ という形になる。

このテンソルの重複度を考えて係数を決めれば、場の強さを表す超場は

$$\mathcal{W}_\alpha = -\frac{1}{4}\overline{DD}D_\alpha V \tag{182}$$

となる。式 (181) であるようなとき、場の強さテンソルは

$$\mathcal{W}_\alpha = -i\lambda_\alpha + \left[\delta_\alpha{}^\beta D - \frac{1}{2}(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu)_\alpha{}^\beta(\partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu)\right]\theta_\beta + \theta\theta(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu\overline{\lambda}^{\dot{\alpha}} \tag{183}$$

となる。

これより、ベクトル多重項の運動項は

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}^\alpha\mathcal{W}_\alpha &= \left(-i\lambda^\alpha + \theta^\beta\left[\delta_\beta{}^\alpha D - \frac{1}{2}(\sigma^\rho\overline{\sigma}^\eta)_\beta{}^\alpha(\partial_\rho V_\eta - \partial_\eta V_\rho)\right] + \theta\theta(\partial_\rho\overline{\lambda}_{\dot{\alpha}})(\overline{\sigma}^\rho)^{\dot{\alpha}\alpha}\right) \\
&\quad\times\left(-i\lambda_\alpha + \left[\delta_\alpha{}^\beta D - \frac{1}{2}(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu)_\alpha{}^\beta(\partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu)\right]\theta_\beta + \theta\theta(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu\overline{\lambda}^{\dot{\alpha}}\right) \\
&= -\lambda^\alpha\lambda_\alpha - i\lambda^\alpha\left[\delta_\alpha{}^\beta D - \frac{1}{2}(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu)_\alpha{}^\beta(\partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu)\right]\theta_\beta - i\lambda^\alpha\theta\theta(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu\overline{\lambda}^{\dot{\alpha}} \\
&\quad - i\theta^\beta\left[\delta_\beta{}^\alpha D - \frac{1}{2}(\sigma^\rho\overline{\sigma}^\eta)_\beta{}^\alpha(\partial_\rho V_\eta - \partial_\eta V_\rho)\right]\lambda_\alpha \\
&\quad + \theta^\beta\left[\delta_\beta{}^\alpha D - \frac{1}{2}(\sigma^\rho\overline{\sigma}^\eta)_\beta{}^\alpha(\partial_\rho V_\eta - \partial_\eta V_\rho)\right]\left[\delta_\alpha{}^\beta D - \frac{1}{2}(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu)_\alpha{}^\beta(\partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu)\right]\theta_\beta \\
&\quad - i\theta\theta(\partial_\rho\overline{\lambda}_{\dot{\alpha}})(\overline{\sigma}^\rho)^{\dot{\alpha}\alpha}\lambda^\alpha \\
&= -\lambda^\alpha\lambda_\alpha
\end{aligned} \tag{184}$$

から、次のようになる。

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = \frac{1}{4}(\mathcal{W}^\alpha\mathcal{W}_\alpha|_F + h.c.) = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + i\lambda^\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu\overline{\lambda}^{\dot{\alpha}} + \frac{1}{2}D^2 \tag{185}$$

E.1.5　超対称 QED 模型

ここまでで議論したカイラル超場とベクトル超場の間の相互作用を導入し、超対称的なゲージ理論を完成させる。ただし、ここでは可換なゲージ理論を考える。このような超対称ゲージ理論は超対称 QED と呼ぶ。QED では左巻の電子と右巻の電子が導入されるが、超対称 QED はそのような 2 つの自由度に荷電共役の関係にある左巻の電子と左巻の陽電子のカイラル超場を導入する必要がある。

まず、カイラル超場 ϕ_i に関する U(1) ゲージ変換は

$$\phi_i \rightarrow \phi_i' = e^{-i2eQ_i\Lambda}\phi_i \tag{186}$$

である。ここで、やはり Λ もゲージ変換のパラメータであり、カイラル超場であり、グラスマン数である。このようなとき、運動項を計算すると

$$\phi_i^\dagger\phi_i \rightarrow \phi_i'^\dagger\phi_i' = e^{-i2eQ_i(\Lambda-\Lambda^\dagger)}\phi_i^\dagger\phi_i \tag{187}$$

となる。このとき、カイラル超場 Λ の構成場は式 (160) であるから、この中でも最低次の A のみを含む場合には、ReA が y^μ に依らない場合には大域的ゲージ変換であるから、運動項は不変であることはわかる。しかし、ReA が y^μ に依る場合には不変とはならないことがわかる。

しかし、ゲージ変換の下で不変としたいので、ベクトル超場 V を用いて運動項を次のように修正する。

$$\phi_i^\dagger e^{2eQ_iV}\phi_i \tag{188}$$

よって、ゲージ変換のもとで導入したベクトル超場は次のように変換される。

$$V \rightarrow V' = V + i(\Lambda - \Lambda^\dagger) \tag{189}$$

これは、式 (172) である。Wess-Zumino ゲージを考えれば、この運動項は次のようになる。

$$\begin{aligned}\phi_i^\dagger e^{2eQ_iV}\phi_i|_D =&(\mathcal{D}_\mu A_i)^*(\mathcal{D}^\mu A_i) + i\overline{\psi}_i\overline{\sigma}^\mu\mathcal{D}_\mu\psi_i + |F_i|^2 \\ &-\sqrt{2}ieQ_i(A_i\overline{\lambda}\ \overline{\psi}_i - A_i^*\lambda\psi_i) + eQ_iD|A_i|^2\end{aligned} \tag{190}$$

ここで、$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + ieQ_iV_\mu$ は U(1) ゲージ理論における共変微分である。この式の中に、カイラル超場の構成場である ψ_i とベクトル超場の構成場 V_μ の超対称パートナーであるゲージフェルミオン λ, $\overline{\lambda}$ の相互作用項などが含まれていることがわかる。

ここまでの議論から、超対称 QED のラグランジアンは次のようになる。

$$\mathcal{L}_{\mathrm{SQED}} = \frac{1}{4}(W_\alpha W^\alpha|_F + \mathrm{h.c.}) + \sum_{\mathrm{i}}\phi_{\mathrm{i}}^\dagger \mathrm{e}^{2\mathrm{eQ_iV}}\phi_{\mathrm{i}}|_{\mathrm{D}} - \sum_{\mathrm{ij}}\epsilon_{\mathrm{ij}}(\mathrm{m_i}\phi_{\mathrm{i}}\phi_{\mathrm{i}}|_{\mathrm{F}} + \mathrm{h.c.}) \tag{191}$$

ここで、ϵ_{ij} はカイラル超場の質量項となる組み合わせのときは 1、それ以外では 0 となる係数である。

E.1.6　超対称 Yang-Mills 模型

超対称 QED では可換ゲージ理論を考えてきたが、実際のゲージ理論では非可換ゲージ理論への拡張が必要である。非可換ゲージ理論の超対称性への拡張理論は、超対称 Yang-Mills 理論と呼ばれる。まずは、超対称 QED と同様にゲージ変換を考える。

$$\phi_i \to \phi'_i = e^{-i2g\Lambda}\phi_i \tag{192}$$

ここで、$\Lambda = T^a\Lambda^a$ であり、Λ^a はゲージ変換の生成子 T^a に付随するパラメータで、カイラル超場である。ベクトル超場に関しての変換は

$$\begin{aligned} &e^{2gV} \to e^{2gV'} = e^{-i2g\Lambda^\dagger}e^{2gV}e^{i2g\Lambda} \\ &V = T^aV^a, \quad V' = T^aV'^a \end{aligned} \tag{193}$$

である。前節での議論と同様に、カイラル超場の運動項は $\phi^\dagger e^{2gV}\phi$ とすれば、明らかにゲージ不変である。

次に、場の強さテンソルを考える。Yang-Mills 理論では場の強さテンソルはゲージ変換の下で随伴表現として共変的に変換する。超対称 Yang-Mills 理論でもこれに倣うために、そのような場の強さテンソルを考えたい。ベクトル超場を考えた際に、超対称な場の強さテンソル $\mathcal{W}_\alpha$ を導入した。これを非可換ゲージ理論に拡張すれば

$$\mathcal{W}_\alpha = -\frac{1}{8g}\overline{DD}e^{-2gV}D_\alpha e^{2gV} \tag{194}$$

となる。カイラル超場の性質 $D_\alpha\Lambda^\dagger = 0,\ \overline{D}_{\dot{\alpha}}\Lambda = 0$ を用いれば

$$\mathcal{W}_\alpha \to \mathcal{W}'_\alpha = e^{-i2g\Lambda}\mathcal{W}_\alpha e^{i2g\Lambda} \tag{195}$$

が共変的な変換になっていることがわかる。Wess-Zumino ゲージを考えることによって、式 (185) より

$$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\mathcal{W}^\alpha\mathcal{W}_\alpha|_F + h.c.) = -\frac{1}{4}F^{a\mu\nu}F^a_{\mu\nu} + i\lambda^{a\alpha}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu\overline{\lambda}^{a\dot{\alpha}} + \frac{1}{2}(D^a)^2 \tag{196}$$

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu V^a_\nu - \partial_\nu V^a_\mu - gf^{abc}V^b_\mu V^c_\nu \tag{197}$$

$$D_\mu\lambda^a = \partial_\mu\lambda^a - gf^{abc}V^b_\mu\lambda^c \tag{198}$$

以上から、超対称 Yang-Mills 理論のラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\mathcal{W}^\alpha\mathcal{W}_\alpha|_F + h.c.) + \phi^\dagger e^{2gV}\phi|_D - (W(\phi)|_F + \mathrm{h.c.}) \tag{199}$$

と一般的に書けるから、これにここまでの議論から得られた式を代入して

$$\begin{aligned}\mathcal{L} =& i\lambda^{a\alpha}(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_{\mu}\overline{\lambda}^{a\dot{\alpha}} + \frac{1}{2}(D^a)^2 + (\mathcal{D}_{\mu}A_i)^*(\mathcal{D}^{\mu}A_i) + i\overline{\psi}_i\overline{\sigma}^{\mu}\mathcal{D}_{\mu}\psi_i + |F_i|^2 \\ &- \sqrt{2}ig(\overline{\lambda}^a(A_iT^a\psi_i^{\dagger}) - (A_i^{\dagger}T^a\psi_i)\lambda^a) + g(A_i^dagT^aA_i)D^a \\ &- \left[\frac{\partial W(A)}{\partial A_i}F_i - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 W(A)}{\partial A_i\partial a_j}\psi_i\psi_j + \text{h.c.}\right] \end{aligned} \tag{200}$$

$$\mathcal{D}_{\mu} = \partial_{\mu} + igV_{\mu}^aT^a \tag{201}$$

となる。ここで、このラグランジアンに対する補助場の EUler-Lagrange 方程式から

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F_i} = 0 \to \frac{\partial W(A)}{\partial A_i} = F_i^* \tag{202}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial D^a} = 0 \to D^a = -g(A_i^dagT^aA_i) \tag{203}$$

によって、ラグランジアンから完全に消去される。

以上の議論からわかるように、超対称 QED におけるゲージ粒子がゲージ粒子 $(V_{\mu}^a, \lambda^a, D^a)$ に取り替えられるだけで簡単に理論が拡張された。超対称 Yang-Mills 理論は標準模型を超対称へ拡張する際に重要になる。次の章では、この超対称 yang-Mills 理論、超対称 QED を元にして、標準模型粒子から最低限度の拡張のみを含めた最小超対称標準模型を構成する粒子について簡単に議論していく。

E.2　MSSM 粒子

E.2.1　最小超対称標準模型

最小超対称標準模型の構成粒子として特徴的であるのが、Higgs 粒子である。標準模型において Higgs 粒子は二重項を 1 つ与えれば、ゲージ粒子や Fermi 粒子に質量を与えることができるが、超対称標準模型では左巻と右巻それぞれのみにしか結合することができず、二種類の Higgs 二重項が必然的に必要となる。また、量子異常の問題からも、2 つの Higgs 二重項が必要になるが、ここでは議論しない。

