繰り込み可能な $L_\mu - L_\tau$ Model における Hubble Tension の緩和と Z’ $- \phi$ 散乱の計算

埼玉大学大学院理工学研究科　物理機能系専攻　物理学コース

学籍番号 20MP125
本多　慧

2022 年 3 月 22 日

概要

現代の素粒子物理学において、標準模型 (Standard Model) は、素粒子物理学における基礎理論となっており、多くの素粒子実験で得られる結果を矛盾なく説明できる理論である。標準模型は最も成功した理論として知られているが、一方で、標準模型では説明できない現象も複数報告されている。そのため、標準模型を超える物理の研究は精力的に行われている。

標準模型で説明できない代表的な現象の 1 つとして、ミューオンの異常磁気モーメント (g μ-2 anomaly) の値が、実験値と標準模型による理論値とで大きく異なることが知られており、両者の間には現在 4.2 σ程度の乖離があることが報告されている。

また、宇宙論の分野では、観測方法の違いによりハッブル定数の値が異なるという現象が報告されている。ハッブル定数は大きく分けて 2 つの手法で測定されており、近傍宇宙の観測とハッブルの法則から推定する方法と、遠方宇宙の観測結果の下、ΛCDM モデルに基づいて推定する方法が存在する。両者からそれぞれ推定されるハッブル定数の間には 3σ 以上の乖離が存在し、この違いは Hubble Tension と呼ばれている。Hubble Tension は、ニュートリノの有効数 N_{eff} を標準模型による理論値より大きくすることで解決できることが先行研究により示されている。Hubble Tension は、MeV 程度の質量をもつ新たなゲージ粒子を導入する $L_\mu - L_\tau$ Model を用いることで、$g_\mu - 2$ anomaly と共に説明できることが示されている。更に、従来の $L_\mu - L_\tau$ Model は Z' の質量を手で入れているため繰り込み不可能な理論であったが、より厳密な模型としてニュートリノの質量起源まで説明できる繰り込み可能な $L_\mu - L_\tau$ Model があり、この模型にて Hubble Tension と $g_\mu - 2$ anomaly を同時に解決できるパラメータ領域が探られている。本模型には新たに軽い粒子として Majoron が生じるため、標準模型に加えて Z' と Majoron が新たに含まれる。先行研究では Z' が存在した後に Majoron が存在する状況を考え、一方の粒子をあるパラメータ領域に固定し、Planck による N_{eff} への制限からもう一方の粒子に課される制限について議論されている。しかし、仮定されている状況では一部のパラメータ空間にしか制限を課すことができない。

そこで本論文では、先行研究より一般的な Z' と Majoron が同時期にも存在している状況を考える。これによりまだ制限が付けられていないパラメータ領域に制限を課すことが期待できる。この状況では Z' と Majoron の散乱過程が生じるため、先行研究からの変更点について議論し、散乱過程による衝突項について数値計算を行う。

目次

第 1 章

Introduction

WMAP を始めとする、高い精度でデータを集められる観測機器の活躍により、宇宙論のデータは大きく改善され、宇宙論の標準モデルである ΛCDM モデルのパラメータもかなり正確に測定できるようになった。その一方で、ΛCDM モデルからずれるようなデータも報告されている。代表的なものは、現在の宇宙の膨張率を表すハッブル定数に関するものであり、Planck による測定値 [14] と SH0ES による測定値 [16] との間に大きな隔たりがあることである。この違いを図 (1.1) に示す。これはハッブル定数の推定方法による違いであり、この数値の乖離は Hubble Tension と呼ばれている。

ハッブル定数は幾つかのグループによって測定されているが、ハッブル定数は主に 2 種類の方法で測定されている。

1. 近傍宇宙の観測から推定する方法近傍にある銀河の観測により、銀河までの距離と赤方偏移がわかれば、ハッブルの法則よりハッブル定数を測定することができる。

$$H_0 d = cz \tag{1.1}$$

H_0 はハッブル定数、c は光速、d は地球から銀河までの距離、z は赤方偏移である。赤方偏移は、銀河のスペクトルを観測することで求めることができる。銀河までの距離を測る代表的な方法は標準光源法である。標準光源は、絶対等級が精度よく求められている天体であり、距離を測りたい天体の視等級と標準光源の等級を比較することで距離を推定することができる。また、天体の明るさでなく大きさを用いる観測手法や、重力レンズを用いる方法など、標準光源を用いない方法も幾つか存在する。この観測方法は、宇宙モデルを使用せず観測データからハッブル定数を算出できるため、直接測定と呼ばれている。SH0ES 実験は直接測定を代表するものの 1 つである。

2. 遠方宇宙の観測データに ΛCDM モデルを仮定して推定する方法遠方宇宙の観測は CMB の観測の事である。この方法は CMB の異方性からハッブル定数を推定する方法である。代表的なものは Planck によるデータ [14] で、

$$H_0 = 67.45 \pm 0.5 \mathrm{kms}^{-1}\mathrm{Mpc}^{-1} \tag{1.2}$$

である。これは現在最も精度の良い測定値とされている。この測定方法は、ハッブル定数の算出にあたりモデルを仮定しているため、間接測定と呼ばれている。

Plack によるデータはかなり精度の良いものであるが、これは直接測定のデータにも言えることである。また、Planck と SH0ES のデータを調べ、大きな系統誤差は見つかっていないことが報告されている [18]。そのため、Hubble Tension は ΛCDM モデルになんらかの修正が必要であることを示していると考えられる。

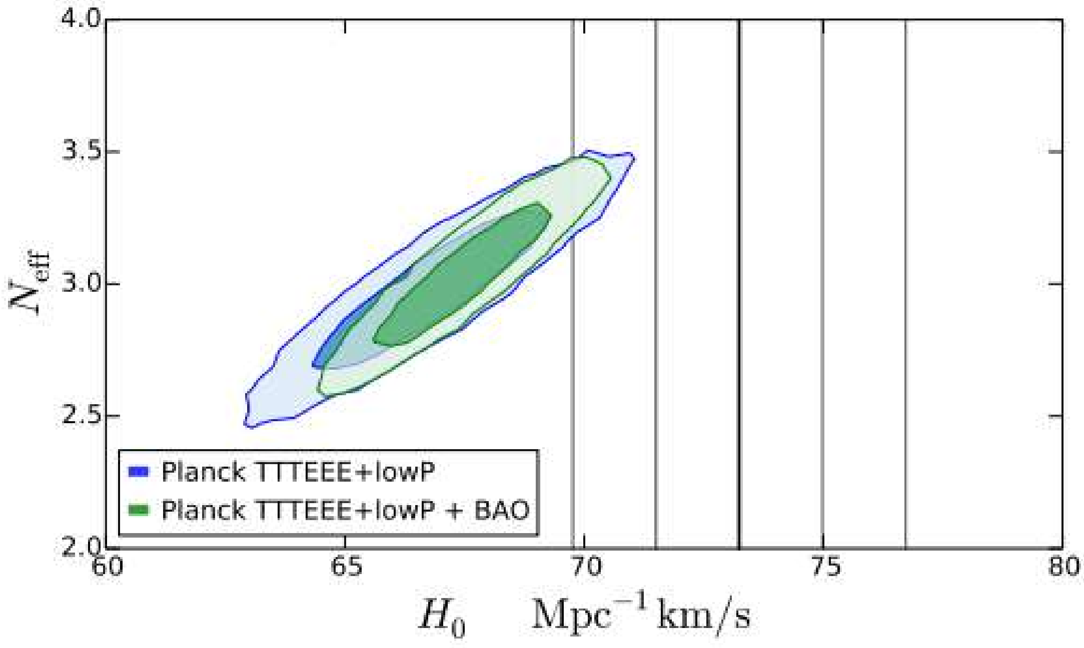


図 1.1　Planck 2015 のデータ (青) と Planck 2015+BAO のデータ (緑) による $H_0 - N_{\rm eff}$ パラメータ空間への制限 [11]. 黒い縦線は、SH0ES による測定値である [16]。

Hubble Tension を解決する方法の 1 つに、ニュートリノの有効数 $N_{\rm eff}$ を増やす方法がある。図 (1.1) は横軸 H_0、縦軸 $N_{\rm eff}$ のパラメータ空間に、Planck2015,BAO による制限が描かれた図である。また、SH0ES によるハッブル定数の測定値も示されている。標準模型における $N_{\rm eff}$ は、

$$N_{\rm eff}^{\rm SM} = 3.045 \tag{1.3}$$

であるため [17]、$N_{\rm eff} \sim 3.4$ 程度にすることができれば、Hubble Tension は緩和できたと言える。

Hubble Tension を説明するため、先行研究では繰り込み可能な $L_\mu - L_\tau$ Model を用いて、MeV 程度の質量を持つゲージボソン Z' と、keV 程度の質量を持つ Majoron を導入することで、$g_\mu - 2$ anomaly を Hubble Tension と同時に説明し、Z' と Majoron の一方をパラメータ空間に固定し、もう一方のパラメータ空間に制限を課すことができた。しかし、先行研究では、Z と Majoron の存在時期が異なるような状況を考えたことにより、Majoron のパラメータ空間は、限定的な領域までしか制限を課すことができなかった。

そこで本論文では、先行研究では制限を付けることができなかった領域に制限を付けることを目指し、Z' と Majoron が同時期にも存在するような状況を考える。これにより、Z' と Majoron の間に相互作用が生じるため、宇宙初期の時間発展に変更が加わる。この変更には Z' と Majoron の散乱過程が重要となってくるため、この散乱によるエネルギーと粒子数の遷移率を幾つかの温度に対して計算し、Z' のみの寄与、Majoron のみの寄与との比較を行い、宇宙初期にどの程度効いてくるかを議論する。

本論文の構成は次のとおりである。第 2 章では、Hubble Tension の説明にあたり重要なパラメータで

ある N_{eff} の定義について確認し、標準模型に対する N_{eff} を計算する。3 章では繰り込み可能な $L_\mu - L_\tau$ Model による相互作用を確認したのち、同モデルにおける N_{eff} を確認し、各粒子のパラメータ空間に対する制限について見る。4 章では、3 章で考えた状況をより一般的にした際に生じる変更点について確認し、Z' と Majoron による散乱過程について数値計算を行い、計算結果について議論する。最後に 5 章で本研究の結果をまとめる。

第 2 章

標準模型と N_{eff}

2.1 N_{eff} の定義

N_{eff} はニュートリノの有効数であり、本研究において重要なパラメータである。ここでは [7] に従い N_{eff} について説明する。宇宙初期の遅い時期を考える、つまり、e^{pm} のペアが対消滅し、標準模型を超えた (BSM) 軽い粒子 χ も全て消滅した後の宇宙について考える (温度 $T_{\gamma 0}$)。この時期には光子、ニュートリノ、反ニュートリノ、及びニュートリノ的な BSM 粒子だけが相対論的である。よって、$T_{\gamma 0} \ll \min[m_e, m_\chi]$ であり、光子のエネルギー密度に対する宇宙の放射性分のエネルギー密度は次のように書ける。

$$\begin{aligned}\left(\frac{\rho_{\mathrm{R}}}{\rho_\gamma}\right)_0 &= 1 + \left(\frac{\rho_\nu}{\rho_\gamma}\right)_0 + \left(\frac{\rho_\xi}{\rho_\gamma}\right)_0 = 1 + \left(\frac{\rho_\nu/3}{\rho_\gamma}\right)_0 \left[3 + \left(\frac{3\rho_\xi}{\rho_\nu}\right)_0\right] \\ &= 1 + \left(\frac{\rho_\nu}{\rho_\gamma}\right)_0 [3 + \Delta \mathrm{N}_\nu] \end{aligned} \tag{2.1}$$

ここで ρ_ν、ρ_ξ はそれぞれ全ニュートリノ、ξ のエネルギー密度である。下付き添え字の 0 は、温度 $T_{\gamma 0}$ における物理量であることを表す。$\Delta\mathrm{N}_\nu$ は、相対論的な ξ 粒子のエネルギー密度と、SM ニュートリノのエネルギー密度の比によって定義される。

$$\Delta \mathrm{N}_\nu \equiv \left(\frac{\rho_\xi}{\rho_\nu}\right) \tag{2.2}$$

軽い BSM 粒子が無い場合、ニュートリノは $e^\pm$ の対消滅に先立ち、$T_\nu \sim$ 2-3MeV で脱結合する。$e^\pm$ が対消滅する時、光子を加熱するため、脱結合前は $T_\nu = T_\gamma$ であるが、脱結合後は $T_\gamma > T_\nu$ となる。標準的な仮定は、ニュートリノは瞬時に脱結合し、他の熱的な相対論的粒子は光子と $e^\pm$ だけであり、ニュートリノ脱結合時は $e^\pm$ が十分相対論的である ($m_e/T_\gamma \to 0$) というものだが、これらの仮定の下では、ニュートリノは相対論的なフェルミ気体であるため、エントロピー保存則を適用すると次の関係が成立する。

$$\left(\frac{\rho_\nu}{\rho_\gamma}\right)_0 = \frac{7}{8}\left(\frac{T_\nu}{T_\gamma}\right)_0^4 \tag{2.3}$$

$$\left.\left(\frac{T_\nu}{T_\gamma}\right)_0\right|_{\mathrm{SM}} = \left(\frac{4}{11}\right)^{1/3} \tag{2.4}$$

このように、最終的な光子とニュートリノの温度比は容易に評価できる。これを用いて (2.1) 式を書き直

すと

$$\left(\frac{\rho_{\rm R}}{\rho_\gamma}\right)_0 = 1 + \frac{7}{8}\left(\frac{T_\nu}{T_\gamma}\right)_0^4 [3 + \Delta N_{\rm eff}] \equiv 1 + \frac{7}{8}\left(\frac{4}{11}\right)^{\frac{4}{3}} N_{\rm eff} \tag{2.5}$$

これを $N_{\rm eff}$ について解くと

$$N_{\rm eff} = \frac{8}{7}\left(\frac{11}{4}\right)^{4/3}\left(\frac{\rho_R - \rho_\gamma}{\rho_\gamma}\right)_0 \tag{2.6}$$

と書ける。温度 $T_{\gamma 0}$ において、宇宙の放射性分として光子とニュートリノしか存在しないとすると、$\rho_{R0} = \rho_{\gamma 0} + \rho_{\nu 0}$ であるので、

$$N_{\rm eff} = \frac{8}{7}\left(\frac{11}{4}\right)^{4/3}\left(\frac{\rho_\nu}{\rho_\gamma}\right)_0 \tag{2.7}$$

となる。

2.2　ボルツマン方程式

分布関数の時間発展はボルツマン方程式によって記述される。ここでは、一様等方で平坦な宇宙において、粒子種 a の分布関数を記述するボルツマン方程式について説明する [2,7]。粒子種 a の分布関数を $f_a = f_a(\mathrm{p}_a, t)$ とすると、f_a の時間発展は次のボルツマン方程式によって記述される。

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} - H\mathrm{p}_a\frac{\partial f_a}{\partial \mathrm{p}_a} = C[f_a] \tag{2.8}$$

ここで、$\mathrm{p}_a = |\boldsymbol{p}_a|$、$H$、$C[f_a]$ はそれぞれ粒子種 a の運動量、ハッブルパラメータ、衝突項である。H は、全エネルギー密度 ρ_{tot}、プランク質量 m_{Pl} を用いて、フリードマン方程式から次のように書ける。

$$H = \sqrt{\frac{8\pi}{3}\frac{\rho_{tot}}{m_{Pl}^2}} \tag{2.9}$$

また、過程 $a + X_1 + X_2 + \cdots \leftrightarrow Y_1 + Y_2 + \cdots$ に関して、粒子種 a に対する衝突項 $C[f_a]$ は一般的に次のように書ける。

$$C[f_a] = \sum_{X,Y} C_{a+X\leftrightarrow Y}[f_a] \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} C_{a+X\leftrightarrow Y}[f_a] = &-\frac{1}{2E_a}\int (\prod_i d\Pi_{X_i})(\prod_j d\Pi_{Y_j})(2\pi)^4\delta^{(4)}\big(p_a + \sum_i p_{X_i} - \sum_j p_{Y_j}\big) \\ &\times \Big[\sum_{\rm spins}|\mathcal{M}_{a+X\to Y}|^2 f_a(\prod_i f_{X_i})(\prod_j(1\pm f_{Y_j})) - \sum_{\rm spins}|\mathcal{M}_{Y\to a+X}|^2(\prod_j f_{Y_j})(1\pm f_a)(\prod_i(1\pm f_{X_i}))\Big] \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$d\Pi_{X_i} \equiv \frac{d^3\mathrm{p}_{X_i}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{X_i}} \tag{2.12}$$

$+$ はボソン、-はフェルミオンに対応し、$1 \pm f$ はそれぞれ Bose Enhancement、Pauli Blocking の効果を表す。また、$\mathcal{M}_{a+X\to Y}$ は過程 $a + X_1 + X_2 + \cdots \to Y_1 + Y_2 + \cdots$ における振幅を表す。なお、始状態または終状態に同種粒子が n 個存在する場合、同じ状態を重複して足し上げることを防ぐため、$n!$ で割らなければならない。

(2.8) 式の両辺に $E_a d^3\mathrm{p}_a/(2\pi)^3$、$d^3\mathrm{p}_a/(2\pi)^3$ をかけて運動量積分することで、エネルギー密度、粒子数密度に関する発展方程式をそれぞれ得ることができる。

$$\frac{d\rho_a}{dt}+3H(\rho_a+P_a)=\int\frac{d^3\mathrm{p}_a}{(2\pi)^3}E_aC[f_a]\equiv\frac{\delta\rho_a}{\delta t} \tag{2.13}$$

$$\frac{dn_a}{dt}+3Hn_a=\int\frac{d^3\mathrm{p}_a}{(2\pi)^3}C[f_a]\equiv\frac{\delta n_a}{\delta t} \tag{2.14}$$

$\delta\rho_a/\delta t$、$\delta n_a/\delta t$ はそれぞれエネルギー、粒子数の遷移率と呼ばれる。(2.13) の物理的な意味を考える。左辺の $3H(\rho_a+P_a)$ は右辺に移行すると分かりやすい。この項はハッブルパラメータを含んでおり、宇宙の膨張によりエネルギー密度が薄まる効果を表している。また、$\delta\rho_a/\delta t$ は粒子 a が関与する過程により粒子 a のエネルギーが変化する効果を表す。つまり、エネルギー密度の時間変化は、これら 2 つの効果によって記述されることを表している。a が相対論的 $(P_a=\rho_a/3)$ であり、相互作用しない場合、$\delta\rho_a/\delta t=0$ から $\rho_a\propto R^{-4}$ となり、期待通りのエネルギー密度が得られる (R はスケール因子)。

また、(2.13) 式の各辺を、宇宙の全粒子に渡って和を取ることで、宇宙の全エネルギー密度に対する時間発展を得ることができる。

$$\frac{d\rho_{tot}}{dt}+3H(\rho_{tot}+P_{tot})=\sum_a\frac{\delta\rho_a}{\delta t} \tag{2.15}$$

宇宙の外にエネルギーが逃げ出さない限り、各粒子間でのエネルギーのやりとりは保存しているはずなので、

$$\sum_a\frac{\delta\rho_a}{\delta t}=0 \tag{2.16}$$

である。従って、全エネルギー密度の変化は

$$\frac{d\rho_{tot}}{dt}+3H(\rho_{tot}+P_{tot})=0 \tag{2.17}$$

と書ける。これはエネルギー運動量保存則 ${T^{\mu}}_{0;\mu}$ からも導かれる。

衝突項は、全ての粒子が熱平衡分布関数に従う場合、同じ熱浴中で起こる反応過程に対しては 0 となる。この場合、

$$1\pm f_a=f_ae^{(E_a-\mu_a)/T_a} \tag{2.18}$$

が成立するため、次式が成立する。

$$\begin{aligned}f_1f_2(1\pm f_3)(1\pm f_4)&=(1\pm f_1)e^{-(E_1-\mu_1)/T}(1\pm f_2)e^{-(E_2-\mu_2)/T}f_3e^{(E_3-\mu_3)/T}f_4e^{(E_4-\mu_4)/T}\\&=f_3f_4(1\pm f_1)(1\pm f_2)e^{(\mu_1+\mu_2-\mu_3-\mu_4)/T}\\&=f_3f_4(1\pm f_1)(1\pm f_2)\end{aligned} \tag{2.19}$$

2 つ目の等号ではエネルギー保存則を用いた。また、3 つ目の等号は、反応過程 $1+2\leftrightarrow 3+4$ が化学平衡であるか、化学ポテンシャルが全て 0 であれば成立する。従って、衝突項の分布関数の部分について

$$f_1f_2(1\pm f_3)(1\pm f_4)-f_3f_4(1\pm f_1)(1\pm f_2)=0 \tag{2.20}$$

となるため、同じ熱浴中の粒子による反応過程に対する衝突項は 0 となる。

2.3　近似

ボルツマン方程式を用いて宇宙初期の時間発展方程式を記述するにあたり、[7] に基づいて計算を簡略化するため幾つかの近似を用いる。$N_{\rm eff}$ を計算するにあたり、$\frac{\rho_\nu}{\rho_\gamma}$ を計算する必要がある。光子とニュートリノが同じ熱浴中にある状況では $\frac{\rho_\nu}{\rho_\gamma}$ は変化しないため、ニュートリノが $e^{\pm}$ と光子の熱浴から脱結合する時期とその後にかけてが重要となってくる。ニュートリノは 2-3MeV で脱結合するため、温度がおよそ 10MeV 程度以下となった宇宙を考える。この時期に存在する標準模型の粒子は、光子 γ、ニュートリノと反ニュートリノ ν_α、$\bar{\nu}_\alpha$、電子と陽電子 $e^{\pm}$ である。

なお、本論文では初期宇宙におけるレプトン非対称性は考えないものとする。

1. 全ての SM 粒子は熱平衡分布関数に従う。

$$f^{eq}(T(t),\mu(t)) = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{T}} \pm 1} \tag{2.21}$$

   $+$ はフェルミディラック分布、$-$ はボースアインシュタイン分布である。

   充分初期の宇宙は非常に高温であり、SM 粒子たちは頻繁に衝突を起こして熱平衡にあると考えられる。そのため、良い近似で熱平衡分布関数に従う。宇宙の膨張に伴い温度が下がってくると、$T \sim 2-3$MeV でニュートリノは脱結合するが、この脱結合が瞬間的に起こると仮定すると、ニュートリノは脱結合後も熱平衡分布関数に従うことになる。脱結合は反応率が小さくなると起こるため、脱結合後もわずかに電子との相互作用が残っている。そのため、実際の脱結合後のニュートリノの分布関数は、熱平衡分布関数に対してわずかにずれていると考えられる。

   実際、脱結合したニュートリノの分布関数は、熱平衡分布関数に対して 1% 未満のずれがあることが報告されている [7]。

2. 衝突項積分内ではボルツマン分布を用いる。

   充分高温において、分布関数は運動量 p が広く分布するため、各状態の占有率は非常に小さくなる。そのため、近似 1 から $f = 1/[e^{(E-\mu)/T} \pm 1] \ll 1.$ である。これは、$e^{(E-\mu)/T} \gg 1$ であるため、 $f \simeq e^{-(E-\mu)/T}$ となる。これより $f \ll 1$ なので、$1 \pm f \simeq 1$ とできる。実際、衝突項積分においてボルツマン分布で近似することによるずれは 20% 以下であることが報告されている [6]。

3. ニュートリノの質量を無視する。

   Planck 2018 [14] ニュートリノの質量の世代和、$\sum_i m_{\nu_i}$ に対して、$\sum_i m_{\nu_i} < 0.12$eV という制限が課されている。本論文で考える温度は、$T \gg 0.1$eV の初期宇宙であるため、ニュートリノ質量は無視してよい。

4. 弱い相互作用過程に対する衝突項の計算では、電子の質量 m_e を無視する。

   電子とニュートリノの相互作用が切れる温度 ($T \sim 3$MeV) において電子はまだ相対論的であるため、電子の質量 m_e を無視することは良い近似である。m_e を無視した際の誤差は,,」3MeV 程度では数 % であることが報告されている [7]。

   なお、近似 1、2 と合わせて、衝突項積分が完全に計算できるようになる。

5. 全ての SM 粒子の化学ポテンシャル μ を無視する。

   初期宇宙においてレプトン非対称性が存在しないとしているため、レプトン l に対して、近似 1

と $n_l = n_{\bar{l}}$ より

$$\frac{1}{e^{(E-\mu_l)/T}+1} = \frac{1}{e^{(E-\mu_{\bar{l}})/T}+1}$$
$$\therefore \mu_l = \mu_{\bar{l}}$$

が成り立つ。

光子

光子は 2 重コンプトン散乱 $e^- + \gamma \leftrightarrow e^- + \gamma + \gamma$ によって化学平衡である。

$$\mu_\gamma + \mu_e = 2\mu_\gamma + \mu_e$$
$$\therefore \mu_\gamma = 0$$

が成立する。

電子

$e^-e^+ \leftrightarrow e^-e^+$ により、電子陽電子は運動学的平衡のため、

$$\mu_{e^-} = \mu_{e^+}$$

である。更に、$e^+e^- \leftrightarrow 2\gamma$ が化学平衡であるので

$$\mu_{e^-} + \mu_{e^+} = 2\mu_{e^-} = 2\mu_\gamma = 0$$
$$\therefore \mu_{e^-} = 0$$

となる。

ニュートリノ

脱結合前 ($T \gtrsim$ 3MeV) では、$\nu_\alpha\bar{\nu}_\alpha \leftrightarrow \nu_\alpha\bar{\nu}_\alpha$ によりニュートリノと反ニュートリノは運動学的平衡であるため、

$$\mu_{\nu_\alpha} = \mu_{\bar{\nu_\alpha}}$$

である。また、$\nu_\alpha\bar{\nu}_\alpha \leftrightarrow e^+e^-$ が化学平衡であることから

$$\mu_{\nu_\alpha} + \mu_{\bar{\nu}_\alpha} = 2\mu_{\nu_\alpha} = \mu_{e^-} + \mu_{e^+} = 0$$
$$\therefore \mu_{\nu_\alpha} = 0$$

となる。

$T \lesssim$ 3MeV では、ニュートリノは脱結合するため $\mu_{\nu_\alpha} = 0$ は保証されない。そのため、ここでは $|\mu_{\nu_\alpha}/T_{\nu_\alpha}| \ll 1$ であると仮定することにする。

実際、μ_ν を無視した場合、無視しない場合と比べて大きな違いは現れない報告されている [6]。

6. $T_\gamma = T_{e^-} = T_{e^+}$ が成立する。

   電子、陽電子は $e^\pm\gamma \leftrightarrow e^\pm\gamma$ によって光子と運動学的平衡なので、$T_\gamma = T_{e^-} = T_{e^+}$ は良い近似で成立する。

7. $T_{\nu_e} = T_{\nu_\mu} = T_{\nu_\tau} \equiv T_\nu$ が成立する。

   脱結合前 ($T \gtrsim$ 3MeV) はニュートリノ同士で $\nu_\alpha\nu_\beta \leftrightarrow \nu_\alpha\nu_\beta$ によって運動学的平衡なので、$T_{\nu_\alpha} = T_{\nu_\beta}$ は良い近似で成立する。

   脱結合後 ($T \lesssim$ 3MeV) では、ニュートリノ同士の相互作用はほとんど効いてこなくなるが、

ニュートリノ振動による効果が効いてくる [7]。ニュートリノ振動により、各フレーバーに対するニュートリノの分布関数は同じようになる。そのため、近似 1 と 5 を用いると

$$\frac{1}{e^{\mathrm{p}/T_{\nu_\alpha}}+1} \simeq \frac{1}{e^{\mathrm{p}/T_{\nu_\beta}}+1}$$
$$\therefore T_{\nu_\alpha} \simeq T_{\nu_\beta}$$

よって、$T_{\nu_e} = T_{\nu_\mu} = T_{\nu_\tau}$ は良い近似で成立する。

2.4　時間発展方程式の導出

近似 1,3,5,6,7、(2.7) 式より、$N_{\rm eff}$ は次のように書ける。

$$N_{\rm eff} = 3\left(\frac{11}{4}\right)^{4/3}\left(\frac{T_\nu}{T_\gamma}\right)^4_0 \tag{2.22}$$

よって、対消滅の前後にあたる $T_\gamma \sim 10\mathrm{MeV}$ から $T_\gamma \ll m_e$ にわたって T_γ、T_ν の時間発展を調べることで $N_{\rm eff}$ を計算することができる。そのため、ここでは光子とニュートリノの温度の時間発展方程式を導出する。

