Neutralino dark matter の Sommerfeld enhancement 機構による間接検出の可能性

永山未來

2021 年 2 月 5 日

概要

暗黒物質の存在は 1933 年の Zwicky によるかみのけ座銀河団の銀河の解析を皮切りに多くの証拠が挙げられている。特に、WMAP による宇宙マイクロ波背景放射の観測では宇宙の構成要素が高い精度で求められ、宇宙における物質成分のほとんどは暗黒物質であることが明らかになった。しかし、標準模型では暗黒物質に対応する粒子は存在せず、この枠組みを超えた理論が数多く研究されている。その中でも、標準模型を超える理論で暗黒物質を説明する理論としてよく取り上げられるのが超対称性理論である。この理論における粒子は未だに発見されておらず、その性質から暗黒物質の有力な候補となりうる。今回は超対称性理論のうち、最も単純な MSSM(minimal supersymmetric Standard Model) で neutralino が暗黒物質で暗黒物質とほとんど質量が縮退した slepton が存在するようなモデルを考える。このような粒子が存在する場合、coannihilation 領域ではそれらの粒子の質量の縮退度合いによって Sommerfeld enhancement の効果により対消滅断面積が大きくなり、間接検出で観測可能な領域を発見できる可能性がある。さらに、このように質量がほぼ縮退した粒子が存在しており、LFV(lepton flavor violation) が許される場合には宇宙論における問題の一つである Li 問題を解決できるようなパラメータ領域が存在することが先行研究で明らかになっている。そこで、本論文では先行研究によって定式化された cross section をこのパラメータ領域で求め、現在の間接検出における制限と比較することによって、モデルで用いたパラメータに制限をかけることができるのかを見る。

目次

1 Introduction

現在の素粒子物理学では標準模型 (Standard Model : SM) が非常によく現在の現象を説明しているが、その模型では説明できないような現象が知られている。その一つが暗黒物質である。暗黒物質の存在の証拠は数多く挙げられている。まず、暗黒物質は 1933 年の Zwicky によるかみのけ銀河団のビリアル定理を用いた解析によって、目に見える物質だけでは予想される銀河団の質量を説明できないということからその存在が明らかになった。

さらに、銀河の回転曲線の解析でも暗黒物質の存在が示唆されている [1]。ニュートン力学で考えた時、回転速度は $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$ で表されており、中心から離れるにつれて減少することが予言される。しかし、1970 年に Rubin と Ford がアンドロメダ銀河の回転曲線を観測したところ、ニュートン力学で予言されるものではなく、図 1 に示されているように遠方でも回転速度は一定になることがわかった。このことからも目に見えない物質の存在の必要性が高まっていった。そして 2011 年 WMAP による観測結果では銀河の成分が正確に知ることに成功した [2]。その結果、図 2 から明らかなように、宇宙の構成要素のうち、物質成分のほとんどは暗黒物質で構成されているということがわかり、その存在は確かなものだと分かった。

しかし、この暗黒物質についての正体は依然として明らかになっていない。もし、暗黒物質を粒子的なものとして考えるとするならば次の三つの性質を満たさねばならない。その性質とは、(1) 我々の知る粒子とほとんど相互作用をしないため、電気的に中性であること。(2) 質量を持つこと。(3) 崩壊してよく知られた粒子にならないことから、安定であること。である。SM においてこの性質を満たす、暗黒物質の候補になりうる粒子はニュートリノである。しかし、ニュートリノが暗黒物質の主成分であると軽すぎて、現在知られている暗黒物質のエネルギーを説明できないことが知られている。そこで、粒子の有力な候補としてよく挙げられるのは WIMP(Weakly Interacting Massive Particle) である。これは宇宙初期に熱平衡状態にいた粒子が宇宙膨張によって脱結合して、現在の残存量になったような粒子である。この粒子が暗黒物質であるとして、現在の残存量から満たすべき cross section を考えると、ちょうど弱い相互作用の典型的なスケールに一致することが分かり、その性質の良さから数多くの研究でこの粒子が暗黒物質の候補だとして扱われている。

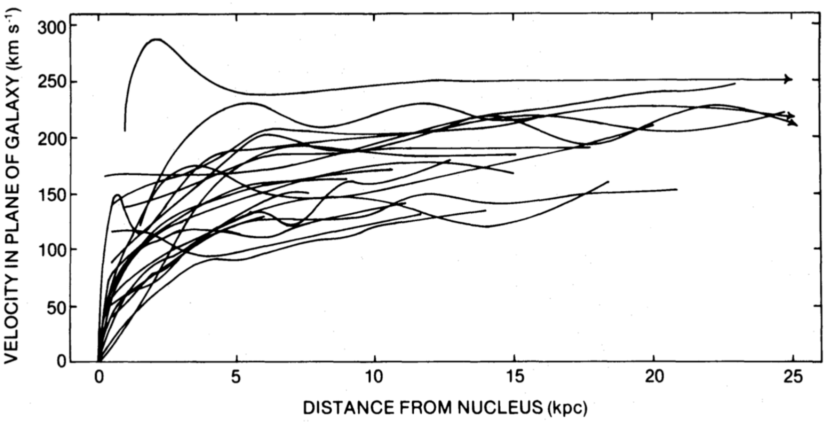


図 1　銀河の回転曲線 [1]

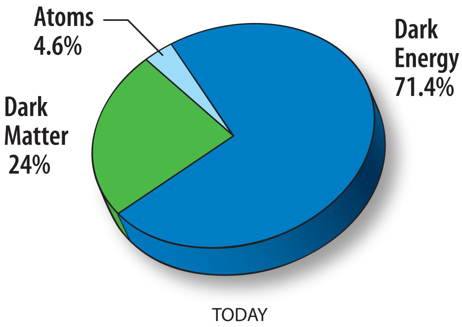


図 2　CMB によって明らかになった現在の宇宙の構成要素 [3]

そこで、今回は WIMP の候補として超対称性 (Supersymmetry：SUSY) を用いたモデルを考える。超対称性とはフェルミオンとボソンの間の対称性のことであり、その理論に含まれる超対称性粒子は未だに発見されていない。特に、SM をこの理論を用いて拡張した一番簡単な模型は MSSM(Minimal Supersymmetric Standard Model) と呼ばれており、図 3 ではこの模型に含まれるゲージ場と物質場を表している。特に、この表の中の gaigino の電気的に中性な成分 $\widetilde{W}^0, \widetilde{B}^0$ と Higgs 場の中性成分 $\widetilde{H}_u^0, \widetilde{H}_d^0$ の線型結合は neutralino と呼ばれており、今回はこの neutralino の最も軽い成分を WIMP の候補として扱っていく。

Names	spin 1/2	spin 1	$SU(3)_C,\ SU(2)_L,\ U(1)_Y$
gluino, gluon	$\widetilde{g}$	g	$(\mathbf{8},\ \mathbf{1},\ 0)$
winos, W bosons	$\widetilde{W}^{\pm}\ \ \widetilde{W}^0$	$W^{\pm}\ \ W^0$	$(\mathbf{1},\ \mathbf{3},\ 0)$
bino, B boson	$\widetilde{B}^0$	B^0	$(\mathbf{1},\ \mathbf{1},\ 0)$

Names		spin 0	spin 1/2	$SU(3)_C,\ SU(2)_L,\ U(1)_Y$
squarks, quarks	Q	$(\widetilde{u}_L\ \ \widetilde{d}_L)$	$(u_L\ \ d_L)$	$(\mathbf{3},\ \mathbf{2},\ \frac{1}{6})$
(×3 families)	$\overline{u}$	$\widetilde{u}_R^*$	$u_R^\dagger$	$(\overline{\mathbf{3}},\ \mathbf{1},\ -\frac{2}{3})$
	$\overline{d}$	$\widetilde{d}_R^*$	$d_R^\dagger$	$(\overline{\mathbf{3}},\ \mathbf{1},\ \frac{1}{3})$
sleptons, leptons	L	$(\widetilde{\nu}\ \ \widetilde{e}_L)$	$(\nu\ \ e_L)$	$(\mathbf{1},\ \mathbf{2},\ -\frac{1}{2})$
(×3 families)	$\overline{e}$	$\widetilde{e}_R^*$	$e_R^\dagger$	$(\mathbf{1},\ \mathbf{1},\ 1)$
Higgs, higgsinos	H_u	$(H_u^+\ \ H_u^0)$	$(\widetilde{H}_u^+\ \ \widetilde{H}_u^0)$	$(\mathbf{1},\ \mathbf{2},\ +\frac{1}{2})$
	H_d	$(H_d^0\ \ H_d^-)$	$(\widetilde{H}_d^0\ \ \widetilde{H}_d^-)$	$(\mathbf{1},\ \mathbf{2},\ -\frac{1}{2})$

図 3　MSSM における chiral supermultiplet と Gauge supermultiplet [4]

neutralino は未だ発見されておらず、中性であるため暗黒物質の性質を満たしている。そして、R-parity が保存するという条件を考えると、最も軽い neutralino は安定なものとなり暗黒物質の有力な候補であると言える。R-parity が保存するとは SM 粒子と SUSY 粒子それぞれに固有な量子数を考えたときに、反応においてこれらの積が変わらないということを要請するということである。ここで R-parity は次の式で与えられる量子数で

$$P_R = (-1)^{3(B-L)+2s} \tag{1}$$

表 1 で表されているように SM 粒子には +1, SUSY 粒子には-1 が与えられている。ただし、B バリオン数、

L はレプトン数、s はスピンを表している。実際に例として electron (e) と selectron$(\widetilde{e})$ を考えてみると e は $B=0, L=1, s=1/2$ なので $P_R=1$ で $\widetilde{e}$ に対しては $B=0, L=1, s=0$ なので $P_R=-1$ となる。この条件が満たされるとき、例えば SUSY 粒子を χ, SM 粒子を X と表すと

$$\chi \to \chi X \tag{2}$$

のような反応は許されるが、

$$\chi \to XX \tag{3}$$

のような反応は禁止される。よって最も軽い SUSY 粒子 (LSP) は安定であり、この粒子を最も軽い neutralino と考えると暗黒物質の性質の一つである安定性が保証される。