Higgs 粒子を除けば、標準模型粒子とその超対称パートナーを構成場として含むような模型になっている。最小超対称標準模型の構成粒子をまとめると、以下の表になる。

粒子		スピン 0	スピン 1/2	$SU(3)_C,\ SU(2)_L,\ U(1)_Y$
squarks, quarks	Q	$(\tilde{u}_L\ \ \tilde{d}_L)$	$(u_L\ \ d_L)$	$(\,\mathbf{3},\ \mathbf{2}\,,\ \frac{1}{6})$
(×3 families)	$\bar{u}$	$\tilde{u}_R^*$	$u_R^\dagger$	$(\,\overline{\mathbf{3}},\ \mathbf{1},\ -\frac{2}{3})$
	$\bar{d}$	$\tilde{d}_R^*$	$d_R^\dagger$	$(\,\overline{\mathbf{3}},\ \mathbf{1},\ \frac{1}{3})$
sleptons, leptons	L	$(\tilde{\nu}\ \ \tilde{e}_L)$	$(\nu\ \ e_L)$	$(\,\mathbf{1},\ \mathbf{2}\,,\ -\frac{1}{2})$
(×3 families)	$\bar{e}$	$\tilde{e}_R^*$	$e_R^\dagger$	$(\,\mathbf{1},\ \mathbf{1},\ 1)$
Higgs, higgsinos	H_u	$(H_u^+\ \ H_u^0)$	$(\tilde{H}_u^+\ \ \tilde{H}_u^0)$	$(\,\mathbf{1},\ \mathbf{2}\,,\ +\frac{1}{2})$
	H_d	$(H_d^0\ \ H_d^-)$	$(\tilde{H}_d^0\ \ \tilde{H}_d^-)$	$(\,\mathbf{1},\ \mathbf{2}\,,\ -\frac{1}{2})$

表 14: MSSM におけるカイラル超場。

粒子	スピン $\frac{1}{2}$	スピン 1	$SU(3)_C,\ SU(2)_L,\ U(1)_Y$
gluino, gluon	$\tilde{g}$	g	$(\,\mathbf{8},\ \mathbf{1}\,,\ 0)$
winos, W bosons	$\tilde{W}^\pm\ \ \tilde{W}^0$	$W^\pm\ \ W^0$	$(\,\mathbf{1},\ \mathbf{3}\,,\ 0)$
bino, B boson	$\tilde{B}^0$	B^0	$(\,\mathbf{1},\ \mathbf{1}\,,\ 0)$

表 15: MSSM におけるゲージ場の超対称多重項。

E.2.2　MSSM 粒子の従うラグランジアン

MSSM の超ポテンシャルは

$$\mathcal{W}_{\mathrm{MSSM}} = \overline{u}\boldsymbol{y}_u QH_u + \overline{d}\boldsymbol{y}_d QH_d + \overline{e}\boldsymbol{y}_e LH_d + \mu H_u H_d \tag{204}$$

である。ここで、$\overline{u}$、$\overline{d}$、$\overline{e}$、Q、L、H_u、H_d はカイラル超場である。この超ポテンシャルに基づいて、標準模型とそ齟齬がないように、ラグランジアンを確認していく。H_u と H_d の中性スカラー成分が VEV を得た後、湯川行列は標準模型のクォークとレプトンの質量と CKM 混合角が決まる。ここで、top、bottom、τ は非常に重い粒子であるから、$\boldsymbol{y}_u$、$\boldsymbol{y}_d$、$\boldsymbol{y}_e$ のうち、$(3,3)$ 成分のみが効くという近似をして議論する。

$$\mathcal{W}_{\mathrm{MSSM}} \simeq y_t(\bar{t}tH_u^0 - \bar{t}bH_u^+) + y_b(\bar{b}bH_d^0 - \bar{b}tH_d^-) - y_\tau(\bar{\tau}\nu_\tau H_d^- - \bar{\tau}\tau H_d^0) + \mu(H_u^+H_d^- - H_u^0H_d^0) \tag{205}$$

これからわかるように、Higgs 場が VEV を持つとき、それぞれの質量項になっていることがわかる。また、超対称変換のもとで対称でなければならないから、squark-higgsino-quark や slepton-higgsino-lepton などの結合も許される。このとき、それらの結合に関しても結合定数は等しくなり、ソフトな超対称性の破れの予言にもなっているが、ここでは触れない。また、ゲージ場との結合においても Higgs との結合と同様に超対称変換の下で対称になる。

次に、Higgs 場に関して考えると

$$\mathcal{L}_{\text{higgsino mass}} = -\mu(\tilde{H}_u^+\tilde{H}_d^- - \tilde{H}_u^0\tilde{H}_d^0) \tag{206}$$

となる。

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs mass}} = -|\mu|^2\left(|H_u^+| + |H_u^0| + |H_d^-| + |H_d^0|\right) \tag{207}$$

となる。また、squark などの質量項は

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{supersymmetric (scalar)}^3} = \mu^*(&\tilde{\bar{u}}\boldsymbol{y}_u\tilde{u}H_d^{*0} + \tilde{\bar{d}}\boldsymbol{y}_d\tilde{d}H_u^{*0} + \tilde{\bar{e}}\boldsymbol{y}_e\tilde{e}H_u^{*0} \\ &+ \tilde{\bar{u}}\boldsymbol{y}_u\tilde{d}H_d^{*-} + \tilde{\bar{d}}\boldsymbol{y}_d\tilde{u}H_u^{*+} + \tilde{\bar{e}}\boldsymbol{y}_e\tilde{\nu}H_u^{*+}) + \text{h.c.}\end{aligned} \tag{208}$$

によって与えられる。これら以外の相互作用は [41] に説明されているので、参照されたい。

E.2.3　R-parity を破る相互作用

MSSM の超ポテンシャルから、各質量項を考えた際に超ポテンシャル (204) は、現象論的に成立するモデルを作るのに十分であるという意味で、最小限のものである。しかし、カイラル超場においてゲージ不変であり、かつ正則であるにもかかわらず、MSSM に含まれない項がある。それが次のラグランジアンである。

$$\mathcal{L}_{\Delta L=1} = \frac{1}{2}\lambda_{ijk}L_iL_j\overline{e}_k + \lambda'_{ijk}L_iQ_jD^* + \mu'_iL_iH_u \tag{209}$$

$$\mathcal{L}_{\Delta B=1} = \frac{1}{2}\lambda''_{ijk}\overline{u}_i\overline{d}_j\overline{d}_k \tag{210}$$

ここで、$i, j, k = 1, 2, 3$ は世代を表す添字で、B はバリオン数、L はレプトン数を表す。

これらの項は BSM な現象の存在を示唆しており、これらの結合定数が厳しく抑制されない限り、陽子の寿命は極めて短くなる。これらの項を排除するため、R-parity（あるいは、matter-parity）という新たな対称性を考えることにする。というのも、L や B は非摂動な電弱効果によって必ず破れることが知られているため、模型構築の上で自然な基本対称性として扱うのは多くの困難がある。

まず、R-parity は次のように定義する。

$$P_R = (-1)^{3(B-L)+2s} \tag{211}$$

ここで、s は粒子のスピンである。P_R を保存するラグランジアンのみを認めることにすると、式 (209)、 (210) の各項は全て排除されることがわかる。

ただし、最初に述べた通り、この対称性は人為的に入れられた対称性であり、R-parity を破るような相互作用 (209)、 (210) を考えることに理論的な問題はない。本論文では、式 (209) のうち、第二項以外の結合定数は無視できるほど小さいとして議論していく。

付 録 F　$\tilde{b}_1$ 粒子の崩壊

sbottom の崩壊モードの 1 つに $\tilde{b}_{L/R} \to b\tilde{\chi}^0$ がある。これを引き起こしうるラグランジアンは次の式 (212) である。

$$\mathcal{L} = Y_L g_1 \tilde{b}_L \left(\bar{b} P_L \tilde{\chi}^0\right) + Y_R g_1 \tilde{b}_R \left(\bar{b} P_R \tilde{\chi}^0\right) + \text{h.c.} \tag{212}$$

今回、導入したラグランジアンによれば、sbottom の崩壊モードとして $\tilde{b}_R \to \mu_L^- u_L$ がある。この 2 つの崩壊モードについてそれぞれの崩壊率を導出する。

F.1　$\tilde{b}_{L/R} \to b\tilde{\chi}^0$

式 (212) より、この過程の不変散乱振幅は sbottom の質量固有状態の変更は??参照) に対して

$$\mathcal{M} = \langle b\tilde{\chi}^0 |\, Y_L g_1 \cos\theta \tilde{b}_1 \left(\bar{b} P_L \tilde{\chi}^0\right) - Y_R g_1 \sin\theta \tilde{b}_1 \left(\bar{b} P_R \tilde{\chi}^0\right) |\tilde{b}_1\rangle \tag{213}$$

これより

$$\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}^2|} &= \sum |\mathcal{M}|^2 \\
&= \frac{1}{m_1^2} \mathrm{tr}\left[\left(Y_L g_1 \cos\theta P_L - Y_R g_1 \sin\theta P_R\right)\left(\not{p}_b + m_b\right)\left(Y_L g_1 \cos\theta P_R - Y_R g_1 \sin\theta P_L\right)\left(\not{p}_{\tilde{\chi}^0} - m_{\tilde{\chi}^0}\right)\right] \\
&= 2G_1^2 p_b \cdot p_{\tilde{\chi}^0} - 8G_2^2 m_b m_{\tilde{\chi}^0}
\end{aligned} \tag{214}$$

であるから、

$$G_1^2 = \left[(Y_L g_1 \sin\theta)^2 + (Y_R g_1 \cos\theta)^2\right] \tag{215}$$

$$G_1^2 = \left[Y_L g_1 \sin\theta Y_R g_1 \cos\theta\right] \tag{216}$$

とすれば、崩壊率は

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\tilde{b}\to b\tilde{\chi}^0} &= \frac{1}{2m_1}\int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_{\tilde{\chi}^0}}{(2\pi)^3 2E_{\tilde{\chi}^0}} \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_b}{(2\pi)^3 2E_b} (2\pi)^4 \delta^4(p_b + p_{\tilde{\chi}^0} - m_1) \left|\overline{\mathcal{M}}\right|^2 \\
&= \frac{1}{2m_1}\int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_{\tilde{\chi}^0}}{(2\pi)^3 2E_{\tilde{\chi}^0}} \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_b}{(2\pi)^3 2E_b} (2\pi)^4 \delta^4(p_b + p_{\tilde{\chi}^0} - m_1) \\
&\qquad \times \left(2G_1^2 p_b \cdot p_{\tilde{\chi}^0} + 8G_2^2 m_b m_{\tilde{\chi}^0}\right)
\end{aligned} \tag{217}$$

ここで各部に分けて計算する。

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(1)}_{\tilde{b}\to b\tilde{\chi}^0} &= \frac{1}{2m_1}\int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_{\tilde{\chi}^0}}{(2\pi)^3 2E_{\tilde{\chi}^0}} \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_b}{(2\pi)^3 2E_b} (2\pi)^4 \delta^4(p_b + p_{\tilde{\chi}^0} - m_1) 2G_1^2 p_b \cdot p_{\tilde{\chi}^0} \\
&= \frac{1}{16\pi^2 m_1}\int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_{\tilde{\chi}^0}}{E_{\tilde{\chi}^0} E_b} \delta(E_b + E_{\tilde{\chi}^0} - m_1) G_1^2 (E_b E_{\tilde{\chi}^0} + \boldsymbol{p}_b \cdot \boldsymbol{p}_{\tilde{\chi}^0}) \\
&= \frac{1}{16\pi^2 m_1}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_{\tilde{\chi}^0} \delta(E_b + E_{\tilde{\chi}^0} - m_1) \frac{G_1^2 (E_b E_{\tilde{\chi}^0} + \boldsymbol{p}_b \cdot \boldsymbol{p}_{\tilde{\chi}^0})}{E_{\tilde{\chi}^0} E_b}
\end{aligned} \tag{218}$$

ここで

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_{\tilde{\chi}^0}\delta(E_b + E_{\tilde{\chi}^0} - m_1) &= |\boldsymbol{p}_{\tilde{\chi}^0}|^2 \frac{4\pi}{\frac{d(E_b + E_{\tilde{\chi}^0} - m_1)}{d|\boldsymbol{p}_{\tilde{\chi}^0}|}} \\
&= |\boldsymbol{p}_{\tilde{\chi}^0}| \frac{4\pi E_{\tilde{\chi}^0} E_b}{m_1}
\end{aligned} \tag{219}$$

よって、これから

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(1)}_{\tilde{b}\to b\tilde{\chi}^0} &= \frac{1}{4\pi m_1} \frac{G_1^2(E_b E_{\tilde{\chi}^0} + |\boldsymbol{p}_{\tilde{\chi}^0}|^2)}{E_{\tilde{\chi}^0} E_b} |\boldsymbol{p}_{\tilde{\chi}^0}| \frac{E_{\tilde{\chi}^0} E_b}{m_1} \\
&= \frac{1}{4\pi m_1} \frac{G_1^2 |\boldsymbol{p}_{\tilde{\chi}^0}|(E_b E_{\tilde{\chi}^0} + |\boldsymbol{p}_{\tilde{\chi}^0}|^2)}{m_1}
\end{aligned} \tag{220}$$