(2.13) 式を温度の時間発展に書き換えることを考える。エネルギー密度は分布関数の運動量積分で書けるため、近似 5 から $\rho_a = \rho_a(T_a(t))$ と書くことができる。よって

$$\frac{d\rho_a}{dt} = \frac{\partial\rho_a}{\partial T_a}\frac{dT_a}{dt} = -3H(\rho_a + P_a) + \frac{\delta\rho_a}{\delta t} \tag{2.23}$$

を得る。まず、ニュートリノの温度 T_ν に対する発展方程式を導く。(2.23) 式より

$$\frac{d\rho_{\nu_\alpha}}{dt} = \frac{\partial\rho_{\nu_\alpha}}{\partial T_\nu}\frac{dT_\nu}{dt} = -4H\rho_{\nu_\alpha} + \frac{\delta\rho_{\nu_\alpha}}{\delta t} \tag{2.24}$$

を得る。反ニュートリノに対しても同様の式が成立する。

$$\frac{d\rho_{\bar\nu_\alpha}}{dt} = \frac{\partial\rho_{\bar\nu_\alpha}}{\partial T_\nu}\frac{dT_\nu}{dt} = -4H\rho_{\bar\nu_\alpha} + \frac{\delta\rho_{\bar\nu_\alpha}}{\delta t} \tag{2.25}$$

レプトン非対称性は無いとしているため、$T_{\nu_\alpha} = \bar{T}_{\nu_\beta} \equiv T_\nu$ である。よって (2.24,2.25) 式の両辺を足し、全フレーバーに渡って和を取ることで次の T_ν に対する発展方程式を得る。

$$\frac{\partial\rho_\nu}{\partial T_\nu}\frac{dT_\nu}{dt} = -4H\rho_\nu + \frac{\delta\rho_\nu}{\delta t} \tag{2.26}$$

$$\therefore \frac{dT_\nu}{dt} = -\left(\frac{\partial\rho_\nu}{\partial T_\nu}\right)^{-1}\left[4H\rho_\nu - \frac{\delta\rho_\nu}{\delta t}\right] \tag{2.27}$$

ここで、

$$\rho_\nu \equiv \sum_\alpha(\rho_{\nu_\alpha} + \rho_{\bar\nu_\alpha}) \tag{2.28}$$

$$\frac{\delta\rho_\nu}{\delta t} \equiv \sum_\alpha\left(\frac{\delta\rho_{\nu_\alpha}}{\delta t} + \frac{\delta\rho_{\bar\nu_\alpha}}{\delta t}\right) \tag{2.29}$$

である。

次に、光子の温度 T_γ に対する発展方程式を導出する。今存在している粒子は光子、ニュートリノ、電子であるため、(2.17) 式より

$$\frac{d\rho_\gamma}{dt}+\frac{d\rho_e}{dt}+\frac{d\rho_\nu}{dt}=-4H\rho_\gamma-3H(\rho_e+P_e)-4H\rho_\nu \tag{2.30}$$

である。ここで、$\rho_e\equiv\rho_{e^-}+\rho_{e^+}$, $P_e\equiv P_{e^-}+P_{e^+}$ である。近似 6 より $T_\gamma=T_e$ のため、電子の温度 T_γ に対する式について

$$\frac{d\rho_e}{dt}=\frac{\partial\rho_{\nu_\alpha}}{\partial T_\gamma}\frac{dT_\gamma}{dt} \tag{2.31}$$

となる。以上より、次の T_γ に対する方程式を得る。

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial\rho_\gamma}{\partial T_\gamma}+\frac{\partial\rho_e}{\partial T_\gamma}\right)\frac{dT_\gamma}{dt}+\frac{d\rho_\nu}{dt}&=-4H\rho_\gamma-3H(\rho_e+P_e)-4H\rho_\nu\\ \therefore\frac{dT_\gamma}{dt}&=-\left(\frac{\partial\rho_\gamma}{\partial T_\gamma}+\frac{\partial\rho_e}{\partial T_\gamma}\right)^{-1}\left[4H\rho_\gamma+3H(\rho_e+P_e)+\frac{\delta\rho_\nu}{\delta t}\right]\end{aligned} \tag{2.32}$$

2.5　エネルギー・粒子数遷移率

前節で導出した方程式を解くためには、ニュートリノのエネルギー遷移率 $\delta\rho_\nu/\delta t$ を求める必要がある。本節では $\delta\rho_\nu/\delta t$ を計算する。

まず、ニュートリノが関与する反応過程について整理する。このような過程として $\nu_\alpha\bar\nu_\alpha\leftrightarrow e^-e^+$, $\nu_\alpha e^\pm\leftrightarrow\nu_\alpha e^\pm$, $\bar\nu_\alpha e^\pm\leftrightarrow\bar\nu_\alpha e^\pm$, $\nu_\alpha\nu_\beta\leftrightarrow\nu_\alpha\nu_\beta$, $\nu_\alpha\bar\nu_\beta\leftrightarrow\nu_\alpha\bar\nu_\beta$, $\bar\nu_\alpha\bar\nu_\beta\leftrightarrow\bar\nu_\alpha\bar\nu_\beta$ が挙げられる。しかし、(2.20) 式から、同じ熱浴内で起こる過程に対する衝突項は 0 になるため、近似 1,5 より、エネルギー遷移率に関与してくる過程は $\nu_\alpha\bar\nu_\alpha\leftrightarrow e^-e^+$, $\nu_\alpha e^\pm\leftrightarrow\nu_\alpha e^\pm$, $\bar\nu_\alpha e^\pm\leftrightarrow\bar\nu_\alpha e^\pm$ である。よって、各過程に対するエネルギー遷移率を計算すると次のようになる [7]。

$$\left.\frac{\delta\rho_{\nu_\alpha}}{\delta t}\right|_{\nu_\alpha\bar\nu_\alpha\leftrightarrow e^-e^+}=\left.\frac{\delta\rho_{\bar\nu_\alpha}}{\delta t}\right|_{\nu_\alpha\bar\nu_\alpha\leftrightarrow e^-e^+}=\frac{64G_F^2(g_{\alpha L}^2+g_{\alpha R}^2)}{\pi^5}(T_\gamma^9-T_\nu^9) \tag{2.33}$$

$$\left.\frac{\delta\rho_{\nu_\alpha}}{\delta t}\right|_{\nu_\alpha e^\pm\leftrightarrow\nu_\alpha e^\pm}=\left.\frac{\delta\rho_{\bar\nu_\alpha}}{\delta t}\right|_{\bar\nu_\alpha e^\pm\leftrightarrow\bar\nu_\alpha e^\pm}=\frac{112G_F^2(g_{\alpha L}^2+g_{\alpha R}^2)}{\pi^5}T_\gamma^4T_\nu^4(T_\gamma-T_\nu) \tag{2.34}$$

また、後のため粒子数遷移率も記しておく。

$$\left.\frac{\delta n_{\nu_\alpha}}{\delta t}\right|_{\nu_\alpha\bar\nu_\alpha\leftrightarrow e^-e^+}=\left.\frac{\delta n_{\bar\nu_\alpha}}{\delta t}\right|_{\nu_\alpha\bar\nu_\alpha\leftrightarrow e^-e^+}=\frac{16G_F^2(g_{\alpha L}^2+g_{\alpha R}^2)}{\pi^5}(T_\gamma^8-T_\nu^8) \tag{2.35}$$

$$\left.\frac{\delta n_{\nu_\alpha}}{\delta t}\right|_{\nu_\alpha e^\pm\leftrightarrow\nu_\alpha e^\pm}=\left.\frac{\delta n_{\bar\nu_\alpha}}{\delta t}\right|_{\bar\nu_\alpha e^\pm\leftrightarrow\bar\nu_\alpha e^\pm}=0 \tag{2.36}$$

ここで、

$$g_{\alpha L}=\begin{cases}\frac{1}{2}(C_A+C_V+2)=\frac{1}{2}+\sin^2\theta_W & (\alpha=e)\\ \frac{1}{2}(C_V+C_A)=-\frac{1}{2}+\sin^2\theta_W & (\alpha=\mu,\ \tau)\end{cases} \tag{2.37}$$

$$g_{\alpha R}=\frac{1}{2}(C_V-C_A)=\sin^2\theta_W \quad (\alpha=e,\ \mu,\ \tau) \tag{2.38}$$

であり、G_F、θ_W はそれぞれフェルミ結合定数、ワインバーグ角である。従って、全ニュートリノに対する各遷移率は

$$\frac{\delta\rho_\nu}{\delta t} = \sum_\alpha\left(\frac{\delta\rho_{\nu_\alpha}}{\delta t}+\frac{\delta\rho_{\bar{\nu}_\alpha}}{\delta t}\right)=\frac{4G_F^2}{\pi^5}\left[(g_{eL}^2+g_{eR}^2)+2(g_{\mu L}^2+g_{\mu R}^2)\right]F(T_\gamma,T_\nu) \tag{2.39}$$

$$\frac{\delta n_\nu}{\delta t} = \sum_\alpha\left(\frac{\delta n_{\nu_\alpha}}{\delta t}+\frac{\delta n_{\bar{\nu}_\alpha}}{\delta t}\right)=\frac{32G_F^2}{\pi^5}\left[(g_{eL}^2+g_{eR}^2)+2(g_{\mu L}^2+g_{\mu R}^2)\right](T_\gamma^8-T_\nu^8) \tag{2.40}$$

となる。ここで、

$$F(T_1,T_2)=32(T_1^9-T_2^9)+56T_1^4T_2^4(T_1-T_2) \tag{2.41}$$

である。

2.6　数値計算

前節で $\delta\rho_\nu/\delta t$ を求めたことで、(2.27)、(2.32) 式の連立方程式を数値的に解くことができる。今回、微分方程式を解くにあたって、Python の微分方程式の数値解法である odeint を用いて、全ての SM 粒子が熱平衡状態である 10MeV から、電子対消滅が終わった後である $T_\gamma\simeq 10^{-2}$MeV まで解いた。

ニュートリノの脱結合について、一般的な場合と、脱結合が瞬間的に起こる場合の両方について T_γ、T_ν の変化を調べた。瞬間的に脱結合する際のエネルギー遷移率は、

$$\left(\frac{\delta\rho_\nu}{\delta t}\right)_{\mathrm{inst}}=\begin{cases}\left(\frac{\delta\rho_\nu}{\delta t}\right) & (T_\gamma>3\mathrm{MeV})\\ 0 & (T_\gamma\leq 3\mathrm{MeV})\end{cases} \tag{2.42}$$

とすることで計算できる。

図 (2.1) に、標準模型における光子とニュートリノの温度比の時間発展を示す。緑色の線は脱結合が瞬間的に起こらない場合であり、$N_{\mathrm{eff}}=3.043$ となった。これは、厳密な計算 [17] によって得られる値 $N_{\mathrm{eff}}=3.045$ とよく一致している。図 (2.1) は $T_\gamma<1$MeV において上昇が見られる。これは、T_γ の低下に伴って $e^\pm$ が生成されにくくなり、$e^\pm$ の対消滅が優勢になってくるからである。電子対消滅 $e^++e^-\to 2\gamma$ より、電子の持つエントロピーがほとんど光子に流入するため、ニュートリノに対する光子の温度が上昇するからである。

N_{eff} はニュートリノの数を表すが、これは SM においてニュートリノが瞬間的に脱結合したと仮定した場合に $N_{\mathrm{eff}}=3$ となるように定義されている。実際の脱結合は瞬間的には起こらず、また、電子対消滅とニュートリノ脱結合の起こる時間が近いため、電子対消滅が始まったばかりの時間は、まだニュートリノと電子の相互作用がわずかに残っている。これより、電子対消滅で光子に流れるエントロピーの一部が、$e^-e^+\to\nu_\alpha\bar{\nu}_\alpha$ によってニュートリノに流入するため、T_ν が僅かに上昇し、N_{eff} が 3 よりもわずかに大きくなる。

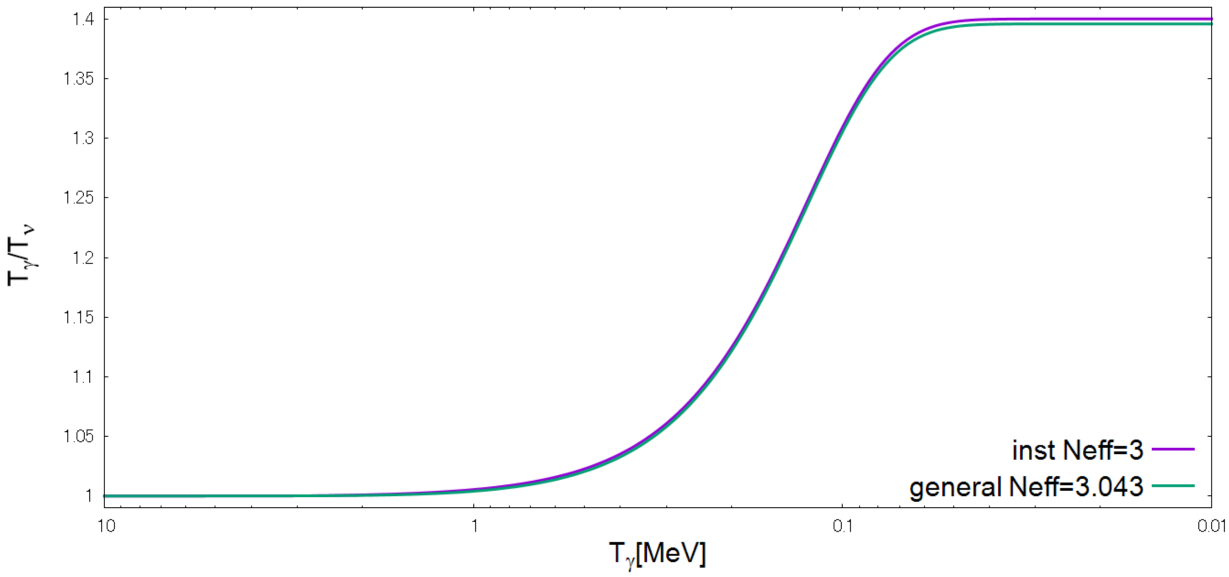


図 2.1　光子とニュートリノの温度比の時間発展の様子。紫の線が、脱結合が瞬間的に起こった場合の線であり、$N_{\mathrm{eff}}=3$ となる。緑色の線は脱結合が瞬間的に起こらない場合の線で、$N_{\mathrm{eff}}=3.043$ となった。

第 3 章

繰り込み可能な $L_\mu - L_\tau$ Model

$L_\mu - L_\tau$ Model は、SM の $U(1)$ 拡張模型の一つである [19–21]。$L_\mu - L_\tau$ Model は anomaly free な数少ない BSM 模型の 1 つであり、$U(1)_{L_\mu - L_\tau}$ ゲージボソンが O(10-100MeV) の質量を持っていれば、ミューオンの異常磁気モーメントや宇宙ニュートリノのフラックスに関する問題である IceCube Gap を説明できることが知られている [23]。従来の $L_\mu - L_\tau$ Model は $U(1)_{L_\mu - L_\tau}$ ゲージボソンの質量を手で入れており、繰り込み不可能な理論であったが、ここでは [5, 24] に基づき、グローバルな $U(1)_L$ 対称性をさらに含む、繰り込み可能な $L_\mu - L_\tau$ Model を考える。このような模型では、$U(1)_L$ 対称性の自発的な破れから生じる pseudo Nambu-Goldstone ボソン (pNGB) として Majoron が生じ得る。$U(1)_{L_\mu - L_\tau}$ ゲージボソンと Majoron は、初期宇宙の膨張に影響を及ぼし、Hubble Tension を説明できることが期待される [9]。

本節では、初期宇宙においてハッブルパラメータに影響を及ぼす $U(1)_{L_\mu - L_\tau}$ ゲージボソン、Majoron と SM 粒子たちの相互作用について説明した後、新粒子たち含む初期宇宙における発展方程式を導出し、それらの計算結果について議論する。

3.1 $U(1)_{L_\mu - L_\tau}$ によるラグランジアン

$U(1)_{L_\mu - L_\tau}$ Mode におけるラグランジアンは、SM のラグランジアンに以下の手続きを行うことで容易に得られる。

$$\partial_\rho \psi \to (\partial_\rho - i g_{\mu-\tau}(L_\mu - L_\tau) Z'_\rho)\psi \tag{3.1}$$

Z'_μ は、新たな対称性 $U(1)_{L_\mu - L_\tau}$ のゲージ場、$g_{\mu-\tau}$ は $U(1)_{L_\mu - L_\tau}$ ゲージ結合定数である。L_μ、L_τ は、それぞれ μ、τ 種のレプトン数を表す。$L_\mu - L_\tau$ は、場 ψ に応じて次のように対応する。

$$L_\mu - L_\tau = \begin{cases} 1 & (\psi = l_\mu,\ \mu_R) \\ -1 & (\psi = l_\tau,\ \tau_R) \end{cases}$$

以上より、SM に加えて $U(1)_{L_\mu - L_\tau}$ の対称性を持つラグランジアンは以下のようになる。

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{SM} - \frac{1}{4} Z'^{\rho\sigma} Z'_{\rho\sigma} + g_{\mu-\tau} Z'_\rho J^\rho_{\mu-\tau} \tag{3.2}$$

ここで、$Z'_{\rho\sigma}$ は Z' 場の強度であり、$J^\rho_{\mu-\tau}$ は $\mu - \tau$ カレントである。

$$Z'_{\rho\sigma} = \partial_\rho Z'_\sigma - \partial_\sigma Z'_\rho \tag{3.3}$$

$$J^\rho_{\mu-\tau} = \bar{\mu}\gamma^\rho \mu + \bar{\nu}_\mu \gamma^\rho P_L \nu_\mu - \bar{\tau}\gamma^\rho \tau - \bar{\nu}_\tau \gamma^\rho P_L \nu_\tau \tag{3.4}$$

ラグランジアン (3.2) は質量項を持たないため、$U(1)_{L_\mu - L_\tau}$ ゲージボソン Z' に質量を持たせるために質量項を加える。これより、$L_\mu - L_\tau$ Model におけるラグランジアンは以下になる。

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{SM} - \frac{1}{4} Z'^{\rho\sigma} Z'_{\rho\sigma} + \frac{1}{2} m_{Z'}^2 Z'^{\rho} Z'_{\rho} + g_{\mu-\tau} Z'_\rho J^\rho_{\mu-\tau} \tag{3.5}$$

電子と Z' の有効結合

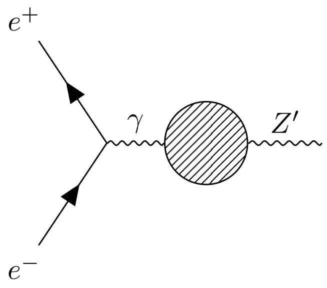
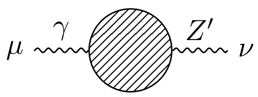


図 3.1　Z' と電子が 1-loop を介して結合するダイアグラム

前節で、$L_\mu - L_\tau$ の値について整理した。これより、Z' は μ、τ 種の粒子と結合し、tree level では電子とは結合しないことがわかる。しかし、図 (3.1) のように、1-loop を考えると電子と結合できるようになる。図 (3.1) のダイアグラムにおける有効結合を求めるにあたり、まず Z' と光子が 1-loop で結合するダイアグラムについて調べておく。図 (3.1) のループを飛ぶ粒子は μ 粒子と τ 粒子だけなので



$$\begin{aligned} &= \sum_{l=\mu,\tau} (-ie)(ig_{\mu\tau} Q_l)(-1) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \mathrm{tr}\left[\gamma^\mu \frac{i}{\not{k} - m_l} \gamma^\nu \frac{i}{\not{k} + \not{q} - m_l}\right] \\ &= i(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu)\Pi(q^2) \end{aligned} \tag{3.6}$$

であるので、これを用いて

$$\begin{aligned} \epsilon \equiv \Pi(q^2) &= \sum_{l=\mu,\tau} \frac{8 g_{\mu-\tau} Q_l e}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx\, x(1-x) \frac{\Gamma(2-d/2)}{[m_l^2 - x(1-x)q^2]^{2-d/2}} \\ &= \sum_{l=\mu,\tau} \frac{Q_l g_{\mu-\tau} e}{2\pi^2} \int_0^1 dx\, x(1-x) \left(\frac{2}{\varepsilon} - \log[m_l^2 - x(1-x)q^2] - \gamma + \log 4\pi\right) \\ &\xrightarrow{\varepsilon \to 0} \frac{g_{\mu-\tau} e}{2\pi^2} \int_0^1 dx\, x(1-x) \log\left[\frac{m_\tau^2 - x(1-x)q^2}{m_\mu^2 - x(1-x)q^2}\right] \end{aligned} \tag{3.7}$$

となる。ここで、Q_l は $L_\mu - L_\tau$ 電荷で

$$Q_l = \begin{cases} 1 & (l = \mu) \\ -1 & (l = \tau) \end{cases} \tag{3.8}$$

であり、発散する部分は符号の違いにより相殺する。

本論文で着目する宇宙の温度が $\mathcal{O}(10\mathrm{MeV})$ 程度であることに注意すると、

$$\begin{aligned} \epsilon &\simeq \frac{g_{\mu-\tau} e}{2\pi^2} \int_0^1 dx\, x(1-x) \log \frac{m_\tau^2}{m_\mu^2} \\ &= \frac{g_{\mu-\tau} e}{12\pi^2} \log \frac{m_\tau^2}{m_\mu^2} \simeq \frac{g_{\mu-\tau}}{70} \end{aligned} \tag{3.9}$$

と書くことができる。

以上より、Z' と電子が 1-loop を通じて結合するダイアグラムの有効結合を $g_{\rm loop}$ とすると

$$-ig_{\rm loop}\gamma^\nu = -ie\gamma^\rho \frac{-ig_{\rho\mu}}{q^2} i(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu)\epsilon = -i\epsilon e\gamma^\nu \tag{3.10}$$

となる。これは、ラグランジアン (3.5) に次の新たな相互作用 $L_{\rm loop}$ が追加されたことと等価である。

$$\mathcal{L}_{\rm loop} = -\epsilon e Z'_\mu \bar{e}\gamma^\mu e \tag{3.11}$$

このことから、$m_Z > 2m_e$ の場合、Z' が $e^\pm$ に崩壊できることがわかる。$Z' \to e^+e^-$ の崩壊幅 $\Gamma_{Z'\to e^+e^-}$ を計算すると

$$\Gamma_{Z'\to e^-e^+} = \frac{(\epsilon e)^2 m_{Z'}}{12\pi}\left(1 + \frac{2m_e^2}{m_{Z'}^2}\right)\sqrt{1 - \frac{4m_e^2}{m_{Z'}^2}} \tag{3.12}$$

である。また、Z' はニュートリノにも崩壊できるため、$Z' \to \nu_\alpha + \bar{\nu}_\alpha$ の崩壊幅も計算すると

$$\Gamma_{Z'\to\nu_{\alpha'}\bar{\nu}_{\alpha'}} = \frac{g_{\mu-\tau}^2 m_{Z'}}{24\pi} \tag{3.13}$$

よって、$Z' \to e^+e^-$ への Branching Ratio は

$$\begin{aligned}
{\rm Br}_{Z'\to e^-e^+} &= \frac{\Gamma_{Z'\to e^-e^+}}{\Gamma_{Z'\to e^-e^+} + \Gamma_{Z'\to\nu_\mu\bar{\nu}_\mu} + \Gamma_{Z'\to\nu_\tau\bar{\nu}_\tau}} && (3.14)\\
&\simeq \left(\frac{e\epsilon}{g_{\mu-\tau}}\right)^2 = (\frac{e}{70})^2 && (3.15)\\
&\simeq 2\times 10^{-5} && (3.16)
\end{aligned}$$

ここで、$m_e \ll m_{Z'} \ll m_\mu$ を仮定した。この結果は、ゲージ結合定数 $g_{\mu-\tau}$ に依らないものになっている。

3.2 $g_\mu - 2$ anomaly

電子とミュー粒子の磁気モーメントは、標準模型の発展に関して重大な役割を持っている。磁気モーメントは粒子のスピンと次の関係を持つ。

$$\boldsymbol{\mu}_l = -g_l\left(\frac{e}{2m_l}\right)\mathbf{s}, \quad (l = e,\ \mu) \tag{3.17}$$

g_l は g 因子と呼ばれる。磁場中のディラック方程式において非相対論的極限を取ると、g 因子は厳密に 2 となることが理論からは予言されているが、実際の実験値はわずかに 2 からずれている。これは量子効果によるものであり、この 2 からのずれは異常磁気モーメントとよばれ、次で定義されている。

$$a_l = \frac{g_l - 2}{2} \tag{3.18}$$

電子とミュー粒子の磁気モーメントは、電磁場との相互作用を示すダイアグラムを計算することで求められる。評価するダイアグラムを図 (3.2) に示す。

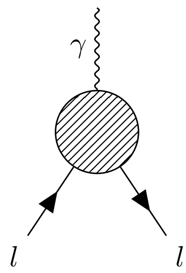


図 3.2　異常磁気モーメントの計算 ($l = e,\ \mu$).