Partice	SM 粒子	SUSY 粒子
R-parity	+1	-1

表 1

また、暗黒物質には三つの観測方法が知られている。一つ目は加速器実験である。これは高エネルギーの粒子同士を衝突させることで暗黒物質の候補となるような粒子を発見するような方法である。実際に ATLAS [5] などの加速器実験では衝突前後のエネルギー損失を調べることによって検出されない粒子、つまり暗黒物質を含む反応を探索している。二つ目は直接検出実験である。これは地上に設置された巨大な施設の中に存在している粒子との衝突を調べることで暗黒物質を検出する方法である。この方法で有名な実験は XENON100 や LUX 実験などである [6,7]。これらの実験では巨大なタンクの中に Xe を充満させており、空中を漂う暗黒物質と衝突した際の反跳エネルギーを調べることでその正体を明らかにしようとしている実験である。そして三つ目は間接検出実験である。これは宇宙で暗黒物質同士が衝突したことによってできた 2 次粒子を測定することによって暗黒物質粒子に対して制限をかけるような実験である。例えば 2 次粒子が γ 線を用いる場合は Fermi-LAT や HESS、CTA などの実験がよく知られている [8,9.10]。一方で 2 次粒子が neutrino のような場合には Ice Cube 実験 [11] などが知られている。これらの実験では飛来した 2 次粒子が検出器の内部に存在している物質と相互作用することによってできた荷電粒子が運動することによって発生する Cerenkov 光を検出することで暗黒物質由来の信号を調べるという実験である。今回はこれらの観測方法のうち、間接検出に注目して研究を進めていく。

間接検出では主に暗黒物質の消滅後に出てきた二次粒子の flux を観測するが、これは素粒子物理学的な部分と宇宙物理学的に決定される部分に分けることができる。中でも、素粒子学的部分は主に暗黒物質の annihilation cross section と出てきた粒子のエネルギースペクトルから決定される部分に分けられる。このうち、cross section については先行研究によって得られた定式化の計算を参考にし、様々な消滅チャンネルについての cross section を計算した。エネルギースペクトルについては pythia というモンテカルロ法を用いたシミュレーションソフトを用いて計算した [12]。

そして、この検出において非常に大きな役割を果たすのが Sommerfeld Enhancement という現象である [13,14]。これは暗黒物質と質量がほぼ等しい粒子が存在するような coannihilation 領域において、非相対論的に運動する暗黒物質が対消滅する際に図のように束縛状態を形成し、resonance が生じることで cross section が跳ね上がるような現象である。これによって間接検出で観測可能な領域まで信号を大きくすることができる可能性がある。

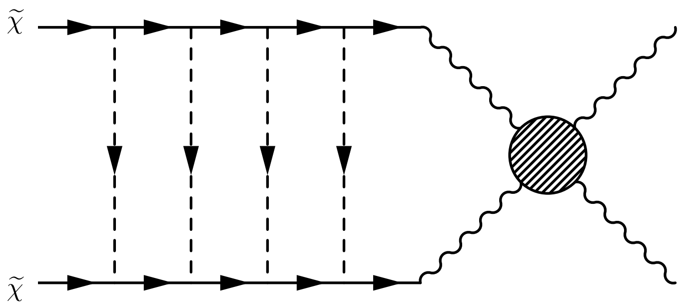


図 4　sommerfeld enhancement

先行研究では neutralino とほとんど質量が縮退している粒子が存在している coannihilation 領域で、lepton flavor violation が許される場合に、宇宙論におけるよく知られた問題の一つである Li 問題を解決することができるパラメータが存在することが知られている [15]。そこで今回はこの neutralino とほとんど質量が縮退している粒子として slepton を考える。coannihilation region では図 4 に示されている laddar diagram に slepton の寄与も入ってくる。このような暗黒物質のモデルは EWIMP(ElectroWeak Interacting Massive Particle)) と呼ばれており、本論文では coannihilation 領域で上記のパラメータを用いて、Sommerfeld enhancement の影響を受けた EWIMP の annihilation cross section や flux を計算する。これによって間接検出で観測が可能な領域まで信号を増幅させることができるのかを見る。もしこの領域まで信号を大きくさせることができれば、近い将来 Li 問題と暗黒物質の問題を解決することができる可能性がある。さらに、得られた結果が現在の間接検出実験における制限よりも大きくなる場合はこのモデルで用いられているパラメータを制限することができる。

Sommerfeld enhancement の影響を受けた cross section を計算するために、本論文は以下のように構成されている。まず 2 節では、先行研究で議論された今回のモデルに関係するようなラグランジアンについて議論する。3 節では integrate out によって、二体の束縛状態を表すような effective action [16] を求める。また、この cross section についての定式化を行い、実際に間接検出で観測される flux について議論する。4 節では今回得られた結果を確認する。さらに、現在の実験と比較することで今回のモデルが間接検出で検出可能かどうかを議論し、本研究を結論づける。

2 Lagrangian

この章では neutralino と slepton に関係するラグランジアンを導出していく。計算では flavor base で相互作用を記述していくよりも mass base で考えた方が便利なので、得られたラグランジアンにおける場を mass base に書き直すことを考える。まずは neutralino を mass base $\widetilde{\chi}$ に書き直すことを考える。ここで、neutralino は Higgsino の中性成分 $(\widetilde{H}_u^0, \widetilde{H}_d^0)$, Wino の中性成分 $(\widetilde{W}^0)$, Bino$(\widetilde{B}^0)$ の線型結合で表されており、neutralino の質量行列は $\widetilde{\psi}^0 = (\widetilde{B}, \widetilde{W}^0, \widetilde{H}_d^0, \widetilde{H}_u^0)^{\mathrm{T}}$ の base で、

$$\mathcal{L}_{\text{neutralino mass}} = -\frac{1}{2}(\widetilde{\psi}^0)^{\mathrm{T}} M_N \widetilde{\psi}^0 + c.c. \tag{4}$$

ただし、

$$M_N = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & -c_\beta s_w m_z & s_\beta s_w m_z \\ 0 & M_2 & c_\beta c_w m_z & -s_\beta c_w m_z \\ -c_\beta s_w m_z & c_\beta c_w m_z & 0 & -\mu \\ s_\beta s_w m_z & -s_\beta c_w m_z & -\mu & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

となる。ここで、M_1, M_2 は Bino,Wino の質量である。また $v_u(v_d)$ を $H_u(H_d)$ の真空期待値とした時、それらの比として $\tan\beta = v_u/v_d$ と定義されており、$s_\beta(c_\beta) = \sin\beta(\cos\beta)$ である。また、$s_w(c_w) = \sin\theta_w(\cos\theta_w)$ で θ_w は Weinberg angle である。さらに m_z は Z ボソンの質量で μ は Higgsino の質量を表している。これらはユニタリ行列 ${N_{\widetilde{G}a}}^b(a, b = 1 \sim 4)$ により

$$\widetilde{\chi}_a = {N_{\widetilde{G}a}}^b {\widetilde{\psi}^0}_b \tag{6}$$

のように質量の base に変えることができる。ここで、最も小さな質量を持つ $\widetilde{\chi_1}$ が暗黒物質の候補となる。

次に neutralino と質量が縮退している粒子である slepton について考える。neutralino の場合と同様にして、$\widetilde{\psi}_l = (\widetilde{e}_L \;\; \widetilde{\mu}_L \;\; \widetilde{\tau}_L \;\; \widetilde{e}_R \;\; \widetilde{\mu}_R \;\; \widetilde{\tau}_R)^T$ という flavor base を用いると、slepton の質量行列は

$$\mathcal{L}_{\text{slepton mass}} = -\widetilde{\psi}_l^\dagger \; M_{\widetilde{l}}^2 \; \widetilde{\psi}_l \tag{7}$$

と書くことができる。ただし、$M_{\widetilde{l}}^2$ は次のように与えられる。

$$({M_{\widetilde{l}}^2)_I}^J = \begin{cases} {(m_L^2)_I}^J + {{y^\dagger}_I}^K {y_K}^J v_d^2 + m_z^2(s_w^2 - 1/2)c_\beta {\delta_I}^J & (\text{for } I, J = 1,2,3, K = 4,5,6) \\ -\mu v_u {{y^\dagger}_I}^J + v_d {{a^\dagger}_I}^J & (\text{for } I = 1,2,3, J = 4,5,6) \\ -\mu^* v_u {y_I}^J + v_d {a_I}^J & (\text{for } I = 4,5,6, J = 1,2,3) \\ {(m_R^2)_I}^J + {y_I}^K {{y^\dagger}_K}^J v_d^2 + m_z^2 s_w^2 c_\beta {\delta_I}^J & (\text{for } I, J = 4,5,6, K = 1,2,3), \end{cases} \tag{8}$$

ここで、m_L^2, m_R^2 は soft breaking mass parameter で、${y_i}^j$ は湯川カップリング、${a_i}^j$ は A-term の寄与より生じる。この slepton の base を質量の base に変えるのは、ユニタリ行列 ${N_{\widetilde{l}A}}^B$ $(A, B = 1 \sim 6)$ により、

$$\widetilde{l}_A = {N_{\widetilde{l}A}}^B \widetilde{\psi}_{lB}\,, \tag{9}$$

とされる。特に、今回は最も軽い slepton はほとんど $\widetilde{\tau}$ で構成されていると考えてるので、以下では $\widetilde{l}_1 = \widetilde{\tau}$ と表記している。