運動量・エネルギー保存則から

$$E_{\tilde{\chi}^0} + E_b = m_1 \tag{221}$$

$$\boldsymbol{p}_b = \boldsymbol{p}_{\tilde{\chi}^0} \tag{222}$$

$$E_{\tilde{\chi}^0}^2 - m_{\tilde{\chi}^0}^2 = E_b^2 - m_b^2 \tag{223}$$

であるから

$$\begin{aligned}
E_{\tilde{\chi}^0}^2 - E_b^2 &= m_{\tilde{\chi}^0}^2 - m_b^2 \\
E_{\tilde{\chi}^0} - E_b &= \frac{m_{\tilde{\chi}^0}^2 - m_b^2}{m_1} \\
E_{\tilde{\chi}^0} &= \frac{m_1^2 + m_{\tilde{\chi}^0}^2 - m_b^2}{2m_1}, \quad E_b = \frac{m_1^2 - m_{\tilde{\chi}^0}^2 + m_b^2}{2m_1}
\end{aligned} \tag{224}$$

$$|\boldsymbol{p}_b| = \sqrt{\frac{(m_1^2 - m_{\tilde{\chi}^0}^2 + m_b^2)^2 - 4m_1^2 m_b^2}{4m_1^2}} \tag{225}$$

から

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(1)}_{\tilde{b}\to b\tilde{\chi}^0} &= \frac{G_1^2}{4\pi m_1} \frac{(E_b E_{\tilde{\chi}^0} + |\boldsymbol{p}_{\tilde{\chi}^0}|^2)}{m_1} \sqrt{\frac{(m_1^2 - m_{\tilde{\chi}^0}^2 + m_b^2)^2 - 4m_1^2 m_b^2}{4m_1^2}} \\
&= \frac{G_1^2}{4\pi m_1} \frac{m_1^2 - m_{\tilde{\chi}^0}^2 - m_b^2}{2m_1} \sqrt{\frac{(m_1^2 - m_{\tilde{\chi}^0}^2 + m_b^2)^2 - 4m_1^2 m_b^2}{4m_1^2}}
\end{aligned} \tag{226}$$

となり、同様に二個目も LIPS の構造から簡単に決まる。

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(2)}_{\tilde{b}\to b\tilde{\chi}^0} &= \frac{1}{2m_1}\int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_{\tilde{\chi}^0}}{(2\pi)^3 2E_{\tilde{\chi}^0}} \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_b}{(2\pi)^3 2E_b}(2\pi)^4\delta^4(p_b + p_{\tilde{\chi}^0} - m_1)8G_2^2 m_b m_{\tilde{\chi}^0} \\
&= \frac{1}{4\pi^2 m_1}\int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_{\tilde{\chi}^0}}{E_{\tilde{\chi}^0}E_b}\delta(E_b + E_{\tilde{\chi}^0} - m_1)G_2^2 m_b m_{\tilde{\chi}^0} \\
&= \frac{1}{\pi m_1}\frac{|\boldsymbol{p}_{\tilde{\chi}^0}|}{m_1}G_2^2 m_b m_{\tilde{\chi}^0} \\
&= \frac{1}{\pi m_1}\frac{G_2^2 m_b m_{\tilde{\chi}^0}}{m_1}\sqrt{\frac{(m_1^2 - m_{\tilde{\chi}^0}^2 + m_b^2)^2 - 4m_1^2 m_b^2}{4m_1^2}}
\end{aligned} \tag{227}$$

以上から、崩壊率は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\tilde{b}\to b\tilde{\chi}^0} &= \Gamma^{(1)}_{\tilde{b}\to b\tilde{\chi}^0} + \Gamma^{(2)}_{\tilde{b}\to b\tilde{\chi}^0} \\
&= \frac{1}{8\pi m_1^2}\sqrt{\frac{(m_1^2 - m_{\tilde{\chi}^0}^2 + m_b^2)^2 - 4m_1^2 m_b^2}{4m_1^2}} \\
&\times \left[\left((Y_L g_1 \sin\theta)^2 + (Y_R g_1 \cos\theta)^2\right)(m_1^2 - m_{\tilde{\chi}^0}^2 - m_b^2) + 8Y_L g_1 \sin\theta Y_R g_1 \cos\theta m_b m_{\tilde{\chi}^0}\right]
\end{aligned} \tag{228}$$

F.2　$\tilde{b}_R \to \mu_L^-(e_L^-)u_L$

この崩壊モードを引き起こすラグランジアンは第 2 章で導入した RPV な相互作用である。

$$\mathcal{L}_{\mathrm{RPV}} = -\lambda'_{i13}\tilde{b}_1 \cos\theta\overline{(e_{iL})^c}u_L + \mathrm{h.c.} \tag{229}$$

これを引き起こすダイアグラムは図 **??**であり、このとき、散乱振幅は次の式 (230) で与えられる。

$$\mathcal{M} = \langle u_L e_{iL}| - \lambda'_{i13}\tilde{b}_1 \cos\theta\overline{(e_{iL})^c}u_L\,|\tilde{b}_1\rangle \tag{230}$$

よって

$$\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}^2|} &= \sum|\mathcal{M}|^2 \\
&= (\lambda'_{i13}\cos\theta)^2 \mathrm{tr}\left[(\not{p}_{e_{iL}} + m_{e_{iL}})P_L(\not{p}_u - m_u)\right] \\
&= 2(\lambda'_{i13}\cos\theta)^2 p_{e_{iL}}\cdot p_u \\
&= (\lambda'_{i13}\cos\theta)^2\left[(p_{e_{iL}} + p_u)^2 - m_{e_{iL}}^2 - m_u^2\right]
\end{aligned} \tag{231}$$

これより、崩壊率は

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\tilde{b}_R\to e_{iL}^- u_L} &= \frac{1}{2m_1}\int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_u}{(2\pi)^3 2E_u}\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_{e_{iL}}}{(2\pi)^3 2E_{e_{iL}}}(2\pi)^4\delta^4(p_u + p_{e_{iL}} - m_1)\left|\overline{\mathcal{M}}\right|^2 \\
&= \frac{1}{2m_1}\int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_u}{(2\pi)^3 2E_u}\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_{e_{iL}}}{(2\pi)^3 2E_{e_{iL}}}(2\pi)^4\delta^4(p_u + p_{e_{iL}} - m_1)\left|\overline{\mathcal{M}}\right|^2 \\
&\quad\times(\lambda'_{i13}\cos\theta)^2\left[(p_{e_{iL}} + p_u)^2 - m_{e_{iL}}^2 - m_u^2\right]
\end{aligned} \tag{232}$$

ここで、LIPS とエネルギー・運動量保存則から

$$E_{e_{iL}} + E_u = m_1 \tag{233}$$

$$\boldsymbol{p}_u = \boldsymbol{p}_{e_{iL}} \tag{234}$$

$$E_{e_{iL}}^2 - m_{e_{iL}}^2 = E_u^2 - m_u^2 \tag{235}$$

であるから

$$E_{e_{iL}}^2 - E_u^2 = m_{e_{iL}}^2 - m_u^2$$

$$E_{e_{iL}} - E_u = \frac{m_{e_{iL}}^2 - m_u^2}{m_1}$$

$$E_{e_{iL}} = \frac{m_1^2 + m_{e_{iL}}^2 - m_u^2}{2m_1}, \quad E_u = \frac{m_1^2 - m_{e_{iL}}^2 + m_u^2}{2m_1} \tag{236}$$

$$|\boldsymbol{p}_b| = \sqrt{\frac{(m_1^2 - m_{e_{iL}}^2 + m_u^2)^2 - 4m_1^2 m_u^2}{4m_1^2}} \tag{237}$$

から

$$\frac{1}{2m_1}\int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_u}{(2\pi)^3 2E_u}\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_{e_{iL}}}{(2\pi)^3 2E_{e_{iL}}}(2\pi)^4\delta^4(p_u + p_{e_{iL}} - m_1)\left|\overline{\mathcal{M}}\right|^2 = \frac{|\boldsymbol{p}_{e_{iL}}|}{8\pi m_1^2} \tag{238}$$

よって、以上から

$$\Gamma_{\tilde{b}_R \to e_{iL}^- u_L} = \frac{\left[m_1^2 - m_{e_{iL}}^2 - m_u^2\right]}{8\pi m_1^2}\sqrt{\frac{(m_1^2 - m_{e_{iL}}^2 + m_u^2)^2 - 4m_1^2 m_u^2}{4m_1^2}} \tag{239}$$

付 録 G　π 粒子の崩壊

G.1　$\pi^+ \to \mu^+\overline{\nu}_e$

$$
\begin{aligned}
i\mathcal{M} &= \frac{\lambda'_{131}\cos\theta_{\tilde{b}}\lambda'_{213}\sin\theta_{\tilde{b}}}{m_1^2}\langle\mu^+\overline{\nu}_e|\left(\overline{(\mu_L)^C}u_L\right)\left(\overline{d_R}\nu_e\right)|\pi^+\rangle \\
&= \frac{\lambda'_{131}\cos\theta_{\tilde{b}}\lambda'_{213}\sin\theta_{\tilde{b}}}{m_1^2} \\
&\qquad \times\langle\mu^+\overline{\nu}_e|\left(-\frac{1}{4}\right)\left[\left(\overline{(\mu_L)^C}\nu_e\right)\left(\overline{d_R}u_L\right)-\left(\overline{(\mu_L)^C}\gamma^5\nu_e\right)\left(\overline{d_R}\gamma^5u_L\right)+(\text{tensor term})\right]|\pi^+\rangle \\
&= \frac{\lambda'_{131}\cos\theta_{\tilde{b}}\lambda'_{213}\sin\theta_{\tilde{b}}}{m_1^2}\langle\mu^+\overline{\nu}_e|\left(-\frac{1}{2}\right)\left[\left(\overline{(\mu_L)^C}\nu_e\right)\left(\overline{d_R}u_L\right)\right]|\pi^+\rangle \\
&= \frac{\lambda'_{131}\cos\theta_{\tilde{b}}\lambda'_{213}\sin\theta_{\tilde{b}}}{m_1^2}\left(-\frac{1}{2}\right)\langle\mu^+\overline{\nu}_e|\left(\overline{(\mu_L)^C}\nu_e\right)|0\rangle\langle 0|\left(\overline{d_R}u_L\right)|\pi^+\rangle
\end{aligned}
$$

ここで、π^+ が関わる部分は

$$
\langle 0|\left(\overline{d_R}u_L\right)|\pi^+\rangle = \langle 0|\left(\overline{d}\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)u\right)|\pi^+\rangle
$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
\partial_\mu\overline{d_L}\ \gamma^\mu\ u_L &= \overline{d_L}\overleftarrow{\partial_\mu}\ \gamma^\mu\ u_L + \overline{d_L}\ \gamma^\mu\ \overrightarrow{\partial_\mu}u_L \\
&= m_d\overline{d_R}u_L + \overline{d_L}(-m_u)u_R \\
&= (m_d+m_u)\overline{d}\gamma^5u + (m_d-m_u)\overline{d}u
\end{aligned}
$$

これより

$$
\begin{aligned}
\langle 0|\left(\overline{d_R}u_L\right)|\pi^+\rangle &= \left(\frac{1}{2}\right)\langle 0|\frac{\partial_\mu\overline{d_L}\ \gamma^\mu\ u_L}{m_u+m_d}|\pi^+\rangle \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)\frac{k_{\pi\mu}}{m_u+m_d}\langle 0|\overline{d_L}\ \gamma^\mu\ u_L|\pi^+\rangle \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)\frac{k_{\pi\mu}}{m_u+m_d}i\frac{1}{2}(g_\pi+f_\pi)k_\pi^\mu \\
&= \left(\frac{1}{4}\right)\frac{im_\pi^2f_\pi}{m_u+m_d}
\end{aligned}
$$

よって

$$
i\mathcal{M} = \frac{\lambda'_{131}\cos\theta_{\tilde{b}}\lambda'_{213}\sin\theta_{\tilde{b}}}{m_1^2}\left(-\frac{1}{2}\right)\langle\mu^+\overline{\nu}_e|\left(\overline{(\mu_L)^C}\nu_e\right)|0\rangle\left(\frac{1}{4}\right)\frac{im_\pi^2f_\pi}{m_u+m_d}
$$

ここで

$$
G_\lambda(\lambda_{131},\lambda_{213},\theta,m_1) = \frac{\lambda'_{131}\cos\theta_{\tilde{b}}\lambda'_{213}\sin\theta_{\tilde{b}}}{m_1^2}
$$