電子の異常磁気モーメントは

$$a_e(SM) = 1159652181.606(229)(11)(12) \times\ 10^{-12} \tag{3.19}$$

$$a_e(Exp) = 1159652180.73(28) \times\ 10^{-12} \tag{3.20}$$

$$a_e(Exp) - a_e(SM) = -\ 0.88(36) \times\ 10^{-12} \tag{3.21}$$

であり、実験値と SM による理論値とでかなりの精度で一致していることがわかる [25]。実験値の 3 つの括弧については、1 つ目が微細構造定数 α からくる不確かさ、2 つ目が $\mathcal{O}(\alpha^5)$ からくる不確かさ、3 つ目がハドロンの寄与からくる不確かさである。

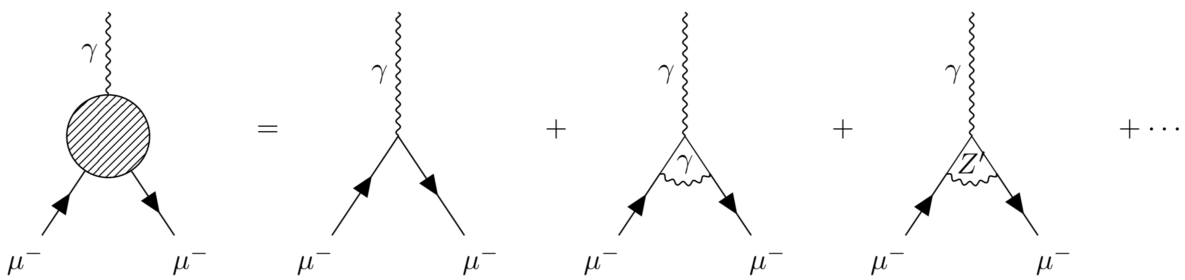
一方で、ミュー粒子の異常磁気モーメントは、

$$a_\mu(SM) = 116591810(43) \times\ 10^{-11} \tag{3.22}$$

$$a_\mu(Exp) = 116592061(41) \times\ 10^{-11} \tag{3.23}$$

$$a_\mu(Exp) - a_\mu(SM) = (251 \pm 59) \times\ 10^{-11} \tag{3.24}$$

であり、実験値と理論値とで 4.2σ の乖離がある [26]。この問題は $g_\mu - 2$ anomaly と呼ばれており、SM では説明できない現象である。この問題は、電子には作用せずミュー粒子に対して作用するような新たな相互作用を SM に加えることで解決できる可能性がある。本論文で用いる $L_\mu - L_\tau$ Model は、このような模型の 1 つである。$L_\mu - L_\tau$ Model を用いると、電磁場とミュー粒子の相互作用を表すダイアグラムに、Z' を含むものが追加され、磁気モーメントの理論値を大きくすることができる。



(3.25)

新たに追加された 1-loop ダイアグラムによる異常磁気モーメントへの寄与を $\Delta a_\mu^{Z'}$ とすると

$$\Delta a_\mu^{Z'} = \frac{g_{\mu-\tau}^2}{8\pi^2}\int_0^1 dx \frac{2m_\mu^2 x(1-x)^2}{m_\mu^2(1-x)^2 + m_{Z'}^2 x} \simeq 1.3 \times 10^{-10}\left(\frac{g_{\mu-\tau}}{10^{-4}}\right)^2 \tag{3.26}$$

となる。最右辺では $m_{Z'} \ll m_\mu$ とした。これより、$\Delta a_\mu^{Z'}$ によって (3.24) 式を相殺するためには、$g_{\mu-\tau} \simeq 5 \times\ 10^{-4}$ 程度であればよいことがわかる。(3.26) によって $g_\mu - 2$ anomaly を解決できる Z' のパラメータ空間を図 (3.3) に示す。

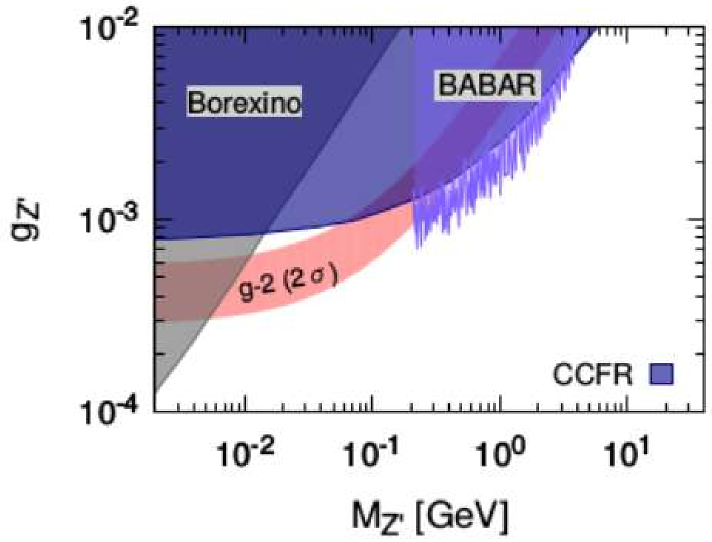


図 3.3　Z' のパラメータ空間 [22]。青とグレーの部分は CCFR、Borexino、BABAR によって除外されている。赤い部分は Z' による 1-loop の寄与で $g_\mu - 2$ を 2σ で説明できる領域を表す。最新の結果 [26] を踏まえると、赤い部分は下側へわずかに狭まると考えられる。

3.3　Majoron の相互作用

$U(1)_L$ 対称性の自発的な破れにより、Majoron(ϕ) と呼ばれる pNGB が生じる。ここで生じる Majoron は、レプトン数 2 を持つ。$U(1)_L$ がわずかに破れている場合、Majoron はわずかな質量を持つ。Majoron の質量項は次式となる。

$$\mathcal{L}^{\phi}_{\mathrm{mass}} = -\frac{1}{2} m_\phi^2 \phi^2 \tag{3.27}$$

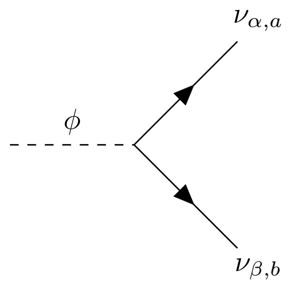
また、Majoron とニュートリノの相互作用は次で記述される。

$$\mathcal{L}^{\phi}_{\mathrm{int}} = h_{\alpha\beta} \bar{\nu}_{L,\alpha} \nu^c_{L,\beta} \phi + h.c. \tag{3.28}$$

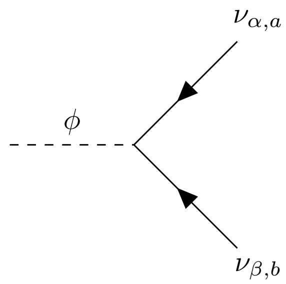
ここで $h_{\alpha\beta}$ はカップリング定数であり、$h_{\alpha\beta} = h_{\beta\alpha}$ である。また、C は荷電共役行列である。更に、(3.28) 式を射影演算子を用いて書き直すことで、$\phi \to \nu_\alpha \nu_\beta$ のファインマン則を確認できる。

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= h_{\alpha\beta} \bar{\nu}_\alpha P_R C \bar{\nu}_\beta^T \phi + h^*_{\alpha\beta} \nu_\alpha^T C P_L \nu_\beta \phi \\ &= \sum_\alpha h_{\alpha\alpha} \bar{\nu}_\alpha P_R C \bar{\nu}_\alpha^T \phi + 2 \sum_{\alpha<\beta} h_{\alpha\beta} \bar{\nu}_\alpha P_R C \bar{\nu}_\beta^T \phi + \sum_\alpha h^*_{\alpha\alpha} \nu_\alpha^T C P_L \nu_\alpha \phi + 2 \sum_{\alpha<\beta} h^*_{\alpha\beta} \nu_\alpha^T C P_L \nu_\beta \phi\end{aligned} \tag{3.29}$$

よって



$$= 2ih_{\alpha\beta}(P_R C)_{ab},$$



$$= 2ih^*_{\alpha\beta}(CP_L)_{ab} \tag{3.30}$$

$\alpha = \beta$ であっても、同じ縮約の取り方が 2 通りあるため 2 倍が付く。これより、$\phi \to \nu_\alpha \nu_\beta$、$\phi \to \bar{\nu}_\alpha \bar{\nu}_\beta$ の崩壊幅は

$$\Gamma_{\phi \to \nu_\alpha \nu_\beta} = \Gamma_{\phi \to \bar{\nu}_\alpha \bar{\nu}_\beta} = \frac{|g_{\alpha\beta}|^2 m_\phi}{4\pi S_{\alpha\beta}} \tag{3.31}$$

となる。$S_{\alpha\beta}$ は対称因子であり

$$S_{\alpha\beta} = 2(\alpha = \beta),\ \ S_{\alpha\beta} = 1(\alpha \neq \beta) \tag{3.32}$$

である。

3.4　時間発展方程式とエネルギー・粒子数遷移率

Z' と Majoron を含む発展方程式を導出するにあたり、幾つかの仮定を用いる。

仮定

1. $g_\mu - 2$ anomaly を説明するため、Z' のパラメータとして $g_{\mu-\tau} \sim 10^{-4} - 10^{-3}$、$m_{Z'} \sim 10$MeV の領域を採用する。
2. ニュートリノと Majoron のカップリング $h_{\alpha\beta}$ について、BBN [9]、S1987A [27,28]、KamLAND-Zen [29] の制約を踏まえて $|h_{\alpha\beta}| \leq 10^{-7}$ とする。これにより、Majoron が関与する散乱過程 $\phi\nu_\alpha \leftrightarrow \phi\nu_\beta$ は無視できる。よって、Majoron が関与する過程として、$\phi \to \nu_\alpha \nu_\beta$、$\phi \to \bar{\nu}_\alpha \bar{\nu}_\beta$ だけを考えればよい。
3. Majoron は $e^\pm$ 対消滅後に、inverse decay $\nu_\alpha \nu_\beta \to \phi$ によって生成されるとする。これにより、SM 粒子以外には $e^\pm$ 対消滅前には Z' のみが、対消滅後は Majoron のみが存在することになる。これらを同時に取り扱うことは次章で議論する。

3.4.1　$e^\pm$ 対消滅前の発展方程式

$e^\pm$ 対消滅後に存在する粒子は、光子、ニュートリノ、電子、Z' である。これらの温度の発展方程式を導出する。

近似

発展方程式を導出、解くにあたり、幾つかの近似を用いる。ここで計算する領域は SM の時と同じであるため、2 章の近似に加えて Z' に関する近似を追加する。

z1. Z' はボースアインシュタイン分布に従う、また、$T_{Z'} = T_\nu$ が成立する。
　$g_{\mu-\tau} > 10^{-5}$ に対して $Z'\nu_{\mu,\tau} \leftrightarrow Z'\nu_{\mu,\tau}$ が運動学的平衡であるため、Z' は良い近似で熱平衡分布関数に従う。また、この過程から $T_{Z'} = T_\nu$ であることがわかる。

z2. Z' の化学ポテンシャル $\mu_{Z'}$ を無視する。
　Z' はニュートリノと $Z' \leftrightarrow \nu_{\mu,\tau}\bar{\nu}_{\mu,\tau}$ によって化学平衡であるため、

$$\mu_{Z'} = 2\mu_\nu \tag{3.33}$$

　更に 2 章の近似 5 より $\mu_\nu = 0$ なので $\mu_{Z'} = 0$ とできる。

発展方程式

Z' のエネルギー密度に対する関係式は、SM 粒子と同様に、(2.23) 式から得られる。

$$\frac{d\rho_{Z'}}{dt} = -3H(\rho_{Z'} + P_{Z'}) + \frac{\delta\rho_{Z'}}{\delta t} \tag{3.34}$$

また、$T_{Z'} = T_\nu$ より

$$\frac{d\rho_{Z'}}{dt} = \frac{\partial\rho_{Z'}}{\partial T_\nu}\frac{dT_\nu}{dt} \tag{3.35}$$

これより、(2.26) 式と (3.34) の両辺を足すことで、ν に対する方程式が得られる。

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial\rho_\nu}{\partial T_\nu} + \frac{\partial\rho_{Z'}}{\partial T_\nu}\right)\frac{dT_\nu}{dt} &= -4H\rho_\nu - 3H(\rho_{Z'} + P_{Z'}) + \frac{\delta\rho_\nu}{\delta t} + \frac{\delta\rho_{Z'}}{\delta t}\\ \therefore \frac{dT_\nu}{dt} &= -\left(\frac{\partial\rho_\nu}{\partial T_\nu} + \frac{\partial\rho_{Z'}}{\partial T_\nu}\right)^{-1}\left[4H\rho_\nu + 3H(\rho_{Z'} + P_{Z'}) - \frac{\delta\rho_\nu}{\delta t} - \frac{\delta\rho_{Z'}}{\delta t}\right]\end{aligned} \tag{3.36}$$

T_γ に対する方程式は、存在する粒子が光子、電子、ニュートリノ、Z' だけであることから、(2.17) 式より得られる。

$$\frac{d\rho_\gamma}{dt} + \frac{d\rho_e}{dt} + \frac{d\rho_\nu}{dt} + \frac{d\rho_{Z'}}{dt} = -4H\rho_\gamma - 3H(\rho_e + P_e) - 4H\rho_\nu - 3H(\rho_{Z'} + P_{Z'})$$

$T_\gamma = T_\nu$ より、T_γ の時間発展は

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial\rho_\gamma}{\partial T_\gamma} + \frac{\partial\rho_e}{\partial T_\gamma}\right)\frac{dT_\gamma}{dt} &= -4H\rho_\gamma - 3H(\rho_e + P_e) - \frac{\delta\rho_\nu}{\delta t} - \frac{\delta\rho_{Z'}}{\delta t}\\ \therefore \frac{dT_\gamma}{dt} &= -\left(\frac{\partial\rho_\gamma}{\partial T_\gamma} + \frac{\partial\rho_e}{\partial T_\gamma}\right)^{-1}\left[4H\rho_\gamma + 3H(\rho_e + P_e) + \frac{\delta\rho_\nu}{\delta t} + \frac{\delta\rho_{Z'}}{\delta t}\right]\end{aligned} \tag{3.37}$$

となる。

遷移率

Z' が存在する際の発展方程式を導出したが、それらを解くためには $\delta\rho_\nu/\delta t$ 及び $\delta\rho_{Z'}/\delta t$ を求めなければならない。本節ではこれらを求めていく。Z' と SM 粒子による反応過程を図 (3.4) にまとめておく。

まず、Z' が外線粒子として存在する過程を考える。同じ熱浴中で起こる過程は衝突項に効いてこないため、考える反応は $Z'\gamma \leftrightarrow e^+e^-$, $Z'e^\pm \leftrightarrow \gamma e^\pm$, $Z' \leftrightarrow e^+e^-$ となる。光子が関与する過程は厳密に考えることは難しいが、各過程の振幅について

$$|\mathcal{M}_{Z'\leftrightarrow e^+e^-}|^2 \sim (\epsilon g_{\mu-\tau})^2 \tag{3.38}$$

$$|\mathcal{M}_{Z'\gamma\leftrightarrow e^+e^-}|^2 \; |\mathcal{M}_{Z'e^\pm\leftrightarrow\gamma e^\pm}|^2 \sim \alpha(\epsilon g_{\mu-\tau})^2 \tag{3.39}$$

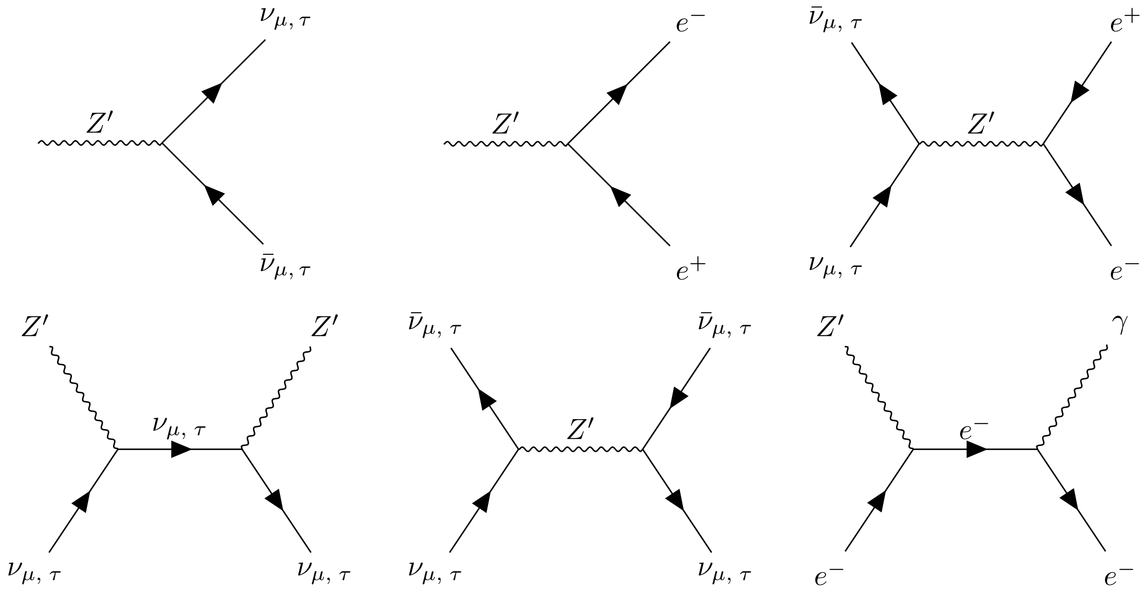


図 3.4　Z' が関与する崩壊、散乱過程。

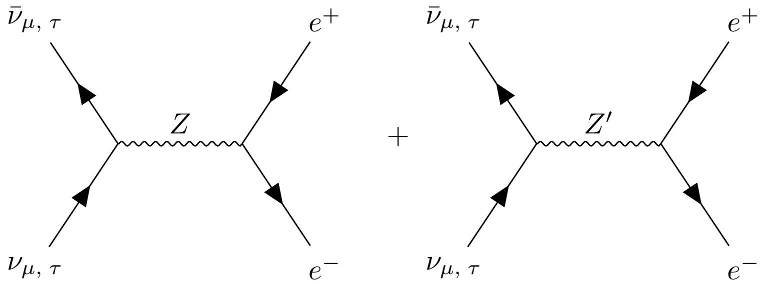
と概算でき、光子を含むものはそうでないものより 2 桁小さいため、本論文では無視する。

従って、$Z' \leftrightarrow e^+e^-$ に対するエネルギー遷移率は、Appendix(C) より次のように書ける。

$$\frac{\delta\rho_{Z'}}{\delta t} = \frac{3m_{Z'}^3}{2\pi^2}\left[T_\gamma K_2\left(\frac{m_{Z'}}{T_\gamma}\right) - T_\nu K_2\left(\frac{m_{Z'}}{T_\nu}\right)\right]\Gamma_{Z'\to e^+e^-} \tag{3.40}$$

次に、Z' が中間状態として関与する場合を考える。同じ熱浴中での過程は効かないため、衝突項に関与する過程は $\nu_\alpha\bar{\nu}_\alpha \leftrightarrow e^-e^+$ $(\alpha = \mu, \tau)$ だけである。よって、

$$i\mathcal{M}_{\nu_{\mu,\tau}\bar{\nu}_{\mu,\tau}\leftrightarrow e^-e^+} =$$



$$\begin{aligned} &\simeq -i\frac{2G_F}{\sqrt{2}}\bar{u}(k)\gamma^\mu(C_V - C_A\gamma^5)v(k')\,\bar{v}(p')\gamma_\mu P_L u(p) \\ &+ i(L_\mu - L_\tau)\frac{g_{\mu-\tau}\epsilon e}{m_{Z'}^2}\bar{u}(k)\gamma^\mu v(k')\,\bar{v}(p')\gamma_\mu P_L u(p) \end{aligned} \tag{3.41}$$

となる。ここで、(3.41) 式の 1 項目と 2 項目は次の置き換えによって関係づけることができる。

$$G_F \to -L_{\alpha'}\frac{\sqrt{2}g_{\mu-\tau}\epsilon e}{2m_{Z'}^2}, \quad C_V \to 1, \quad C_A \to 0 \tag{3.42}$$

よって、(2.33) 式に同様の置き換えを行うことで、$\delta\rho_{\nu_\alpha}/\delta t$ は容易に得られる。

$$\frac{\delta\rho_{\nu_{\alpha'}}}{\delta t} = \left.\frac{\delta\rho_{\nu_{\alpha'}}}{\delta t}\right|_{SM} + \frac{(g_{\mu-\tau}\epsilon e)^2}{\pi^5 m_{Z'}^4}F(T_\gamma, T_\nu) + \ (cross\ term) \tag{3.43}$$

cross term は、Z ボソンと Z' ボソンの干渉項からくる寄与である。

従って

$$\frac{\delta\rho_\nu}{\delta t} = \sum_\alpha\left(\frac{\delta\rho_{\nu_\alpha}}{\delta t} + \frac{\delta\rho_{\bar\nu_\alpha}}{\delta t}\right) = 2\sum_\alpha \frac{\delta\rho_{\nu_\alpha}}{\delta t} = \left.\frac{\delta\rho_\nu}{\delta t}\right|_{SM} + \frac{2(g_{\mu-\tau}\epsilon e)^2}{\pi^5 m_{Z'}^4}F(T_\gamma, T_\nu) \tag{3.44}$$

となる。

3.4.2　$e^\pm$ 対消滅後の発展方程式

$e^\pm$ 対消滅後に存在する粒子は、光子、ニュートリノ、Majoron である。これらの温度と化学ポテンシャルの発展方程式を導出する。

近似

発展方程式を導出、解くにあたり、[6] に基づき幾つかの近似を用いる。$e^\pm$ 対消滅後は対消滅前と異なる機構となるため、改めて近似をまとめておく。

p1. 全ての粒子は熱平衡分布関数に従う。

ニュートリノと Majoron については非平衡な含むため、一般には熱平衡分布で近似することはできない。厳密に解くためには (2.8) 式を解かなければならないが、これは困難である。そこで、計算を容易にするため、ここではニュートリノと Majoron は熱平衡分布に従うと仮定する。このような近似を行っても、厳密に解いた場合と比較してそれほどかわらないことが報告されている [6]。光子は、$T \sim 0.3\text{eV}$ までは電子と $\gamma e^- \leftrightarrow \gamma e^-$ によって運動学的平衡なので、良い近似で熱平衡分布に従う。

p2. 衝突項積分の中ではボルツマン分布を用いる。

2 章の近似 2 と同様である

p3. ニュートリノの質量を無視する。

2 章の近似 3 と同様である。

p4. $T_{\nu_\alpha} = T_{\bar\nu_\beta} = T_\nu$、$\mu_{\nu_\alpha} = \mu_{\bar\nu_\beta} = \mu_\nu$ が成立する。

いま、宇宙初期にレプトン非対称性は無いとしているため、$T_{\nu_\alpha} = T_{\bar\nu_\alpha}$、$\mu_{\nu_\alpha} = \mu_{\bar\nu_\alpha}$ が成立する。$T \lesssim 3\text{MeV}$ ではニュートリノ振動が効いてくる。ニュートリノ振動は、各フレーバーに対するニュートリノの分布関数が全て同じになるように働くため、近似 p1 を踏まえると

$$\frac{1}{e^{(\mathrm{p}-\mu_{\nu_\alpha})/T_{\nu_\alpha}}+1} \simeq \frac{1}{e^{(\mathrm{p}-\mu_{\nu_\beta})/T_{\nu_\beta}}+1}$$

となる。これより、$T_{\nu_\alpha} = T_{\bar\nu_\beta} = T_\nu$、$\mu_{\nu_\alpha} = \mu_{\bar\nu_\beta} = \mu_\nu$ は良い近似で従う。

発展方程式

対消滅後に存在する粒子は光子、ニュートリノ、Majoron のみである。AppendixA を用いて、これらの温度と化学ポテンシャルに対する発展方程式を導く。

(A.10)(A.11) 式から、Majoron に対する発展方程式は次で与えられる。

$$\frac{dT_\phi}{dt} = -\frac{1}{\det J_\phi}\left[-3H\left((\rho_\phi + P_\phi)\frac{\partial n_\phi}{\partial\mu_\phi} - n_\phi\frac{\partial\rho_\phi}{\partial\mu_\phi}\right) + \frac{\partial n_\phi}{\partial\mu_\phi}\frac{\delta\rho_\phi}{\delta t} - \frac{\partial\rho_\phi}{\partial\mu_\phi}\frac{\delta n_\phi}{\delta t}\right] \tag{3.45}$$

$$\frac{d\mu_\phi}{dt} = \frac{1}{\det J_\phi}\left[-3H\left((\rho_\phi + P_\phi)\frac{\partial n_\phi}{\partial T_\phi} - n_\phi\frac{\partial\rho_\phi}{\partial T_\phi}\right) + \frac{\partial n_\phi}{\partial T_\phi}\frac{\delta\rho_\phi}{\delta t} - \frac{\partial\rho_\phi}{\partial T_\phi}\frac{\delta n_\phi}{\delta t}\right] \tag{3.46}$$

同様に (A.10) 式をニュートリノに対して適用することで、各フレーバーに関して次が得られる。

$$\frac{dT_{\nu_\alpha}}{dt} = -\frac{1}{\det J_{\nu_\alpha}}\left[-3H\left((\rho_{\nu_\alpha}+P_{\nu_\alpha})\frac{\partial n_{\nu_\alpha}}{\partial \mu_\nu} - n_{\nu_\alpha}\frac{\partial \rho_{\nu_\alpha}}{\partial \mu_\nu}\right) + \frac{\partial n_{\nu_\alpha}}{\partial \mu_\nu}\frac{\delta \rho_{\nu_\alpha}}{\delta t} - \frac{\partial \rho_{\nu_\alpha}}{\partial \mu_\nu}\frac{\delta n_{\nu_\alpha}}{\delta t}\right] \tag{3.47}$$

$$\frac{dT_{\bar\nu_\alpha}}{dt} = -\frac{1}{\det J_{\bar\nu_\alpha}}\left[-3H\left((\rho_{\bar\nu_\alpha}+P_{\bar\nu_\alpha})\frac{\partial n_{\bar\nu_\alpha}}{\partial \mu_\nu} - n_{\bar\nu_\alpha}\frac{\partial \rho_{\bar\nu_\alpha}}{\partial \mu_\nu}\right) + \frac{\partial n_{\bar\nu_\alpha}}{\partial \mu_\nu}\frac{\delta \rho_{\bar\nu_\alpha}}{\delta t} - \frac{\partial \rho_{\bar\nu_\alpha}}{\partial \mu_\nu}\frac{\delta n_{\bar\nu_\alpha}}{\delta t}\right] \tag{3.48}$$

近似 p4 より、ν_α と $\bar\nu_\beta$ は同じ分布関数となるため、各フレーバーに対するエネルギー密度、数密度、圧力は、全ニュートリノに対するエネルギー密度 ρ_ν、数密度 n_ν、圧力 P_ν を用いて

$$n_{\nu_\alpha} = n_{\bar\nu_\alpha} = \frac{1}{6}n_\nu \tag{3.49}$$

$$\rho_{\nu_\alpha} = \rho_{\bar\nu_\alpha} = \frac{1}{6}\rho_\nu \tag{3.50}$$

$$P_{\nu_\alpha} = P_{\bar\nu_\alpha} = \frac{1}{6}P_\nu \tag{3.51}$$

と書くことができるため、(3.47) 式と (3.48) 式の両辺を足し、全フレーバーに関して和を取ることで、次の全ニュートリノに対する温度の発展方程式を得る。

$$\frac{dT_\nu}{dt} = -\frac{1}{\det J_\nu}\left[-3H\left((\rho_\nu+P_\nu)\frac{\partial n_\nu}{\partial \mu_\nu} - n_\nu\frac{\partial \rho_\nu}{\partial \mu_\nu}\right) + \frac{\partial n_\nu}{\partial \mu_\nu}\frac{\delta \rho_\nu}{\delta t} - \frac{\partial \rho_\nu}{\partial \mu_\nu}\frac{\delta n_\nu}{\delta t}\right] \tag{3.52}$$

ここで、

$$\frac{\delta n_\nu}{\delta t} = \sum_\alpha\left(\frac{\delta n_{\nu_\alpha}}{\delta t} + \frac{\delta n_{\bar\nu_\alpha}}{\delta t}\right) \tag{3.53}$$

$$\frac{\delta \rho_\nu}{\delta t} = \sum_\alpha\left(\frac{\delta \rho_{\nu_\alpha}}{\delta t} + \frac{\delta \rho_{\bar\nu_\alpha}}{\delta t}\right) \tag{3.54}$$

である。同様の手順により、全ニュートリノの化学ポテンシャル μ_ν に対する発展方程式を得られる。

$$\frac{d\mu_\nu}{dt} = \frac{1}{\det J_\nu}\left[-3H\left((\rho_\nu+P_\nu)\frac{\partial n_\nu}{\partial T_\nu} - n_\nu\frac{\partial \rho_\nu}{\partial T_\nu}\right) + \frac{\partial n_\nu}{\partial T_\nu}\frac{\delta \rho_\nu}{\delta t} - \frac{\partial \rho_\nu}{\partial T_\nu}\frac{\delta n_\nu}{\delta t}\right] \tag{3.55}$$

光子に対しては (2.17) 式から

$$\frac{d\rho_\gamma}{dt} + \frac{d\rho_\nu}{dt} + \frac{d\rho_\phi}{dt} = -4H\rho_\gamma - 4H\rho_\nu - 3H(\rho_\phi + P_\phi) \tag{3.56}$$

T_γ を含むものは光子だけなので

$$\frac{\partial \rho_\gamma}{\partial T_\gamma}\frac{dT_\gamma}{dt} + \frac{d\rho_\nu}{dt} + \frac{d\rho_\phi}{dt} = -4H\rho_\gamma - 4H\rho_\nu - 3H(\rho_\phi + P_\phi)$$

$$\therefore \frac{dT_\gamma}{dt} = -\left(\frac{\partial \rho_\gamma}{\partial T_\gamma}\right)^{-1}\left[4H\rho_\gamma + \frac{\delta \rho_\nu}{\delta t} + \frac{\delta \rho_\phi}{\delta t}\right] \tag{3.57}$$

となる。

遷移率

導出した方程式を解くには、各遷移率を計算する必要がある。まず、Majoron が関与する過程 $\phi \leftrightarrow \nu_\alpha\nu_\beta$, $\phi \leftrightarrow \bar\nu_\alpha\bar\nu_\beta$ については、AppendixC より

$$\left.\frac{\delta n_\phi}{\delta t}\right|_{\phi\leftrightarrow\nu_\alpha\nu_\beta} = \left.\frac{\delta n_\phi}{\delta t}\right|_{\phi\leftrightarrow\bar\nu_\alpha\bar\nu_\beta} = \frac{m_\phi^2\Gamma_{\phi\to\nu_\alpha\nu_\beta}}{2\pi^2}\left[T_\nu e^{2\mu_\nu/T_\nu}K_1\left(\frac{m_\phi}{T_\nu}\right) - T_\phi e^{\mu_\phi/T_\phi}K_1\left(\frac{m_\phi}{T_\phi}\right)\right] \tag{3.58}$$

$$\left.\frac{\delta \rho_\phi}{\delta t}\right|_{\phi\leftrightarrow\nu_\alpha\nu_\beta} = \left.\frac{\delta \rho_\phi}{\delta t}\right|_{\phi\leftrightarrow\bar\nu_\alpha\bar\nu_\beta} = \frac{m_\phi^3\Gamma_{\phi\to\nu_\alpha\nu_\beta}}{2\pi^2}\left[T_\nu e^{2\mu_\nu/T_\nu}K_2\left(\frac{m_\phi}{T_\nu}\right) - T_\phi e^{\mu_\phi/T_\phi}K_2\left(\frac{m_\phi}{T_\phi}\right)\right] \tag{3.59}$$