同様にして、Chargino を Higgsino の charged 成分 $(\widetilde{W}^+, \widetilde{H}_u^+)$,Wino の charged 成分 $(\widetilde{W}^-, \widetilde{H}_d^-)$ の線型結合として $\widetilde{\psi}^{\pm} = (\widetilde{W}^+, \widetilde{H}_u^+, \widetilde{W}^-, \widetilde{H}_d^-)$ という bese で考えると、その質量行列は、

$$\mathcal{L}_{\text{chargino mass}} = -\frac{1}{2}(\widetilde{\psi}^{\pm})^{\mathrm{T}} M_C \widetilde{\psi}^{\pm} + h.c. \tag{10}$$

と書ける。ただし、

$$M_C = \begin{pmatrix} 0 & X^{\mathrm{T}} \\ X & 0 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} M_2 & \sqrt{2} s_\beta m_w \\ \sqrt{2} c_\beta m_w & \mu \end{pmatrix} \tag{11}$$

でこれらは、2 つのユニタリ行列 $U,\ V$ により

$$\begin{pmatrix} \widetilde{C}_1^+ \\ \widetilde{C}_2^+ \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} \widetilde{W}^+ \\ \widetilde{H}_u^+ \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \widetilde{C}_1^- \\ \widetilde{C}_2^- \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \widetilde{W}^- \\ \widetilde{H}_d^- \end{pmatrix} \tag{12}$$

のように質量の base に変えられる。

次に考えられる相互作用項について考える。ゲージ相互作用については

$$\begin{aligned}
D^\mu \widetilde{L}^{*i} D_\mu \widetilde{L}_i =& \left(\partial^\mu \widetilde{L}^{*i} + \frac{1}{2} i g' B^{0\mu} \widetilde{L}^{*i} - \frac{1}{2} i g \begin{pmatrix} W^{0\mu} & \sqrt{2} W^{+\mu} \\ \sqrt{2} W^{-\mu} & -W^{0\mu} \end{pmatrix} \widetilde{L}^{*i} \right) \\
& \times \left(\partial_\mu \widetilde{L}_i - \frac{1}{2} i g' B_\mu^0 \widetilde{L}_i + \frac{1}{2} i g \begin{pmatrix} W_\mu^0 & \sqrt{2} W_\mu^+ \\ \sqrt{2} W_\mu^- & -W_\mu^0 \end{pmatrix} \widetilde{L}_i \right) \\
& \to ie A_\mu \widetilde{e}_L^{*i} \overleftrightarrow{\partial}^\mu \widetilde{e}_{Li} - i g_z Z_\mu \left(s_w^2 - 1/2 \right) \widetilde{e}_L^{*i} \overleftrightarrow{\partial}^\mu \widetilde{e}_{Li} - i \frac{\sqrt{2}}{2} g \left(W_\mu^+ \widetilde{\nu}^{*i} \overleftrightarrow{\partial}^\mu \widetilde{e}_{Li} + W_\mu^- \widetilde{e}_L^{*i} \overleftrightarrow{\partial}^\mu \widetilde{\nu}_i \right) \\
& + e^2 A^2 |\widetilde{e}_{Li}|^2 + g_z^2 \left(s_w^2 - 1/2 \right)^2 Z^2 |\widetilde{e}_{Li}|^2 - 2 e g_z \left(s_w^2 - 1/2 \right) A_\mu Z^\mu |\widetilde{e}_{Li}|^2 + \frac{g^2}{2} W_\mu^+ W^{-\mu} |\widetilde{e}_{Li}|^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D^\mu \widetilde{\bar{e}}_i^* D_\mu \widetilde{\bar{e}}^i \to & i g' B_\mu \widetilde{e}_R^{*i} \overleftrightarrow{\partial}^\mu \widetilde{e}_{Ri} + {g'}^2 B^2 |\widetilde{e}_{Ri}|^2 \\
=& ie A_\mu \widetilde{e}_R^{*i} \overleftrightarrow{\partial}^\mu \widetilde{e}_{Ri} - i g_z' s_w^2 Z_\mu \widetilde{e}_R^{*i} \overleftrightarrow{\partial}^\mu \widetilde{e}_{Ri} \\
& + e^2 A^2 |\widetilde{e}_{Ri}|^2 + g_z^2 s_w^4 Z^2 |\widetilde{e}_{Ri}|^2 - 2 e g_z s_w^2 A_\mu Z^\mu |\widetilde{e}_{Ri}|^2
\end{aligned} \tag{13}$$

のように書ける。ただし、D は共変微分で、

$$\begin{pmatrix} Z^0 \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_w & -s_w \\ s_w & c_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^0 \\ B^0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

$$g' = s_w g_z, \qquad g = c_w g_z \tag{15}$$

などの関係を用いて計算している。また、演算子 $\overleftrightarrow{\partial}^\mu$ は

$$f \overleftrightarrow{\partial}^\mu g = f \partial^\mu g - (\partial^\mu f) g \tag{16}$$

で定義されている。これらの式を (7) 式を使って mass base に変換し、一番軽い成分である $A = 1$ の成分だ

けを残すとゲージ相互作用は次の式で与えられる。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\rm gauge} \sim & ieA_\mu \widetilde{\tau}^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \widetilde{\tau} - ig_z Z_\mu \left(s_w^2 - \frac{1}{2} N_{\widetilde{l}1}{}^i N^\dagger_{\widetilde{l}}{}_i{}^1 \right) \widetilde{\tau}^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \widetilde{\tau} \\ & - i\frac{\sqrt{2}}{2} g \left(W^+_\mu \widetilde{\nu}^{*i} \overleftrightarrow{\partial}^\mu N^\dagger_{\widetilde{l}}{}_i{}^1 \widetilde{\tau} + W^-_\mu \widetilde{\tau}^* N_{\widetilde{l}1}{}^i \overleftrightarrow{\partial}^\mu \widetilde{\nu}_i \right) \\ & + e^2 A^2 |\widetilde{\tau}|^2 + g_z^2 \left(s_w^2 - \frac{1}{2} N_{\widetilde{l}1}{}^i N^\dagger_{\widetilde{l}}{}_i{}^1 \right)^2 Z^2 |\widetilde{\tau}|^2 - 2eg_z \left(s_w^2 - \frac{1}{2} N_{\widetilde{l}1}{}^i N^\dagger_{\widetilde{l}}{}_i{}^1 \right) A_\mu Z^\mu |\widetilde{\tau}|^2 \\ & + \frac{g^2}{2} N_{\widetilde{l}1}{}^i N^\dagger_{\widetilde{l}}{}_i{}^1 W^+_\mu W^{-\mu} |\widetilde{\tau}|^2 \end{aligned}$$

ここでは $\widetilde{\tau}$ の添字を省略しており、以下でも $A = 1$ の添字は省略しているものとする。次に、higgs-stau-stau の 3 点相互作用については

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{h^0-\widetilde{\tau}-\widetilde{\tau}} = & \frac{1}{\sqrt{2}} \widetilde{\tau}^* \widetilde{\tau} h^0 \left[-\frac{1}{2}(c_\alpha v_u + s_\alpha v_d) \left(g^2 N_{\widetilde{l}1}{}^i N^\dagger_{\widetilde{l}}{}_i{}^1 + g'^2 \left(-N_{\widetilde{l}1}{}^i N^\dagger_{\widetilde{l}}{}_i{}^1 + 2N_{\widetilde{l}1}{}^{i+3} N^\dagger_{\widetilde{l}}{}_{i+3}{}^1 \right) \right) \right. \\ & + 2s_\alpha v_d \left(N_{\widetilde{l}1}{}^i y^\dagger{}_i{}^k y_k{}^j N^\dagger_{\widetilde{l}}{}_j{}^1 + N_{\widetilde{l}1}{}^{i+3} y_i{}^k y^\dagger{}_k{}^j N^\dagger_{\widetilde{l}}{}_{j+3}{}^1 \right) \\ & \left. + c_\alpha \left(\mu^* N_{\widetilde{l}1}{}^{i+3} y_i{}^j N^\dagger_{\widetilde{l}}{}_j{}^1 + h.c. \right) + s_\alpha \left(N_{\widetilde{l}1}{}^{i+3} a_i{}^j N^\dagger_{\widetilde{l}}{}_j{}^1 + h.c. \right) \right] \end{aligned} \tag{17}$$

となる。ただし、次の関係を用いている。

$$\begin{pmatrix} H_u^0 \\ H_d^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_u \\ v_d \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} c_\alpha & -s_\alpha \\ s_\alpha & c_\alpha \end{pmatrix} \tag{18}$$

higgs-higgs-stau-stau の 4 点相互作用は、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{h^0-h^0-\widetilde{\tau}-\widetilde{\tau}} = & \widetilde{\tau}^* \widetilde{\tau} h^{0\,2} \left[-\frac{1}{8} g^2 (c_\alpha^2 - s_\alpha^2) N_{\widetilde{l}1}{}^i N^\dagger_{\widetilde{l}}{}_i{}^1 - \frac{1}{8} g'^2 (c_\alpha^2 - s_\alpha^2) \left(-N_{\widetilde{l}1}{}^i N^\dagger_{\widetilde{l}}{}_i{}^1 + 2N_{\widetilde{l}1}{}^{i+3} N^\dagger_{\widetilde{l}}{}_{i+3}{}^1 \right) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} s_\alpha^2 \left(N_{\widetilde{l}1}{}^i y^\dagger{}_i{}^k y_k{}^j N^\dagger_{\widetilde{l}}{}_j{}^1 + N_{\widetilde{l}1}{}^{i+3} y_i{}^k y^\dagger{}_k{}^j N^\dagger_{\widetilde{l}}{}_{j+3}{}^1 \right) \right] \end{aligned} \tag{19}$$