とおく。ここで、π 粒子はスピン 0 粒子であり、終状態のニュートリノは必ず負のヘリシティ状態であるから、ミューオンも負のヘリシティ状態になる。これより

$$\begin{aligned}
\left|\overline{\mathcal{M}}\right|^2 &= \sum |\mathcal{M}|^2 \\
&= G_\lambda^2 \left(\frac{1}{8}\frac{m_\pi^2 f_\pi}{m_u + m_d}\right)^2 \mathrm{tr}\left[(\not{p}_\mu + m_\mu)P_L \not{p}_{\overline{\nu}_e}\right] \\
&= \frac{1}{64} G_\lambda^2 \left(\frac{m_\pi^2 f_\pi}{m_u + m_d}\right)^2 \frac{1}{2} 4(p_\mu \cdot p_{\overline{\nu}_e}) \\
&= \frac{1}{32} G_\lambda^2 \left(\frac{m_\pi^2 f_\pi}{m_u + m_d}\right)^2 (p_\mu \cdot p_{\overline{\nu}_e})
\end{aligned}$$

したがって、崩壊率は

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\pi^+\to\mu^+\overline{\nu}_e} &= \frac{1}{2m_\pi}\int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_\mu}{(2\pi)^3 2E_\mu}\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_{\overline{\nu}e}}{(2\pi)^3 2E_{\overline{\nu}_e}}(2\pi)^4\delta^4(p_\mu + p_{\overline{\nu}_e} - m_\pi)\left|\overline{\mathcal{M}}\right|^2 \\
&= \frac{1}{2m_\pi}\int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_\mu}{(2\pi)^3 2E_\mu}\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_{\overline{\nu}e}}{(2\pi)^3 2E_{\overline{\nu}_e}}(2\pi)^4\delta^4(p_\mu + p_{\overline{\nu}_e} - m_\pi)\frac{1}{32}G_\lambda^2\left(\frac{m_\pi^2 f_\pi}{m_u + m_d}\right)^2 (p_\mu \cdot p_{\overline{\nu}_e}) \\
&= \frac{1}{32\pi^2 m_\pi}\int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_{\overline{\nu}e}}{E_{\overline{\nu}_e}E_\mu}\delta(E_\mu + E_{\overline{\nu}_e} - m_\pi)\frac{1}{32}G_\lambda^2\left(\frac{m_\pi^2 f_\pi}{m_u + m_d}\right)^2 (E_\mu E_{\overline{\nu}_e} + |\boldsymbol{p}_{\overline{\nu}_e}|^2) \\
&= \frac{1}{32\pi^2 m_\pi}(4\pi)\int \frac{E_{\overline{\nu}e}^2 \mathrm{d}E_{\overline{\nu}e}}{E_{\overline{\nu}_e}E_\mu}\delta(E_\mu + E_{\overline{\nu}_e} - m_\pi)\frac{1}{32}G_\lambda^2\left(\frac{m_\pi^2 f_\pi}{m_u + m_d}\right)^2 (E_\mu E_{\overline{\nu}_e} + |\boldsymbol{p}_{\overline{\nu}_e}|^2) \\
&= \frac{1}{8\pi m_\pi}\frac{1}{32}G_\lambda^2\left(\frac{m_\pi^2 f_\pi}{m_u + m_d}\right)^2 (E_\mu E_{\overline{\nu}_e} + |\boldsymbol{p}_{\overline{\nu}_e}|^2)\frac{E_{\overline{\nu}_e}}{E_\mu + E_{\overline{\mu}_e}} \\
&= \frac{1}{8\pi m_\pi}\frac{1}{32}G_\lambda^2\left(\frac{m_\pi^2 f_\pi}{m_u + m_d}\right)^2 E_{\overline{\mu}_e}^2
\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
&E_\mu + E_{\overline{\nu}_e} = m_\pi \\
&|\boldsymbol{p}_\mu|^2 = E_\mu^2 - m_\mu^2 = E_{\overline{\nu}_e} = |\boldsymbol{p}_{\overline{\nu}_e}|^2
\end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned}
E_\mu &= \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi} \\
E_{\overline{\nu}_e} &= \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi}
\end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\pi^+\to\mu^+\overline{\nu}_e} &= \frac{1}{1024\pi m_\pi} G_\lambda^2 \left(\frac{m_\pi^2 f_\pi}{m_u + m_d}\right)^2 \left(\frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{m_\pi}\right)^2 \\
&= \frac{1}{128}\left|\frac{\lambda'_{131}\cos\theta_{\tilde{b}}\lambda'_{213}\sin\theta_{\tilde{b}}}{m_1^2}\right|^2 \left(\frac{m_\pi^2 f_\pi}{m_u + m_d}\right)^2 \frac{(m_\pi^2 - m_\mu^2)^2}{8\pi m_\pi^3} \\
&= \frac{1}{128}\left|\frac{\lambda'_{131}\cos\theta_{\tilde{b}}\lambda'_{213}\sin\theta_{\tilde{b}}}{m_1^2}\right|^2 \left(\frac{m_\pi^2}{m_u + m_d}\right)^2 \frac{1}{G_F^2 m_\mu^2}(G_F f_\pi)^2 m_\mu^2 \frac{(m_\pi^2 - m_\mu^2)^2}{8\pi m_\pi^3} \\
&= \frac{1}{128}\left|\frac{\lambda'_{131}\cos\theta_{\tilde{b}}\lambda'_{213}\sin\theta_{\tilde{b}}}{m_1^2}\right|^2 \left(\frac{m_\pi^2}{m_u + m_d}\right)^2 \frac{1}{G_F^2 m_\mu^2}\Gamma^{\mathrm{SM}}_{\pi^+\to\mu^+\nu_\mu}
\end{aligned}$$

G.2　$\pi^+ \to \mu^+\nu_\mu$

$$\begin{aligned}
i\mathcal{M} &= \frac{(\lambda'_{213}\sin\theta_{\tilde{b}})^2}{m_1^2}\langle\mu^+\overline{\nu}_e|\left(\overline{(\mu_L)^C}u_L\right)\left(\overline{d_L}(\nu_e)^C\right)|\pi^+\rangle \\
&= \frac{(\lambda'_{213}\sin\theta_{\tilde{b}})^2}{m_1^2}\langle\mu^+\overline{\nu}_e|\left(-\frac{1}{4}\right)\left[\left(\overline{(\mu_L)^C}\gamma^\mu(\nu_\mu)^C\right)\left(\overline{d_L}\gamma_\mu u_L\right) - \left(\overline{(\mu_L)^C}\gamma^5\gamma^\mu(\nu_\mu)^C\right)\left(\overline{d_L}\gamma^5\gamma_\mu u_L\right)\right]|\pi^+\rangle \\
&= \frac{(\lambda'_{213}\sin\theta_{\tilde{b}})^2}{m_1^2}\langle\mu^+\overline{\nu}_e|\left(-\frac{1}{2}\right)\left[\left(\overline{(\mu_L)^C}\gamma^\mu(\nu_\mu)^C\right)\left(\overline{d_L}\gamma_\mu u_L\right)\right]|\pi^+\rangle \\
&= \frac{(\lambda'_{213}\sin\theta_{\tilde{b}})^2}{m_1^2}\left(-\frac{1}{2}\right)\langle\mu^+\overline{\nu}_e|\left(\overline{(\mu_L)^C}\gamma^\mu(\nu_\mu)^C\right)|0\rangle\langle 0|\left(\overline{d_L}\gamma_\mu u_L\right)|\pi^+\rangle
\end{aligned}$$

ここで、π^+ が関わる部分は

$$\begin{aligned}
\langle 0|\left(\overline{d_L}\gamma_\mu u_L\right)|\pi^+\rangle &= \langle 0|\left(\overline{d}\gamma_\mu\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)u\right)|\pi^+\rangle \\
&= i\frac{1}{2}(g_\pi + f_\pi)k_\pi^\mu \\
&= \frac{ik_{\pi\mu}f_\pi}{2}
\end{aligned}$$

したがって

$$i\mathcal{M} = \frac{(\lambda'_{213}\sin\theta_{\tilde{b}})^2}{m_1^2}\langle\mu^+\overline{\nu}_e|\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\overline{(\mu_L)^C}\gamma^\mu(\nu_\mu)^C\right)|0\rangle\frac{ik_{\pi\mu}f_\pi}{2}$$

ここで

$$G'_\lambda(\lambda_{213}, \lambda_{213}, \theta, m_1) = \frac{\lambda'_{213}\sin\theta_{\tilde{b}}\lambda'_{213}\sin\theta_{\tilde{b}}}{m_1^2}$$

とおいて

$$\begin{aligned}
\left|\overline{\mathcal{M}}\right|^2 &= \sum |\mathcal{M}|^2 \\
&= G_\lambda'^2 \left(\frac{f_\pi}{4}\right)^2 k_{\pi\mu}k_{\pi\rho}\mathrm{tr}\left[(\not{p}_\mu + m_\mu)\gamma^\mu P_L \not{p}_{\nu_\mu}\gamma^\rho\right] \\
&= \frac{1}{16}G_\lambda'^2 f_\pi^2 \frac{1}{2}\cdot 4\left[2(k_\pi\cdot p_\mu)(k_\pi\cdot p_{\nu_\mu}) - k_\pi^2(p_\mu\cdot p_{\overline{\nu}_e})\right] \\
&= \frac{1}{8}G_\lambda'^2 f_\pi^2\left[2(k_\pi\cdot p_\mu)(k_\pi\cdot p_{\nu_\mu}) - m_\pi^2(p_\mu\cdot p_{\overline{\nu}_e})\right]
\end{aligned}$$

したがって、π^+ の静止系を考えると、崩壊率は

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\pi^+\to\mu^+\nu_\mu} &= \frac{1}{2m_\pi}\int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_\mu}{(2\pi)^3 2E_\mu}\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_{\nu_\mu}}{(2\pi)^3 2E_{\nu_\mu}}(2\pi)^4\delta^4(p_\mu + p_{\nu_\mu} - m_\pi)\left|\overline{\mathcal{M}}\right|^2 \\
&= \frac{1}{2m_\pi}\int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_\mu}{(2\pi)^3 2E_\mu}\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_{\nu_\mu}}{(2\pi)^3 2E_{\nu_\mu}}(2\pi)^4\delta^4(p_\mu + p_{\nu_\mu} - m_\pi) \\
&\qquad\qquad \times \frac{1}{8}G_\lambda'^2 f_\pi^2\left[2(k_\pi\cdot p_\mu)(k_\pi\cdot p_{\nu_\mu}) - m_\pi^2(p_\mu\cdot p_{\overline{\nu}_e})\right] \\
&= \frac{1}{32\pi^2 m_\pi}\int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_{\nu_\mu}}{E_{\nu_\mu}E_\mu}\delta(E_\mu + E_{\nu_\mu} - m_\pi)\frac{1}{32}G_\lambda'^2 f_\pi^2\left[2m_\pi^2 E_\mu E_{\nu_\mu} - m_\pi^2(E_\mu E_{\nu_\mu} + |\boldsymbol{p}_{\nu_\mu}|^2)\right] \\
&= \frac{1}{32\pi^2 m_\pi}(4\pi)\int \frac{E_{\nu_\mu}^2\mathrm{d}E_{\nu_\mu}}{E_{\nu_\mu}E_\mu}\delta(E_\mu + E_{\nu_\mu} - m_\pi)\frac{1}{8}G_\lambda'^2 f_\pi^2 m_\pi^2\left[E_\mu E_{\nu_\mu} - |\boldsymbol{p}_{\nu_\mu}|^2\right] \\
&= \frac{1}{8\pi m_\pi}\frac{1}{8}G_\lambda'^2 f_\pi^2 m_\pi^2\left[E_\mu E_{\nu_\mu} - |\boldsymbol{p}_{\nu_\mu}|^2\right]\cdot\frac{E_{\nu_\mu}}{E_\mu + E_{\nu_\mu}} \\
&= \frac{1}{8\pi m_\pi}\frac{1}{8}G_\lambda'^2 f_\pi^2 m_\pi^2\frac{E_{\nu_\mu}^2(E_\mu - E_{\nu_\mu})}{E_\mu + E_{\nu_\mu}}
\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
&E_\mu + E_{\nu_\mu} = m_\pi \\
&|\boldsymbol{p}_\mu|^2 = E_\mu^2 - m_\mu^2 = E_{\nu_\mu} = |\boldsymbol{p}_{\nu_\mu}|^2
\end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned}
E_\mu &= \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi} \\
E_{\nu_\mu} &= \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi}
\end{aligned}$$