となる。これをニュートリノのフレーバーに渡って和を取ることで、Majoron の全反応過程に対する遷移率が得られる。

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta\rho_\phi}{\delta t} &= \sum_{\alpha\le\beta}\left(\left.\frac{\delta\rho_\phi}{\delta t}\right|_{\phi\leftrightarrow\nu_\alpha\nu_\beta} + \left.\frac{\delta\rho_\phi}{\delta t}\right|_{\phi\leftrightarrow\bar\nu_\alpha\bar\nu_\beta}\right) \\
&= \frac{m_\phi^3\Gamma_\phi}{2\pi^2}\left[T_\nu e^{2\mu_\nu/T_\nu}K_2\left(\frac{m_\phi}{T_\nu}\right) - T_\phi e^{\mu_\phi/T_\phi}K_2\left(\frac{m_\phi}{T_\phi}\right)\right] \qquad (3.60)\\
\frac{\delta n_\phi}{\delta t} &= \sum_{\alpha\le\beta}\left(\left.\frac{\delta n_\phi}{\delta t}\right|_{\phi\leftrightarrow\nu_\alpha\nu_\beta} + \left.\frac{\delta n_\phi}{\delta t}\right|_{\phi\leftrightarrow\bar\nu_\alpha\bar\nu_\beta}\right) \\
&= \frac{m_\phi^2\Gamma_\phi}{2\pi^2}\left[T_\nu e^{2\mu_\nu/T_\nu}K_1\left(\frac{m_\phi}{T_\nu}\right) - T_\phi e^{\mu_\phi/T_\phi}K_1\left(\frac{m_\phi}{T_\phi}\right)\right] \qquad (3.61)
\end{aligned}
$$

Γ_ϕ は ϕ は Majoron の全崩壊幅であり、

$$
\begin{aligned}
\Gamma_\phi &\equiv \sum_{\alpha\le\beta}(\Gamma_{\phi\to\nu_\alpha\nu_\beta} + \Gamma_{\phi\to\bar\nu_\alpha\bar\nu_\beta}) \\
&= \frac{m_\phi\lambda^2}{4\pi} \qquad (3.62)\\
\lambda^2 &\equiv \mathrm{tr}(h^\dagger h) \qquad (3.63)
\end{aligned}
$$

である。

ニュートリノに対する遷移率は、エネルギーと粒子数の保存則から、Majoron に対する遷移率を用いて表すことができる。現在、ニュートリノの質量を無視しているため、物理はニュートリノの基底に依存しない。そのため、$h_{\alpha\beta}$ は対角成分しか持たないと仮定できる。よって、エネルギー保存則より

$$
\left.\frac{\delta\rho_{\nu_\alpha}}{\delta t}\right|_{\phi\leftrightarrow\nu_\alpha\nu_\alpha} = -\left.\frac{\delta\rho_\phi}{\delta t}\right|_{\phi\leftrightarrow\nu_\alpha\nu_\alpha} \qquad (3.64)
$$

が成り立つ。これは、過程 $\phi\to\nu_\alpha\nu_\alpha$1 回あたりで、Majoron のエネルギーが全て ν_α のエネルギーになることを表している。フレーバーについて和を取ることで

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta\rho_\nu}{\delta t} &= \sum_\alpha\left(\left.\frac{\delta\rho_{\nu_\alpha}}{\delta t}\right|_{\phi\leftrightarrow\nu_\alpha\nu_\alpha} + \left.\frac{\delta\rho_{\bar\nu_\alpha}}{\delta t}\right|_{\phi\leftrightarrow\bar\nu_\alpha\bar\nu_\alpha}\right) \\
&= -2\sum_\alpha\left.\frac{\delta\rho_\phi}{\delta t}\right|_{\phi\leftrightarrow\nu_\alpha\nu_\alpha} \\
&= -\frac{\delta\rho_\phi}{\delta t} \qquad (3.65)
\end{aligned}
$$

となる。また、粒子数保存則から

$$
\left.\frac{\delta n_{\nu_\alpha}}{\delta t}\right|_{\phi\leftrightarrow\nu_\alpha\nu_\alpha} = -2\left.\frac{\delta n_\phi}{\delta t}\right|_{\phi\leftrightarrow\nu_\alpha\nu_\alpha} \qquad (3.66)
$$

が成り立つ。これは $\phi\to\nu_\alpha\nu_\alpha$ において ν_α の数が Majoron の 2 倍あることから理解できる。フレー

バーについて和をとると

$$\begin{aligned}\frac{\delta n_\nu}{\delta t} &= \sum_\alpha \left(\left.\frac{\delta n_{\nu_\alpha}}{\delta t}\right|_{\phi\leftrightarrow\nu_\alpha\nu_\alpha} + \left.\frac{\delta n_{\bar{\nu}_\alpha}}{\delta t}\right|_{\phi\leftrightarrow\bar{\nu}_\alpha\bar{\nu}_\alpha} \right) \\ &= -2\sum_\alpha \left.\frac{\delta n_\phi}{\delta t}\right|_{\phi\leftrightarrow\nu_\alpha\nu_\alpha} \times 2 \\ &= -2\frac{\delta n_\phi}{\delta t} \end{aligned} \tag{3.67}$$

となる。以上より、ニュートリノの遷移率を、Majoron を用いて表すことができた。
なお、この結果を踏まえると (3.57) 式は次のようになる。

$$\frac{dT_\gamma}{dt} = -HT_\gamma \tag{3.68}$$

3.5　数値計算

3.5.1　初期条件と積分範囲

$e^\pm$ 対消滅前

$e^\pm$ 対消滅前は (3.36)、(3.37) の組を解くことになる。全ての粒子が熱平衡状態にある状況から $e^\pm$ 対消滅が終わるまで解くため、$T_\gamma = T_\nu = 20\text{MeV}$ から $T_\gamma \sim 10^{-2}\text{MeV}$ まで解くこととする。

$e^\pm$ 対消滅後

$e^\pm$ 対消滅後に解く方程式の組は (3.45)、(3.46)、(3.52)、(3.55)、(3.68) 式である。ここでは、$e^\pm$ 対消滅後で Majoron がほとんど存在していない領域から解くことにする。Majoron は過程 $\nu\nu \to \phi$ によって生成されるため、まず $\nu\nu \to \phi$ がどの時期に効いてくるかを調べる。それには Majoron の生成過程に対する反応率の熱平均 $\langle\Gamma_{\nu\nu\to\phi}\rangle$ と H の大小を比べればよい。$\langle\Gamma_{\nu\nu\to\phi}\rangle$ と宇宙初期における H はそれぞれ

$$\langle\Gamma_{\nu\nu\to\phi}\rangle \equiv \frac{1}{n_\nu}\left.\frac{\delta n_\phi}{\delta t}\right|_{\nu\nu\to\phi} = \frac{\Gamma_\phi}{12}\left(\frac{m_\phi}{T_\nu}\right)^2 K_1\left(\frac{m_\phi}{T_\nu}\right) \tag{3.69}$$

$$H(T_\nu) \simeq 1.66 g_\star^{1/2}\frac{T_\nu^2}{m_{\text{Pl}}} = H(T_\nu = m_\phi/3)\,\frac{9T_\nu^2}{m_\phi^2} \tag{3.70}$$

で与えられるため、両者の大小は

$$\frac{\langle\Gamma_{\nu\nu\to\phi}\rangle}{H} = \frac{1}{81K_1(3)}\Gamma_{\text{eff}}\left(\frac{m_\phi}{T_\nu}\right)^4 K_1\left(\frac{m_\phi}{T_\nu}\right) \tag{3.71}$$

となる。ここで、$g_\star$ は有効自由度である。また、Γ_{eff} は過程 $\nu\nu \to \phi$ の有効反応率であり、次で定義される。

$$\Gamma_{\text{eff}} \equiv \left.\frac{\langle\Gamma_{\nu\nu\to\phi}\rangle}{H}\right|_{T_\nu = m_\phi/3} \simeq \left(\frac{\lambda}{4\times10^{-12}}\right)^2\left(\frac{\text{keV}}{m_\phi}\right) \tag{3.72}$$

Majoron がほとんどいないところから方程式を解く。これは、Majoron が少しだけ存在するような領域では初期条件の設定の仕様がないからである。生成過程 $\nu\nu \to \phi$ は、$\langle\Gamma_{\nu\nu\to\phi}\rangle/H \lesssim 1$ であってもニュートリノが多く存在するため起こり得る。そのため、ほとんどいないという条件を課すには、

$\langle\Gamma_{\nu\nu\to\phi}\rangle/H \ll 1$ とする必要がある。この条件として、ここでは $\langle\Gamma_{\nu\nu\to\phi}\rangle/H < 10^{-4}$ とする。これより

$$\frac{1}{81K_1(3)}\Gamma_{\rm eff}\left(\frac{m_\phi}{T_\nu}\right)^4 K_1\left(\frac{m_\phi}{T_\nu}\right) < 10^{-4}$$
$$\therefore \frac{T_\nu}{m_\phi} > \left(\frac{\Gamma_{\rm eff}}{81K_1(3)\times 10^{-4}}\right)^{1/3} \simeq 10\Gamma_{\rm eff}^{1/3} \tag{3.73}$$

が得られる。ここで、今見たい領域は $T_\nu/m_\phi > 1$ であるため、変形ベッセル関数に関する近似式 $K_1(x) \sim 1/x (x < 1)$ を用いた。$\Gamma_{\rm eff}$ は大きくても 10^3 であるとすると、$T_\nu \geq 100m_\phi$ であればよいので、初期条件として

$$T_\nu = 100m_\phi \tag{3.74}$$

を採用することにする。T_γ/T_ν に関しては、$e^\pm$ 対消滅後までの結果を用いる。ほかの初期条件に対しては、$\rho_\phi/\rho_\nu < 10^{-12}$ を満たすように決定する。$T_\nu = 100m_\phi$ では Majoron は十分相対論的であるため質量を無視できる。よって、多重対数関数 Li を用いて

$$\frac{\rho_\phi}{\rho_\nu} = \frac{1}{6}\left(\frac{T_\phi}{T_\nu}\right)^4 \frac{{\rm Li}_4(e^{\mu_\phi/T_\phi})}{-{\rm Li}_4(-e^{\mu_\nu/T_\nu})} \tag{3.75}$$
$$= \frac{4}{21}\left(\frac{T_\phi}{T_\nu}\right)^4\left(1+\frac{\zeta(3)}{\zeta(4)}\frac{\mu_\phi}{T_\phi} - \frac{6}{7}\frac{\zeta(3)}{\zeta(4)}\frac{\mu_\nu}{T_\nu} + \cdots\right) < 10^{-12} \tag{3.76}$$

となる。これより

$$(\frac{T_\phi}{T_\nu})^4 \lesssim 10^{-12}, \quad \left|\frac{\mu_\phi}{T_\phi}\right| < 1, \quad \left|\frac{\mu_\nu}{T_\nu}\right| < 1 \tag{3.77}$$

である必要がある。これより、μ_ϕ に対する初期条件が得られる。

$$\left|\frac{\mu_\phi}{T_\nu}\right| = \left|\frac{\mu_\phi}{T_\phi}\right|\frac{T_\phi}{T_\nu} < \frac{T_\phi}{T_\nu} \lesssim 10^{-3} \tag{3.78}$$

また、Majoron はボソンなので $m_\phi \geq \mu_\phi$ である。そのため

$$\frac{\mu_\phi}{T_\nu} < \frac{m_\phi}{T_\nu} = 10^{-2} \tag{3.79}$$

を満たす必要がある。ここで、Majoron がほとんど存在せずボースアインシュタイン凝縮は起こり得ないため、等号は除いた。
以上を踏まえ、ここでは [5,6] に従って

$$\frac{T_\phi}{T_\nu} = 10^{-3}, \ \frac{\mu_\nu}{T_\nu} = -10^{-4}, \ \frac{\mu_\phi}{T_\nu} = -10^{-5} \tag{3.80}$$

のように取ることにする。方程式は、Majoron が完全に崩壊していなくなったと見なせる $\rho_\phi/\rho_\nu < 10^{-6}$ まで解くことにする。

3.5.2　パラメータ

Z' のパラメータ領域は、$g_\mu - 2$ を説明できる領域として、$m_{Z'} \simeq 10$MeV、$g_{\mu-\tau} \gtrsim 10^{-5}$ を採用する。

また、先に述べたが、この計算は $e^\pm$ 対消滅後に Majoron が生成される条件で計算される。この条件は、以下を満たすようなパラメータの下で実現される。

1. Majoron の生成は $e^\pm$ 対消滅後に最も活発になる。
2. $e^\pm$ 対消滅の直後 ($T_\gamma \simeq 10^{-2}$MeV) では、Majoron の生成はそれほど起きていない。

これらを数式で表すと次のようになる。

$$T_\nu \simeq m_\phi/3 < 10^{-2}\mathrm{MeV}, \quad \left.\frac{\langle \Gamma_{\nu\nu\to\phi}\rangle}{H}\right|_{T_\nu = 10^{-2}\mathrm{MeV}} < 1 \tag{3.81}$$

ここで、$\langle \Gamma_{\nu\nu\to\phi}\rangle/H$ が $T_\nu \simeq m_\phi/3$ でピークを持つことを用いた。

3.6　結果

ここでは、導出した方程式をここまでの諸条件の下で解いた結果を示す。N_{eff} については、$e^\pm$ 対消滅前後で異なる取り扱いをしているため、次のように書くと便利である。

$$N_{\mathrm{eff}} = N'_{\mathrm{eff}} + \Delta N'_{\mathrm{eff}} \tag{3.82}$$

N'_{eff} は、$e^\pm$ 対消滅後で Majoron 生成前の領域で、T_γ/T_ν が平坦になった箇所でのニュートリノ有効数であり、。

$$N'_{\mathrm{eff}} \equiv 3\left(\frac{11}{4}\right)^{4/3}\left(\frac{T_\nu}{T_\gamma}\right)^4\Bigg|_{T_\gamma \simeq 10^{-2}\mathrm{MeV}} \tag{3.83}$$

となる。$\Delta N'_{\mathrm{eff}}$ は $e^\pm$ 対消滅後に Majoron が生成されることによるニュートリノ有効数の変化を表す。

$T_\gamma \geq 10^{-2}$

$T_\gamma \geq 10^{-2}$ における計算結果を図 (3.5) に示す。新たに Z' が加わったことで、SM の時よりも N_{eff} が

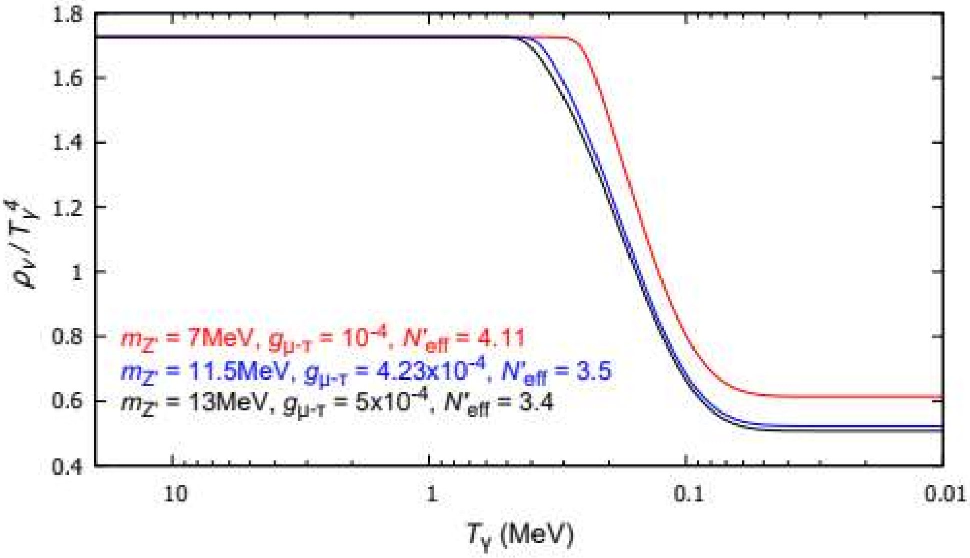


図 3.5　Z' を含む時の、ニュートリノのエネルギー密度が時間発展する様子 [5]。

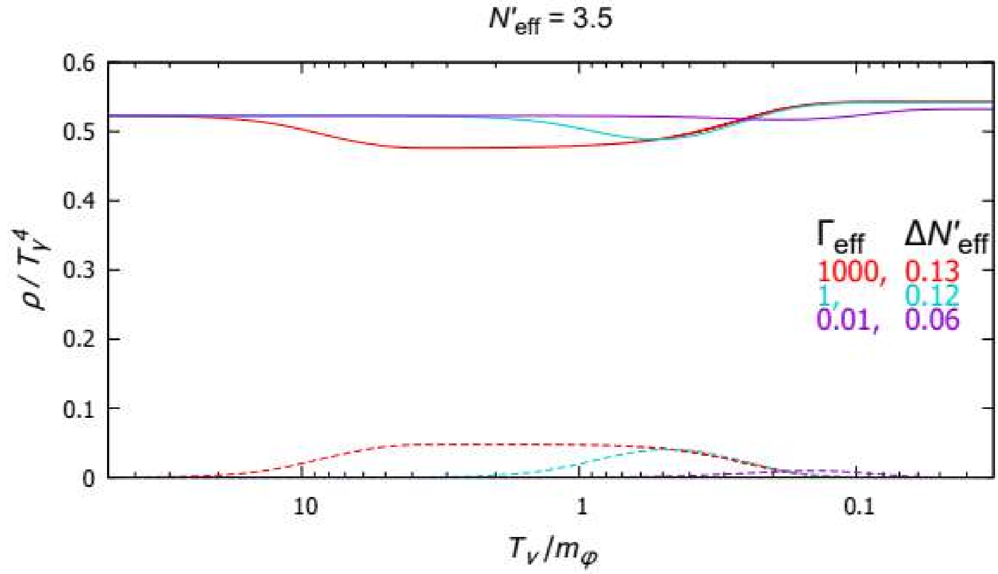


図 3.6　ϕ を含む時の、ニュートリノのエネルギー密度 (実線) と ϕ のエネルギー密度 (点線) が時間発展する様子 [5]。

大きくなっていることがわかる。これは、次のように説明できる。最初は熱平衡にあった Z' が、温度の低下に伴い、$T_\gamma \simeq m_{Z'}/3$ となると Z' はニュートリノに崩壊し始める。これにより生じたニュートリノは電子に転化され、減少した Z' は電子対生成により補填される。つまり、$Z' \to \nu\bar{\nu} \to e^- e^+ \to Z'$ という過程が生じており、光子の熱浴とニュートリノの熱浴が平衡状態となっている。対消滅前の平坦な部分ではこのような過程が生じている。$T_\gamma \simeq m_e$ となると電子対消滅が進み始め、電子の数が急激に減少するため、電子から Z' を生成できなくなるため、先述の平衡は崩れる。SM と同様に、電子のエントロピーはほとんど光子に流入するため、T_γ が上昇するが、$Z' \to \nu\bar{\nu}$ によってニュートリノにもエントロピーが流入するため、T_ν も上昇する。その結果、T_γ/T_ν は SM と比較して小さくなり、$N_{\rm eff}$ が上昇する。

$T_\gamma \leq 10^{-2}$

図 (3.6) は $N'_{\rm eff} = 3.5$ におけるニュートリノと Majoron のエネルギー密度の変化を表している。図 (3.6) より、$\Gamma_{\rm eff} \geq 1$ の場合、Majoron は $T_\nu \simeq m_\phi$ において $\nu\nu \to \phi$ によって majoron を生成し始めニュートリノの数を減らし、両者で次第に熱平衡化することがわかる。この時、$\nu\nu \leftrightarrow \phi$ によるエネルギーの遷移は無視できるほど小さいため、両者のエネルギー密度は次のボルツマン方程式によって決定される。

$$\frac{d\rho_\nu}{dt} + 4H\rho_\nu = 0 \tag{3.84}$$

$$\frac{d\rho_\phi}{dt} + 3H(\rho_\phi + P_\phi) = 0 \tag{3.85}$$

$T_\nu \lesssim m_\phi$ において、Majoron は非相対論的になり、$\rho_\phi \gg P_\phi$ となる。これより、エネルギー密度はス

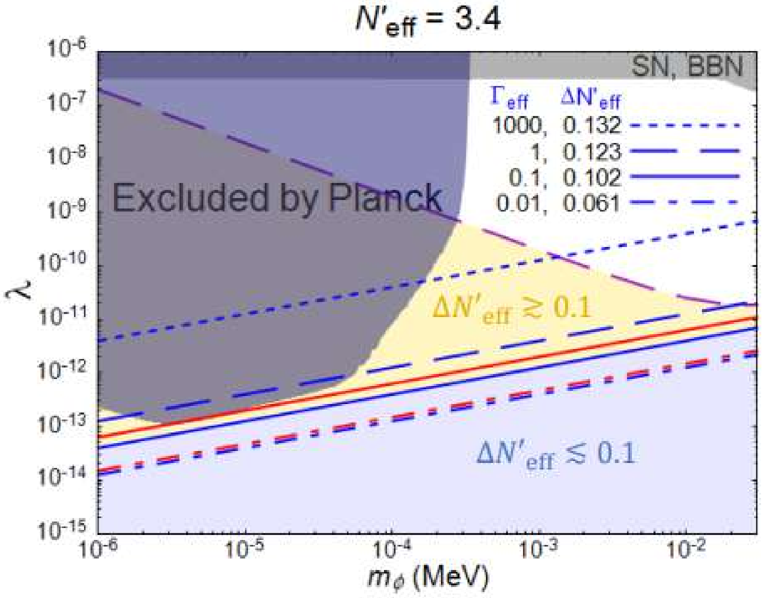


図 3.7　$N'_{\rm eff} \simeq 3.4$ と固定した際の、ϕ のパラメータ空間に課される制限 [5]。左上の青い影の領域は Planck2018 により除外されている [9]。上部の灰色の領域は、SN1987A [27,28] と BBN [9] によって除外されている。

ケール因子 R に次のように依存するようになる。

$$\rho_\nu \propto R^{-4}, \rho_\phi \propto R^{-3} \tag{3.86}$$

これより、宇宙膨張によるエネルギー密度の減少率は Majoron の方が小さいことがわかる。$T_\nu \simeq m_\phi/3$ で Majoron はニュートリノに崩壊し始める。個の方かによって生成されるニュートリノは、既に存在するニュートリノに比べて大きなエネルギーを持つため、全体的なニュートリノのエネルギー密度は少し増加し、その結果 $N_{\rm eff}$ がわずかに増加する仕組みとなっている。

$N_{\rm eff}$ に対しては、Planck2018 の結果から、$N_{\rm eff} = 3.27 \pm 0.15$、68% C.L. [15] と制限が付いている。そのため、$N'_{\rm eff}$ と $\Delta N'_{\rm eff}$ のどちらかをあるパラメータに固定することで、もう一方に制限を課すことができる。ここでは $N'_{\rm eff} \simeq 3.4$ と固定し、Majoron のパラメータ空間に制限を課す場合と、$\delta N'_{\rm eff} \simeq 0.1$ と固定し、Z' のパラメータ空間に制限を課す場合を議論する。

$N'_{\rm eff} \simeq 3.4$ の場合

図 (3.7) に、$N'_{\rm eff} = 3.4$ を実現する Z' が存在する場合に対する Majoron のパラメータ空間を示す。Majoron の質量がの下限が 10^{-6}MeV となっているのは、ニュートリノの質量を無視しているからであり、これを下回ると近似 p3 が破綻するからである。上限が 3×10^{-2}MeV であることは、(3.81) 式による。青い領域は $\Delta N'_{\rm eff} \lesssim 0.1$ となる領域であり、$g_\mu - 2$ anomaly を解決できるような Z' が存在する際に、同時に Hubble Tension を解決できる領域を表している ($3.4 \lesssim N_{\rm eff} \lesssim 3.5$)。また、黄色い領域は $\Delta N'_{\rm eff} \gtrsim 0.1$ となる領域であり、$N_{\rm eff} \gtrsim 3.5$ のため Hubble Tension を説明できない部分である。この領域は 2σ 以上で除外される。

$\delta N'_{\rm eff} \simeq 0.1$ の場合

図 (3.8) に $g_\mu - 2$ anomaly を説明できる周辺の Z' のパラメータ空間を示す。$3.2 \lesssim N'_{\rm eff} \lesssim 3.5$ の領域は Z' のみで Hubble Tension を緩和できる領域である [8]。$3.1 \lesssim N'_{\rm eff} \lesssim 3.4$ の領域は、$\delta N'_{\rm eff} \simeq 0.1$ を実現する Majoron によって Hubble Tension を緩和できる領域である。この場合、Hubble Tension を

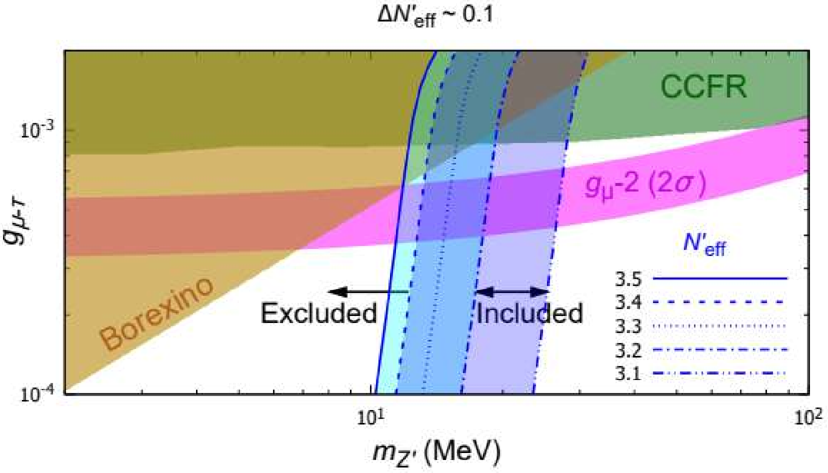


図 3.8　$\delta N'_{\rm eff} \simeq 0.1$ と固定した際の、Z' のパラメータ空間に課される制限 [5]。茶色と緑色の領域は、Borexino と CCFR によって除外されている。[22]

緩和できるパラメータ領域が、$m_{Z'}$ が大きくなる方向へわずかにシフトしていることがわかる。これにより、Hubble Tension と $g_\mu - 2$ anomaly を同時に説明できるパラメータ領域が $m_{Z'} \simeq 13 - 26$MeV, $g_{\mu-\tau} \simeq (3.6 - 7) \times 10^{-4}$ となる。$N'_{\rm eff} = 3.4$ の線より左側は $N_{\rm eff} \geq 3.5$ となる領域であり、Hubble Tension を説明できなくなる。この領域は、2σ 以上で除外されている。

第 4 章

繰り込み可能な $L_\mu - L_\tau$ Model における $Z' - \phi$ 散乱

前章では Z' boson が $e^\pm$ 対消滅後にほとんど無くなり、かつ Majoron が $e^\pm$ 対消滅より後 ($T_\gamma \lesssim 10^{-2}$MeV) に生成される状況を考えた。そのため、(3.81) 式、及び図 (3.7) に見られるように $m_\phi < 30$keV のパラメータ領域にのみ制限を付けることができた。本章では $m_\phi \geq 30$keV の領域での制限も考えるため、Majoron が $e^\pm$ 対消滅より前に生成され、Z' と Majoron が共存する、より一般的な状況を考える。ただし、Majoron の質量については $m_\phi < m_{Z'}$ とする。

Majoron が $e^\pm$ 対消滅前に生成されることにより、Z' と Majoron が関与する反応過程が生じる。前章では Majoron の崩壊のみを取り入れたが、それらに加えて、$Z'\nu_{\mu,\tau} \leftrightarrow \phi\bar{\nu}_\alpha, Z'\bar{\nu}_{\mu,\tau} \leftrightarrow \phi\nu_\alpha, Z'\phi \leftrightarrow \nu_{\mu,\tau}\nu_\alpha, Z'\phi \leftrightarrow \bar{\nu}_{\mu,\tau}\bar{\nu}_\alpha$ のような散乱過程が生じる (図 4.1)。そのため、各粒子に関するエネルギー、粒子数の遷移率には散乱による寄与が追加される。本章では、これらの散乱過程によるエネルギー、粒子数の遷移率の計算について説明する。

4.1 近似

初期宇宙における熱力学量を記述する方程式を簡略化するため、以下に示す近似を用いる。前章と比べて大きな変更点はないが、改めて近似とその理由を簡単にまとめておく。

1. 全ての粒子は熱平衡分布関数に従う。
   2 章の近似 1、3 章の近似 z1、p1 と同様である。
2. 衝突項積分の計算では、ボルツマン分布を用いる。
   2 章の近似 2 と同様である。
3. ニュートリノの質量を無視する。
   2 章の近似 3 と同様である。
4. 弱い相互作用過程に対する衝突項計算において、電子の質量を無視する。
   2 章の近似 4 と同様である。
5. $T_\gamma = T_{e^-} = T_{e^+}$ が成立する。
   2 章の近似 6 と同様である。
6. $T_{Z'} = T_{\nu_{\mu,\tau}}$ が成立する。
   3 章の近似 z1 と同様である。

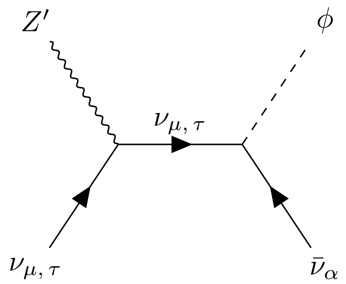


図 4.1　ϕ と Z' の関与する反応過程.