である。同様にして gaugino との相互作用は

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\rm gaugino} = & \widetilde{\tau}^* \widetilde{\tau} (h^0)^2 \left[-\frac{1}{8} g^2 (c_\alpha^2 - s_\alpha^2) N_{\widetilde{l}1}{}^i N^{\dagger\,1}_{\widetilde{l}i} - \frac{1}{8} g'^2 (c_\alpha^2 - s_\alpha^2) \left(-N_{\widetilde{l}1}{}^i N^{\dagger\,1}_{\widetilde{l}i} + 2N_{\widetilde{l}1}{}^{i+3} N^{\dagger\quad 1}_{\widetilde{l}i+3} \right) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} s_\alpha^2 \left(N_{\widetilde{l}1}{}^i y_i^{\dagger k} y_k{}^j N^{\dagger\,1}_{\widetilde{l}j} + N_{\widetilde{l}1}{}^{i+3} y^{\dagger\quad k}_{i+3} y_k{}^{j+3} N^{\dagger\quad 1}_{\widetilde{l}j+3} \right) \right] \end{aligned} \tag{20}$$

と書ける。ただし、ここで、P_L, P_R は射影演算子で、

$$P_L = \frac{1 - \gamma_5}{2}, \qquad P_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} \tag{21}$$

によって定義されており、4 成分スピノル e_{Di}, $\widetilde{\psi}^0_{Da}$ は

$$e_{Di} = \begin{pmatrix} e_{L\alpha i} \\ e_{R_i}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \qquad \widetilde{\psi}^0_{Da} = \begin{pmatrix} \widetilde{\psi}^0_{\alpha a} \\ \widetilde{\psi}^{0\dagger\dot{\alpha}}_a \end{pmatrix}$$

で定義している。式 (7), 式 (6) を用いると、(20) は

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\rm gaugino} = & \widetilde{\tau}^* \bar{\widetilde{\chi}} \left[P_L \left(\frac{\sqrt{2}}{2} g' N_{\widetilde{l}1}{}^i N_{\widetilde{G}1}{}^1 + \frac{\sqrt{2}}{2} g N_{\widetilde{l}1}{}^i N_{\widetilde{G}1}{}^2 + \frac{1}{2} N_{\widetilde{l}1}{}^{j+3} y_j{}^i N_{\widetilde{G}1}{}^4 \right) \right. \\ & \left. + P_R \left(-\sqrt{2} g' N_{\widetilde{l}1}{}^{i+3} N_{\widetilde{G}1}{}^1 + \frac{1}{2} N_{\widetilde{l}1}{}^i y^\dagger{}_i{}^j N_{\widetilde{G}1}{}^4 \right) \right] e_{Di} + h.c. \end{aligned} \tag{22}$$

のように書き直すことができる。最後に終状態で neutrino を放出させるための neutrino と chargino の相互作用については

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\mathrm{chargino}} =& - g\widetilde{e}_L^{*\,i}\widetilde{W}^{-}\nu_i - g\nu^{\dagger i}\widetilde{W}^{-\dagger}\widetilde{e}_{Li} - \frac{1}{2}\widetilde{e}_R^{*\,i}y_i{}^j\nu_j\widetilde{H}_d^{-} - \frac{1}{2}\nu^{\dagger i}y^{\dagger}{}_i{}^j\widetilde{e}_{Rj}\widetilde{H}_d^{-\dagger} \\
=& \widetilde{\tau}^{*}\bar{\widetilde{C}}_{\alpha}P_L\nu_{Di}\left[-gN_{\widetilde{l}1}{}^{i}U^{\dagger}{}_1{}^{\alpha} - \frac{1}{2}N_{\widetilde{l}1}{}^{j+3}y_j{}^iU^{\dagger}{}_2{}^{\alpha}\right] + h.c.
\end{aligned} \tag{23}
$$

のようになる。ただし、4 成分スピノル $\widetilde{C}^{\alpha}$ は

$$
\widetilde{C}^{\alpha} = \begin{pmatrix} \widetilde{C}_{\alpha}^{+} \\ \widetilde{C}^{-\dagger\alpha} \end{pmatrix}
$$

と定義している。以上によって、

$$
\mathcal{L} = \mathcal{L}_{KT} + \mathcal{L}_{int}
$$

が得られる。ただし、

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{KT} =& \frac{1}{2}\bar{\widetilde{\chi}}\left(i\partial\!\!\!/ - m\right)\widetilde{\chi} + \bar{\widetilde{C}}_{\alpha}\left(i\partial\!\!\!/ - m_{C_{\alpha}}\right)\widetilde{C}^{\alpha} + \bar{\nu}_D^i i\partial\!\!\!/\nu_{Di} + \bar{e}_D^i\left(i\partial\!\!\!/\delta_i^j - m_{e\,i}{}^j\right)e_{Dj} \\
& - \widetilde{\tau}^{*}(\partial^2 + m_{\widetilde{\tau}}^2)\widetilde{\tau} - \widetilde{\nu}^{*i}(\partial^2\delta_i^j + m_{\widetilde{\nu}\,i}^{2\ \ j})\widetilde{\nu}_j + \frac{1}{2}Z_{\mu}(\partial^2 + m_Z^2)g^{\mu\nu}Z_{\nu} \\
& + \frac{1}{2}A_{\mu}\partial^2 g^{\mu\nu}A_{\nu} + W_{\mu}^{+}(\partial^2 + m_W^2)g^{\mu\nu}W_{\nu}^{-} - \frac{1}{2}h^0(\partial^2 + m_{h^0}^2)h^0,
\end{aligned}
$$

$$
\mathcal{L}_{int} = \mathcal{L}_{\mathrm{gauge}} + \mathcal{L}_{h^0-\widetilde{\tau}-\widetilde{\tau}} + \mathcal{L}_{h^0-h^0-\widetilde{\tau}-\widetilde{\tau}} + \mathcal{L}_{\mathrm{gaugino}} + \mathcal{L}_{\mathrm{chargino}} \tag{24}
$$

としている。

3 Formalism

3.1 Two-body effective action

3.1.1 Integrate out

次に、非相対論的な Two-body effective action を導出する。導出に関しては [13] のステップを参考にしている。このステップは以下のようなものである：(ｉ)$\widetilde{\chi},\widetilde{\tau}$ 以外の場について integrate out する。(ⅱ)$\widetilde{\chi},\widetilde{\tau}$ の large momentum mode について integrate out する。(ⅲ) EWIMP の速度で (ⅱ) で得られた action を展開する。(ⅳ) 2 体状態を表す補助場を導入し、(ⅲ) で得た action の補助場以外の全ての場について integrate out を実行する。

まず、$\widetilde{\chi},\widetilde{\tau}$ 以外の場について integrate out を実行することで 1-ループの effective action を得る。例として、A_μ の integrate out をすることを考える。まず A_μ に関係する項を抜き出すと、次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}_A = & -i\ln\int DA\exp i\left[\int d^4x\left(\frac{1}{2}A_\mu\partial^2 g^{\mu\nu}A_\nu + ieA_\mu\widetilde{\tau}^*\overleftrightarrow{\partial}^\mu\widetilde{\tau}\right.\right. \\
& \left.\left. +e^2A^2\,|\widetilde{\tau}|^2 - 2eg_z\left(s_w^2 - \frac{1}{2}N_{\widetilde{l}1}{}^{i}N^{\dagger}_{\widetilde{l}}{}_{i}{}^{1}\right)A_\mu Z^\mu\,|\widetilde{\tau}|^2\right)\right], \qquad (25)
\end{aligned}
$$

ここで、i についての和は 1〜3 まで取られている。次に A_μ を

$$
A_\mu \to A_\mu + i\int d^4y\mathcal{D}^A_{\mu\nu}(x-y)\mathcal{J}^\nu(y)
$$

のように置き換え、グリーン関数の関係

$$
\mathcal{L}_A^{\mu\nu}\mathcal{D}^A_{\nu\rho}(x-y) = i\delta(x-y)\delta^\mu_\rho, \qquad (26)
$$

を用いると、(25) は次のようになる。

$$
\mathcal{S}_A = -i\ln\mathrm{Det}^{-\frac{1}{2}}(-\mathcal{L}_A^{\mu\nu}) + \frac{i}{2}\int d^4xd^4y\mathcal{J}^\mu(x)\mathcal{D}^A_{\mu\nu}(x-y)\mathcal{J}^\nu(y)\ \ , \qquad (27)
$$

ただし

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_A^{\mu\nu} =& (\partial^2 + 2e^2|\widetilde{\tau}|^2)g^{\mu\nu}, \\
\mathcal{J}^\mu(x) =& J_A^\mu(x) - 2eg_z\left(s_w^2 - \frac{1}{2}N_{\widetilde{l}1}{}^{i}N^{\dagger\,1}_{\widetilde{l}i}\right)Z^\mu|\widetilde{\tau}|^2. \\
J_A^\mu(x) =& ie\widetilde{\tau}^*\overleftrightarrow{\partial}^\mu\widetilde{\tau}
\end{aligned}
$$

としている。ここで、(27) 式の第 1 項は次のように変形することができる。

$$
\begin{aligned}
-i\ln\mathrm{Det}^{-\frac{1}{2}}(-\mathcal{L}_A^{\mu\nu}) =& \frac{i}{2}\mathrm{Tr}\left[\ln\left(-\partial^2 - 2e^2|\widetilde{\tau}|^2)g^{\mu\nu}\right)\right] \\
\equiv& \frac{i}{2}\mathrm{Tr}\left[\ln\left(A_0 + \delta A\right)\right] \\
=& \frac{i}{2}\mathrm{Tr}\left[\ln A_0 + A_0^{-1}\delta A - \frac{1}{2}A_0^{-1}\delta AA_0^{-1}\delta A\right] \\
\sim& ie^4\mathrm{tr}\int d^4x_1d^4x_2|\widetilde{\tau}|^2(x_1)|\widetilde{\tau}|^2(x_2)D^A_{\mu\nu}(x_1-x_2)D^{A\nu\rho}(x_2-x_1)\,. \qquad (28)
\end{aligned}
$$