なので

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{\pi^+\to\mu^+\nu_\mu} &= \frac{1}{64\pi m_\pi}\left|\frac{\lambda'_{213}\sin\theta_{\tilde{b}}\lambda'_{213}\sin\theta_{\tilde{b}}}{m_1^2}\right|^2 f_\pi^2 m_\pi^2 \frac{m_\mu^2(m_\pi^2-m_\mu^2)^2}{4m_\pi^4} \\
&= \frac{1}{256\pi}\left|\frac{\lambda'_{213}\sin\theta_{\tilde{b}}\lambda'_{213}\sin\theta_{\tilde{b}}}{m_1^2}\right|^2 f_\pi^2 \frac{m_\mu^2(m_\pi^2-m_\mu^2)^2}{m_\pi^3} \\
&= \frac{1}{32}\left|\frac{\lambda'_{213}\sin\theta_{\tilde{b}}\lambda'_{213}\sin\theta_{\tilde{b}}}{m_1^2}\right|^2 \frac{1}{G_F^2} G_F^2 f_\pi^2 \frac{m_\mu^2(m_\pi^2-m_\mu^2)^2}{8\pi m_\pi^3} \\
&= \frac{1}{32}\left|\frac{\lambda'_{213}\sin\theta_{\tilde{b}}\lambda'_{213}\sin\theta_{\tilde{b}}}{m_1^2}\right|^2 \frac{1}{G_F^2}\Gamma^{\mathrm{SM}}_{\pi^+\to\mu^+\nu_\mu}
\end{aligned}
$$

ただし、この崩壊モードは SM の崩壊と干渉するので

$$
\begin{aligned}
i\mathcal{M}^{\mathrm{SM}} &= (2\sqrt{2}G_F)\left\langle\mu^+\overline{\nu}_e\right|\left(\overline{(\mu_L)^C}\gamma^\mu(\nu_\mu)^C\right)\left|0\right\rangle\left\langle 0\right|\left(\overline{d_L}\gamma_\mu u_L\right)\left|\pi^+\right\rangle \\
&= (2\sqrt{2}G_F)\left\langle\mu^+\overline{\nu}_e\right|\left(\overline{(\mu_L)^C}\gamma^\mu(\nu_\mu)^C\right)\left|0\right\rangle\frac{ik_{\pi\mu}f_\pi}{2}
\end{aligned}
$$

より

$$
\begin{aligned}
\left|\overline{\mathcal{M}'}\right|^2 &= \sum\left|\mathcal{M}+\mathcal{M}^{\mathrm{SM}}\right|^2 \\
&= (G'_\lambda+4\sqrt{2}G_F)^2\left(\frac{f_\pi}{4}\right)^2 k_{\pi\mu}k_{\pi\rho}\mathrm{tr}\left[(\not{p}_\mu+m_\mu)\gamma^\mu P_L\not{p}_{\nu_\mu}\gamma^\rho\right] \\
&= \frac{1}{16}(G'_\lambda+4\sqrt{2}G_F)^2 f_\pi^2\frac{1}{2}\cdot 4\left[2(k_\pi\cdot p_\mu)(k_\pi\cdot p_{\nu_\mu})-k_\pi^2(p_\mu\cdot p_{\overline{\nu}_e})\right] \\
&= \frac{1}{8}(G'_\lambda+4\sqrt{2}G_F)^2 f_\pi^2\left[2(k_\pi\cdot p_\mu)(k_\pi\cdot p_{\nu_\mu})-m_\pi^2(p_\mu\cdot p_{\overline{\nu}_e})\right]
\end{aligned}
$$

ここで、

$$
G''^2 = (G'_\lambda+4\sqrt{2}G_F)^2
$$

とする。これより

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{\pi^+\to\mu^+\nu_\mu} &= \frac{1}{2m_\pi}\int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_\mu}{(2\pi)^3 2E_\mu}\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_{\nu_\mu}}{(2\pi)^3 2E_{\nu_\mu}}(2\pi)^4\delta^4(p_\mu + p_{\nu_\mu} - m_\pi)\left|\overline{\mathcal{M}'}\right|^2 \\
&= \frac{1}{2m_\pi}\int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_\mu}{(2\pi)^3 2E_\mu}\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_{\nu_\mu}}{(2\pi)^3 2E_{\nu_\mu}}(2\pi)^4\delta^4(p_\mu + p_{\nu_\mu} - m_\pi) \\
&\qquad\qquad\qquad \times \frac{1}{8}G''^2 f_\pi^2\left[2(k_\pi\cdot p_\mu)(k_\pi\cdot p_{\nu_\mu}) - m_\pi^2(p_\mu\cdot p_{\overline{\nu}_e})\right] \\
&= \frac{1}{32\pi^2 m_\pi}\int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_{\nu_\mu}}{E_{\nu_\mu}E_\mu}\delta(E_\mu + E_{\nu_\mu} - m_\pi)\frac{1}{32}G''^2 f_\pi^2\left[2m_\pi^2 E_\mu E_{\nu_\mu} - m_\pi^2(E_\mu E_{\nu_\mu} + |\boldsymbol{p}_{\nu_\mu}|^2)\right] \\
&= \frac{1}{32\pi^2 m_\pi}(4\pi)\int \frac{E_{\nu_\mu}^2\,\mathrm{d}E_{\nu_\mu}}{E_{\nu_\mu}E_\mu}\delta(E_\mu + E_{\nu_\mu} - m_\pi)\frac{1}{8}G''^2 f_\pi^2 m_\pi^2\left[E_\mu E_{\nu_\mu} - |\boldsymbol{p}_{\nu_\mu}|^2\right] \\
&= \frac{1}{8\pi m_\pi}\frac{1}{8}G''^2 f_\pi^2 m_\pi^2\left[E_\mu E_{\nu_\mu} - |\boldsymbol{p}_{\nu_\mu}|^2\right]\cdot\frac{E_{\nu_\mu}}{E_\mu + E_{\nu_\mu}} \\
&= \frac{1}{8\pi m_\pi}\frac{1}{8}G''^2 f_\pi^2 m_\pi^2\frac{E_{\nu_\mu}^2(E_\mu - E_{\nu_\mu})}{E_\mu + E_{\nu_\mu}}
\end{aligned}
$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
&E_\mu + E_{\nu_\mu} = m_\pi \\
&|\boldsymbol{p}_\mu|^2 = E_\mu^2 - m_\mu^2 = E_{\nu_\mu} = |\boldsymbol{p}_{\nu_\mu}|^2
\end{aligned}
$$

から

$$
\begin{aligned}
E_\mu &= \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi} \\
E_{\nu_\mu} &= \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi}
\end{aligned}
$$

なので

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{\pi^+\to\mu^+\nu_\mu} &= \frac{1}{64\pi m_\pi} G''^2 f_\pi^2 m_\pi^2 \frac{m_\mu^2(m_\pi^2 - m_\mu^2)^2}{4m_\pi^4} \\
&= \frac{1}{64\pi m_\pi}\left(\left|\frac{\lambda'_{213}\sin\theta_{\tilde{b}}\lambda'_{213}\sin\theta_{\tilde{b}}}{m_1^2}\right| + 4\sqrt{2}G_F\right)^2 f_\pi^2 m_\pi^2 \frac{m_\mu^2(m_\pi^2 - m_\mu^2)^2}{4m_\pi^4} \\
&= \frac{1}{256\pi}\left(\left|\frac{\lambda'_{213}\sin\theta_{\tilde{b}}\lambda'_{213}\sin\theta_{\tilde{b}}}{m_1^2}\right| + 4\sqrt{2}G_F\right)^2 f_\pi^2 \frac{m_\mu^2(m_\pi^2 - m_\mu^2)^2}{m_\pi^3} \\
&= \frac{1}{32}\left(\left|\frac{\lambda'_{213}\sin\theta_{\tilde{b}}\lambda'_{213}\sin\theta_{\tilde{b}}}{m_1^2}\right| + 4\sqrt{2}G_F\right)^2 \frac{1}{G_F^2} G_F^2 f_\pi^2 \frac{m_\mu^2(m_\pi^2 - m_\mu^2)^2}{8\pi m_\pi^3} \\
&= \frac{1}{32}\left(\left|\frac{\lambda'_{213}\sin\theta_{\tilde{b}}\lambda'_{213}\sin\theta_{\tilde{b}}}{m_1^2}\right| + 4\sqrt{2}G_F\right)^2 \frac{1}{G_F^2}\Gamma^{\mathrm{SM}}_{\pi^+\to\mu^+\nu_\mu}
\end{aligned}
$$

ここで、標準模型の崩壊率をひくと、

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{\lambda'}_{\pi^+\to\mu^+\nu_\mu} &= \frac{1}{32}\left(\left|\frac{\lambda'_{213}\sin\theta_{\tilde{b}}\lambda'_{213}\sin\theta_{\tilde{b}}}{m_1^2}\right| + 4\sqrt{2}G_F\right)^2 \frac{1}{G_F^2}\Gamma^{\mathrm{SM}}_{\pi^+\to\mu^+\nu_\mu} - \Gamma^{\mathrm{SM}}_{\pi^+\to\mu^+\nu_\mu} \\
&= \left(\frac{1}{32}\left|\frac{\lambda'_{213}\sin\theta_{\tilde{b}}\lambda'_{213}\sin\theta_{\tilde{b}}}{m_1^2}\right|^2 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left|\frac{\lambda'_{213}\sin\theta_{\tilde{b}}\lambda'_{213}\sin\theta_{\tilde{b}}}{m_1^2}\right| G_F\right)^2 \frac{1}{G_F^2}\Gamma^{\mathrm{SM}}_{\pi^+\to\mu^+\nu_\mu}
\end{aligned}
$$

付 録 H　cLFV におけるエネルギー・運動量関係

cLFV の検証において、荷電レプトンの始状態が重要であることをエネルギー・運動量関係から確認していく。まず、$\mu \to e$ を考える。このとき、自由 μ 粒子が静止している系を考えるとエネルギー保存則・運動量保存則から

$$E_\mu = E_e \tag{240}$$
$$0 = p_e^i \tag{241}$$

となる。ここで、μ 粒子、電子は

$$m_\mu^2 = E_\mu^2 \tag{242}$$
$$m_e^2 = E_e^2 - p_e^2 \tag{243}$$

を満たさなければならないから、

$$E_\mu^2 = E_e^2 \tag{244}$$
$$0 = p_e^2 \tag{245}$$

から、式 (242), (243) を満たす (E_e, p_e^i) は存在しないことがわかる。すなわち、自由 μ 粒子が電子単体に崩壊するような cLFV はエネルギー保存則、運動量保存則に矛盾するため、起こりえない。

そこで、$\mu \to e\gamma$ を考える。このとき、μ 粒子が静止している系を考えるとエネルギー保存則・運動量保存則から

$$E_\mu = E_e + E_\gamma \tag{246}$$
$$0 = p_e^i + p_\gamma^i \tag{247}$$

となる。ここで、μ 粒子、電子、光子は

$$m_\mu^2 = E_\mu^2 \tag{248}$$
$$m_e^2 = E_e^2 - p_e^2 \tag{249}$$
$$0 = E_\gamma^2 - p_\gamma^2 \tag{250}$$

を満たさなければならないから、

$$E_\mu^2 = (E_e + E_\gamma)^2 \tag{251}$$
$$p_e^2 = p_\gamma^2 \tag{252}$$

より式 (248), (249), (250) を満たすエネルギー・運動量があり、それが

$$|p_e| = \frac{m_\mu^2 - m_e^2}{2m_\mu} \tag{253}$$
$$E_e = \frac{m_\mu^2 + m_e^2}{2m_\mu} \tag{254}$$

である。この場合、光子を放出することにより、運動量保存則に対し無矛盾になったということがわかる。

また、次にミューオン原子が始状態である場合も考えることができる。これは光子の代わりに原子核のエネルギー・運動量を用いるだけである。このように、cLFV は自由 μ 粒子から崩壊し、電子のみに崩壊することはできないが、電子と共に光子を放出するか、原子核に束縛されることで引き起こすことができるということがわかった。

付 録 I　波動関数

I.1　水素様原子に束縛された荷電レプトンの波動関数

原子番号 Z の原子内に存在する電子に関する Dirac 方程式

$$\left(-i\alpha\cdot\nabla+\beta m_e-k_0\frac{Ze^2}{r}\right)\psi=E\psi \tag{255}$$

を解くことによってエネルギーの固有状態と固有値を求める。まず、ハミルトニアンは

$$H=\begin{pmatrix} m_e-\frac{Z\alpha}{r} & -i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla} \\ -i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla} & -m_e-\frac{Z\alpha}{r}\end{pmatrix} \tag{256}$$

である。H を含む互いに可換な演算子の組み合わせは $\{H,\boldsymbol{J}^2,J_z\}$ である。 これは $[H,\boldsymbol{J}^2]=0$ から明らかである。また、ここで $\boldsymbol{J}$ は全角運動量であり、

$$\boldsymbol{J}=\left[\boldsymbol{L}\otimes\hat{\mathbf{1}}\right]+\left[\hat{\mathbf{1}}\otimes\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right] \tag{257}$$