7. $T_{\nu_\alpha} = T_{\bar{\nu_\beta}} = T_\nu,\ \mu_{\nu_\alpha} = \mu_{\bar{\nu_\beta}} = \mu_\nu$ が成り立つ。
   3 章の近似 p4 と同様である。
8. 光子、電子の化学ポテンシャルを無視する。
   2 章の近似 5 と同様である。

4.2　時間発展方程式の導出

前節の近似を用いて、初期宇宙における温度と化学ポテンシャルの時間発展方程式を求める。Majoron については、前節と同じ表式となる。

Majoron に対する温度の時間発展方程式は

$$\frac{dT_\phi}{dt} = -\frac{1}{\det J_\phi}\left[-3H\left((\rho_\phi + P_\phi)\frac{\partial n_\phi}{\partial \mu_\phi} - n_\phi\frac{\partial \rho_\phi}{\partial \mu_\phi}\right) + \frac{\partial n_\phi}{\partial \mu_\phi}\frac{\delta \rho_\phi}{\delta t} - \frac{\partial \rho_\phi}{\partial \mu_\phi}\frac{\delta n_\phi}{\delta t}\right] \tag{4.1}$$

$$\frac{d\mu_\phi}{dt} = \frac{1}{\det J_\phi}\left[-3H\left((\rho_\phi + P_\phi)\frac{\partial n_\phi}{\partial T_\phi} - n_\phi\frac{\partial \rho_\phi}{\partial T_\phi}\right) + \frac{\partial n_\phi}{\partial T_\phi}\frac{\delta \rho_\phi}{\delta t} - \frac{\partial \rho_\phi}{\partial T_\phi}\frac{\delta n_\phi}{\delta t}\right] \tag{4.2}$$

である。

全ニュートリノの温度に関しては、前章と同様の操作から次式を得る。

$$\frac{dT_\nu}{dt} = -\frac{1}{\det J_\nu}\left[-3H\left((\rho_\nu + P_\nu)\frac{\partial n_\nu}{\partial \mu_\nu} - n_\nu\frac{\partial \rho_\nu}{\partial \mu_\nu}\right) + \frac{\partial n_\nu}{\partial \mu_\nu}\frac{\delta \rho_\nu}{\delta t} - \frac{\partial \rho_\nu}{\partial \mu_\nu}\frac{\delta n_\nu}{\delta t}\right] \tag{4.3}$$

ここで、

$$\frac{\delta \rho_\nu}{\delta t} = \sum_\alpha\left(\frac{\delta \rho_{\nu_\alpha}}{\delta t} + \frac{\delta \rho_{\bar{\nu}_\alpha}}{\delta t}\right) = \left.\frac{\delta \rho_\nu}{\delta t}\right|_{SM} + \left.\frac{\delta \rho_\nu}{\delta t}\right|_{Z',\phi} \tag{4.4}$$

$$\frac{\delta n_\nu}{\delta t} = \sum_\alpha\left(\frac{\delta n_{\nu_\alpha}}{\delta t} + \frac{\delta n_{\bar{\nu}_\alpha}}{\delta t}\right) = \left.\frac{\delta n_\nu}{\delta t}\right|_{SM} + \left.\frac{\delta n_\nu}{\delta t}\right|_{Z',\phi} \tag{4.5}$$

である。ニュートリノに関する衝突項は、SM 粒子による寄与と、Z'、Majoron を含む寄与から構成されている。

また、近似 6 から $T_{Z'} = T_\nu$ が成り立つため、Z' の温度に対する式にもニュートリノへの寄与が含まれる。よって (A.10) 式を用いると

$$\frac{dT_\nu}{dt} = -\frac{1}{\det J_{Z'}}\left[-3H\left((\rho_{Z'} + P_{Z'})\frac{\partial n_{Z'}}{\partial \mu_{Z'}} - n_{Z'}\frac{\partial \rho_{Z'}}{\partial \mu_{Z'}}\right) + \frac{\partial n_{Z'}}{\partial \mu'_Z}\frac{\delta \rho_{Z'}}{\delta t} - \frac{\partial \rho_{Z'}}{\partial \mu'_Z}\frac{\delta n_{Z'}}{\delta t}\right] \tag{4.6}$$

を得る。ここで、

$$\det J_{Z'} = \left(\frac{\partial n_{Z'}}{\partial T_\nu}\frac{\partial \rho_{Z'}}{\partial \mu_{Z'}} - \frac{\partial n_{Z'}}{\partial \mu_{Z'}}\frac{\partial \rho_{Z'}}{\partial T_\nu}\right) \tag{4.7}$$

である。(4.3) 式と (4.6) 式の両辺を足すことで、次の T_ν に対する時間発展方程式が得られる。

$$\begin{aligned}\frac{dT_\nu}{dt} = -\frac{1}{\det J_\nu + \det J_{Z'}}\Bigg[&-3H\left((\rho_\nu + P_\nu)\frac{\partial n_\nu}{\partial \mu_\nu} - n_\nu\frac{\partial \rho_\nu}{\partial \mu_\nu} + (\rho_{Z'} + P_{Z'})\frac{\partial n_{Z'}}{\partial \mu_{Z'}} - n_{Z'}\frac{\partial \rho_{Z'}}{\partial \mu_{Z'}}\right)\\ &+\frac{\partial n_\nu}{\partial \mu_\nu}\frac{\delta \rho_\nu}{\delta t} - \frac{\partial \rho_\nu}{\partial \mu_\nu}\frac{\delta n_\nu}{\delta t} + \frac{\partial n_{Z'}}{\partial \mu_{Z'}}\frac{\delta \rho_{Z'}}{\delta t} - \frac{\partial \rho_{Z'}}{\partial \mu_{Z'}}\frac{\delta n_{Z'}}{\delta t}\Bigg]\end{aligned} \tag{4.8}$$

ニュートリノと Z' の化学ポテンシャルの取り扱いは注意が必要である。$T \simeq 3\mathrm{MeV}$ でニュートリノは脱結合するため、$T < 3\mathrm{MeV}$ において、化学平衡 $Z' \leftrightarrow \nu_{\mu,\tau}\bar{\nu}_{\mu,\tau}$ は切れることになる。故に、μ_ν と $\mu_{Z'}$ は別個に扱う必要がある。よって、全ニュートリノの化学ポテンシャルに対する発展方程式は前章と同様の表式となる。

$$\frac{d\mu_\nu}{dt} = \frac{1}{\det J_\nu}\left[-3H\left((\rho_\nu + P_\nu)\frac{\partial n_\nu}{\partial T_\nu} - n_\nu\frac{\partial \rho_\nu}{\partial T_\nu}\right) + \frac{\partial n_\nu}{\partial T_\nu}\frac{\delta \rho_\nu}{\delta t} - \frac{\partial \rho_\nu}{\partial T_\nu}\frac{\delta n_\nu}{\delta t}\right] \tag{4.9}$$

を得る。また、Z' に対して (A.11) 式を適用すると、

$$\frac{d\mu_{Z'}}{dt} = \frac{1}{\det J_{Z'}}\left[-3H\left((\rho_{Z'} + P_{Z'})\frac{\partial n_{Z'}}{\partial T_\nu} - n_{Z'}\frac{\partial \rho_{Z'}}{\partial T_\nu}\right) + \frac{\partial n_{Z'}}{\partial T_\nu}\frac{\delta \rho_{Z'}}{\delta t} - \frac{\partial \rho_{Z'}}{\partial T_\nu}\frac{\delta n_{Z'}}{\delta t}\right] \tag{4.10}$$

を得る。

T_γ に対する時間発展方程式は、(2.17) 式と近似 5 から得られる。

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \rho_\gamma}{\partial T_\gamma} + \frac{\partial \rho_e}{\partial T_\gamma}\right)\frac{dT_\gamma}{dt} &= -\frac{d\rho_\nu}{dt} - \frac{d\rho_{Z'}}{dt} - \frac{d\rho_\phi}{dt} - 4H\rho_\gamma - 3H(\rho_e + P_e) - 4H\rho_\nu\\ &\qquad - 3H(\rho_{Z'} + P_{Z'}) - 3H(\rho_\phi + P_\phi)\\ &= -4H\rho_\gamma - 3H(\rho_e + P_e) - \frac{\delta \rho_\nu}{\delta t} - \frac{\delta \rho_{Z'}}{\delta t} - \frac{\delta \rho_\phi}{\delta t}\\ \therefore \frac{dT_\gamma}{dt} &= -\left(\frac{\partial \rho_\gamma}{\partial T_\gamma} + \frac{\partial \rho_e}{\partial T_\gamma}\right)^{-1}\left[4H\rho_\gamma + 3H(\rho_e + P_e) + \frac{\delta \rho_\nu}{\delta t} + \frac{\delta \rho_{Z'}}{\delta t} + \frac{\delta \rho_\phi}{\delta t}\right]\end{aligned} \tag{4.11}$$

以上より、計算する方程式の組は、(4.4),(4.5),(4.8),(4.9),(4.10),(4.11) 式である。

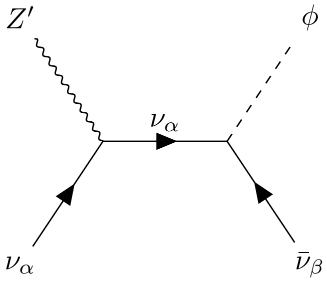
4.3　不変振幅

各遷移率を求めるにあたり、不変振幅の 2 乗が必要である。本節では各散乱過程における不変振幅 $\mathcal{M}$ とその 2 乗 $|\mathcal{M}|^2$ を求める。

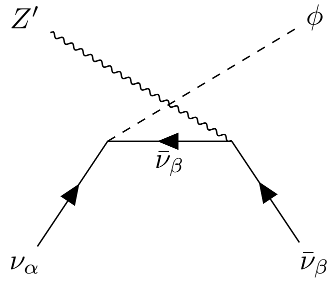
$Z'\nu_{\mu,\tau} \leftrightarrow \phi\bar{\nu}_\alpha$

$Z'(k) + \nu_{\mu,\tau}(p) \leftrightarrow \phi(k') + \bar{\nu}_\alpha(p')$ に対する不変振幅は次の様になる (p, k は各粒子の運動量)。

$i\mathcal{M}_{Z'\nu_\alpha \leftrightarrow \phi\bar{\nu}_\beta} =$



$+$



$$
\begin{aligned}
&= -\frac{2i}{(p+k)^2} g_\alpha h^*_{\alpha\beta} \epsilon^\rho (p+k)^\sigma v_\beta(p')^T C \gamma_\sigma \gamma_\rho u_\alpha(p) \\
&+ \frac{2i}{(p'-k)^2} g_\beta h^*_{\alpha\beta} \epsilon^\rho (p'-k)^\sigma v_\beta(p')^T \gamma_\rho^T \gamma_\sigma^T C u_\alpha(p)
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

ここで、

$$
g_\gamma = \begin{cases} 0(\gamma = e), \\ g_{\mu-\tau}(\gamma = \mu), \\ -g_{\mu-\tau}(\gamma = \tau). \end{cases}
\tag{4.13}
$$

である。Majoron ϕ がレプトン数 2 を持っているため、この散乱は始状態にニュートリノ、終状態に反ニュートリノを持つ。従って、u, v を列ベクトルとして定義すると上記のように書ける。(4.12) 式より

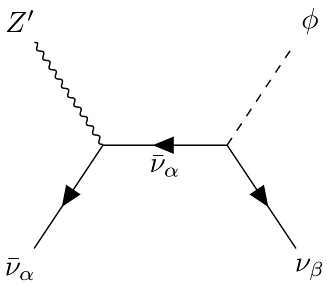
$$
\begin{aligned}
\Sigma_{\text{spins}} |M_{Z'\nu_\alpha \leftrightarrow \phi\bar{\nu}_\beta}|^2 &= \frac{4g_\alpha^2 |h_{\alpha\beta}|^2}{(p+k)^4} \left[16(p\cdot k)(p'\cdot k) - 4m_{Z'}^2 (p\cdot p') + 16(p\cdot p')(p\cdot k) + \frac{16}{m_{Z'}^2}(p\cdot p')(p\cdot k)^2 \right] \\
&+ \frac{4g_\beta^2 |h_{\alpha\beta}|^2}{(p'-k)^4} \left[16(p\cdot k)(p'\cdot k) - 4m_{Z'}^2 (p\cdot p') - 16(p\cdot p')(p'\cdot k) + \frac{16}{m_{Z'}^2}(p\cdot p')(p'\cdot k)^2 \right] \\
&- \frac{4g_\alpha g_\beta |h_{\alpha\beta}|^2}{(p+k)^2(p'-k)^2} \left[\frac{16}{m_{Z'}^2}(p\cdot k)(p'\cdot k)(p\cdot p') - 16(p\cdot p')^2 - 8(p\cdot p')(p'\cdot k) \right. \\
&\qquad \left. + 8(p\cdot p')(p\cdot k) - 16(p\cdot k)(p'\cdot k) - 4m_{Z'}^2(p\cdot p') \right]
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

を得る。

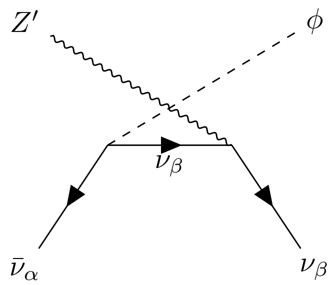
$Z'\bar{\nu}_\alpha \leftrightarrow \phi\nu_\beta$

$Z'(k) + \bar{\nu}_\alpha(p) \leftrightarrow \phi(k') + \nu_\beta(p')$ に対する不変振幅は以下となる。

$i\mathcal{M}_{Z'\bar{\nu}_\alpha \leftrightarrow \phi\nu_\beta} =$



$+$



$$
\begin{aligned}
&= \frac{2i}{(p+k)^2} g_\alpha h_{\alpha\beta} \epsilon^\rho (p+k)^\sigma \bar{u}_\beta(p') C \gamma_\sigma^T \gamma_\rho^T \bar{v}_\alpha^T(p) \\
&- \frac{2i}{(p'-k)^2} g_\beta h_{\alpha\beta} \epsilon^\rho (p'-k)^\sigma \bar{u}_\beta(p') \gamma_\rho \gamma_\sigma C \bar{v}_\alpha^T(p)
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

これより振幅の 2 乗は、

$$
\begin{aligned}
\Sigma_{\text{spins}}|M_{Z'\bar{\nu}_\alpha\leftrightarrow\phi\nu_\beta}|^2 =& \frac{4g_\alpha^2|h_{\alpha\beta}|^2}{(p+k)^4}\left[16(p\cdot k)(p'\cdot k) - 4m_{Z'}^2(p\cdot p') + 16(p\cdot p')(p\cdot k) + \frac{16}{m_{Z'}^2}(p\cdot p')(p\cdot k)^2\right] \\
&+ \frac{4g_\beta^2|h_{\alpha\beta}|^2}{(p'-k)^4}\left[16(p\cdot k)(p'\cdot k) - 4m_{Z'}^2(p\cdot p') - 16(p\cdot p')(p'\cdot k) + \frac{16}{m_{Z'}^2}(p\cdot p')(p'\cdot k)^2\right] \\
&- \frac{4g_\alpha g_\beta|h_{\alpha\beta}|^2}{(p+k)^2(p'-k)^2}\left[\frac{16}{m_{Z'}^2}(p\cdot k)(p'\cdot k)(p\cdot p') - 16(p\cdot p')^2 - 8(p\cdot p')(p'\cdot k)\right. \\
&\left. + 8(p\cdot p')(p\cdot k) - 16(p\cdot k)(p'\cdot k) - 4m_{Z'}^2(p\cdot p')\right] \qquad (4.16)
\end{aligned}
$$

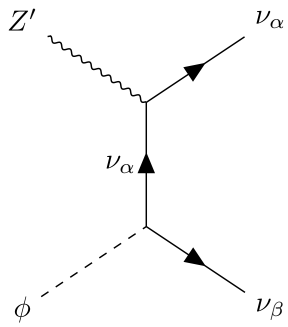
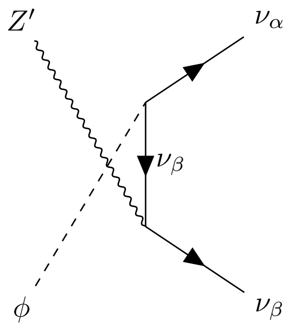
となる。(4.14)、(4.16) 式より

$$
\Sigma_{\text{spins}}|M_{Z'\nu_\alpha\leftrightarrow\phi\bar{\nu}_\beta}|^2 = \Sigma_{\text{spins}}|M_{Z'\bar{\nu}_\alpha\leftrightarrow\phi\nu_\beta}|^2 \qquad (4.17)
$$

が成立する。

$Z'\phi \leftrightarrow \nu_\alpha\nu_\beta$

$Z'(k) + \phi(k') \leftrightarrow \nu_\alpha(p) + \nu_\beta(p')$ に対する不変振幅は以下となる。

$i\mathcal{M}_{Z'\phi\leftrightarrow\nu_\alpha\nu_\beta} =$  $+$ 

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{2i}{(p-k)^2}g_\alpha h_{\alpha\beta}\epsilon^\rho(p-k)^\sigma\bar{u}_\alpha(p)\gamma_\rho\gamma_\sigma C\bar{u}_\beta^T(p') \\
&+ \frac{2i}{(p'-k)^2}g_\beta h_{\alpha\beta}\epsilon^\rho(p'-k)^\sigma\bar{u}_\beta(p')\gamma_\rho\gamma_\sigma C\bar{u}_\alpha^T(p) \qquad (4.18)
\end{aligned}
$$

これより、振幅の 2 乗は、

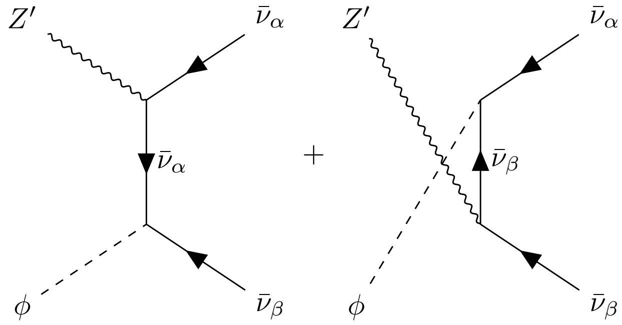
$$
\begin{aligned}
\Sigma_{\text{spins}}|M_{Z'\phi\leftrightarrow\nu_\alpha\nu_\beta}|^2 =& \frac{4g_\alpha^2|h_{\alpha\beta}|^2}{(p-k)^4}\left[16(p\cdot k)(p'\cdot k) - 4m_{Z'}^2(p\cdot p') - 16(p\cdot p')(p\cdot k) + \frac{16}{m_{Z'}^2}(p\cdot p')(p\cdot k)^2\right] \\
&+ \frac{4g_\beta^2|h_{\alpha\beta}|^2}{(p'-k)^4}\left[16(p\cdot k)(p'\cdot k) - 4m_{Z'}^2(p\cdot p') - 16(p\cdot p')(p'\cdot k) + \frac{16}{m_{Z'}^2}(p\cdot p')(p'\cdot k)^2\right] \\
&- \frac{4g_\alpha g_\beta|h_{\alpha\beta}|^2}{(p-k)^2(p'-k)^2}\left[\frac{16}{m_{Z'}^2}(p\cdot k)(p'\cdot k)(p\cdot p') - 16(p\cdot p')^2 + 8(p\cdot p')(p'\cdot k)\right. \\
&\left. + 8(p\cdot p')(p\cdot k) - 16(p\cdot k)(p'\cdot k) + 4m_{Z'}^2(p\cdot p')\right] \qquad (4.19)
\end{aligned}
$$

となる。

$Z'\phi \leftrightarrow \bar{\nu}_\alpha\bar{\nu}_\beta$

$Z'(k) + \phi(k') \leftrightarrow \bar{\nu}_\alpha(p) + \bar{\nu}_\beta(p')$ に対する不変振幅は以下となる。

$i\mathcal{M}_{Z'\phi\leftrightarrow\bar{\nu}_\alpha\bar{\nu}_\beta} =$



$$
\begin{aligned}
&= \frac{2i}{(p-k)^2} g_\alpha h^*_{\alpha\beta} \epsilon^\rho (p-k)^\sigma v^T_\alpha(p) \gamma^T_\rho \gamma^T_\sigma C v_\beta(p') \\
&- \frac{2i}{(p'-k)^2} g_\beta h^*_{\alpha\beta} \epsilon^\rho (p'-k)^\sigma v^T_\beta(p') \gamma^T_\rho \gamma^T_\sigma C v_\alpha(p)
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

これより、振幅の 2 乗は、

$$
\begin{aligned}
\Sigma_{\mathrm{spins}} |M_{Z'\phi\leftrightarrow\bar{\nu}_\alpha\bar{\nu}_\beta}|^2 &= \frac{4g^2_\alpha |h_{\alpha\beta}|^2}{(p-k)^4} \left[16(p\cdot k)(p'\cdot k) - 4m^2_{Z'}(p\cdot p') - 16(p\cdot p')(p\cdot k) + \frac{16}{m^2_{Z'}}(p\cdot p')(p\cdot k)^2 \right] \\
&+ \frac{4g^2_\beta |h_{\alpha\beta}|^2}{(p'-k)^4} \left[16(p\cdot k)(p'\cdot k) - 4m^2_{Z'}(p\cdot p') - 16(p\cdot p')(p'\cdot k) + \frac{16}{m^2_{Z'}}(p\cdot p')(p'\cdot k)^2 \right] \\
&- \frac{4g_\alpha g_\beta |h_{\alpha\beta}|^2}{(p-k)^2(p'-k)^2} \left[\frac{16}{m^2_{Z'}}(p\cdot k)(p'\cdot k)(p\cdot p') - 16(p\cdot p')^2 + 8(p\cdot p')(p'\cdot k) \right. \\
&\qquad \left. + 8(p\cdot p')(p\cdot k) - 16(p\cdot k)(p'\cdot k) + 4m^2_{Z'}(p\cdot p') \right]
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

である。(4.19)、(4.21) 式より

$$
\Sigma_{\mathrm{spins}} |M_{Z'\phi\leftrightarrow\nu_\alpha\nu_\beta}|^2 = \Sigma_{\mathrm{spins}} |M_{Z'\phi\leftrightarrow\bar{\nu}_\alpha\bar{\nu}_\beta}|^2 \tag{4.22}
$$

が成立する。

電子タイプのニュートリノを含む場合、ν_e は ϕ としか結合を持たないため、上記散乱のダイアグラムは片方しか存在せず、そのため干渉を持たない。これは、(4.13) 式によって考慮されている。

4.4　エネルギー、粒子数の遷移率

前章で求めた遷移率に、散乱による寄与が加わる。これによりニュートリノ、Z'、Majoron の各遷移率がどのような変更を受けるかを確認する。

(4.17) 式、(4.22) 式より、

$$
\left.\frac{\delta\rho, n_A}{\delta t}\right|_{Z'\nu\leftrightarrow\phi\bar{\nu}} = \left.\frac{\delta\rho, n_A}{\delta t}\right|_{Z'\bar{\nu}\leftrightarrow\phi\nu} \tag{4.23}
$$

$$
\left.\frac{\delta\rho, n_A}{\delta t}\right|_{Z'\phi\leftrightarrow\nu\nu} = \left.\frac{\delta\rho, n_A}{\delta t}\right|_{Z'\phi\leftrightarrow\bar{\nu}\bar{\nu}} \tag{4.24}
$$

が成立する。ここで、

$$\begin{aligned}\left.\frac{\delta\rho, n_A}{\delta t}\right|_{Z'\nu\leftrightarrow\phi\bar{\nu}} &= \left.\frac{\delta\rho, n_A}{\delta t}\right|_{Z'\nu_\mu\leftrightarrow\phi\bar{\nu}_e} + \left.\frac{\delta\rho, n_A}{\delta t}\right|_{Z'\nu_\mu\leftrightarrow\phi\bar{\nu}_\mu} + \left.\frac{\delta\rho, n_A}{\delta t}\right|_{Z'\nu_\mu\leftrightarrow\phi\bar{\nu}_\tau} \\ &+ \left.\frac{\delta\rho, n_A}{\delta t}\right|_{Z'\nu_\tau\leftrightarrow\phi\bar{\nu}_e} + \left.\frac{\delta\rho, n_A}{\delta t}\right|_{Z'\nu_\tau\leftrightarrow\phi\bar{\nu}_\mu} + \left.\frac{\delta\rho, n_A}{\delta t}\right|_{Z'\nu_\tau\leftrightarrow\phi\bar{\nu}_\tau}\end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{\delta\rho, n_A}{\delta t}\right|_{Z'\phi\leftrightarrow\nu\nu} &= \left.\frac{\delta\rho, n_A}{\delta t}\right|_{Z'\phi\leftrightarrow\nu_\mu\nu_e} + \left.\frac{\delta\rho, n_A}{\delta t}\right|_{Z'\phi\leftrightarrow\nu_\mu\nu_\mu} + \left.\frac{\delta\rho, n_A}{\delta t}\right|_{Z'\phi\leftrightarrow\nu_\mu\nu_\tau} \\ &+ \left.\frac{\delta\rho, n_A}{\delta t}\right|_{Z'\phi\leftrightarrow\nu_\tau\nu_e} + \left.\frac{\delta\rho, n_A}{\delta t}\right|_{Z'\phi\leftrightarrow\nu_\tau\nu_\mu} + \left.\frac{\delta\rho, n_A}{\delta t}\right|_{Z'\phi\leftrightarrow\nu_\tau\nu_\tau}\end{aligned} \tag{4.26}$$