ここで 、Tr() は operator のトレースを、tr() は Dirac の足についてのトレースを表す。また、$D^A_{\mu\nu}(x-y)$ は光子のプロパゲーターで

$$A_0^{-1} = D^A_{\mu\nu}(x-y) = i\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2+i\epsilon}e^{-iq(x-y)}. \tag{29}$$

となる。(27) 式の第二項は最低次で, $\mathcal{D}^A_{\mu\nu} \sim D^A_{\mu\nu}$ となるので最終的に、A_μ についての effective action は次のように書ける。

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_A =& ie^4\mathrm{tr}\int d^4x_1 d^4x_2 |\widetilde{\tau}|^2(x_1)|\widetilde{\tau}|^2(x_2) D^A_{\mu\nu}(x_1-x_2)D^{A\nu\rho}(x_2-x_1)\\ &+\frac{i}{2}\int d^4x d^4y \mathcal{J}^\mu(x) D^A_{\mu\nu}(x-y)\mathcal{J}^\nu(y).\end{aligned} \tag{30}$$

これを計算すると次の図に示されたような 1-loop の相互作用を表すことができる。同様にして A_μ 以外の場について integrate out した場合の計算については Appendix に記載している。以上より $\widetilde{\chi}, \widetilde{\tau}$ に関する effective action を得ることができ、以下はその結果を表している。

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{\rm eff} = \int d^4x \left[\frac{1}{2}\bar{\widetilde{\chi}}\,(i\partial\!\!\!/ - m)\,\widetilde{\chi} - \widetilde{\tau}^*(\partial^2 + m_{\widetilde{\tau}}^2)\widetilde{\tau}\right]\\ + \mathcal{S}'_A + \mathcal{S}_Z + \mathcal{S}'_W + \mathcal{S}_{\widetilde{\nu}} + \mathcal{S}_e + \mathcal{S}_{\widetilde{C}} + \mathcal{S}_{h^0}\end{aligned} \tag{31}$$

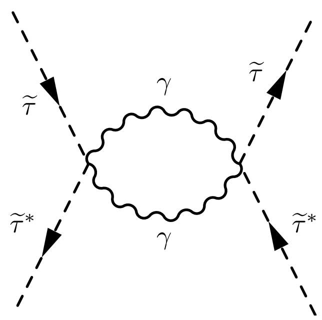


図 5　光子を媒介とする 1-loop の diagram

3.1.2　Integrate out of large momentum of $\widetilde{\chi}, \widetilde{\tau}$ and expansion of non-relativistic action

次に $\widetilde{\chi}, \widetilde{\tau}$ の large momentum mode を integrate out していく。まず、これらの場を相対論的な部分と非相対論的な部分に分離する。$\widetilde{\chi}$ に対してはこれは次のように書ける。

$$\begin{aligned}\widetilde{\chi}(x) =& \widetilde{\chi}(x)_R + \widetilde{\chi}(x)_{NR},\\ \widetilde{\chi}(x)_R =& \int_R \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\phi^0(q)e^{-iqx},\\ \widetilde{\chi}(x)_{NR} =& \int_{NR} \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\phi^0(q)e^{-iqx},\end{aligned} \tag{32}$$

ここで ϕ^0 は EWIMP のフーリエ成分を表す。この分離の後で、$\widetilde{\chi}_R$ を integrate out する。同様にして $\widetilde{\tau}$ に関しても large momentum mode を integrate out を実行すると、非相対論的な effective action は

$$\mathcal{S}_{NR} = \int d^4x \left[\frac{1}{2}\bar{\widetilde{\chi}}_{NR}(i\partial\!\!\!/ - m)\widetilde{\chi}_{NR} - \widetilde{\tau}^*_{NR}(\partial^2 + m_{\widetilde{\tau}}^2)\widetilde{\tau}_{NR}\right] + \mathcal{S}_{Pot}(\widetilde{\chi}_{NR}, \widetilde{\tau}_{NR}) + \mathcal{S}_{Im}(\widetilde{\chi}_{NR}, \widetilde{\tau}_{NR}), \tag{33}$$

と得ることができる。ここで、$\mathcal{S}_{Pot}$ は kinematic term を除いた実部を、$\mathcal{S}_{Im}$ は虚部を表す。また、以下の計算では $\widetilde{\chi}, \widetilde{\tau}$ の NR の添え字を省略することにする。

次に得られた非相対論的な action を EWIMP の速度で展開していく。この展開では neutralino と stau は 4 成分スピノールではなく、2 成分スピノールを用いて計算していく。これらの 2 成分スピノール ξ, η, ζ は次のように定義される。

$$\bar{\chi} = \begin{pmatrix} e^{-imt}\zeta + ie^{imt}\frac{\overleftrightarrow{\nabla}\cdot\sigma}{2m}\zeta^c \\ e^{imt}\zeta^c - ie^{-imt}\frac{\overleftrightarrow{\nabla}\cdot\sigma}{2m}\zeta \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{\tau} = \frac{1}{\sqrt{2m}}\eta e^{-imt} + \frac{1}{\sqrt{2m}}\xi e^{imt}, \tag{34}$$

ここで $\zeta^c = -i\sigma^2 \zeta^{\dagger\mathsf{T}}$ を満たす。この形で、$\mathcal{S}_{NR}$ は次のように分けられる。

$$\mathcal{S}_{NR} = \mathcal{S}_{K.T} + \mathcal{S}_{Pot} + \mathcal{S}_{Im}, \tag{35}$$

ただし、

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{KT} =& \frac{1}{2}\int d^4x \bar{\widetilde{\chi}}(x)(i\partial\!\!\!/ - m)\widetilde{\chi}(x) - \int d^4x \widetilde{\tau}^*(\partial^2 + m_{\widetilde{\tau}}^2)\widetilde{\tau} \\ =& \int d^4x \left[\zeta^\dagger\left(i\partial_0 + \frac{\nabla^2}{2m}\right)\zeta + \eta^*\left(i\partial_0 + \frac{\nabla^2}{2m} - \delta m\right)\eta - \xi^*\left(i\partial_0 - \frac{\nabla^2}{2m} + \delta m\right)\xi\right]. \end{aligned} \tag{36}$$

であり、ここでは δm を次のように定義している。

$$\delta m = \frac{m_{\widetilde{\tau}}{}^2 - m^2}{2m}. \tag{37}$$

ポテンシャル部分に対しては

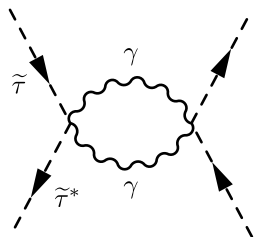
$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\mathrm{Pot}} =& \int d^4x d^4y \delta(x^0 - y^0)\left[\frac{\alpha}{r} + g_z^2\left(s_w^2 - \frac{1}{2}N_{\widetilde{l}1}{}^i N^\dagger_{\widetilde{l}}{}_i{}^1\right)^2 \frac{e^{-m_z r}}{4\pi r} + C_{h^0}^2 \frac{e^{-(m_{h^0})r}}{8\pi m^2}\right]\eta^*(x)\eta(x)\xi^*(y)\xi(y) \\ &+ \int d^4x d^4y \frac{e^{-m_{e_i} r}\delta(x^0 - y^0)}{16\pi m r}\left(C_1^i (m_e)_i{}^j C^\dagger{}_{2j} - C_2^i (m_e)_i{}^j C^\dagger{}_{1j}\right) \\ &\times \left(\eta^*(x)\zeta^{c\dagger}(x)\xi(y)\zeta(y) - \xi^*(x)\zeta^\dagger(x)\eta(y)\zeta^c(y)\right) \\ \equiv& \int d^4x d^4y \delta(x^0 - y^0)\left[\mathcal{S}^{(1)}_{pot.}\eta^*(x)\eta(x)\xi^*(y)\xi(y)\right. \\ &\left.+ \mathcal{S}^{(2)}_{pot.}\left(\eta^*(x)\zeta^{c\dagger}(x)\xi(y)\zeta(y) - \xi^*(x)\zeta^\dagger(x)\eta(y)\zeta^c(y)\right)\right], \end{aligned} \tag{38}$$

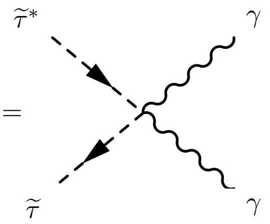
と書ける。ただし $i, j = 1, 2, 3$ で i についての和は $1 \sim 3$ で取られる。

同様にして imaginary part は $\mathcal{S}_{NR}$ における tr 部分から得られる。これは EWIMP が標準模型の粒子に崩壊するために必要になり、対応するダイアグラムを optical theorem [17] を用いて計算することでそれぞれの終状態に対応する effective action が得られる。この結果をまとめると、$\mathcal{S}_{Im}$ は次のように書かれる。

$$\mathcal{S}_{Im} = \mathcal{S}_\gamma + \mathcal{S}_e + \mathcal{S}_Z + \mathcal{S}_{Zh^0} + \mathcal{S}_{h^0} + \mathcal{S}_W + \mathcal{S}_\nu. \tag{39}$$

この action の例として、$\mathcal{S}_\gamma$ は次のダイアグラムを optical theorem を用いて次のように計算される。

$\mathcal{M} =$ 

$\rightarrow M =$ 

(40)

$$
\begin{aligned}
S_A^{(4)} &= i\frac{e^4}{8\pi m^2} \int d^4x \eta^*(x)\eta(x)\xi^*(x)\xi(x) \\
&\equiv \Gamma_{\gamma\gamma} \int d^4x \eta^*(x)\eta(x)\xi^*(x)\xi(x)
\end{aligned} \tag{41}
$$