によって定義され、波動関数はそれぞれの固有空間の直和に対する固有ベクトルである。また、それぞれの固有値は

$$\boldsymbol{J}^2=j(j+1)\quad\left(j=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\cdots\right) \tag{258}$$

$$J_z=m\quad(m=-j,-j+1,\cdots,j-1,j) \tag{259}$$

$$\boldsymbol{L}^2=l(l+1)\quad(l=0,1,2,\cdots) \tag{260}$$

である。ここで、$\left(\boldsymbol{J}^2,j_z,\boldsymbol{L}^2\right)$ の固有状態で $j=l\pm(1/2)$ であるものを ${\phi_{jm}}^{(\pm)}$ と書くことにする。このとき、この固有状態は次のように与えられる。

$$\phi_{jm}^{(\pm)}=|l\hat{m}\rangle\otimes\left|\frac{1}{2}\right\rangle \tag{261}$$

ここで、$\left(|l\hat{m}\rangle,\left|\frac{1}{2}\right\rangle\right)$ はそれぞれ $(\boldsymbol{L},L_z)\,,\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}$ に対する固有状態である。これより、$|l\hat{m}\rangle=Y_{l\hat{m}}$ であり、$Y_{l\hat{m}}$ は球面調和関数であり、次を満たす。

$$\boldsymbol{L}^2Y_{l\hat{m}}=l(l+1)Y_{l\hat{m}},\quad L_zY_{l\hat{m}}=\hat{m}Y_{l\hat{m}} \tag{262}$$

また、$\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}$ に対する固有状態は、次である。

$$\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \tag{263}$$

これを用いて、Clebsch-Goldan 係数を掛け、規格化すれば

$$
\begin{aligned}
\phi_{jm}^{(+)} &= \sqrt{\frac{l+m+\frac{1}{2}}{2l+1}} Y_{lm-\frac{1}{2}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{l-m+\frac{1}{2}}{2l+1}} Y_{lm+\frac{1}{2}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \begin{pmatrix} \sqrt{l+m+\frac{1}{2}} Y_{lm-\frac{1}{2}} \\ \sqrt{l-m+\frac{1}{2}} Y_{lm+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad j = l + \frac{1}{2} \qquad (264)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\phi_{jm}^{(-)} &= \sqrt{\frac{l+m+\frac{1}{2}}{2l+1}} Y_{lm-\frac{1}{2}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{l-m+\frac{1}{2}}{2l+1}} Y_{lm+\frac{1}{2}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \begin{pmatrix} \sqrt{l-m+\frac{1}{2}} Y_{lm-\frac{1}{2}} \\ -\sqrt{l+m+\frac{1}{2}} Y_{lm+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad j = l - \frac{1}{2},\ l > 0 \qquad (265)
\end{aligned}
$$

となる。ここで、$\phi_{jm}^{(\pm)}$ は J_z に対して固有値 m の固有状態である。また、位相因子は $\phi_{jm}^{(+)} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{r}}\,(\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}/r)$ となるように選んだ。ここで、$\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{r}}$ は空間反転に対して負符号を出すので、パリティは異なることがわかる。また、ここで

$$
\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{J}^2 - \boldsymbol{L}^2 - \frac{3}{4} \qquad (4.1.13)
$$

であるから、これを作用させれば

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{L} \phi_{jm}^{(+)} &= \left[\boldsymbol{J}^2 - \boldsymbol{L}^2 - \frac{3}{4} \right] \phi_{jm}^{(+)} \\
&= \left[j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right] \phi_{jm}^{(+)} \\
&= l \phi_{jm}^{(+)} \quad \left(j = l + \frac{1}{2} \right) \\
\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{L} \phi_{jm}^{(-)} &= \left[\boldsymbol{J}^2 - \boldsymbol{L}^2 - \frac{3}{4} \right] \phi_{jm}^{(-)} \\
&= \left[j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right] \phi_{jm}^{(-)} \\
&= -(l+1)\, \phi_{jm}^{(-)} \quad \left(j = l - \frac{1}{2} \right) \qquad (266)
\end{aligned}
$$

という結果を得る。ここからは動径方向の解を求めていく。まず、ポテンシャルは空間反転に対してふへんであるから、エネルギー固有値は定まったパリティを持つ。このため、

$$
\begin{aligned}
\beta \psi^{(\pm)}(x') &= \pm \psi^{(\pm)}(x) \\
x'^0 &= x^0 \\
\boldsymbol{x}' &= -\boldsymbol{x}
\end{aligned}
$$

これにより、$\psi^{(+)}(x)$、$\psi^{(-)}(x)$ はそれぞれ偶、奇のパリティを持つスピノル解であり、球面調和関数 Y_{lm} は空間反転の下で、$(-1)^l$ のパリティを持つので固有状態に対し、$(\pm)$ でなく、(l) を用

いることにする。これにより、スピノルは次のように与えられる。

$$\psi^l{}_{jm} = \begin{pmatrix} \frac{iG_{lj}(r)}{r}\phi^l_{jm} \\ \frac{F_{lj}(r)}{r}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})\phi^l_{jm} \end{pmatrix} \tag{267}$$

これと式 (266) を式 (255) に代入する。このとき、

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})\, f(r)\, \phi^l_{jm} &= (\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})\, f(r)\, \phi^l_{jm} \\
&= \frac{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})}{r}\frac{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r})}{r}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})\, f(r)\, \phi^l_{jm} \\
&= \frac{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})}{r}\frac{1}{2}\left(\left[\sigma^i,\sigma^j\right] r^i p^j + \{\sigma^i,\sigma^j\} r^i p^j\right) f(r)\, \phi^l_{jm} \\
&= \frac{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})}{r}\frac{1}{2}\left(2\delta^{ij} r^i p^j - 2\sum_{i=-1}^{h} i\epsilon_{ijk} r^j p^k \sigma^i\right) f(r)\, \phi^l_{jm} \\
&= \frac{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})}{r}\frac{1}{2}\left(2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p} + 2i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})\right) f(r)\, \phi^l_{jm} \\
&= \frac{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})}{r}\left(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p} + i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{L}\right) f(r)\, \phi^l_{jm} \\
&= -i\frac{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})}{r}\left[r\frac{d}{dr} + \left\{1 \pm \left(j+\frac{1}{2}\right)\right\}\right] f(r)\, \phi^l_{jm}
\end{aligned} \tag{268}$$

同様に求めれば、

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})\, f(r)\, \phi^l_{jm} = -i\frac{1}{r}\left[r\frac{d}{dr} + \left\{1 \pm \left(j+\frac{1}{2}\right)\right\}\right] f(r)\, \phi^l_{jm} \tag{269}$$

となる。これを用いてやると、動径方向の方程式は

$$\left(E - m_e + \frac{Z\alpha}{r}\right) G_{lj}(r) = -\frac{dF_{lj}(r)}{dr} \mp \left(j+\frac{1}{2}\right)\frac{F_{lj}(r)}{r} \tag{4.1.19}$$

$$\left(E + m_e + \frac{Z\alpha}{r}\right) F_{lj}(r) = \frac{dG_{lj}(r)}{dr} \mp \left(j+\frac{1}{2}\right)\frac{G_{lj}(r)}{r} \tag{270}$$

となる。この方程式の 2 解は Whittaker 関数の和になる。以下では、それを示す。まず、次のように定義する。

$$D_\pm = \frac{d}{dr} \pm \frac{1}{r}\left(j+\frac{1}{2}\right)$$

$$\mathcal{E}_\pm = E \pm m_e + \frac{Z\alpha}{r}$$

これを用いれば、微分方程式は

$$\mathcal{E}_- G_{lj}(r) = -D_\pm F_{lj}(r) \tag{271}$$

$$\mathcal{E}_+ F_{lj}(r) = \quad D_\mp G_{lj}(r) \tag{272}$$

微分方程式を $F_{lj}(r)$、$G_{lj}(r)$ に関して分離したいので、

$$D_{\mp}\mathcal{E}_{-}G_{lj}(r) = -D_{\mp}D_{\pm}F_{lj}(r) \tag{273}$$
$$D_{\pm}\mathcal{E}_{+}F_{lj}(r) = \quad D_{\pm}D_{\mp}G_{lj}(r) \tag{274}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
D_{\pm}\mathcal{E}_{+} &= \left[\frac{d}{dr} \pm \frac{1}{r}\left(j+\frac{1}{2}\right)\right]\left[E + m_e + \frac{Z\alpha}{r}\right] = \mathcal{E}_{+}D_{\pm} - \frac{Z\alpha}{r^2} \\
D_{\mp}\mathcal{E}_{-} &= \left[\frac{d}{dr} \mp \frac{1}{r}\left(j+\frac{1}{2}\right)\right]\left[E - m_e + \frac{Z\alpha}{r}\right] = \mathcal{E}_{-}D_{\mp} - \frac{Z\alpha}{r^2} \\
D_{\pm(\mp)}D_{\mp(\pm)} &= \left[\frac{d}{dr} \pm (\mp)\frac{1}{r}\left(j+\frac{1}{2}\right)\right]\left[\frac{d}{dr} \mp (\pm)\frac{1}{r}\left(j+\frac{1}{2}\right)\right] \\
&= \frac{d^2}{dr^2} \pm (\mp)\frac{1}{r^2}\left(j+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{r^2}\left(j+\frac{1}{2}\right)^2 \\
&= \frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r}D_{\mp(\pm)} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2}\left(j+\frac{1}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

を用いて

$$\left[\mathcal{E}_{-}D_{\mp} - \frac{Z\alpha}{r^2}\right]G_{lj}(r) = -\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r}D_{\mp} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2}\left(j+\frac{1}{2}\right)^2\right]F_{lj}(r) \tag{275}$$
$$\left[\mathcal{E}_{+}D_{\pm} - \frac{Z\alpha}{r^2}\right]F_{lj}(r) = \quad \left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r}D_{\pm} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2}\left(j+\frac{1}{2}\right)^2\right]G_{lj}(r) \tag{276}$$

となる。ここで、式 (271)、 (272) を用いて

$$\mathcal{E}_{-}\{\mathcal{E}_{+}F_{lj}(r)\} - \frac{Z\alpha}{r^2}G_{lj}(r) = -\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2}\left(j+\frac{1}{2}\right)^2\right]F_{lj}(r) - \frac{1}{r}\mathcal{E}_{-}G_{lj}(r) \tag{4.1.27}$$
$$\mathcal{E}_{+}\{-\mathcal{E}_{-}G_{lj}(r)\} - \frac{Z\alpha}{r^2}F_{lj}(r) = \quad \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2}\left(j+\frac{1}{2}\right)^2\right]G_{lj}(r) - \frac{1}{r}\mathcal{E}_{+}F_{lj}(r) \tag{277}$$

よって、次の式が得られる。

$$\left[\mathcal{E}_{-}\mathcal{E}_{+} + \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2}\left(j+\frac{1}{2}\right)^2\right]F_{lj}(r) = \frac{m_e - E}{r}G_{lj}(r) \tag{278}$$
$$\left[\mathcal{E}_{+}\mathcal{E}_{-} + \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2}\left(j+\frac{1}{2}\right)^2\right]G_{lj}(r) = \frac{m_e + E}{r}F_{lj}(r) \tag{279}$$

ここで

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\mp}\mathcal{E}_{\pm} &= E^2 - m_e^2 + \frac{Z^2\alpha^2}{r^2} + \frac{2Z\alpha E}{r} \\
r^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dr}\{r^{\frac{1}{2}}f(r)\} &= \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{1}{4r^2}\right]f(r)
\end{aligned}$$

を用いることで

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+E^2-m_e^2+\frac{Z^2\alpha^2}{r^2}+\frac{2Z\alpha E}{r}+\frac{1}{4r^2}-\frac{1}{r^2}\left(j+\frac{1}{2}\right)^2\right]r^{\frac{1}{2}}F_{lj}(r)=\frac{m_e-E}{r}r^{\frac{1}{2}}G_{lj}(r) \tag{280}$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+E^2-m_e^2+\frac{Z^2\alpha^2}{r^2}+\frac{2Z\alpha E}{r}+\frac{1}{4r^2}-\frac{1}{r^2}\left(j+\frac{1}{2}\right)^2\right]r^{\frac{1}{2}}G_{lj}(r)=\frac{m_e+E}{r}r^{\frac{1}{2}}F_{lj}(r) \tag{281}$$

ここで、次のようにおく。

$$\tilde{\gamma}^2\equiv\left(j+\frac{1}{2}\right)^2-Z^2\alpha^2$$
$$\tilde{\lambda}^2\equiv m_e^2-E^2$$

これを用いて式を整理すると

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}-\tilde{\lambda}^2+\frac{2Z\alpha E}{r}+\frac{1-4\tilde{\gamma}^2}{4r^2}\right]r^{\frac{1}{2}}F_{lj}(r)=\frac{m_e-E}{r}r^{\frac{1}{2}}G_{lj}(r) \tag{282}$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}-\tilde{\lambda}^2+\frac{2Z\alpha E}{r}+\frac{1-4\tilde{\gamma}^2}{4r^2}\right]r^{\frac{1}{2}}G_{lj}(r)=\frac{m_e+E}{r}r^{\frac{1}{2}}F_{lj}(r) \tag{283}$$