である。また、$A = Z', \nu, \phi$ である。以上から、Z', ν, ϕ のエネルギー、粒子数の遷移率はそれぞれ次のように書ける。

$$\frac{\delta\rho_{Z'}}{\delta t} = \left.\frac{\delta\rho_{Z'}}{\delta t}\right|_{Z'\leftrightarrow e^+e^-} + \left.\frac{\delta\rho_{Z'}}{\delta t}\right|_{Z'\leftrightarrow\nu\bar{\nu}} + 2\left.\frac{\delta\rho'_Z}{\delta t}\right|_{Z'\nu\leftrightarrow\phi\bar{\nu}} + 2\left.\frac{\delta\rho'_Z}{\delta t}\right|_{Z'\phi\leftrightarrow\nu\nu} \tag{4.27}$$

$$\frac{\delta n_{Z'}}{\delta t} = \left.\frac{\delta n_{Z'}}{\delta t}\right|_{Z'\leftrightarrow e^+e^-} + \left.\frac{\delta n_{Z'}}{\delta t}\right|_{Z'\leftrightarrow\nu\bar{\nu}} + 2\left.\frac{\delta n'_Z}{\delta t}\right|_{Z'\nu\leftrightarrow\phi\bar{\nu}} + 2\left.\frac{\delta n'_Z}{\delta t}\right|_{Z'\phi\leftrightarrow\nu\nu} \tag{4.28}$$

$$\frac{\delta\rho_\nu}{\delta t} = \left.\frac{\delta\rho_\nu}{\delta t}\right|_{SM} + \left.\frac{\delta\rho_\nu}{\delta t}\right|_{Z'\leftrightarrow\nu\bar{\nu}} + 2\left.\frac{\delta\rho_\nu}{\delta t}\right|_{\phi\leftrightarrow\nu\nu} + 2\left.\frac{\delta\rho_\nu}{\delta t}\right|_{Z'\nu\leftrightarrow\phi\bar{\nu}} + 2\left.\frac{\delta\rho_\nu}{\delta t}\right|_{Z'\phi\leftrightarrow\nu\nu} \tag{4.29}$$

$$\frac{\delta n_\nu}{\delta t} = \left.\frac{\delta n_\nu}{\delta t}\right|_{SM} + \left.\frac{\delta n_\nu}{\delta t}\right|_{Z'\leftrightarrow\nu\bar{\nu}} + 2\left.\frac{\delta n_\nu}{\delta t}\right|_{\phi\leftrightarrow\nu\nu} + 2\left.\frac{\delta n_\nu}{\delta t}\right|_{Z'\nu\leftrightarrow\phi\bar{\nu}} + 2\left.\frac{\delta n_\nu}{\delta t}\right|_{Z'\phi\leftrightarrow\nu\nu} \tag{4.30}$$

$$\frac{\delta\rho_\phi}{\delta t} = 2\left.\frac{\delta\rho_\phi}{\delta t}\right|_{\phi\leftrightarrow\nu\nu} + 2\left.\frac{\delta\rho_\phi}{\delta t}\right|_{Z'\nu\leftrightarrow\phi\bar{\nu}} + 2\left.\frac{\delta\rho_\phi}{\delta t}\right|_{Z'\phi\leftrightarrow\nu\nu} \tag{4.31}$$

$$\frac{\delta n_\phi}{\delta t} = 2\left.\frac{\delta n_\phi}{\delta t}\right|_{\phi\leftrightarrow\nu\nu} + 2\left.\frac{\delta n_\phi}{\delta t}\right|_{Z'\nu\leftrightarrow\phi\bar{\nu}} + 2\left.\frac{\delta n_\phi}{\delta t}\right|_{Z'\phi\leftrightarrow\nu\nu} \tag{4.32}$$

2 倍の因子は、(4.23),(4.24) 式によるものである。

4.5　遷移率の数値計算

前節で示した微分方程式は、次の構造を持つ。

$$\frac{dT}{dt} = \int dx f(x, T, t) \tag{4.33}$$

(4.33) 式は右辺に積分を含んでおり、容易には解くことができない。(4.33) 式を数値的に解くため、4 次の Runge-Kutta 法を適用すると次のように書ける。

$$T_{i+1} = T_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\begin{cases} k_1 &= h\int dx f(x, T_i, t_i) \\ k_2 &= h\int dx f(x, T_i + \frac{k_1}{2}, t_i + \frac{h}{2}) \\ k_3 &= h\int dx f(x, T_i + \frac{k_2}{2}, t_i + \frac{h}{2}) \\ k_4 &= h\int dx f(x, T + k_3, t + h) \\ h &= t_{i+1} - t_i \end{cases} \tag{4.34}$$

(4.33) 式を数値的に解くためには、ステップを進める毎に k_i の積分を実行する必要がある。そこで、方程式を解く際に計算しなければならない積分について整理する。

4.5.1　遷移率の表式

Appendix(B) より、計算する積分は

$$\frac{\delta\rho}{\delta t} = -\int \frac{d^3\mathrm{p}_1}{(2\pi)^3} E_1 \frac{1}{2E_1}\mathcal{I} \tag{4.35}$$

$$\frac{\delta n}{\delta t} = -\int \frac{d^3\mathrm{p}_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_1}\mathcal{I} \tag{4.36}$$

である。ここで、

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2(2\pi)^4}\int \frac{d\mathrm{p}_2\mathrm{p}_2^2}{E_2}\frac{d\mathrm{p}_3\mathrm{p}_3^2}{E_3}\Lambda(\{f_i\}) \int_{\max(\cos\theta_-,-1)}^{\min(\cos\theta_+,1)} d\cos\theta \, \frac{1}{\sqrt{-a}} \int_0^\pi dx \sum_{\mathrm{spins}} |\mathcal{M}|^2 \Theta\left(p_4^0\right) \tag{4.37}$$

である。いま考えている過程に対して、積分区間について具体的に見ていく。

$Z'\nu_\alpha \leftrightarrow \phi\bar{\nu}_\beta$

まず Z' に関する遷移率を導出する。4 元運動量の割り当てとして

$$(p_1, p_2, p_3, p_4) = (p_{Z'}, p_\alpha, p_\beta, p_\phi) \tag{4.38}$$

とする。$\Theta(p_4^0)$ から、

$$p_4^0 = E_{Z'} + \mathrm{p}_\alpha - \mathrm{p}_\beta \geq m_\phi \tag{4.39}$$

$$\therefore \mathrm{p}_\beta \leq \sqrt{\mathrm{p}_{Z'}^2 + m_{Z'}^2} + \mathrm{p}_\alpha - m_\phi \tag{4.40}$$

(4.40) 式の右辺は正である必要があるが、$m_{Z'} > m_\phi$ より常に成立している。これより、$\mathrm{p}_{Z'}$, p_α には制限が付かないため、(4.35) 式は

$$\left.\frac{\delta\rho_{Z'}}{\delta t}\right|_{Z'\nu_\alpha\leftrightarrow\phi\bar{\nu}_\beta} = -\frac{1}{2(2\pi)^7}\int_0^\infty d^3\mathrm{p}_{Z'} \int_0^\infty \frac{d\mathrm{p}_\alpha\mathrm{p}_\alpha^2}{E_\alpha} \int_0^{\sqrt{\mathrm{p}_{Z'}^2+m_{Z'}^2}+\mathrm{p}_\alpha-m_\phi} \frac{d\mathrm{p}_\beta\mathrm{p}_\beta^2}{E_\beta}\Lambda(\{f_i\}) \times \int_{\max(\cos\theta_-,-1)}^{\min(\cos\theta_+,1)} d\cos\theta \, \frac{1}{\sqrt{-a}} \int_0^\pi dx \sum_{\mathrm{spins}} |\mathcal{M}|^2 \Theta\left(p_4^0\right) \tag{4.41}$$

となる。

ν_α に着目した場合、(4.38) 式で $p_{Z'}$ と p_α を入れ替えるだけでよく、全く同様の計算から積分を具体的に知ることができる。

$$\left.\frac{\delta\rho_{\nu_\alpha}}{\delta t}\right|_{Z'\nu_\alpha\leftrightarrow\phi\bar{\nu}_\beta} = -\frac{1}{4(2\pi)^7}\int_0^\infty d^3\mathrm{p}_{\nu_\alpha} \int_0^\infty \frac{d\mathrm{p}_{Z'}\mathrm{p}_{Z'}^2}{E_{Z'}} \int_0^{\sqrt{\mathrm{p}_{Z'}^2+m_{Z'}^2}+p_\alpha-m_\phi} \frac{d\mathrm{p}_\beta\mathrm{p}_\beta^2}{E_\beta}\Lambda(\{f_i\}) \times \int_{\max(\cos\theta_-,-1)}^{\min(\cos\theta_+,1)} d\cos\theta \, \frac{1}{\sqrt{-a}} \int_0^\pi dx \sum_{\mathrm{spins}} |\mathcal{M}|^2 \Theta\left(p_4^0\right) \tag{4.42}$$

$\bar{\nu}_\beta$ と ϕ に着目する場合、軽い粒子から重い粒子を生成する状況となっているため注意が必要である。まず、ϕ に関する遷移率を見ていく。運動量の割り当ては次のようにとる。

$$(p_1, p_2, p_3, p_4) = (p_\phi, p_\beta, p_\alpha, p_{Z'}) \tag{4.43}$$

$\Theta(p_4^0)$ より、

$$p_4^0 = E_\phi + \mathrm{p}_\beta - \mathrm{p}_\alpha \geq m_{Z'} \tag{4.44}$$

$$\therefore \mathrm{p}_\alpha \leq \sqrt{\mathrm{p}_\phi^2 + m_\phi^2} + \mathrm{p}_\beta - m_{Z'} \tag{4.45}$$

(4.45) 式の右辺は正である必要があるが、$m_{Z'} > m_\phi$ のため、必ずしも正にはならない。そこで、

$$\sqrt{\mathrm{p}_\phi^2 + m_\phi^2} + \mathrm{p}_\beta - m_{Z'} \geq 0 \tag{4.46}$$

$$\mathrm{p}_\beta \geq 0,\ \mathrm{p}_\phi \geq 0 \tag{4.47}$$

となる必要があり、(4.46),(4.47) 式が表す領域が積分領域となる (領域を D_1 とする)。(4.46) 式は、軽い粒子から重い粒子を生成する際の物理的な条件となっている。よって

$$\left.\frac{\delta\rho_\phi}{\delta t}\right|_{Z'\nu_\alpha\leftrightarrow\phi\bar{\nu}_\beta} = -\frac{1}{4(2\pi)^7}\iint_{D1} d^3\mathrm{p}_\phi \frac{d\mathrm{p}_\beta \mathrm{p}_\beta^2}{E_\beta}\int_0^{\sqrt{\mathrm{p}_\phi^2+m_\phi^2}+\mathrm{p}_\beta-m_{Z'}} \frac{d\mathrm{p}_\alpha \mathrm{p}_\alpha^2}{E_\alpha}\Lambda(\{f_i\}) \\ \times \int_{\max(\cos\theta_-,-1)}^{\min(\cos\theta_+,1)} d\cos\theta \,\frac{1}{\sqrt{-a}}\int_0^\pi dx \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 \Theta\left(p_4^0\right) \tag{4.48}$$

となる。

$\bar{\nu}_\beta$ に着目する際も同様に考えることができる。(4.43) 式で p_ϕ と p_β を入れ替え、$\Theta(p_4^0)$ を適用すると

$$\mathrm{p}_\alpha \leq \sqrt{\mathrm{p}_\phi^2 + m_\phi^2} + \mathrm{p}_\beta - m_{Z'} \tag{4.49}$$

である。これは (4.45) 式と全く同じであるため、

$$\left.\frac{\delta\rho_{\bar{\nu}_\beta}}{\delta t}\right|_{Z'\nu_\alpha\leftrightarrow\phi\bar{\nu}_\beta} = -\frac{1}{4(2\pi)^7}\iint_{D1} d^3\mathrm{p}_\beta \frac{d\mathrm{p}_\phi \mathrm{p}_\phi^2}{E_\phi}\int_0^{\sqrt{\mathrm{p}_\phi^2+m_\phi^2}+\mathrm{p}_\beta-m_{Z'}} \frac{d\mathrm{p}_\alpha \mathrm{p}_\alpha^2}{E_\alpha}\Lambda(\{f_i\}) \\ \times \int_{\max(\cos\theta_-,-1)}^{\min(\cos\theta_+,1)} d\cos\theta \,\frac{1}{\sqrt{-a}}\int_0^\pi dx \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 \Theta\left(p_4^0\right) \tag{4.50}$$

となる。

$\boldsymbol{Z'\phi \leftrightarrow \nu_\alpha\nu_\beta}$

Z' と ϕ に関しては同様の議論ができる。まず Z' について見るため、次のように運動量を割り当てる。

$$(p_1, p_2, p_3, p_4) = (p_{Z'}, p_\phi, p_\alpha, p_\beta) \tag{4.51}$$

$\Theta(p_4^0)$ より、

$$p_4^0 = E_{Z'} + E_\phi - \mathrm{p}_\alpha \geq 0 \tag{4.52}$$

$$\therefore \mathrm{p}_\alpha \leq \sqrt{\mathrm{p}_{Z'}^2 + m_{Z'}^2} + \sqrt{\mathrm{p}_\phi^2 + m_\phi^2} \tag{4.53}$$

(4.53) 式の右辺は常に正であるため、$\mathrm{p}_{Z'}$, p_α には制限が付かない。従って

$$\left.\frac{\delta\rho_{Z'}}{\delta t}\right|_{Z'\phi\leftrightarrow\nu_\alpha\nu_\beta} = -\frac{1}{4(2\pi)^7}\int_0^\infty d^3\mathrm{p}_{Z'} \int_0^\infty \frac{d\mathrm{p}_\phi \mathrm{p}_\phi^2}{E_\phi}\int_0^{\sqrt{\mathrm{p}_{Z'}^2+m_{Z'}^2}+\sqrt{\mathrm{p}_\phi^2+m_\phi^2}} \frac{d\mathrm{p}_\alpha \mathrm{p}_\alpha^2}{E_\alpha}\Lambda(\{f_i\}) \\ \times \int_{\max(\cos\theta_-,-1)}^{\min(\cos\theta_+,1)} d\cos\theta \,\frac{1}{\sqrt{-a}}\int_0^\pi dx \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 \Theta\left(p_4^0\right) \tag{4.54}$$

ϕ について、(4.51) 式で $p_{Z'}$ と p_ϕ を入れ替えればよく、この操作を行っても全く同じ関係が成立する。よって

$$\left.\frac{\delta\rho_\phi}{\delta t}\right|_{Z'\phi\leftrightarrow\nu_\alpha\nu_\beta} = -\frac{1}{4(2\pi)^7}\int_0^\infty d^3\mathrm{p}_\phi \int_0^\infty \frac{d\mathrm{p}_{Z'}\mathrm{p}_{Z'}^2}{E_{Z'}} \int_0^{\sqrt{\mathrm{p}_{Z'}^2+m_{Z'}^2}+\sqrt{\mathrm{p}_\phi^2+m_\phi^2}} \frac{d\mathrm{p}_\alpha \mathrm{p}_\alpha^2}{E_\alpha}\Lambda(\{f_i\})$$
$$\times\int_{\max(\cos\theta_-,-1)}^{\min(\cos\theta_+,1)} d\cos\theta\, \frac{1}{\sqrt{-a}}\int_0^\pi dx \sum_{\mathrm{spins}} |\mathcal{M}|^2\Theta\left(p_4^0\right) \tag{4.55}$$

となる。

ニュートリノに着目する場合、ν_α と ν_β のどちらに着目しても同一の式が得られるため、一方を計算して 2 倍すればよい。運動量の割り当てとして、次のようにとる。

$$(p_1, p_2, p_3, p_4) = (p_\alpha, p_\beta, p_{Z'}, p_\phi,) \tag{4.56}$$

$\Theta(p_4^0)$ より

$$p_4^0 = p_\alpha + p_\beta - E_{Z'} \geq m_\phi \tag{4.57}$$
$$\therefore \mathrm{p}_{Z'} \leq \sqrt{(\mathrm{p}_\alpha + \mathrm{p}_\beta - m_\phi + m_{Z'})(\mathrm{p}_\alpha + \mathrm{p}_\beta - m_\phi - m_{Z'})} \tag{4.58}$$

(4.58) 式を実現するためには、

$$\mathrm{p}_\alpha + \mathrm{p}_\beta \geq m_\phi + m_{Z'} \tag{4.59}$$
$$\mathrm{p}_\alpha \geq 0,\ \mathrm{p}_\beta \geq 0 \tag{4.60}$$

を満たす必要がある。これは軽い粒子から重い粒子を生成するにあたって満たすべき物理的な条件となっている。(4.59),(4.60) 式が表す領域を D_2 とすると、求めるべき積分は次のようになる。

$$\left.\frac{\delta\rho_{\nu_\alpha}}{\delta t}\right|_{Z'\phi\leftrightarrow\nu_\alpha\nu_\beta} = -\frac{1}{4(2\pi)^7}\iint_{D2} d^3\mathrm{p}_\alpha \frac{d\mathrm{p}_\beta \mathrm{p}_\beta^2}{E_\beta}\int_0^{\sqrt{(\mathrm{p}_\alpha+\mathrm{p}_\beta-m_\phi+m_{Z'})(\mathrm{p}_\alpha+\mathrm{p}_\beta-m_\phi-m_{Z'})}} \frac{d\mathrm{p}_{Z'}\mathrm{p}_{Z'}^2}{E_{Z'}}\Lambda(\{f_i\})$$
$$\times\int_{\max(\cos\theta_-,-1)}^{\min(\cos\theta_+,1)} d\cos\theta\, \frac{1}{\sqrt{-a}}\int_0^\pi dx \sum_{\mathrm{spins}} |\mathcal{M}|^2\Theta\left(p_4^0\right) \tag{4.61}$$

以上で、各反応に対する各粒子のエネルギー遷移率の表式を決定することができた。粒子数遷移率の表式は、被積分関数を E_1 で割ったものを同様に積分したものである。

4.5.2　計算における条件

前節で表式を導いた遷移率を計算した際の比較方法について述べる。数値積分をするにあたり、モンテカルロ法のアルゴリズムの 1 つである VEGAS algorithm を用いた (AppendixD)。VEGAS algorithm による計算では、乱数は 1000 点振り、グリッドの更新は 10 回行った。また、計算にあたり、パラメータは次のように設定した。

1. Z' について

   $g_\mu - 2$ anomaly を解決できるパラメータとして、$m_{Z'} = 13\mathrm{MeV}$、$g_{\mu-\tau} = 5\times10^{-4}$ とする。

2. ϕ について
   将来的に 30keV より大きい質量を見るため、ここでは $m_\phi = 1, 0.1\mathrm{MeV}$ とする。また、$h_{\alpha\beta}$ は $|\mathcal{M}|^2$ 全体にかかっているため、上限の値として

$$\lambda \sim |h_{\alpha\beta}| \leq 10^{-7} \tag{4.62}$$

   より、$|h_{\alpha\beta}| = 10^{-7}$ とする。
3. 温度と化学ポテンシャルについて
   化学ポテンシャルは全ての粒子について無視する。また、同じ熱浴で起こる反応に対しては衝突項は 0 となるため、近似 6、7 を踏まえて T_ϕ を熱浴から除外するため、次のように温度を仮定する。
   ・$T_\nu = T_{Z'} = 10T_\phi$
   これは、ϕ の熱浴からのすれが極端な場合である。
   ・$T_\nu = T_{Z'} = T_\phi/0.99$
   これは、ϕ の熱浴からのずれがわずかしか無い場合である。また、遷移率の様子を見る温度として、次の 3 点を用いる

$$T_\nu = 1, 0.5, 0.1\mathrm{MeV} \tag{4.63}$$

   この温度は、それぞれ電子対消滅が始まる前、始まった直後、ほとんど終わった時期の温度である。

遷移率が影響を及ぼすことの判断基準は、積分されたボルツマン方程式を用いる。(2.13),(2.14) 式から

$$\frac{d\rho}{dt} = -3H(\rho + P) + \frac{\delta\rho}{\delta t} \tag{4.64}$$

$$\frac{dn}{dt} = -3Hn + \frac{\delta n}{\delta t} \tag{4.65}$$

である。また、ハッブルパラメータ H は、

$$H(T_\nu) \simeq 1.66 g_\star^{\frac{1}{2}} \frac{T_\nu^2}{m_{\mathrm{Pl}}} \tag{4.66}$$

である。$T_\nu \simeq 0.1 - 1\mathrm{MeV}$ より、$g_\star = 10.75$ とする [3]。(4.64),(4.65) 式の右辺は、宇宙膨張によりエネルギー・粒子数が薄まる影響と、相互作用による影響によって構成されている。そこで、次の量を定義する。

$$\Gamma_\rho^{\mathrm{trans}} \equiv \frac{\delta\rho/\delta t}{H(\rho + P)} \tag{4.67}$$

$$\Gamma_n^{\mathrm{trans}} \equiv \frac{\delta n/\delta t}{Hn} \tag{4.68}$$

これより、粒子 a に関して、散乱過程 $a + b \leftrightarrow c + d$ による遷移率の寄与について次式を満足すれば、遷移率の寄与は宇宙膨張の影響より大きく、エネルギー・粒子数の変化に影響を及ぼすと言える。

$$\mathrm{abs}\left(\Gamma_{\rho_a}^{\mathrm{trans}}\Big|_{ab\leftrightarrow cd}\right) = \left|\frac{\delta\rho_a/\delta t|_{ab\leftrightarrow cd}}{H(\rho_a + P_a)}\right| \gtrsim 1 \tag{4.69}$$

$$\mathrm{abs}\left(\Gamma_{n_a}^{\mathrm{trans}}\Big|_{ab\leftrightarrow cd}\right) = \left|\frac{\delta n_a/\delta t|_{ab\leftrightarrow cd}}{Hn_a}\right| \gtrsim 1 \tag{4.70}$$

4.5.3　結果

ϕ の平衡からのずれが極端な場合 ($T_\phi = T_\nu/10$) と、僅かな場合 ($T_\phi = 0.99T_\nu$) に対して計算した Γ^{trans} の値をそれぞれ表 (4.1)-(4.6)、(4.7)-(4.10) に示す。まず、Γ^{trans} の符号について、散乱過程 $ab \leftrightarrow cd$ において粒子 a の Γ^{trans} は、正であればこの過程で粒子 a がエネルギー・粒子数を獲得し、負であれば失うことを表す。表 (4.1) によると、過程 $Z'\nu \leftrightarrow \phi\bar{\nu}$ において Z' と ν はエネルギー・粒子数を失い、ϕ と $\bar{\nu}$ はエネルギー・粒子数を獲得していることになる。

表 (4.1) の温度帯 ($T_\nu = 1\mathrm{MeV} < m_{Z'}$) では、重い粒子 Z' から軽い粒子 ϕ を作る反応が逆過程より盛んに起こっていると考えられるため、符号に矛盾はないと考えられる。表 (4.1) の $Z'\nu \leftrightarrow \phi\bar{\nu}$ におけるエネルギー遷移率を計算すると次のようになる。

$$\left.\frac{\delta\rho_{Z'}}{\delta t}\right|_{Z'\nu\leftrightarrow\phi\bar{\nu}} = -1.71 \times 10^{-23}\mathrm{MeV}^5 \tag{4.71}$$

$$\left.\frac{\delta\rho_{\nu}}{\delta t}\right|_{Z'\nu\leftrightarrow\phi\bar{\nu}} = -7.6 \times 10^{-25}\mathrm{MeV}^5 \tag{4.72}$$

$$\left.\frac{\delta\rho_{\phi}}{\delta t}\right|_{\phi\bar{\nu}\leftrightarrow Z'\nu} = 7.70 \times 10^{-26}\mathrm{MeV}^5 \tag{4.73}$$

$$\left.\frac{\delta\rho_{\bar{\nu}}}{\delta t}\right|_{\phi\bar{\nu}\leftrightarrow Z'\nu} = 2.40 \times 10^{-23}\mathrm{MeV}^5 \tag{4.74}$$

これより、双方向でのエネルギー遷移率の和の桁数は一致しているように見える。よって、反応過程 $Z'\nu \leftrightarrow \phi\bar{\nu}$ においてエネルギーは保存すべきだが、この結果はエネルギー保存を反映していると考えられる。

同様の状況において、$Z'\phi \leftrightarrow \nu\nu$ におけるエネルギー遷移率を計算すると次のようになる。

$$\left.\frac{\delta\rho_{Z'}}{\delta t}\right|_{Z'\phi\leftrightarrow\nu\nu} = 9.855 \times 10^{-26}\mathrm{MeV}^5 \tag{4.75}$$

$$\left.\frac{\delta\rho_{\phi}}{\delta t}\right|_{Z'\phi\leftrightarrow\nu\nu} = 2.215 \times 10^{-26}\mathrm{MeV}^5 \tag{4.76}$$

$$\left.\frac{\delta\rho_{\nu}}{\delta t}\right|_{\nu\nu\leftrightarrow Z'\phi} = -4.80 \times 10^{-25}\mathrm{MeV}^5 \tag{4.77}$$

こちらも、双方向でのエネルギー遷移率の和は、若干の違いはあるものの概ね一致していることがわかる。計算ではこれより、$Z'\phi \leftrightarrow \nu\nu$ でもエネルギー保存則が反映されていると考えられる。この反応では、質量を持つ粒子からニュートリノが作られることが予想されたが、計算では温度の低い粒子である ϕ を生成する方向へ反応が進むという結果が見られた。

以上より、Γ^{trans} の大きさに着目することで、$Z' - \phi$ 散乱が宇宙初期に影響を及ぼすかを議論することができると考えられる。

$T_\nu = 0.1\mathrm{MeV}$ では、Z' による寄与しか効いてこないことがわかる (表 (4.3),(4.6))。これは、わずかに崩壊せず残ってる Z' が、Z' の崩壊により数が増えたニュートリノ、または、同じくわずかに残っている ϕ と反応するためであると考えられる。故に、$Z'\nu \leftrightarrow \phi\bar{\nu}$ の寄与の方が $Z'\phi \leftrightarrow \nu\nu$ による寄与よりも大きくなっている。更に温度が低下すると、Z' はより減少し作られなくなること、$T_\nu = 0.1\mathrm{MeV}$ で Z' の数かそもそもほとんど無いことを考えると、$T_\nu < 0.1$ MeV では Z' への寄与以外は無視できる。$T_\nu = 1, 0.5$ MeV では、Z' 以外に ϕ への寄与も見られる。これは、ϕ が、$T_\nu = 0.1$ MeV の時期よりも多

く存在しているためである。また $Z' - \phi$ 散乱におけるニュートリノへの寄与は宇宙膨張に比べて小さく、無視できることがわかる。これは、元々存在しているニュートリノに比べて、$Z' - \phi$ 散乱によって増減するニュートリノの割合が小さいからと考えられる。よって、$T_\nu = 1, 0.5$ MeV では、Z' と ϕ への寄与を取り入れればよい。

表 4.1　$m_\phi = 1$ MeV,$T_\nu = 1$ MeV に対する $\Gamma^{\rm trans}$ の値 ($T_\phi = T_\nu/10$)

粒子 a	散乱過程	$\Gamma^{\rm trans}_{\rho_a}$	$\Gamma^{\rm trans}_{n_a}$
Z'	$Z'\nu \leftrightarrow \phi\bar{\nu}$	-3.17×10^{2}	-3.83×10^{2}
ν	$Z'\nu \leftrightarrow \phi\bar{\nu}$	-4.44×10^{-3}	-1.69×10^{-2}
ϕ	$\phi\bar{\nu} \leftrightarrow Z'\nu$	1.25×10^{3}	2.51×10^{2}
$\bar{\nu}$	$\phi\bar{\nu} \leftrightarrow Z'\nu$	1.40×10^{-1}	2.80×10^{-2}
Z'	$Z'\phi \leftrightarrow \nu\nu$	1.83	1.92
ϕ	$Z'\phi \leftrightarrow \nu\nu$	3.60×10^{2}	1.37×10^{2}
ν	$\nu\nu \leftrightarrow Z'\phi$	-2.81×10^{-3}	-5.21×10^{-4}

表 4.2　$m_\phi = 1$ MeV,$T_\nu = 0.5$ MeV に対する $\Gamma^{\rm trans}$ の値 ($T_\phi = T_\nu/10$)

粒子 a	散乱過程	$\Gamma^{\rm trans}_{\rho_a}$	$\Gamma^{\rm trans}_{n_a}$
Z'	$Z'\nu \leftrightarrow \phi\bar{\nu}$	-1.21×10^{3}	-1.28×10^{3}
ν	$Z'\nu \leftrightarrow \phi\bar{\nu}$	-3.14×10^{-7}	-2.30×10^{-7}
ϕ	$\phi\bar{\nu} \leftrightarrow Z'\nu$	2.35×10	3.41
$\bar{\nu}$	$\phi\bar{\nu} \leftrightarrow Z'\nu$	1.04×10^{-6}	1.70×10^{-7}
Z'	$Z'\phi \leftrightarrow \nu\nu$	5.71×10^{-1}	5.87×10^{-1}
ϕ	$Z'\phi \leftrightarrow \nu\nu$	3.99	2.15
ν	$\nu\nu \leftrightarrow Z'\phi$	-1.32×10^{-9}	-3.95×10^{-10}

表 4.3　$m_\phi = 1$ MeV,$T_\nu = 0.1$ MeV に対する $\Gamma^{\rm trans}$ の値 ($T_\phi = T_\nu/10$)