ただし、$d(xy) = dtd^3xd^3y$ である。他の粒子に対する寄与についての計算は Appendix に書かれている。ここで、

$$
\Gamma = \Gamma_{e_ie_i} + \Gamma_{\gamma\gamma} + \Gamma_{Z^0Z^0} + \Gamma_{Z^0\gamma} + \Gamma_{Z^0h^0} + \Gamma_{h^0h^0} + \Gamma_{\nu_i\nu_i}. \tag{42}
$$

と書くと、最終的に effective action の虚部はまとめて、

$$
\mathcal{S}_{Im} = \int d(xy)\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\Gamma\eta^*(x)\eta(x)\xi^*(x)\xi(x) \tag{43}
$$

と書くことができる。

3.1.3 Two-body effective action

次に、$\widetilde{\chi}\widetilde{\chi}, \widetilde{\tau}\widetilde{\tau}$ の二体状態を実現させるために [13] の (22) 式のような以下の関係を満たす補助場 $\sigma_{\widetilde{\chi}}, \sigma_{\widetilde{\tau}}$ を導入する。

$$
\begin{aligned}
1 &= \int D\sigma_{\widetilde{\tau}} Ds^\dagger_{\widetilde{\tau}} \exp\left[\frac{i}{2}\int (xy)\sigma_{\widetilde{\tau}}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\left(s^\dagger_{\widetilde{\tau}}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - i\eta^*(t,\boldsymbol{x})\xi(t,\boldsymbol{y})\right)\right] \\
1 &= \int D\sigma^\dagger_{\widetilde{\tau}} Ds_{\widetilde{\tau}} \exp\left[\frac{i}{2}\int (xy)\sigma^\dagger_{\widetilde{\tau}}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\left(s_{\widetilde{\tau}}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - i\xi^*(t,\boldsymbol{y})\eta(t,\boldsymbol{x})\right)\right] \\
1 &= \int D\sigma_{\widetilde{\chi}} Ds^\dagger_{\widetilde{\chi}} \exp\left[\frac{i}{2}\int (xy)\sigma_{\widetilde{\chi}}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\left(s^\dagger_{\widetilde{\chi}}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - \frac{1}{2}\zeta^\dagger(t,\boldsymbol{x})\zeta^c(t,\boldsymbol{y})\right)\right] \\
1 &= \int D\sigma^\dagger_{\widetilde{\chi}} Ds_{\widetilde{\chi}} \exp\left[\frac{i}{2}\int (xy)\sigma^\dagger_{\widetilde{\chi}}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\left(s_{\widetilde{\chi}}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - \frac{1}{2}\zeta^{c\dagger}(t,\boldsymbol{y})\zeta(t,\boldsymbol{x})\right)\right]
\end{aligned}
$$

この関係を用いて $\sigma_{\widetilde{\chi}}, \sigma_{\widetilde{\tau}}$ 以外の場を integrate out すれば非相対論的な 2 体 effective action が得られる。実際にこれは、

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}^{(II)} =& -i\ln\int Ds^{\dagger}_{\widetilde{\tau}} Ds_{\widetilde{\tau}} Ds^{\dagger}_{\widetilde{\chi}} Ds_{\widetilde{\chi}} D\zeta^{\dagger} D\zeta D\eta^{*} D\eta D\xi^{*} D\xi \\
&\times \exp\left[\frac{i}{2}\int (xy)\sigma_{\widetilde{\tau}}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\left(s^{\dagger}_{\widetilde{\tau}}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - i\eta^{*}(t,\boldsymbol{x})\xi(t,\boldsymbol{y})\right)\right] \\
&\times \exp\left[\frac{i}{2}\int (xy)\sigma^{\dagger}_{\widetilde{\tau}}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\left(s_{\widetilde{\tau}}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - i\xi^{*}(t,\boldsymbol{y})\eta(t,\boldsymbol{x})\right)\right] \\
&\times \exp\left[\frac{i}{2}\int (xy)\sigma_{\widetilde{\chi}}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\left(s^{\dagger}_{\widetilde{\chi}}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - \frac{1}{2}\zeta^{\dagger}(t,\boldsymbol{x})\zeta^{c}(t,\boldsymbol{y})\right)\right] \\
&\times \exp\left[\frac{i}{2}\int (xy)\sigma^{\dagger}_{\widetilde{\chi}}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\left(s_{\widetilde{\chi}}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - \frac{1}{2}\zeta^{c\dagger}(t,\boldsymbol{x})\zeta(t,\boldsymbol{y})\right)\right] \\
&\times \exp\left[i\int d^4x d^4y \delta(x-y)\zeta^{\dagger}(x)\left(i\partial_{y^0} + \frac{\nabla_y^2}{2m}\right)\zeta(y)\right] \\
&\times \exp\left[-i\int d^4x d^4y \delta(x-y)\xi^{*}(x)\left(i\partial_{y^0} + \frac{\nabla_y^2}{2m} - \delta m\right)\xi(y)\right] \\
&\times \exp\left[i\int d^4x d^4y \delta(x-y)\eta^{*}(x)\left(i\partial_{y^0} + \frac{\nabla_y^2}{2m} - \delta m\right)\eta(y)\right] \\
&\times \exp\left[-i\int (xy) s^{\dagger}_{\widetilde{\tau}}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mathcal{S}^{(1)}_{Pot} s_{\widetilde{\tau}}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right] \\
&\times \exp\left[i\int (xy)\mathcal{S}^{(2)}_{Pot}\left(-2is^{\dagger}_{\widetilde{\tau}}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})s_{\widetilde{\chi}}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + 2is_{\widetilde{\tau}}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})s^{\dagger}_{\widetilde{\chi}}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right)\right] \\
&\times \exp\left[-i\int (xy) s^{\dagger}_{\widetilde{\tau}}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\Gamma s_{\widetilde{\tau}}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right] \qquad (44) \\
=& -i\ln\int Ds^{\dagger}_{\widetilde{\tau}} Ds_{\widetilde{\tau}} Ds^{\dagger}_{\widetilde{\chi}} Ds_{\widetilde{\chi}} D\zeta^{\dagger} D\zeta D\eta^{*} D\eta D\xi^{*} D\xi \\
&\times \exp\left[i\int d^4x d^4y \left(\zeta^{\dagger}(x)\,\zeta^{c\dagger}(x)\right)\mathcal{K}_{\widetilde{\chi}}\begin{pmatrix}\zeta(y)\\ \zeta^{c}(y)\end{pmatrix}\right] \\
&\times \exp\left[i\int d^4x d^4y \left(\eta^{*}(x)\,\xi^{*}(x)\right)\mathcal{K}_{\widetilde{\tau}}\begin{pmatrix}\eta(y)\\ \xi^{c}(y)\end{pmatrix}\right] \\
&\times \exp\left[\frac{i}{2}\int d(xy)\left(s^{\dagger}_{\widetilde{\tau}}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\, s^{\dagger}_{\widetilde{\chi}}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right)\mathcal{V}\begin{pmatrix}s_{\widetilde{\tau}}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\\ s_{\widetilde{\chi}}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\end{pmatrix}\right] \\
&\times \exp\Bigg[\frac{i}{2}\int d(xy)\Big(\sigma_{\widetilde{\tau}}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})s^{\dagger}_{\widetilde{\tau}}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \sigma^{\dagger}_{\widetilde{\tau}}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})s_{\widetilde{\tau}}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\
&\qquad\qquad + \sigma_{\widetilde{\chi}}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})s^{\dagger}_{\widetilde{\chi}}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \sigma^{\dagger}_{\widetilde{\tau}}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})s^{\dagger}_{\widetilde{\chi}}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\Big)\Bigg] \\
=& -i\mathrm{Trln}i\mathcal{K}_{\widetilde{\chi}} - i\mathrm{Trln}i\mathcal{K}_{\widetilde{\tau}} - \frac{1}{4}\int d(xy)\left(\sigma^{\dagger}_{\widetilde{\tau}}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\sigma^{\dagger}_{\widetilde{\chi}}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right)\mathcal{V}^{-1}\begin{pmatrix}\sigma_{\widetilde{\tau}}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\\ \sigma_{\widetilde{\chi}}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\end{pmatrix} \\
=& \frac{i}{2}\mathrm{Tr}\left[\mathcal{K}^{-1}_{0\widetilde{\chi}}\mathcal{K}'_{\widetilde{\chi}}\mathcal{K}^{-1}_{0\widetilde{\chi}}\mathcal{K}'_{\widetilde{\chi}}\right] + \frac{i}{2}\mathrm{Tr}\left[\mathcal{K}^{-1}_{0\widetilde{\tau}}\mathcal{K}'_{\widetilde{\tau}}\mathcal{K}^{-1}_{0\widetilde{\tau}}\mathcal{K}'_{\widetilde{\tau}}\right] - \frac{1}{4}\int d(xy)\left(\sigma^{\dagger}_{\widetilde{\tau}}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\sigma^{\dagger}_{\widetilde{\chi}}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right)\mathcal{V}^{-1}\begin{pmatrix}\sigma_{\widetilde{\tau}}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\\ \sigma_{\widetilde{\chi}}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