ここで、変数変換 $r\to\rho\equiv 2\tilde{\lambda}r$ と

$$F'_{lj}(\rho)=\rho^{\frac{1}{2}}F_{lj}(r),\quad G'_{lj}(\rho)=\rho^{\frac{1}{2}}G_{lj}(r)$$

を用いることで

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2}-\frac{1}{4}+\frac{Z\alpha E}{\tilde{\lambda}\rho}+\frac{1-4\tilde{\gamma}^2}{4\rho^2}\right]F'_{lj}(\rho)=\frac{m_e-E}{2\tilde{\lambda}\rho}G'_{lj}(\rho) \tag{284}$$

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2}-\frac{1}{4}+\frac{Z\alpha E}{\tilde{\lambda}\rho}+\frac{1-4\tilde{\gamma}^2}{4\rho^2}\right]G'_{lj}(\rho)=\frac{m_e+E}{2\tilde{\lambda}\rho}F'_{lj}(\rho) \tag{285}$$

つぎの変換を行う

$$F'_{lj}=a\left[F^{(1)}_{lj}-F^{(2)}_{lj}\right]$$
$$G'_{lj}=b\left[F^{(1)}_{lj}+F^{(2)}_{lj}\right]$$

これにより

$$2\hat{\mathcal{W}}F^{(1)}_{lj}(\rho)=\left[\frac{b}{a}\frac{m_e-E}{2\tilde{\lambda}\rho}+\frac{a}{b}\frac{m_e+E}{2\tilde{\lambda}\rho}\right]F^{(1)}_{lj}(\rho)+\left[-\frac{b}{a}\frac{m_e-E}{2\tilde{\lambda}\rho}+\frac{a}{b}\frac{m_e+E}{2\tilde{\lambda}\rho}\right]F^{(2)}_{lj}(\rho) \tag{286}$$

$$2\hat{\mathcal{W}}F^{(2)}_{lj}(\rho)=\left[-\frac{b}{a}\frac{m_e-E}{2\tilde{\lambda}\rho}+\frac{a}{b}\frac{m_e+E}{2\tilde{\lambda}\rho}\right]F^{(1)}_{lj}(\rho)-\left[\frac{b}{a}\frac{m_e-E}{2\tilde{\lambda}\rho}+\frac{a}{b}\frac{m_e+E}{2\tilde{\lambda}\rho}\right]F^{(2)}_{lj}(\rho) \tag{287}$$

$$\left(\hat{\mathcal{W}}\equiv\left[\frac{d^2}{d\rho^2}-\frac{1}{4}+\frac{Z\alpha E}{\tilde{\lambda}\rho}+\frac{1-4\tilde{\gamma}^2}{4\rho^2}\right]\right)$$

となる。ここで $F_{lj}^{(1)}, F_{lj}^{(2)}$ それぞれに方程式を分離するため、

$$\frac{b}{a}\left(m_e - E\right) - \frac{a}{b}\left(m_e + E\right) = 0 \tag{288}$$

を満たせば良い。式 (288) を満たす (a, b) のうち、最も簡単な無次元量は次のようである。

$$(a, b) = \left(\sqrt{1 - \frac{E}{m_e}}, \sqrt{1 + \frac{E}{m_e}}\right)$$

これを用いると、

$$\frac{b}{a}\left(m_e - E\right) + \frac{a}{b}\left(m_e + E\right) = 2\tilde{\lambda} \tag{289}$$

となるので、これより式 (286)、(287) に式 (289) を代入することにより

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{\rho}\left(-\frac{1}{2} + \frac{Z\alpha E}{\tilde{\lambda}}\right) + \frac{1 - 4\tilde{\gamma}^2}{4\rho^2} - \frac{1}{\rho}\right] F_{lj}^{(1)}(\rho) = 0 \tag{290}$$

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{2} + \frac{Z\alpha E}{\tilde{\lambda}}\right) + \frac{1 - 4\tilde{\gamma}^2}{4\rho^2} - \frac{1}{\rho}\right] F_{lj}^{(2)}(\rho) = 0 \tag{291}$$

これは、Whittaker の微分方程式である。この方程式の解は次のようになる。

$$F_{lj}^{(1)}(\rho) = a_1 M_{\tilde{\gamma}+1-\frac{Z\alpha E}{\tilde{\lambda}}, \tilde{\gamma}}(\rho) + a_2 W_{\tilde{\gamma}+1-\frac{Z\alpha E}{\tilde{\lambda}}, \tilde{\gamma}}(\rho) \tag{292}$$

$$F_{lj}^{(2)}(\rho) = a_3 M_{\tilde{\gamma}-\frac{Z\alpha E}{\tilde{\lambda}}, \tilde{\gamma}}(\rho) + a_4 W_{\tilde{\gamma}-\frac{Z\alpha E}{\tilde{\lambda}}, \tilde{\gamma}}(\rho) \tag{293}$$

ここで

$$M_{\kappa,\mu}(\rho) = e^{-\frac{\rho}{2}} \rho^{1/2+\mu} {}_1F_1\left(\frac{1}{2} + \mu - \kappa, 1 + 2\mu; \rho\right) \tag{294}$$

$$W_{\kappa,\mu}(\rho) = e^{-\frac{\rho}{2}} \rho^{1/2+\mu} U\left(\frac{1}{2} + \mu - \kappa, 1 + 2\mu; \rho\right) \tag{295}$$

となる。これらは Whittaker 関数と呼ばれ、超幾何関数の一つである。その性質は超幾何関数により、それらを用いて以下の議論を行う。まず初めに、${}_1F_1\left(a, b; \rho\right)$ は Kummer の第 1 種合流型超幾何関数であり、

$$U\left(a, b; \rho\right) = \frac{\pi}{\sin(b\pi)}\left\{\frac{{}_1F_1\left(a, b; \rho\right)}{\Gamma(a - b + 1)\Gamma(b)} - \rho^{1-b}\frac{{}_1F_1\left(a - b + 1, 2 - b; \rho\right)}{\Gamma(a)\Gamma(2 - b)}\right\}$$

は、第 2 種合流型超幾何関数である。ただし、この場合原点で有限な、第 1 種合流型超幾何関数を含む項のみ採択されるので、解は次の形となる。

$$F_{lj}^{(1)}(\rho) = a_1 M_{\tilde{\gamma}+1-\frac{Z\alpha E}{\tilde{\lambda}}, \tilde{\gamma}}(\rho) \tag{4.1.45}$$

$$F_{lj}^{(2)}(\rho) = a_3 M_{\tilde{\gamma}-\frac{Z\alpha E}{\tilde{\lambda}}, \tilde{\gamma}}(\rho) \tag{296}$$

よって、G_{lj}, F_{lj} は

$$\begin{pmatrix} G_{lj}(r) \\ F_{lj}(r) \end{pmatrix} = e^{-\tilde{\lambda} r}\left(\tilde{\lambda} r\right)^{\tilde{\gamma}} \begin{pmatrix} \sqrt{1+\frac{E}{m_e}} & \sqrt{1+\frac{E}{m_e}} \\ \sqrt{1-\frac{E}{m_e}} & -\sqrt{1-\frac{E}{m_e}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} F_1\left(\tilde{\gamma}+1-\frac{Z\alpha E}{\tilde{\lambda}}, 1+2\tilde{\gamma}; \tilde{\lambda} r\right) \\ a_{31} F_1\left(\tilde{\gamma}-\frac{Z\alpha E}{\tilde{\lambda}}, 1+2\tilde{\gamma}; \tilde{\lambda} r\right) \end{pmatrix} \tag{297}$$

となる。ここで、この解は式 (255) を満たさなければいけないので、

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} E-m_e+\frac{Z\alpha}{r} & -\frac{d}{dr} \mp \frac{1}{r}\left(j+\frac{1}{2}\right) \\ \frac{d}{dr} \mp \frac{1}{r}\left(j+\frac{1}{2}\right) & E+m_e+\frac{Z\alpha}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{lj}(r) \\ F_{lj}(r) \end{pmatrix} \\ &\quad = \begin{pmatrix} E-m_e+\frac{Z\alpha}{r} & -\frac{d}{dr} \mp \frac{1}{r}\left(j+\frac{1}{2}\right) \\ \frac{d}{dr} \mp \frac{1}{r}\left(j+\frac{1}{2}\right) & E+m_e+\frac{Z\alpha}{r} \end{pmatrix} e^{-\frac{\tilde{\lambda} r}{2}}\left(\tilde{\lambda} r\right)^{\tilde{\gamma}} \\ &\qquad \times \begin{pmatrix} \sqrt{1+\frac{E}{m_e}} & \sqrt{1+\frac{E}{m_e}} \\ \sqrt{1-\frac{E}{m_e}} & -\sqrt{1-\frac{E}{m_e}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} F_1\left(\tilde{\gamma}+1-\frac{Z\alpha E}{\tilde{\lambda}}, 1+2\tilde{\gamma}; \tilde{\lambda} r\right) \\ a_{31} F_1\left(\tilde{\gamma}-\frac{Z\alpha E}{\tilde{\lambda}}, 1+2\tilde{\gamma}; \tilde{\lambda} r\right) \end{pmatrix} = 0 \end{aligned} \tag{298}$$

となる。これを満たすために、次を満たせば良いので、

$$\begin{aligned} &\left[\sqrt{1+\frac{E}{m_e}}\left\{E-m_e+\frac{Z\alpha}{r}\right\}+\sqrt{1-\frac{E}{m_e}}\left\{-\frac{d}{dr} \mp \frac{1}{r}\left(j+\frac{1}{2}\right)\right\}\right] \\ &\qquad \times\left[a_1 e^{-\frac{\hat{\lambda} r}{2}}\left(\tilde{\lambda} r\right)^{\tilde{\gamma}} {}_1F_1\left(\tilde{\gamma}+1-\frac{Z\alpha E}{\tilde{\lambda}}, 1+2\tilde{\gamma}; \tilde{\lambda} r\right)\right] \\ &= -\left[\sqrt{1+\frac{E}{m_e}}\left\{E-m_e+\frac{Z\alpha}{r}\right\}-\sqrt{1-\frac{E}{m_e}}\left\{-\frac{d}{dr} \mp \frac{1}{r}\left(j+\frac{1}{2}\right)\right\}\right] \\ &\qquad \times\left[a_3 e^{-\frac{\tilde{\lambda} r}{2}}\left(\tilde{\lambda} r\right)^{\tilde{\gamma}} {}_1F_1\left(\tilde{\gamma}-\frac{Z\alpha E}{\tilde{\lambda}}, 1+2\tilde{\gamma}; \tilde{\lambda} r\right)\right] \end{aligned} \tag{299}$$

$$\begin{aligned} &\left[\sqrt{1-\frac{E}{m_e}}\left\{E+m_e+\frac{Z\alpha}{r}\right\}+\sqrt{1+\frac{E}{m_e}}\left\{\frac{d}{dr} \mp \frac{1}{r}\left(j+\frac{1}{2}\right)\right\}\right] \\ &\qquad \times\left[a_1 e^{-\frac{\tilde{\lambda} r}{2}}\left(\tilde{\lambda} r\right)^{\tilde{\gamma}} {}_1F_1\left(\tilde{\gamma}+1-\frac{Z\alpha E}{\tilde{\lambda}}, 1+2\tilde{\gamma}; \tilde{\lambda} r\right)\right] \\ &= \left[\sqrt{1-\frac{E}{m_e}}\left\{E+m_e+\frac{Z\alpha}{r}\right\}-\sqrt{1+\frac{E}{m_e}}\left\{\frac{d}{dr} \mp \frac{1}{r}\left(j+\frac{1}{2}\right)\right\}\right] \\ &\qquad \times\left[a_3 e^{-\frac{\tilde{\lambda} r}{2}}\left(\tilde{\lambda} r\right)^{\tilde{\gamma}} {}_1F_1\left(\tilde{\gamma}-\frac{Z\alpha E}{\tilde{\lambda}}, 1+2\tilde{\gamma}; \tilde{\lambda} r\right)\right] \end{aligned} \tag{300}$$

ここで、この式に対し、Kummer の第 1 種合流型超幾何関数の性質

$$\left(x\frac{d}{dx}+a\right){}_1F_1(a,b;x)=a_1F_1(a+1,b;x)$$
$$\left(x\frac{d}{dx}-x+c-a\right){}_1F_1(a,b;x)=(c-a)_1F_1(a-1,b;x)$$