粒子 a	散乱過程	$\Gamma^{\rm trans}_{\rho_a}$	$\Gamma^{\rm trans}_{n_a}$
Z'	$Z'\nu \leftrightarrow \phi\bar{\nu}$	-8.14×10^{3}	-3.80×10^{3}
ν	$Z'\nu \leftrightarrow \phi\bar{\nu}$	-4.38×10^{-51}	-5.57×10^{-50}
ϕ	$\phi\bar{\nu} \leftrightarrow Z'\nu$	2.18×10^{-10}	3.31×10^{-11}
$\bar{\nu}$	$\phi\bar{\nu} \leftrightarrow Z'\nu$	6.72×10^{-49}	2.28×10^{-50}
Z'	$Z'\phi \leftrightarrow \nu\nu$	1.63×10^{-4}	1.66×10^{-4}
ϕ	$Z'\phi \leftrightarrow \nu\nu$	2.66×10^{-14}	2.24×10^{-14}
ν	$\nu\nu \leftrightarrow Z'\phi$	-1.03×10^{-56}	-6.02×10^{-58}

表 4.4　$m_\phi = 0.1$ MeV,$T_\nu = 1$ MeV に対する $\Gamma^{\rm trans}$ の値 ($T_\phi = T_\nu/10$)

粒子 a	散乱過程	$\Gamma^{\rm trans}_{\rho_a}$	$\Gamma^{\rm trans}_{n_a}$
Z'	$Z'\nu \leftrightarrow \phi\bar{\nu}$	-2.82×10^2	-2.03×10^2
ν	$Z'\nu \leftrightarrow \phi\bar{\nu}$	-1.98×10^{-3}	-1.69×10^{-2}
ϕ	$\phi\bar{\nu} \leftrightarrow Z'\nu$	1.46×10	2.66×10^{-1}
$\bar{\nu}$	$\phi\bar{\nu} \leftrightarrow Z'\nu$	3.27×10^{-2}	1.27×10^{-2}
Z'	$Z'\phi \leftrightarrow \nu\nu$	8.19×10	8.17
ϕ	$Z'\phi \leftrightarrow \nu\nu$	4.05	7.10×10^{-1}
ν	$\nu\nu \leftrightarrow Z'\phi$	-2.74×10^{-3}	-8.33×10^{-4}

表 4.5　$m_\phi = 0.1$ MeV,$T_\nu = 0.5$ MeV に対する $\Gamma^{\rm trans}$ の値 ($T_\phi = T_\nu/10$)

粒子 a	散乱過程	$\Gamma^{\rm trans}_{\rho_a}$	$\Gamma^{\rm trans}_{n_a}$
Z'	$Z'\nu \leftrightarrow \phi\bar{\nu}$	-1.23×10^3	-2.17×10^2
ν	$Z'\nu \leftrightarrow \phi\bar{\nu}$	-3.89×10^{-8}	-9.67×10^{-8}
ϕ	$\phi\bar{\nu} \leftrightarrow Z'\nu$	2.50×10^{-5}	8.21×10^{-7}
$\bar{\nu}$	$\phi\bar{\nu} \leftrightarrow Z'\nu$	5.39×10^{-7}	1.78×10^{-7}
Z'	$Z'\phi \leftrightarrow \nu\nu$	6.13	6.25
ϕ	$Z'\phi \leftrightarrow \nu\nu$	2.69×10^{-5}	5.59×10^{-6}
ν	$\nu\nu \leftrightarrow Z'\phi$	-1.27×10^{-8}	-3.25×10^{-9}

表 4.6　$m_\phi = 0.1$ MeV,$T_\nu = 0.1$ MeV に対する $\Gamma^{\rm trans}$ の値 ($T_\phi = T_\nu/10$)

粒子 a	散乱過程	$\Gamma^{\rm trans}_{\rho_a}$	$\Gamma^{\rm trans}_{n_a}$
Z'	$Z'\nu \leftrightarrow \phi\bar{\nu}'$	-3.87×10^3	-6.41×10^4
ν	$Z'\nu \leftrightarrow \phi\bar{\nu}$	-5.90×10^{-51}	-8.23×10^{-51}
ϕ	$\phi\bar{\nu} \leftrightarrow Z'\nu$	3.86×10^{-47}	7.19×10^{-49}
$\bar{\nu}$	$\phi\bar{\nu} \leftrightarrow Z'\nu$	2.45×10^{-49}	1.11×10^{-50}
Z'	$Z'\phi \leftrightarrow \nu\nu$	1.69	1.70
ϕ	$Z'\phi \leftrightarrow \nu\nu$	1.36×10^{-47}	5.25×10^{-48}
ν	$\nu\nu \leftrightarrow Z'\phi$	-9.96×10^{-53}	-6.22×10^{-54}

次に、ϕ の平衡からのずれが微小な場合 ($T_\phi = 0.99T_\nu$) に各遷移率を計算したものを表 (4.7)-(4.10) に示す。$T_\nu = 0.1$ MeV の場合は、$T_\phi = T_\nu/10$ における結果と、平衡からのずれが微小になると遷移率が小さくなることから無視した。ϕ の温度がニュートリノと近いことから、$T_\phi = T_\nu/10$ の場合よりも両方向の反応が活発になり、エネルギー・粒子数の遷移が小さくなっている。この状況では、Z' が減少する過程以外は全て宇宙膨張に負けていることがわかる。よって、ϕ の平衡からのずれが微小な状況では、Z' への寄与のみ取り入れればよい。

以上をまとめると、$Z' - \phi$ 散乱を発展方程式に取り込む際、この散乱の影響は、電子対消滅後は Z' が減少する寄与以外は無視できるが、対消滅前には幾つかの寄与を持っている。ニュートリノへの寄与はかなり小さいが、Z' と ϕ への寄与はある程度持っているため、ニュートリノ以外の粒子への寄与は考える必要がある。

表 4.7　$m_\phi = 1$ MeV,$T_\nu = 1$ MeV に対する Γ^{trans} の値 ($T_\phi = 0.99T_\nu$)

粒子 a	散乱過程	$\Gamma^{\text{trans}}_{\rho_a}$	$\Gamma^{\text{trans}}_{n_a}$
Z'	$Z'\nu \leftrightarrow \phi\bar{\nu}$	-5.64×10	-5.57×10
ν	$Z'\nu \leftrightarrow \phi\bar{\nu}$	-1.60×10^{-4}	-2.21×10^{-3}
ϕ	$\phi\bar{\nu} \leftrightarrow Z'\nu$	1.99×10^{-4}	1.78×10^{-5}
$\bar{\nu}$	$\phi\bar{\nu} \leftrightarrow Z'\nu$	1.22×10^{-2}	1.25×10^{-2}
Z'	$Z'\phi \leftrightarrow \nu\nu$	5.82×10^{-2}	6.30×10^{-2}
ϕ	$Z'\phi \leftrightarrow \nu\nu$	2.39×10^{-5}	5.57×10^{-6}
ν	$\nu\nu \leftrightarrow Z'\phi$	-2.40×10^{-3}	-7.86×10^{-4}

表 4.8　$m_\phi = 1$ MeV,$T_\nu = 0.5$ MeV に対する Γ^{trans} の値 ($T_\phi = 0.99T_\nu$)

粒子 a	散乱過程	$\Gamma^{\text{trans}}_{\rho_a}$	$\Gamma^{\text{trans}}_{n_a}$
Z'	$Z'\nu \leftrightarrow \phi\bar{\nu}$	-9.36×10	-2.15×10^2
ν	$Z'\nu \leftrightarrow \phi\bar{\nu}$	-3.33×10^{-8}	-1.66×10^{-7}
ϕ	$\phi\bar{\nu} \leftrightarrow Z'\nu$	2.07×10^{-9}	1.21×10^{-10}
$\bar{\nu}$	$\phi\bar{\nu} \leftrightarrow Z'\nu$	2.13×10^{-7}	3.43×10^{-8}
Z'	$Z'\phi \leftrightarrow \nu\nu'$	2.35×10^{-2}	2.46×10^{-2}
ϕ	$Z'\phi \leftrightarrow \nu\nu$	1.10×10^{-10}	2.23×10^{-11}
ν	$\nu\nu \leftrightarrow Z'\phi$	-5.80×10^{-10}	-8.09×10^{-11}

表 4.9　$m_\phi = 0.1$ MeV,$T_\nu = 1$ MeV に対する Γ^{trans} の値 ($T_\phi = 0.99 T_\nu$)

粒子 a	散乱過程	$\Gamma^{\mathrm{trans}}_{\rho_a}$	$\Gamma^{\mathrm{trans}}_{n_a}$
Z'	$Z'\nu \leftrightarrow \phi\bar{\nu}$	-4.01×10	-5.02×10
ν	$Z'\nu \leftrightarrow \phi\bar{\nu}$	-1.98×10^{-4}	-1.77×10^{-3}
ϕ	$\phi\bar{\nu} \leftrightarrow Z'\nu$	1.69×10^{-4}	2.18×10^{-5}
$\bar{\nu}$	$\phi\bar{\nu} \leftrightarrow Z'\nu$	1.96×10^{-3}	4.42×10^{-4}
Z'	$Z'\phi \leftrightarrow \nu\nu$	1.78×10^{-1}	1.93×10^{-1}
ϕ	$Z'\phi \leftrightarrow \nu\nu$	4.88×10^{-5}	1.33×10^{-5}
ν	$\nu\nu \leftrightarrow Z'\phi$	-8.18×10^{-3}	-5.43×10^{-4}

表 4.10　$m_\phi = 0.1$ MeV,$T_\nu = 0.5$ MeV に対する Γ^{trans} の値 ($T_\phi = 0.99 T_\nu$)

粒子 a	散乱過程	$\Gamma^{\mathrm{trans}}_{\rho_a}$	$\Gamma^{\mathrm{trans}}_{n_a}$
Z'	$Z'\nu \leftrightarrow \phi\bar{\nu}$	-2.05×10	-7.93×10
ν	$Z'\nu \leftrightarrow \phi\bar{\nu}$	-5.50×10^{-9}	-1.98×10^{-8}
ϕ	$\phi\bar{\nu} \leftrightarrow Z'\nu$	9.55×10^{-10}	5.31×10^{-11}
$\bar{\nu}$	$\phi\bar{\nu} \leftrightarrow Z'\nu$	1.12×10^{-7}	2.55×10^{-8}
Z'	$Z'\phi \leftrightarrow \nu\nu$	1.52×10^{-1}	1.59×10^{-1}
ϕ	$Z'\phi \leftrightarrow \nu\nu$	2.38×10^{-10}	6.29×10^{-11}
ν	$\nu\nu \leftrightarrow Z'\phi$	-3.74×10^{-9}	-4.56×10^{-10}

第 5 章

まとめと今後の課題

本論文では、Majoron のパラメータ空間に対して、先行研究よりも更に広い範囲で制限を付けるため、繰り込み可能な $L_\mu - L_\tau$ 模型を用いた際に、$U(1)_{L_\mu - L_\tau}$ ゲージボソン Z' と軽いスカラー粒子 ϕ が同時期に存在するような状況を考えた。このような状況を考えた場合、初期宇宙の時間発展の様子は変化する。そこで、まずは Z' と ϕ が共存することによる変化について議論し、新たに考えるべき発展方程式を示した。

次に、Z' と ϕ が共存することによって生じる散乱過程 $Z'\nu \leftrightarrow \phi\bar{\nu}$、$Z'\phi \leftrightarrow \nu\nu$ に対して、エネルギー・粒子数遷移率を求めるために不変振幅を求めた。求めた不変振幅を用いてエネルギー・粒子数遷移率を限定的な場合に対して数値計算し、$Z' - \phi$ 散乱の寄与について調べた。これによると、初期宇宙の時間発展において、電子対消滅が終わる前には $Z' - \phi$ 散乱は影響を及ぼし得るが、電子対消滅が終わった後には $Z' - \phi$ 散乱の寄与は極めて小さくなり、Z' が減少する寄与以外は無視できるということである。

今回行った計算では、化学ポテンシャルを無視し、ϕ の温度が T_ν よりも 1 桁小さい、もしくはほとんど同じ、という 2 種類の仮定をした。実際は 4.2 節で導出した発展方程式を解きながら T, μ を決定していくことになる。また、そもそも Majoron がどの時期に生じるかを考える必要がある。今回行った計算では、電子対消滅が終わる前は取り入れるべき $Z' - \phi$ 散乱による寄与があるという結論であるが、その時点で Majoron が生じているかはモデルに依存する。そこで、実際に微分方程式を解く際は、Majoron の初期条件として、

1. 宇宙初期にはほとんど存在していない。
2. 何らかの理由で宇宙初期から存在し、他の粒子と共に熱平衡状態にある。

の両者をそれぞれ考える必要がある (少しだけ存在する様な場合は初期条件の付けようがないため考えない)。

今回計算した結果は、ニュートリノへの寄与は全て無視できるということを示しているが、例えば $Z'\phi \leftrightarrow \nu\nu$ はニュートリノの数を変える反応であるため、$N_{\rm eff}$ を変えることが期待される。そのため、不変振幅の計算及びコードに誤りが無いかはもう少し確認する必要がある。また、今後解かなければならない微分方程式は積分を含んでいる。そのため、例えば 4 次のルンゲクッタ法を用いる場合に、1 ステップ進むごとに大量の積分を計算しなければならない。これらの遷移率の計算は、1 つあたりに数十秒かかるため、微分方程式の刻み幅を考えると現実的ではない。よって、遷移率に関する数表を作成し、微分方程式を解く必要がある。

付録 A

熱力学に関する量

A.1　温度と化学ポテンシャルの方程式

ここでは [6] に従って温度と化学ポテンシャルの時間発展方程式を導出する。

ある粒子が熱浴と十分素早く反応し、熱平衡になっている状況を考える。このとき、粒子は熱平衡分布関数 f_{EQ} に従う。

$$f_{EQ} = \frac{1}{\exp(\frac{E-\mu}{T}) \pm 1} \tag{A.1}$$

温度 T と化学ポテンシャル μ は時間 t の関数と見なせるため、粒子のエネルギー密度と数密度は

$$\rho = \rho(T(t), \mu(t)),\ n = n(T(t), \mu(t)) \tag{A.2}$$

と書ける。よって、$\rho,\ n$ の時間微分は

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial T}\frac{dT}{dt} + \frac{\partial\rho}{\partial\mu}\frac{d\mu}{dt} \tag{A.3}$$

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\partial n}{\partial T}\frac{dT}{dt} + \frac{\partial n}{\partial\mu}\frac{d\mu}{dt} \tag{A.4}$$

となるため、これを $dT/dt,\ d\mu/dt$ について解くことで次式を得る。

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{\det J}\left(\frac{\partial\rho}{\partial\mu}\frac{dn}{dt} - \frac{\partial n}{\partial\mu}\frac{d\rho}{dt}\right) \tag{A.5}$$

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{1}{\det J}\left(\frac{\partial n}{\partial T}\frac{d\rho}{dt} - \frac{\partial\rho}{\partial T}\frac{dn}{dt}\right) \tag{A.6}$$

ここで

$$\det J \equiv \frac{\partial n}{\partial T}\frac{\partial\rho}{\partial\mu} - \frac{\partial n}{\partial\mu}\frac{\partial\rho}{\partial T} \tag{A.7}$$

である。エネルギー密度と数密度に関するボルツマン方程式は (2.13),(2.14) 式で与えられた。

$$\frac{d\rho}{dt} + 3H(\rho + P) = \int\frac{d^3\mathrm{p}}{(2\pi)^3}EC[f] = \frac{\delta\rho}{\delta t} \tag{A.8}$$

$$\frac{dn}{dt} + 3Hn = \int\frac{d^3\mathrm{p}}{(2\pi)^3}C[f] = \frac{\delta n}{\delta t} \tag{A.9}$$

(A.5),(A.6) 式に (A.8),(A.9) 式を代入することで、次の温度と化学ポテンシャルの時間発展方程式を得る。

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{1}{\det J}\left[-3H\left((\rho+P)\frac{\partial n}{\partial \mu} - n\frac{\partial \rho}{\partial \mu}\right) + \frac{\partial n}{\partial \mu}\frac{\delta \rho}{\delta t} - \frac{\partial \rho}{\partial \mu}\frac{\delta n}{\delta t}\right] \tag{A.10}$$

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{1}{\det J}\left[-3H\left((\rho+P)\frac{\partial n}{\partial T} - n\frac{\partial \rho}{\partial T}\right) + \frac{\partial n}{\partial T}\frac{\delta \rho}{\delta t} - \frac{\partial \rho}{\partial T}\frac{\delta n}{\delta t}\right] \tag{A.11}$$

A.2　熱力学量の公式

ここでは、熱平衡分布に従う粒子のエネルギー密度、粒子数密度、圧力とそれらの微分についてまとめておく [6]。これらの公式は数値計算で大変有用である。

フェルミディラック分布の場合

$$n^{\mathrm{FD}} = \frac{g}{2\pi^2}\int_m^\infty dE\frac{E\sqrt{E^2-m^2}}{e^{(E-\mu)/T}+1} \tag{A.12}$$

$$\rho^{\mathrm{FD}} = \frac{g}{2\pi^2}\int_m^\infty dE\frac{E^2\sqrt{E^2-m^2}}{e^{(E-\mu)/T}+1} \tag{A.13}$$

$$p^{\mathrm{FD}} = \frac{g}{6\pi^2}\int_m^\infty dE\frac{\left(E^2-m^2\right)^{3/2}}{e^{(E-\mu)/T}+1} \tag{A.14}$$

$$\frac{\partial n^{\mathrm{FD}}}{\partial T} = \frac{g}{2\pi^2}\int_m^\infty dEE\sqrt{E^2-m^2}\frac{(E-\mu)}{4T^2}\cosh^{-2}\left(\frac{E-\mu}{2T}\right) \tag{A.15}$$

$$\frac{\partial \rho^{\mathrm{FD}}}{\partial T} = \frac{g}{2\pi^2}\int_m^\infty dEE^2\sqrt{E^2-m^2}\frac{(E-\mu)}{4T^2}\cosh^{-2}\left(\frac{E-\mu}{2T}\right) \tag{A.16}$$

$$\frac{\partial n^{\mathrm{FD}}}{\partial \mu} = \frac{g}{2\pi^2}\int_m^\infty dEE\sqrt{E^2-m^2}\left[2T\cosh\left(\frac{E-\mu}{T}\right)+2T\right]^{-1} \tag{A.17}$$

$$\frac{\partial \rho^{\mathrm{FD}}}{\partial \mu} = \frac{g}{2\pi^2}\int_m^\infty dEE^2\sqrt{E^2-m^2}\left[2T\cosh\left(\frac{E-\mu}{T}\right)+2T\right]^{-1}. \tag{A.18}$$

ボースアインシュタイン分布の場合

$$n^{\mathrm{BE}} = \frac{g}{2\pi^2}\int_m^\infty dE\frac{E\sqrt{E^2-m^2}}{e^{(E-\mu)/T}-1}, \tag{A.19}$$

$$\rho^{\mathrm{BE}} = \frac{g}{2\pi^2}\int_m^\infty dE\frac{E^2\sqrt{E^2-m^2}}{e^{(E-\mu)/T}-1}, \tag{A.20}$$

$$p^{\mathrm{BE}} = \frac{g}{6\pi^2}\int_m^\infty dE\frac{\left(E^2-m^2\right)^{3/2}}{e^{(E-\mu)/T}-1}, \tag{A.21}$$

$$\frac{\partial n^{\mathrm{BE}}}{\partial T} = \frac{g}{2\pi^2}\int_m^\infty dEE\sqrt{E^2-m^2}\frac{(E-\mu)}{4T^2}\sinh^{-2}\left(\frac{E-\mu}{2T}\right), \tag{A.22}$$

$$\frac{\partial \rho^{\mathrm{BE}}}{\partial T} = \frac{g}{2\pi^2}\int_m^\infty dEE^2\sqrt{E^2-m^2}\frac{(E-\mu)}{4T^2}\sinh^{-2}\left(\frac{E-\mu}{2T}\right), \tag{A.23}$$

$$\frac{\partial n^{\mathrm{BE}}}{\partial \mu} = \frac{g}{2\pi^2}\int_m^\infty dEE\sqrt{E^2-m^2}\frac{1}{4T}\sinh^{-2}\left(\frac{E-\mu}{2T}\right), \tag{A.24}$$

$$\frac{\partial \rho^{\mathrm{BE}}}{\partial \mu} = \frac{g}{2\pi^2}\int_m^\infty dEE^2\sqrt{E^2-m^2}\frac{1}{4T}\sinh^{-2}\left(\frac{E-\mu}{2T}\right). \tag{A.25}$$

ボルツマン分布の場合

$$n^{\mathrm{MB}} = g\frac{m^2 T e^{\mu/T}}{2\pi^2} K_2\left(\frac{m}{T}\right), \tag{A.26}$$

$$\rho^{\mathrm{MB}} = g\frac{m^2 T e^{\mu/T}}{2\pi^2} \left[mK_1\left(\frac{m}{T}\right) + 3TK_2\left(\frac{m}{T}\right)\right], \tag{A.27}$$

$$p^{\mathrm{MB}} = g\frac{m^2 T e^{\mu/T}}{2\pi^2} TK_2\left(\frac{m}{T}\right), \tag{A.28}$$

$$\tag{A.29}$$

Kj は第 2 種変形ベッセル関数である。

また、massless の場合は次のようになる ($x \equiv \exp(\mu/T)$)。

熱力学量	FD 分布	BE 分布	MB 分布
n	$-g\frac{T^3}{\pi^2}\mathrm{Li}_3(-x)$	$g\frac{T^3}{\pi^2}\mathrm{Li}_3(x)$	$g\frac{T^3}{\pi^2}x$
ρ	$-g\frac{3T^4}{\pi^2}\mathrm{Li}_4(-x)$	$g\frac{3T^4}{\pi^2}\mathrm{Li}_4(x)$	$g\frac{3T^4}{\pi^2}x$
p	$\rho/3$	$\rho/3$	$\rho/3$
$\partial n/\partial T$	$g\frac{T(\mu\mathrm{Li}_2(-x)-3T\mathrm{Li}_3(-x))}{\pi^2}$	$g\frac{T(3T\mathrm{Li}_3(x)-\mu\mathrm{Li}_2(x))}{\pi^2}$	$g\frac{T(3T-\mu)}{\pi^2}x$
$\partial\rho/\partial T$	$g\frac{3T^2(\mu\mathrm{Li}_3(-x)-4T\mathrm{Li}_4(-x))}{\pi^2}$	$g\frac{3T^2(4T\mathrm{Li}_4(x)-\mu\mathrm{Li}_3(x))}{\pi^2}$	$g\frac{3T^2(4T-\mu)}{\pi^2}x$
$\partial n/\partial\mu$	$-g\frac{T^2}{\pi^2}\mathrm{Li}_2(-x)$	$g\frac{T^2}{\pi^2}\mathrm{Li}_2(x)$	$g\frac{T^2}{\pi^2}x$
$\partial\rho/\partial\mu$	$-g\frac{3T^3}{\pi^2}\mathrm{Li}_3(-x)$	$g\frac{3T^3}{\pi^2}\mathrm{Li}_3(x)$	$g\frac{3T^3}{\pi^2}x$

Li は多重対数関数である。

更に、massless で $\mu = 0$ の場合、次のようになる。

熱力学量	FD 分布	BE 分布	MB 分布
n	$g\frac{3}{4}\frac{\zeta(3)}{\pi^2}T^3$	$g\frac{\zeta(3)}{\pi^2}T^3$	$g\frac{1}{\pi^2}T^3$
ρ	$g\frac{7}{8}\frac{\pi^2}{30}T^4$	$g\frac{\pi^2}{30}T^4$	$g\frac{3}{\pi^2}T^4$
p	$\rho/3$	$\rho/3$	$\rho/3$
$\partial n/\partial T$	$3n/T$	$3n/T$	$3n/T$
$\partial\rho/\partial T$	$4\rho/T$	$4\rho/T$	$4\rho/T$

付録 B

2 体-2 体散乱における衝突項

ここでは、[30–32] に基づき、散乱過程 $1(p_1)+2(p_2)\leftrightarrow 3(p_3)+4(p_4)$ に対する衝突項積分をあらわな表式にすることを考える。この過程に対する衝突項積分は次式で与えられる。

$$\mathcal{I}=\int\prod_{i=2}^{4}\left(\frac{d^3\mathrm{p}_i}{2E_i(2\pi)^3}\right)\Lambda\left(f\right)\times|\mathcal{M}|^2(2\pi)^4\delta^4\left(p_1+p_2-p_3-p_4\right) \tag{B.1}$$

Lorentz 不変な積分測度に対する公式

$$\frac{d^3p_i}{2E_i}=d^4p_i\delta(p_i^2-m_i^2)\Theta(p_i^0) \tag{B.2}$$

を用いて p_4 積分を実行するすると、

$$\mathcal{I}=\int d\Pi_2 d\Pi_3\Lambda(\{f_i\})(2\pi)\delta(p_4^2-m_4^2)\Theta(p_4^0)\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}|^2\Big|_{p_4=p_1+p_2-p_3} \tag{B.3}$$

残りの積分表式を与えるために、$\mathbf{p_1}$ が z 軸方向となるような座標を次のように導入する。

$$\begin{aligned}
p_1&=(E_1,0,0,\mathrm{p}_1) && \text{(B.4)}\\
p_2&=(E_2,\mathrm{p}_2\sin\alpha\cos\beta,\mathrm{p}_2\sin\alpha\sin\beta,\mathrm{p}_2\cos\alpha) && \text{(B.5)}\\
p_3&=(E_3,\mathrm{p}_3\sin\theta\cos\mu,\mathrm{p}_3\sin\theta\sin\mu,\mathrm{p}_3\cos\theta) && \text{(B.6)}\\
p_4&=p_1+p_2-p_3 && \text{(B.7)}
\end{aligned}$$

z 軸周りの回転に対する対称性から、$\mu=0$ と取ることができる。

$$\begin{aligned}
p_1&=(E_1,0,0,\mathrm{p}_1) && \text{(B.8)}\\
p_2&=(E_2,\mathrm{p}_2\sin\alpha\cos\beta,\mathrm{p}_2\sin\alpha\sin\beta,\mathrm{p}_2\cos\alpha) && \text{(B.9)}\\
p_3&=(E_3,\mathrm{p}_3\sin\theta,0,\mathrm{p}_3\cos\theta) && \text{(B.10)}\\
p_4&=p_1+p_2-p_3 && \text{(B.11)}
\end{aligned}$$

また、p_2,p_3 の微小体積要素は

$$\begin{aligned}
d^3p_2&=p_2^2dp_2d\cos\alpha d\beta && \text{(B.12)}\\
d^3p_3&=p_3^2dp_3d\cos\theta d\mu && \text{(B.13)}
\end{aligned}$$

である。よって、μ 積分は容易に実行できる。

$$\mathcal{I}=\frac{1}{4(2\pi)^4}\int\frac{d\mathrm{p}_2\mathrm{p}_2^2}{E_2}\frac{d\mathrm{p}_3\mathrm{p}_3^2}{E_3}\Lambda\left(\{f_i\}\right)\int d\cos\theta d\cos\alpha\int_0^{2\pi}d\beta\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}|^2\delta(f(\beta))\Theta\left(p_4^0\right) \tag{B.14}$$

β 積分はデルタ関数によって計算できるため、この積分について説明する。
デルタ関数の引数について

$$f(\beta) \equiv p_4^2 - m_4^2 \tag{B.15}$$

とする。β 積分を実行するために次のデルタ関数の公式を用いる。

$$\int d\beta\delta(f(\beta)) = \sum_i \int d\beta \frac{1}{|f'(\beta)|_{\beta=\beta_i}} \delta(\beta - \beta_i) \tag{B.16}$$

β_i は $f(\beta) = 0$ の解である。また、$f(\beta)$ の微分は

$$\frac{df(\beta)}{d\beta} = -2p_2p_3 \sin\alpha \sin\theta \sin\beta \tag{B.17}$$

であり、$f(\beta) = 0$ の解は

$$\begin{aligned} p_4^2 - m_4^2 &= (p_1 + p_2 - p_3)^2 - m_4^2 \\ &= \omega + 2[\mathrm{p}_2\mathrm{p}_3(\sin\alpha\sin\theta\cos\beta + \cos\alpha\cos\theta) - \mathrm{p}_1\mathrm{p}_2\cos\alpha] \end{aligned} \tag{B.18}$$

より

$$\cos\beta_i = -\frac{1}{2\mathrm{p}_2\mathrm{p}_3\sin\alpha\sin\theta}\left[\omega + 2\left(\mathrm{p}_2\mathrm{p}_3\cos\alpha\cos\theta - \mathrm{p}_1\mathrm{p}_2\cos\alpha\right)\right] \tag{B.19}$$