のように計算される。ただし

$$\mathcal{K}_{\widetilde{\tau}} = \begin{pmatrix} \delta(x-y)\left(i\partial_{y^0} + \frac{\nabla_y^2}{2m} - \delta m\right) & -\frac{1}{4}\delta(x^0-y^0)\sigma_\chi(x,y) \\ -\frac{1}{4}\delta(x^0-y^0)\sigma_\chi^\dagger(x,y) & -\delta(x-y)\left(i\partial_{y^0} + \frac{\nabla_y^2}{2m} + \delta m\right) \end{pmatrix}, \tag{45}$$

$$\mathcal{K}_{\widetilde{\chi}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\delta(x-y)\left(i\partial_{y^0} + \frac{\nabla_y^2}{2m}\right) & -\frac{1}{4}\delta(x^0-y^0)\sigma_\chi(x,y) \\ -\frac{1}{4}\delta(x^0-y^0)\sigma_\chi^\dagger(x,y) & \frac{1}{2}\delta(x-y)\left(i\partial_{y^0} + \frac{\nabla_y^2}{2m}\right) \end{pmatrix}, \tag{46}$$

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} -2\mathcal{S}_{Pot}^{(1)} - 2\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\Gamma & -4i\mathcal{S}_{Pot}^{(2)} \\ 4iS_{Pot}^{(2)} & 0 \end{pmatrix}, \tag{47}$$

$$\mathcal{K}_{0\widetilde{\tau}}^{-1} = \begin{pmatrix} S_F^{\widetilde{\tau}}(x-y) & 0 \\ 0 & -S_F^{\widetilde{\tau}}(x-y) \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{K}_{0\widetilde{\chi}}^{-1} = \begin{pmatrix} 2S_F^{\widetilde{\chi}}(x-y) & 0 \\ 0 & 2S_F^{\widetilde{\chi}}(x-y) \end{pmatrix} \tag{48}$$

と定義した。また、

$$S_F^{\widetilde{\tau}}(x-y) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{e^{-iq(x-y)}}{q^0 - |\boldsymbol{q}|^2/2m - \delta m + i\epsilon}, \quad \bar{S}_F^{\widetilde{\tau}}(x-y) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{e^{-iq(x-y)}}{q^0 - |\boldsymbol{q}|^2/2m + \delta m + i\epsilon},$$
$$S_F^{\widetilde{\chi}}(x-y) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{e^{-iq(x-y)}}{q^0 - |\boldsymbol{q}|^2/2m + i\epsilon}, \quad \bar{S}_F^{\widetilde{\chi}}(x-y) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{e^{-iq(x-y)}}{q^0 - |\boldsymbol{q}|^2/2m + i\epsilon}, \tag{49}$$

としている。(62) の Tr の部分は

$$\begin{aligned} \frac{i}{2}\mathrm{Tr}\left[\mathcal{K}_{0\widetilde{\chi}}^{-1}\mathcal{K}'_{\widetilde{\chi}}\mathcal{K}_{0\widetilde{\chi}}^{-1}\mathcal{K}'_{\widetilde{\chi}}\right] =& \frac{i}{2}\int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4}\frac{d^4q_2}{(2\pi)^4} \\ &\times \frac{e^{-iq_1(x-y)}}{q_1^0 - |\boldsymbol{q}_1|^2/2m + i\epsilon}\frac{e^{-iq_2(x-y)}}{q_2^0 - |\boldsymbol{q}_2|^2/2m - i\epsilon}\sigma_{\widetilde{\chi}}(x_2^0, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3)\sigma_{\widetilde{\chi}}^\dagger(x_1^0, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_4) \end{aligned} \tag{50}$$

と計算される。これらを重心座標と相対座標に分離するために、

$$R = \left(x_2^0, \frac{\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3}{2}\right), \qquad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3 \tag{51}$$

$$R' = \left(x_1^0, \frac{\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_4}{2}\right), \qquad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_4 \tag{52}$$

と定義し、$\sigma_{\widetilde{\chi}}$ のフーリエ変換を

$$\sigma_{\widetilde{\chi}}(\boldsymbol{r}, P) = \int d^4R\, \sigma_{\widetilde{\chi}}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, e^{iP\cdot R} \tag{53}$$

と書くと、

$$\begin{aligned} \frac{i}{2}\mathrm{Tr}\left[\mathcal{K}_{0\widetilde{\chi}}^{-1}\mathcal{K}'_{\widetilde{\chi}}\mathcal{K}_{0\widetilde{\chi}}^{-1}\mathcal{K}'_{\widetilde{\chi}}\right] =& \frac{i}{2}\int d^3r d^3r' \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4}\frac{d^4q_2}{(2\pi)^4}\frac{e^{-iq_1(x-y)}}{q_1^0 - |\boldsymbol{q}_1|^2/2m + i\epsilon}\frac{e^{-iq_2(x-y)}}{q_2^0 - |\boldsymbol{q}_2|^2/2m - i\epsilon} \\ &\times \sigma_{\widetilde{\chi}}(x_2^0, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3)\sigma_{\widetilde{\chi}}^\dagger(x_1^0, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_4) \end{aligned} \tag{54}$$

となる。ここで、P, k を

$$P = q_1 - q_2, \qquad k = \frac{q_1 + q_2}{2} \tag{55}$$

として計算すると、

$$\frac{i}{2}\mathrm{Tr}\left[\mathcal{K}_{0\widetilde{\chi}}^{-1}\mathcal{K}'_{\widetilde{\chi}}\mathcal{K}_{0\widetilde{\chi}}^{-1}\mathcal{K}'_{\widetilde{\chi}}\right]=\frac{i}{2}\int d^3rd^3r\frac{d^4P}{(2\pi)^4}\sigma^\dagger_{\widetilde{\chi}}(\boldsymbol{r'},P)\Xi_N(\boldsymbol{r'}-\boldsymbol{r},E)\sigma_{\widetilde{\chi}}(\boldsymbol{r},P) \tag{56}$$

とできる。ここで Ξ_N, E は、

$$\Xi_N(\boldsymbol{r'}-\boldsymbol{r},E)=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{me^{i(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{k}}}{|\boldsymbol{k}|^2-mE},\qquad E=P^0-\frac{|\boldsymbol{P}|^2}{4m} \tag{57}$$

としている。同様にして、(62) の第二項は

$$\begin{aligned}\frac{i}{2}\mathrm{Tr}\left[\mathcal{K}_{0\widetilde{\tau}}^{-1}\mathcal{K}'_{\widetilde{\tau}}\mathcal{K}_{0\widetilde{\tau}}^{-1}\mathcal{K}'_{\widetilde{\tau}}\right]=&\frac{i}{2}\int d^3rd^3r\frac{d^4P}{(2\pi)^4}\sigma^\dagger_{\widetilde{\tau}}(\boldsymbol{r'},P)\Xi_C(\boldsymbol{r'}-\boldsymbol{r},E)\sigma_{\widetilde{\tau}}(\boldsymbol{r},P)\\ \Xi_C(\boldsymbol{r'}-\boldsymbol{r},E)=&\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{me^{i(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{k}}}{|\boldsymbol{k}|^2-mE+2\delta m}\end{aligned} \tag{58}$$

とできる。したがって、$\mathcal{S}^{(II)}$ は

$$\begin{aligned}\mathcal{S}^{((II)}=&\frac{1}{2}\int d^3rd^3r'\frac{d^4P}{(2\pi)^4}\left(\sigma^\dagger_{\widetilde{\tau}}(\boldsymbol{r},P)\quad\sigma^\dagger_{\widetilde{\chi}}(\boldsymbol{r},P)\right)\begin{pmatrix}\Xi_C(\boldsymbol{r'}-\boldsymbol{r},E) & 0\\ 0 & \Xi_N(\boldsymbol{r'}-\boldsymbol{r},E)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_{\widetilde{\tau}}(\boldsymbol{r},P)\\ \sigma_{\widetilde{\chi}}(\boldsymbol{r},P)\end{pmatrix}\\ &-\frac{1}{4}\int\frac{d^4P}{(2\pi)^4}\left(\sigma^\dagger_{\widetilde{\tau}}(\boldsymbol{r},P)\quad\sigma^\dagger_{\widetilde{\chi}}(\boldsymbol{r},P)\right)\mathcal{V}^{-1}\begin{pmatrix}\sigma_{\widetilde{\tau}}(\boldsymbol{r},P)\\ \sigma_{\widetilde{\chi}}(\boldsymbol{r},P)\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{59}$$

とできる。として、ここで、$\phi=\begin{pmatrix}\sigma_{\widetilde{\tau}}(\boldsymbol{r},P)\\ \sigma_{\widetilde{\chi}}(\boldsymbol{r},P)\end{pmatrix}$ としている。ϕ についての運動方程式を求めると、次の式が導かれる。

$$\left(\frac{\nabla_r^2}{m}+\boldsymbol{E}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\mathcal{V}\right)\varphi_P(\boldsymbol{r})=0 \tag{60}$$

ただし、

$$\varphi_P=(\boldsymbol{r})=\mathcal{V}^{-1}\begin{pmatrix}\sigma_{\widetilde{\tau}}(\boldsymbol{r},P)\\ \sigma_{\widetilde{\chi}}(\boldsymbol{r},P)\end{pmatrix},\qquad\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}E-\delta m & 0\\ 0 & E\end{pmatrix}\mathcal{V} \tag{61}$$

としている。よって、最終的な action は

$$\mathcal{S}^{II}=\int d^4xd^3r\Phi^\dagger(x,\boldsymbol{r})\left(\frac{\nabla_r^2}{m}+i\partial_{x^0}+\frac{\nabla_x^2}{4m}-\begin{pmatrix}2\delta m & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\mathcal{V}\right)\Phi(x,\boldsymbol{r}) \tag{62}$$

と書くことができる。ただし、

$$\varphi_P(\boldsymbol{r})=\int d^4x\Phi(x,\boldsymbol{r})e^{ix\cdot P} \tag{63}$$

としている。

3.2 Annihilation cross section

ここでは、これまで求めてきた 2 体の effective action から暗黒物質の S 波についての対消滅断面積を [13,18] の方法を参考に定式化していく。[13] より、S 波に対する cross section は次のように書くことができる。

$$\sigma_i^{(S)} = c_i \, \frac{32\pi^5}{m^2 v^3} \, Im[\mathcal{M}_i^{(S)}(v)]. \tag{64}$$