を適用すると、係数 (a_1,a_3) の間に

$$\frac{a_1}{a_3}=\frac{\tilde{\gamma}-\frac{Z\alpha E}{\tilde{\lambda}}}{-\tilde{\gamma}+\frac{Z\alpha m_e}{\tilde{\lambda}}} \tag{301}$$

が成り立つことがわかる。ここで、解は簡単な

$$a_1=\frac{\tilde{\gamma}-\frac{Z\alpha E}{\tilde{\lambda}}}{-\tilde{\gamma}+\frac{Z\alpha m_e}{\tilde{\lambda}}}$$
$$a_3=1 \tag{302}$$

を用いることにする。よって求める解は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} G_{lj}(r) \\ F_{lj}(r) \end{pmatrix}=e^{-\tilde{\lambda}r}\left(\tilde{\lambda}r\right)^{\tilde{\gamma}}\begin{pmatrix} \sqrt{1+\frac{E}{m_e}} & \sqrt{1+\frac{E}{m_e}} \\ \sqrt{1-\frac{E}{m_e}} & -\sqrt{1-\frac{E}{m_e}} \end{pmatrix}$$
$$\times\begin{pmatrix} \frac{\tilde{\gamma}-\frac{Z\alpha E}{\tilde{\lambda}}}{-\tilde{\gamma}+\frac{Z\alpha m_e}{\tilde{\lambda}}}{}_1F_1\left(\tilde{\gamma}+1-\frac{Z\alpha E}{\tilde{\lambda}},1+2\tilde{\gamma};\tilde{\lambda}r\right) \\ {}_1F_1\left(\tilde{\gamma}-\frac{Z\alpha E}{\tilde{\lambda}},1+2\tilde{\gamma};\tilde{\lambda}r\right) \end{pmatrix} \tag{303}$$

付 録 J　chiral enhancement

[42] によれば、クォークの複合系の π 粒子はその崩壊過程において軸性であることから、崩壊率が大きくなることが知られている。まず、クォークの場の演算子が次のような擬スカラーカレントを組んでいるとき

$$\overline{u}\gamma^5 d = \overline{u}(P_L - P_R)d = \overline{u_R}d_L - \overline{u_L}d_R \tag{304}$$

とかくことができる。ここで、クォークの運動方程式を用いれば

$$\overline{u_R}d_L - \overline{u_L}d_R = -\frac{\partial^\mu}{2(m_u+m_d)}(\overline{u_R}\gamma_\mu d_R) - \frac{\partial^\mu}{2(m_u+m_d)}(\overline{u_L}\gamma_\mu d_L) \tag{305}$$

となる。以上から

$$\begin{aligned}\overline{u}\gamma^5 d &= -\frac{\partial^\mu}{2(m_u+m_d)}(\overline{u_R}\gamma_\mu d_R) - \frac{\partial^\mu}{2(m_u+m_d)}(\overline{u_L}\gamma_\mu d_L)\\ &= -\frac{\partial^\mu}{2(m_u+m_d)}(\overline{u}\gamma_\mu\gamma^5 d)\end{aligned} \tag{306}$$

となる。ここで、始状態を π 粒子として崩壊過程を考えれば

$$\begin{aligned}\langle 0|\,\overline{u}\gamma^5 d\,|\pi\rangle &= \langle 0| - \frac{\partial^\mu}{2(m_u+m_d)}(\overline{u}\gamma_\mu\gamma^5 d)\,|\pi\rangle\\ &= -\frac{k^\mu}{2(m_u+m_d)}\,\langle 0|\,(\overline{u}\gamma_\mu\gamma^5 d)\,|\pi\rangle\\ &= -\frac{k^\mu}{2(m_u+m_d)}k_\mu f_\pi\\ &= -\frac{m_\pi^2 f_\pi}{2(m_u+m_d)}\end{aligned} \tag{307}$$

となる。これは弱い相互作用を介して π 粒子が崩壊するとき、崩壊率は $m_\pi^2 f_\pi^2$ に比例するのに対して、擬スカラーカレントからの場合、chiral enhancement からの影響により、$m_\pi^2/2(m_u+m_d)^2 \sim 264$ 倍だけ大きくなることがわかった。

謝辞

埼玉大学素粒子論研究室の皆様をはじめ、多くの方々のご協力の下にこの修士論文を書き上げることができました。谷井義彰教授には研究室の輪講や授業でお世話になり、指導教員の佐藤丈准教授には、日々のゼミや修論作成、発表練習などの多くの場面においてご指導を賜りました。また、本研究のためのゼミを共に行ってくださった上坂優一氏には、研究内容だけでなく数値計算に関する知識も教わり、同じくゼミに携わっていただいた山中真人氏には様々な知識を教わりました。この場を借りてお礼を申し上げます。

参考文献

[1] P. A. Zyla, et al. Review of Particle Physics. *PTEP*, Vol. 2020, No. 8, p. 083C01, 2020.

[2] John A. Wheeler. Some consequences of the electromagnetic interaction between μ^--mesons and nuclei. *Rev. Mod. Phys.*, Vol. 21, pp. 133–143, Jan 1949.

[3] Kenneth W. Ford and John G. Wills. Calculated properties of μ-mesonic atoms. *Nuclear Physics*, Vol. 35, pp. 295–302, 1962.

[4] Robert W Huff. Decay rate of bound muons. *Annals of Physics*, Vol. 16, No. 2, pp. 288–317, 1961.

[5] Andrzej Czarnecki, G. Peter Lepage, and William J. Marciano. Muonium decay. *Phys. Rev. D*, Vol. 61, p. 073001, Feb 2000.

[6] T. Suzuki, D. F. Measday, and J. P. Roalsvig. Total nuclear capture rates for negative muons. *Phys. Rev. C*, Vol. 35, pp. 2212–2224, Jun 1987.

[7] Pavol Domin, Sergey Kovalenko, Amand Faessler, and Fedor Simkovic. Nuclear (mu-, e+) conversion mediated by Majorana neutrinos. *Phys. Rev. C*, Vol. 70, p. 065501, 2004.

[8] Jogesh C. Pati and Abdus Salam. Lepton number as the fourth "color". *Phys. Rev. D*, Vol. 10, pp. 275–289, Jul 1974.

[9] Howard Georgi and S. L. Glashow. Unity of all elementary-particle forces. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 32, pp. 438–441, Feb 1974.

[10] Harald Fritzsch and Peter Minkowski. Unified interactions of leptons and hadrons. *Annals of Physics*, Vol. 93, No. 1, pp. 193–266, 1975.

[11] Edward Farhi and Leonard Susskind. Technicolour. *Physics Reports*, Vol. 74, No. 3, pp. 277–321, 1981.

[12] Kenneth Lane and M. V. Ramana. Walking technicolor signatures at hadron colliders. *Phys. Rev. D*, Vol. 44, pp. 2678–2700, Nov 1991.

[13] Barbara Schrempp and Fridger Schrempp. Light leptoquarks. *Physics Letters B*, Vol. 153, No. 1, pp. 101–107, 1985.

[14] Steven Weinberg. Supersymmetry at Ordinary Energies. 1. Masses and Conservation Laws. *Phys. Rev. D*, Vol. 26, p. 287, 1982.

[15] N. Sakai and Tsutomu Yanagida. Proton Decay in a Class of Supersymmetric Grand Unified Models. *Nucl. Phys. B*, Vol. 197, p. 533, 1982.

[16] Lawrence J. Hall and Mahiko Suzuki. Explicit R-Parity Breaking in Supersymmetric Models. *Nucl. Phys. B*, Vol. 231, pp. 419–444, 1984.

[17] Stephen P. Martin. A Supersymmetry primer. *Adv. Ser. Direct. High Energy Phys.*, Vol. 21, pp. 1–153, 2010.

[18] Vernon D. Barger, G. F. Giudice, and Tao Han. Some New Aspects of Supersymmetry R-Parity Violating Interactions. *Phys. Rev.*, Vol. D40, p. 2987, 1989.

[19] Ugo Amaldi, Albrecht Bohm, L. S. Durkin, Paul Langacker, Alfred K. Mann, William J. Marciano, Alberto Sirlin, and H. H. Williams. A Comprehensive Analysis of Data Pertaining to the Weak Neutral Current and the Intermediate Vector Boson Masses. *Phys. Rev.*, Vol. D36, p. 1385, 1987.

[20] D. Androi?, et al. Precision measurement of the weak charge of the proton. *Nature*, Vol. 557, No. 7704, pp. 207–211, 2018.

[21] Morad Aaboud, et al. Searches for scalar leptoquarks and differential cross-section measurements in dilepton-dijet events in proton-proton collisions at a centre-of-mass energy of $\sqrt{s} = 13$ TeV with the ATLAS experiment. *Eur. Phys. J. C*, Vol. 79, No. 9, p. 733, 2019.

[22] Georges Aad, et al. Search for new phenomena in events with two opposite-charge leptons, jets and missing transverse momentum in pp collisions at $\sqrt{\mathrm{s}} = 13$ TeV with the ATLAS detector. *JHEP*, Vol. 04, p. 165, 2021.

[23] Morad Aaboud, et al. Search for supersymmetry in events with b-tagged jets and missing transverse momentum in pp collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV with the ATLAS detector. *JHEP*, Vol. 11, p. 195, 2017.

[24] Ryuichiro Kitano, Masafumi Koike, and Yasuhiro Okada. Detailed calculation of lepton flavor violating muon electron conversion rate for various nuclei. *Phys. Rev. D*, Vol. 66, p. 096002, 2002. [Erratum: Phys.Rev.D 76, 059902 (2007)].

[25] P.A. Zyla, et al. Review of Particle Physics. *PTEP*, Vol. 2020, No. 8, p. 083C01, 2020.

[26] K. Abe, et al. Hyper-Kamiokande Design Report. 5 2018.

[27] et al. K. Abe. T2k nd280 upgrade – technical design report, 2020.

[28] D. S. Ayres, et al. The NOvA Technical Design Report. 10 2007.

[29] Babak Abi, et al. Deep Underground Neutrino Experiment (DUNE), Far Detector Technical Design Report, Volume II: DUNE Physics. 2 2020.

[30] Jeffrey M. Berryman, André de Gouvêa, Kevin J. Kelly, and Andrew Kobach. Lepton-number-violating searches for muon to positron conversion. *Phys. Rev. D*, Vol. 95, No. 11, p. 115010, 2017.

[31] Ryuichiro Kitano, Masafumi Koike, and Yasuhiro Okada. Detailed calculation of lepton flavor violating muon-electron conversion rate for various nuclei. *Phys. Rev. D*, Vol. 66, p. 096002, Nov 2002.

[32] Y. G. Cui, et al. Conceptual design report for experimental search for lepton flavor violating mu- - e- conversion at sensitivity of 10**(-16) with a slow-extracted bunched proton beam (COMET). 6 2009.

[33] V. Pronskikh, D. Glenzinski, N. Mokhov, and R. Tschirhart. Mu2e upgrade physics reach

optimization studies for the pip-ii era, 2017.

[34] Steven Kahn, Harold Kirk, Robert Palmer, Nicholas Simos, Roman Samulyak, Peter Thieberger, Koji Yoshimura, Yoshitaka Kunno, Changguo Lu, and Kirk McDonald. A Letter of Intent to the J-PARC 50 GeV Proton Synchrotron Experiments: Studies of a Target System for a 4-MW, 50-GeV Proton Beam. 1 2003.

[35] J. Bernabeu, et al. EURONU WP6 2009 Yearly Report: Update of the Physics Potential of Nufact, Superbeams and Betabeams. 5 2010.

[36] Aaron Paul O'Neill. When jets MET SUSY: ATLAS searches for squarks and gluinos. *PoS*, Vol. ICHEP2020, p. 269, 2021.

[37] 長島順清. 素粒子物理学の基礎. 朝倉物理学大系 / 荒船次郎 [ほか] 編集, No. 3-4. NetLibrary, 2008.

[38] 長島順清. 素粒子標準理論と実験的基礎. 朝倉物理学大系 / 荒船次郎 [ほか] 編集, No. 5. NetLibrary, 2008.

[39] 長島順清. 高エネルギー物理学の発展. 朝倉物理学大系 / 荒船次郎 [ほか] 編集, No. 6. NetLibrary, 2008.

[40] 林青司. 素粒子の標準模型を超えて. シュプリンガー現代理論物理学シリーズ, No. 5. 丸善出版, 2015.

[41] STEPHEN P. MARTIN. A supersymmetry primer. *Advanced Series on Directions in High Energy Physics*, p. 1–98, Jul 1998.

[42] Shifman M.A. Vainshtein A.I., Zakharov V.I. A possible mechanism for the $\Delta\mathrm{T}$=1/2 rule in nonleptonic decays of strange particles. *JTEP*, Vol. 22, No. 2, p. 55, 1961.