となる。ここで、

$$\omega \equiv Q + 2(\gamma + \mathrm{p}_1\mathrm{p}_3\cos\theta) \tag{B.20}$$
$$Q \equiv m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 - m_4^2 \tag{B.21}$$
$$\gamma \equiv E_1E_2 - E_2E_3 - E_3E_1 \tag{B.22}$$

と置いた。これより $\beta_i = \pm\beta_0,\ (0 \leq \beta_0 \leq \pi)$ なる 2 つの解が存在する。よって、

$$\begin{aligned} \left|\frac{df(\beta)}{d\beta}\right|_{\beta=\pm\beta_0} &= |\mp 2\mathrm{p}_2\mathrm{p}_3\sin\alpha\sin\theta\sin\beta_0| \\ &= \left|2\mathrm{p}_2\mathrm{p}_3\sin\alpha\sin\theta\sqrt{1-\cos\beta_0}\right| \\ &= |2\mathrm{p}_2\mathrm{p}_3\sin\alpha\sin\theta|\frac{1}{|2\mathrm{p}_2\mathrm{p}_3\sin\alpha\sin\theta|} \\ &\quad \times \sqrt{(2\mathrm{p}_2\mathrm{p}_3\sin\alpha\sin\theta)^2 - \left[\omega + 2\left(\mathrm{p}_2\mathrm{p}_3\cos\alpha\cos\theta - \mathrm{p}_1\mathrm{p}_2\cos\alpha\right)\right]^2} \\ &= \sqrt{a\cos^2\alpha + b\cos\alpha + c} \end{aligned} \tag{B.23}$$

ここで、

$$a \equiv -4\mathrm{p}_2^2\left(\mathrm{p}_1^2 + \mathrm{p}_3^2 - 2\mathrm{p}_1\mathrm{p}_3\cos\theta\right) \tag{B.24}$$
$$b \equiv 4\omega\mathrm{p}_2\left(\mathrm{p}_1 - \mathrm{p}_3\cos\theta\right) \tag{B.25}$$
$$c \equiv 4\mathrm{p}_2^2\mathrm{p}_3^2\sin^2\theta - \omega^2 \tag{B.26}$$

である。

$\cos\beta$ は、$\cos^2\beta_i \leq 1$、つまり $\sin^2\beta_0 \geq 0$ を満たさなければならない。$\sin^2\beta_0 \geq 0$ の両辺に $(2\mathrm{p}_2\mathrm{p}_3\sin\alpha\cos\theta)^2$ をかけて

$$\begin{aligned}(2\mathrm{p}_2\mathrm{p}_3\sin\alpha\cos\theta)^2\sin^2\beta_0 &\geq 0 \\ \therefore \left|\frac{df(\beta)}{d\beta}\right|_{\beta=\pm\beta_0} &\geq 0\end{aligned} \tag{B.27}$$

である。これを踏まえて β 積分を実行すると

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} d\beta \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2\delta(f(\beta))\Theta\left(p_4^0\right) &= \int_0^{\pi} d\beta \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2\frac{1}{|f'(\beta_0)|}\delta\left(\beta-\beta_0\right)\Theta\left(p_4^0\right)\times 2 \\ &= \frac{2}{|f'\left(\beta_0\right)|}\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}|^2\Big|_{\beta=\beta_0}\Theta\left(p_4^0\right)\Theta\left(\left|f'\left(\beta_0\right)\right|^2\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{a\cos^2\alpha+b\cos\alpha+c}}\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}|^2\Theta\left(a\cos^2\alpha+b\cos\alpha+c\right)\Theta\left(p_4^0\right)\end{aligned} \tag{B.28}$$

となる。

残りの角度積分について見ていく。$\cos\alpha$ 積分については、$\Theta\left(a\cos^2\alpha+b\cos\alpha+c\right)$ と $a\leq 0$ であることから、$a\cos^2\alpha+b\cos\alpha+c=0$ が実数解を 2 つ持つことに対応する。これは $b^2-4ac>0$ と同値であるため、$\Theta\left(a\cos^2\alpha+b\cos\alpha+c\right)$ を $\Theta\left(b^2-4ac\right)$ で置き換えることにする。2 つの実数解を $\cos\alpha_\pm$ とすると

$$\cos\alpha_\pm = \frac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{B.29}$$

である。よって、$\cos\alpha$ 積分は

$$\int_{\cos\alpha_-}^{\cos\alpha_+} d\cos\alpha\frac{1}{\sqrt{a\cos^2\alpha+b\cos\alpha+c}}\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{\sqrt{-a}}\int_0^{\pi}dx\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}|^2 \tag{B.30}$$

となる。ここで、変数変換

$$x = \frac{\cos\alpha_+ + \cos\alpha_-}{2} + \left|\frac{\cos\alpha_+ - \cos\alpha_-}{2}\right|\cos\alpha \tag{B.31}$$

を用いた。

$\cos\theta$ 積分は $\Theta\left(b^2-4ac\right)$ を含むため、$b^2-4ac\geq 0$ の部分が積分に寄与してくる。よって b^2-4ac を調べる必要がある。これを計算すると

$$b^2-4ac = (4\mathrm{p}_2\mathrm{p}_3\sin\theta)^2\left(-4\mathrm{p}_1^2\mathrm{p}_1^3\cos^2\theta - 4\mathrm{p}_1\mathrm{p}_3(Q+2\gamma+2\mathrm{p}_2^2)\cos\theta + 4\mathrm{p}_2^2(\mathrm{p}_1^2+\mathrm{p}_3^2) - (Q+2\gamma)^2\right) \tag{B.32}$$

よって、$b^2-4ac=0$ より

$$(4\mathrm{p}_2\mathrm{p}_3\sin\theta)^2\left(-4\mathrm{p}_1^2\mathrm{p}_1^3\cos^2\theta - 4\mathrm{p}_1\mathrm{p}_3(Q+2\gamma+2\mathrm{p}_2^2)\cos\theta + 4\mathrm{p}_2^2(\mathrm{p}_1^2+\mathrm{p}_3^2) - (Q+2\gamma)^2\right) = 0$$

$$\therefore \cos\theta_\pm = -\frac{Q+2\gamma+2\mathrm{p}_2^2\mp 2\mathrm{p}_2\sqrt{Q+\mathrm{p}_1^2+\mathrm{p}_2^2+\mathrm{p}_3^2+2\gamma}}{2\mathrm{p}_1\mathrm{p}_3} \tag{B.33}$$

となる。$\cos\theta_\pm$ によって囲まれる領域が $\cos\theta$ の積分領域となる。$\cos\theta$ が [-1,1] の外に出ることもあるので注意する。考える状況によっては $\cos\theta_+ \leq -1$ のような、非物理的な状況を実現することもあるため、数値計算を行うときは $\Theta(1+\cos\theta_+)$,$\Theta(1-\cos\theta_-)$ を被積分関数にかけておくとよい。

以上より、衝突項は

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2(2\pi)^4} \int \frac{d\mathrm{p}_2 \mathrm{p}_2^2}{E_2} \frac{d\mathrm{p}_3 \mathrm{p}_3^2}{E_3} \Lambda\left(\{f_i\}\right) \int_{\max(\cos\theta_-,-1)}^{\min(\cos\theta_+,1)} d\cos\theta \frac{1}{\sqrt{-a}} \int_0^\pi dx \sum_{\mathrm{spins}} |\mathcal{M}|^2 \Theta\left(p_4^0\right) \tag{B.34}$$

となる。

付録 C

崩壊過程に対する遷移率

ここでは、崩壊・逆崩壊過程 $a \leftrightarrow b+c$ に関して、粒子 a のエネルギー遷移率、粒子数遷移率を計算する。崩壊後の粒子 b, c の温度と化学ポテンシャルは同じであるとする (T, μ とする)。また、衝突項内ではボルツマン分布による近似を用いる。

$a \leftrightarrow b+c$ による衝突項 $C_a(p_a)$ は次式で与えられる。

$$C_a(p_a) = -\frac{1}{2E_a}\int d\Pi_b d\Pi_c (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_a - p_b - p_c) \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{a\to b+c}|^2 \tag{C.1}$$

$$\times \left[f_a(\mathrm{p}_a)(1 \pm f_b(\mathrm{p}_b))(1 \pm f_c(\mathrm{p}_c)) - f_b(\mathrm{p}_b) f_c(\mathrm{p}_c)(1 \pm f_a(\mathrm{p}_a))\right] \tag{C.2}$$

粒子 b と c が同じである場合、重複カウントを避けるため右辺を 2 で割ることに注意する。衝突項内では MB 分布で近似するため、(C.2) 式は

$$C_a(p_a) = -\frac{1}{2E_a}\int d\Pi_b d\Pi_c (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_a - p_b - p_c) \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{a\to b+c}|^2$$
$$\times \left[f_a(p_a) - f_b(p_b) f_c(p_c)\right] \tag{C.3}$$

となる。更に、崩壊幅 Γ_a を用いると (C.3) は

$$C_a(\mathrm{p}_a) = -\frac{g_a m_a \Gamma_a}{E_a}\left(e^{-(E_a-\mu_a)/T_a} - e^{-(E_a-2\mu)/T}\right) \tag{C.4}$$

$$\Gamma_a = \frac{1}{2m_a}\int d\Pi_b d\Pi_c (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_a - p_i - p_j)\frac{1}{g_a}\sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{a\to i+j}|^2 \tag{C.5}$$

となる。g_a は粒子 a の自由度である。(C.4) を積分することで、エネルギー遷移率と粒子数遷移率をもとめることができる。

エネルギー遷移率

$$\left.\frac{\delta\rho_a}{\delta t}\right|_{a\leftrightarrow b+c} = \int \frac{d^3 p_a}{(2\pi)^3} E_a C_a(\mathrm{p}_a) \tag{C.6}$$

$$= \frac{m_a g_a \Gamma_a}{2\pi^2}\int_0^\infty d\mathrm{p}_a \mathrm{p}_a^2 \left(e^{-(E_a-2\mu)/T} - e^{-(E_a-\mu_a)/T_a}\right) \tag{C.7}$$

$$= \frac{m_a^3 g_a \Gamma_a}{2\pi^2}\left[T e^{2\mu/T} K_2\left(\frac{m_a}{T}\right) - T_a e^{\mu_a/T_a} K_2\left(\frac{m_a}{T_a}\right)\right] \tag{C.8}$$

粒子数遷移率

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\delta n_a}{\delta t}\right|_{a\leftrightarrow b+c} &= \int \frac{d^3p_a}{(2\pi)^3} C_a\left(\mathrm{p}_a\right) && \text{(C.9)}\\
&= \frac{m_a g_a \Gamma_a}{2\pi^2}\int_0^\infty d\mathrm{p}_a \frac{\mathrm{p}_a^2}{E_a}\left(e^{-(E_a-2\mu)/T} - e^{-(E_a-\mu_a)/T_a}\right) && \text{(C.10)}\\
&= \frac{m_a^2 g_a \Gamma_a}{2\pi^2}\left[T e^{2\mu/T} K_1\left(\frac{m_a}{T}\right) - T_a e^{\mu_a/T_a} K_1\left(\frac{m_a}{T_a}\right)\right] && \text{(C.11)}
\end{aligned}
$$

K_j は第 2 種変形ベッセル関数である。

付録 D

VEGAS algorithm

ここでは、モンテカルロ積分のアルゴリズムの 1 つである VEGAS algorithm の原理について説明する [33]。VEGAS algorithm は、関数 $f(x)$ の積分について、まずランダムに値を振ることで $f(x)$ に関する情報を集め、その情報を元に乱数の振り方を調節していくアルゴリズムである。次の積分を考える。

$$I = \int_a^b dx f(x) \tag{D.1}$$

これは、ヤコビアン $J(y)$ を用いて次のように書き換えられる。

$$I = \int_0^1 dy J(y) f(x(y)) \tag{D.2}$$

単純なモンテカルロによる推定では、(D.2) 式は次のように評価される。

$$I \approx I_{\mathrm{MC}} \equiv \frac{1}{N_{\mathrm{ev}}} \sum_y J(y) f(x(y)) \tag{D.3}$$

ここで、和は区間 [0,1] に振った乱数の数 N_{ev} にわたってとられている。推定値 I_{MC} は、それ自身が乱数であり、その平均は積分 I の正確な値となる。また、その分散は次式で与えられる。

$$\sigma_I^2 = \frac{1}{N_{ev}} \left(\int_0^1 dy J^2(y) f^2(x(y)) - I^2 \right) \tag{D.4}$$

$$= \frac{1}{N_{ev}} \left(\int_a^b dx J(y(x)) f^2(x) - I^2 \right) \tag{D.5}$$

となる。モンテカルロ積分の誤差は $\mathcal{O}(1/\sqrt{(}V_{ev}))$ であり、サンプル数にのみ依存する。これは多次元になっても同様である。例えば数値積分の 1 種である台形公式は、積分の次元が大きい場合に計算の精度を上げようとすると、全ての変数に対して刻み幅を増やす必要があり、計算時間が跳ね上がる。一方で、モンテカルロ法は積分の次元が大きくなっても誤差はサンプル数にしか依存しないため、計算時間を格段に早くすることができる。そのため、多次元積分で有用な手法となっている。

VEGAS の乱数の振り方を決める操作 (マッピング) は、x 軸を次のように N_g 分割することで行われる。

$$x_0 = a \tag{D.6}$$

$$x_1 = x_0 + \Delta x_0 \tag{D.7}$$

$$\cdots \tag{D.8}$$

$$x_{N_g} = x_{N_g-1} + \Delta x_{N_g-1} = b. \tag{D.9}$$

点 x_i において変数変換 $y = i/N_g$ を行うと、次の関係が得られる。

$$x(y) \equiv x_{i(y)} + \Delta x_{i(y)} \delta(y) \tag{D.10}$$

ここで、

$$i(y) \equiv \text{floor}\,(yN_g) \tag{D.11}$$
$$\delta(y) \equiv yN_g - i(y) \tag{D.12}$$

であり、それぞれ yN_g の整数部分と小数部分となっている。個の変換は、y 空間の区間 [0,1] を x 空間のもとの積分領域 $[a.b]$ に写像するものである。x 空間で間隔が異なる区間 Δx_i は、y 空間では一様な間隔の区間 $\Delta y = 1/N_g$ に写される。この時のヤコビアンは、(D.10)-(D.12) 式より

$$J(y) = \frac{dx(y)}{dy} = N_g \Delta x_{i(y)} \equiv J_{i(y)} \tag{D.13}$$

である。これは、間隔 Δx_i によって値が決まるステップ関数である。

ヤコビアン (D.13) を (D.5) 式に代入することで、モンテカルロ積分による不確かさを得られる。

$$\sigma_I^2 = \frac{1}{N_{ev}} \left(\sum_i J_i \int_{x_i}^{x_i + \Delta x_i} dx f^2(x) - I^2 \right) \tag{D.14}$$

ここで、J_i は独立変数として扱った。(D.14) 式を、拘束条件

$$\sum_i \frac{\Delta x_i}{J_i} = \sum_i \Delta y = 1 \tag{D.15}$$

の下で最小化することを考える。未定乗数 λ を用いて、

$$\frac{d}{dJ_i} \left[\sigma_I^2 - \lambda \left(\sum_j \frac{\Delta x_j}{J_j} - 1 \right) \right] = 0$$
$$\therefore \frac{1}{N_{ev}} \int_{x_i}^{x_i + \Delta x_i} dx f^2(x) = \lambda \frac{\Delta x_i}{J_i^2} \tag{D.16}$$

従って、(D.14) が最小となる条件は

$$\frac{J_i^2}{\Delta x_i} \int_{x_i}^{x_i + \Delta x_i} dx f^2(x) = \text{const} \tag{D.17}$$

である。これは、$J^2 f^2$ の平均値が、どの区間 Δx_i においても等しくなる時、グリッドが最適になるということである。

上記で定義された x_i の集合が VEGAS マップを構成する。モンテカルロ積分を最適化するため、VEGAS は Δx_i の和を一定に保ちながら区間サイズ Δx_i を変化させることで、ヤコビアンを変化させている。この工程は反復される。反復の過程で被積分関数に関する情報を蓄積し、これをもとに改良されたグリッドを構築して新たに積分の推定を行う。このようにして VEGAS マップは複数回の繰り返しによって被積分関数の情報を更新し続け、最適に近い積分値を算出する。次に例を示す。

$$f = FAC \times \int_{-1}^{1} dx_0 \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \int_0^1 dx_3 \exp\left(-100 \times \sum_d (x_d - 0.5)^2\right) \tag{D.18}$$

FAC は積分 f を 1 に規格化する定数である。f は $x_d = 0.5$ に鋭いピークを持つため、ピーク付近に重点的に乱数を発生させないと正しい積分値を得ることができない。そこで、積分 f を VEGAS algorithm

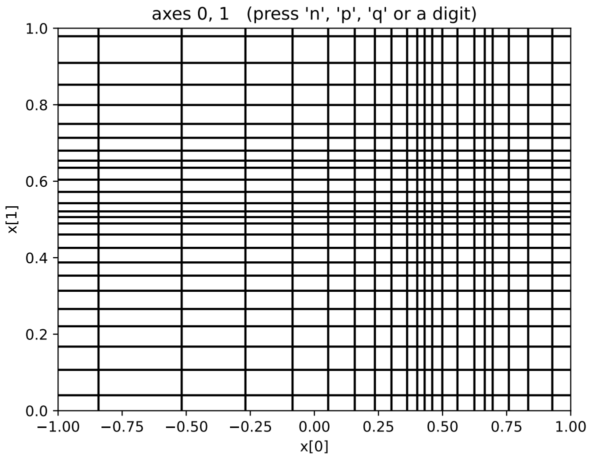


図 D.1　VEGAS による繰り返し処理が 1 回目の時に作製された $x_0 - x_1$ グリッドの様子。ごくわずかにピーク付近への偏りが見られるものの、このグリッドでは、正しい積分値からは大きくずれる値となる。

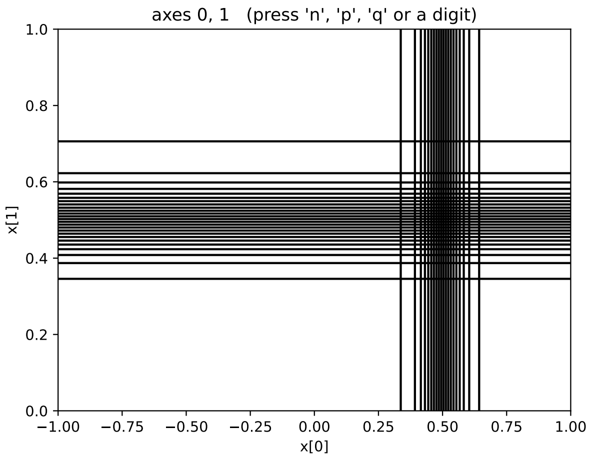


図 D.2　繰り返し処理 10 回目の時に作製された $x_0 - x_1$ グリッドの様子。ピーク付近に重点的に乱数を集めている様子が見える。

で評価した場合、どのように乱数が振られているかを図 (D.1),(D.2) に示す。図 (D.1),(D.2) のように乱数を 1000 点振り、積分 f を計算すると次のようになる。

$$f_{\text{iteration}=1} = 0.053 \tag{D.19}$$
$$f_{\text{iteration}=10} = 0.9973 \tag{D.20}$$

モンテカルロ法は乱数を用いるが、例のように鋭いピークを持つような関数に対しては、ただ乱数を振るのではピーク部分の寄与を正しく取り入れることができず、真値とかけ離れた積分値を推定することになる。VEGAS algorithm は、乱数を振ってグリッドを作製することを何度も繰り返すことで、図 (D.1) から (D.2) へと乱数の振り方を最適化していく。

謝辞

本研究を行うにあたり、指導教官である佐藤丈教授には、研究に関して数多くのご指導を頂きました。本研究だけでなく、勉強のゼミから発表練習、TA、学部生の頃の授業など、大学生活の上でも大変お世話になりました。心より感謝申し上げます。

本研究を共に行ってくださった梁正樹氏には、研究に関して何度も議論をさせていただき、多くのお時間をいただきました。研究面で多大なサポートを頂いたことに御礼申し上げます。浅井健人氏には、議論の中で数値計算に関するお話を頂き、本研究で行った計算をするにあたり、様々なご助言を頂きました。深く感謝申し上げます。仁尾真紀子氏には、ゼミにて熱心なご指導を頂きました。また、本研究の計算の方法である VEGAS 法について教えていただき、計算を進められる希望となりました。感謝に堪えません。

谷井義彰教授、高西康敬氏には、普段のゼミや講義にて大変お世話になりました。また、本研究に先立って研究を行われていた、先輩である粕谷竜太氏には、本研究の基礎的な部分から本質的な部分まで、多大なお力添えを頂きました。厚く感謝申し上げます。

ゼミや研究を進めていて何をやっているかわからなくなり、投げ出したくなる時もありましたが、それでもここまで続けられたのは、熱心に指導して下さった教員の方々、そして、共にゼミを行い、議論を交わし合った同期の存在のおかげです。感謝いたします。

最後に、私がここまで学ぶことができたのは、私を遠くからずっと支援し続けてくれた両親のおかげです。感謝の気持ちでいっぱいです。

2022 年 3 月 22 日　　本多　慧

参考文献

[1] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder , *An Introduction To Quantum Field Theory*, CRC Press, 1995.

[2] E.W.Kolb and M.S.Turner, *The Early Universe*, Basic Books, 1990.

[3] 松原 隆彦, 現代宇宙論―時空と物質の共進化 , 東京大学出版会, 2010.

[4] 松原 隆彦, 宇宙論の物理 下, 東京大学出版会、2014.

[5] Takeshi Araki, Kento Asai, Kei Honda, Ryuta Kasuya, Joe Sato, Takashi Shimomura, Masaki J S Yang, *Resolving the Hubble tension in a* $U(1)L_\mu - L_\tau$ *model with the Majoron*, PTEP 103B05 (2021) [arXiv:2103.07167 [hep-ph]]

[6] M. Escudero Abenza, *Precision early universe thermodynamics made simple:* $N_{\rm eff}$ *and neutrino decoupling in the Standard Model and beyond*, JCAP **05**, 048 (2020) [arXiv:2001.04466 [hep-ph]].

[7] Miguel Escudero *Neutrino decoupling beyond the Standard Model: CMB constraints on the Dark Matter mass with a fast and precise* $N_{\rm eff}$ *evaluation* JCAP,02(2019)007 [arXiv:1812.05605 [hep-ph]]

[8] Escudero, M., Hooper, D., Krnjaic, G. et al. *Cosmology with a very light* $L_\mu - L_\tau$ *gauge boson* J. High Energ. Phys.**2019**, 71 (2019) [arXiv:1901.02010 [hep-ph]]

[9] Miguel Escudero, Samuel J. Witte *A CMB search for the neutrino mass mechanism and its relation to the Hubble tension* Eur. Phys. J. C,**80**,294 (2020) [arXiv:1909.04044 [astro-ph.CO]]

[10] Masahiro Ibe, Shin Kobayashi, Yuhei Nakayama, Satoshi Shirai, *Cosmological constraint on dark photon from* $N_{\rm eff}$ JHEP04(2020)009 [arXiv:1912.12152 [hep-ph]]

[11] J. L. Bernal, L. erde and A. G. Riess, *The trouble with* H_0, JCAP **10**, 019 (2016) [arXiv:1607.05617 [astro-ph.CO]]

[12] Daniel Aloni, Asher Berlin, Melissa Joseph, Martin Schmaltz, Neal Weiner *A Step in Understanding the Hubble Tension*, [arXiv:2111.00014 [astro-ph.CO]]

[13] Licia Verde, Tommaso Treu, Adam G. Riess, *Tensions between the Early and the Late Universe*, Nature Astronomy **3**, 891-895, (2019) [arXiv:1907.10625 [astro-ph.CO]]

[14] Planck Collaboration, N. Aghanim *et al.* , *Planck 2018 results. I. Overview and the cosmological legacy of Planck*, A&A. **641**, A1 (2020) [arXiv:1807.06205 [astro-ph.CO]].

[15] Planck Collaboration, N. Aghanim *et al. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters*, A&A. **641**, A1 (2020) [arXiv:1807.06205 [astro-ph.CO]].

[16] Adam G. Riess, Lucas M. Macri, Samantha L. Hoffmann, Dan Scolnic, Stefano Casertano, Alexei V. Filippenko, Brad E. Tucker, Mark J. Reid, David O. Jones, Jeffrey M. Silverman, Ryan Chornock, Peter Challis, Wenlong Yuan, Peter J. Brown, Ryan J. Foley. *A 2.4% Determination*

of the Local Value of the Hubble Constant, A&A. **643**, A165 (2020) [arXiv:1604.01424 [astro-ph.CO]]

[17] Pablo F. de Salas, Sergio Pastor, *Relic neutrino decoupling with flavour oscillations revisited*, JCAP 07 (2016) 051 [arXiv:1606.06986 [hep-ph]]

[18] Planck Collaboration, N. Aghanim *et al.*, *Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters*, A&A. **641**, A165 (2020) [1807.06209]

[19] Bob Holdom, *Two* $U(1)$*'s and* ϵ *charge shifts*, Phys. Lett. B **166**,196-198 (1986)

[20] X. -G. He, G. C. Joshi, H. Lew, and R. R. Volkas, *New-*Z' *phenomenology* Phys. Rev. D **43**, 22-24 (1991)

[21] Xiao-Gang He, G. C. Joshi, H. Lew, and R. R. Volkas, *Simplest* Z' *model* Phys. Rev. D **44**, 2118-2132 (1991)

[22] Takeshi Araki, Shihori Hoshino, Toshihiko Ota, Joe Sato, and Takashi Shimomura *Detecting the* $L_\mu - L_\tau$ *gauge boson at Belle II* Phys. Rev. D **95**, 055006, (2017) [arXiv:1702.01497 [hep-ph]]

[23] Takeshi Araki, Fumihiro Kaneko, Yasufumi Konishi, Toshihiko Ota, Joe Sato, Takashi Shimomura, *Mind the gap on Icecube: Cosmic neutrino spectrum and muon anomalous magnetic moment in the gauged* $L_\mu - L_\tau$ *model* Phys. Rev. D **91**, 037301, (2015) [arXiv:1409.4180 [hep-ph]]

[24] Takeshi Araki, Kento Asai, Joe Sato, and Takashi Shimomura, *Low scale seesaw models for low scale* $U(1)_{L_\mu - L_\tau}$ *symmetry* Phys. Rev. D **100**, 095012, (2019) [arXiv:1909.08827 [hep-ph]]

[25] Tatsumi Aoyama, Toichiro Kinoshita, Makiko Nio *Theory of the Anomalous Magnetic Moment of the Electron* Atoms **2019**, 7(1), 28

[26] B. Abi et al. (Muon $g-2$ Collaboration) *Measurement of the Positive Muon Anomalous Magnetic Moment to 0.46 ppm* Phys. Rev. Lett. **126**, 141801 (2021) [arXiv:2104.03281 [hep-ex]]

[27] M. Kachelriess, R. Tomàs, and J. W. F. Valle *Supernova bounds on Majoron-emitting decays of light neutrinos* Phys. Rev. D **62**, 023004 (2000) [arXiv:hep-ph/0001039]

[28] Yasaman Farzan *Bounds on the coupling of the Majoron to light neutrinos from supernova cooling* Phys. Rev. D **67**, 073015 (2003) [arXiv:hep-ph/0211375]

[29] KamLAND-Zen Collaboration,A. Gando et al. *Limits on Majoron-emitting double-*β *decays of Xe-136 in the KamLAND-Zen experiment* Phys. Rev. C **86**, 021601(R) (2012) [arXiv:1205.6372 [hep-ex]]

[30] Christina D. Kreisch, Francis-Yan Cyr-Racine, and Olivier Doré, *The Neutrino Puzzle: Anomalies, Interactions, and Cosmological Tensions* Phys. Rev. D **101**, 123505 (2020) [arXiv:1902.00534 [astro-ph.CO]]

[31] Anthony Fradette, Maxim Pospelov, Josef Pradler, and Adam Ritz, *Cosmological beam dump: Constraints on dark scalars mixed with the Higgs boson* Phys. Rev. D **99**, 075004 (2019) [arXiv:1812.07585 [hep-ph]]

[32] Steen Hannestad and Jes Madsen *Neutrino decoupling in the early Universe* Phys. Rev. D **52**, 1764 (1995) [arXiv:astro-ph/9506015]

[33] G. Peter Lepage *Adaptive Multidimensional Integration: VEGAS Enhanced* JCP, 439, (2021), 110386 [arXiv:2009.05112 [physics.comp-ph]]