ただし、$i = 1$ は $\widetilde{\tau}\widetilde{\tau}$ の消滅を、$i = 2$ は $\widetilde{\chi}\widetilde{\chi}$ の消滅を表しており $c_1 = 1, c_2 = 2$ である。したがって, (64) 式から明らかなように $\mathcal{M}_i^{(S)}(v)$ を求めることができれば cross section を決定できる。(62) 式から、Schwinger-Dyson 方程式は次のようになる。

$$\left[\frac{\nabla_r^2}{m} + i\partial_{x^0} + \frac{\nabla_x^2}{4m} - \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) + i\Gamma\frac{\delta(r)}{4\pi r}\right] \langle 0|T\Phi(x,\boldsymbol{r})\Phi^\dagger(y,\boldsymbol{r}')|0\rangle = i\delta(x-y)\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'), \tag{65}$$

ここで、$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ は

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} 2\delta m - \mathcal{S}_{pot.}^{(1)} & -2i\mathcal{S}_{pot.}^{(2)} \\ -2i\mathcal{S}_{pot.}^{(2)} & 0 \end{pmatrix}. \tag{66}$$

である。$\boldsymbol{V}$ は r にしか依存していないので、グリーン関数は次のように展開することができる。

$$\langle 0|T\Phi(x,\boldsymbol{r})\Phi^\dagger(y,\boldsymbol{r}')|0\rangle = \int \frac{d^4P}{(2\pi)^4} e^{-iP(x-y)} \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos\gamma)(-i)\boldsymbol{G}^{(E,l)}(r,r'). \tag{67}$$

よって、(65),(67) 式から、動径方向のグリーン関数 $\boldsymbol{G}^{(E,l)}$ に対する式は

$$\left[-E - \frac{1}{mr}\frac{d^2}{dr^2}r - \frac{l(l+1)}{mr^2} + \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) - i\Gamma\frac{\delta(r)}{4\pi r}\right]\boldsymbol{G}^{(E,l)}(r,r') = \frac{\delta(r-r')}{r^2}. \tag{68}$$

となる。動径方向のグリーン関数 $\boldsymbol{G}^{(E,l)}$ の (i,i) 成分を用いると、不変振幅 $\mathcal{M}_i^{(S)}(v)$ は

$$\mathcal{M}_i^{(S)}(v) = \frac{k^2}{4\pi}\lim_{E\to k^2/m}\left(E - \frac{k^2}{m}\right)^2 \int_0^\infty r^2 dr r'^2 dr' j_0(kr) j_0(kr') \boldsymbol{G}_{ii}^{(E,0)}(r,r'), \tag{69}$$

となる。ただし、$k = mv/2$ で j_0 は 0 次の球ベッセル関数である。したがって、S 波についての annihilation cross section は以下のように書くことができる。

$$\sigma_i^{(S)} v = c_i \frac{2\pi}{k^2}\lim_{E\to k^2/m}\left(E - \frac{k^2}{m}\right)^2 \int_0^\infty r dr r' dr' \sin(kr)\sin(kr') Im\boldsymbol{G}_{ii}^{(E,0)}(r,r'). \tag{70}$$

一般的に、$\boldsymbol{G}_{ii}^{(E,0)}(r,r')$ の解は解析的に解くことができないので、(68) を数値的に解く必要がある。 $\mathbf{g}(r,r') = rr'\boldsymbol{G}_{ii}^{(E,0)}(r,r')$ を導入して式を無次元化すると、(68) は次のようになる。

$$-\frac{1}{m}\frac{d^2}{dr^2}\mathbf{g}(r,r') + \left[\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) - i\Gamma\frac{\delta(r)}{4\pi r}\right]\mathbf{g}(r,r') - E\mathbf{g}(r,r') = \delta(r-r'). \tag{71}$$

ここで、Γ を含む項を摂動とみなすと、リーディングな解 $\mathbf{g}_0(r,r')$ は次の方程式を満たす。

$$-\frac{1}{m}\frac{d^2}{dr^2}\mathbf{g}_0(r,r') + \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})\mathbf{g}_0(r,r') - E\mathbf{g}_0(r,r') = \delta(r-r'). \tag{72}$$

これを解くためには適切な境界条件の下で式を解く必要がある。このために [13] で $\boldsymbol{G}_{ii}^{(E,0)}(r,r')$ に対して用いられている条件:

(i) $\boldsymbol{G}_{ii}^{(E,0)}(r,r')$ は任意の r,r' に対して有限である.
(ii) $|r-r'|\to\infty$ で $\boldsymbol{G}_{ii}^{(E,0)}(r,r')$ は外向波のみを持つ。

を考える。さらに、この条件のもとで、$\mathbf{g}_0(r,r')$ の解は次のようになる。

$$\mathbf{g}_0(r,r') = m\mathbf{g}_>(r)\mathbf{g}_<^{\mathsf{T}}(r')\theta(r-r') + m\mathbf{g}_<(r)\mathbf{g}_>^{\mathsf{T}}(r')\theta(r'-r) \quad . \tag{73}$$

ここで、$\mathbf{g}_{<(>)}(r)$ はそれぞれ次の方程式を満たす。

$$-\frac{1}{m}\frac{d^2}{dr^2}\mathbf{g}_>(r) + \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})\mathbf{g}_>(r) = E\mathbf{g}_>(r) \quad . \tag{74}$$

また、$\mathbf{g}_<(r)$ と $\mathbf{g}_>(r)$ に対する条件は次のようになる。

(i) $\mathbf{g}_<(0) = \mathbf{0}$, $\dfrac{d\ \mathbf{g}_<(0)}{dr} = \mathbf{1}$,
(ii) $\mathbf{g}_>(0) = \mathbf{1}$, $r\to\infty$ で $\mathbf{g}_>(r)$ は外向波のみを持つ

Γ の一次のオーダーで、$\mathbf{g}_>(r)$ を $\mathbf{g}_>(r) = \mathbf{g}_>(0) + \left(\dfrac{d\ \mathbf{g}_>(0)}{dr}\right) r + \cdots$ のように展開すると、$\mathbf{g}_1(r,r')$ は次のようになる。

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_1(r,r') =& -\int dr''\mathbf{g}_0(r,r'')\left(-i\Gamma\ \frac{\delta(r)}{4\pi r}\right)\mathbf{g}_0(r'',r') \\ =& \frac{im^2}{2\pi}\mathbf{g}_>(r)\ \Gamma\ \mathbf{g}_>^{\mathsf{T}}(r')\end{aligned} \tag{75}$$

$E < 2\delta m$ の時に、$\widetilde{\tau}$ は $r\to\infty$ で存在しないため、

$$[\mathbf{g}_>(r)]_{ij}\Big|_{r\to\infty} = \delta_{i2}d_{2j}(E)e^{i\sqrt{mE}r} \quad . \tag{76}$$

と書ける。さらに、今回のモデルでそれぞれの消滅チャンネル $[\widetilde{\Gamma}]_{ab}$ は $a=1, b=1$ の成分でのみ値を持つので、それぞれの消滅チャンネル f に対する annihilation cross section は次のように書ける。

$$\sigma_2^{(S)}v|_f = [\widetilde{\Gamma}_f]_{11}d_{21}(mv^2/4)d_{21}^*(mv^2/4) \quad . \tag{77}$$

また、それぞれの消滅チャンネル f に対する和を $\Gamma = \sum_f \widetilde{\Gamma}_f$ と書いた時、total cross section は次のように書ける。

$$\sigma_2^{(S)}v = \Gamma_{11}d_{21}(mv^2/4)d_{21}^*(mv^2/4) \quad . \tag{78}$$

したがって、cross section を求めるためには (74) を数値的に解いて d_{21} を求める必要がある。

3.3 Dark matter signature

次に、暗黒物質の間接検出における銀河中心からの γ 線の flux を計算していく。γ 線のスペクトルには $\gamma\gamma$ のような line γ 線と continuum γ 線の二種類ある。line γ 線は暗黒物質が非相対論的に運動していることから、暗黒物質の質量でスペクトルのピークが生じる。一方、continuum γ 線は暗黒物質が崩壊した粒子が π メソン生成され、その後に光子に崩壊するような場合である。これは宇宙線的なバックグラウンドがよくわかっている場合に暗黒物質を制限するのに役に立つ。ここで、暗黒物質の対消滅による γ 線 flux は

$$\frac{d\Phi_\gamma}{dE} = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{m_\chi^2}\sum_f \frac{dN_f}{dE}\frac{\langle\sigma v\rangle_f}{2} \times J \tag{79}$$

と書ける。m_χ は暗黒物質の質量で $N_f/dE \cdot dE$ は final state f についての E から $E + dE$ の間に存在する photon の数、$\langle\sigma v\rangle$ は速度について平均化された anihilation cross section である。また、J は J-factor と呼ばれており、

$$J = \int_{\text{line of sight}} dl(\theta) \int_{\Delta\Omega} d\Omega\ \rho^2 \tag{80}$$

のような宇宙論的なパラメータから決定されるような量である。ここで、$\Delta\Omega$ は角度分解能で ρ は暗黒物質の質量密度を表している。この質量密度は N 体シミュレーションによっていくつかのプロファイル [19,20,21] が提唱されており、例えば

$$\rho_{\text{NFW}} = \frac{\rho_s}{(r/r_s)(1+r/r_s)^2}\quad , \tag{81}$$

$$\rho_{\text{Burkert}} = \frac{\rho_s}{(1+r/r_s)(1+(r/r_s)^2)}\quad , \tag{82}$$

$$\rho_{\text{Einasto}} = \rho_s \exp\left\{-\frac{2}{\alpha}\left[\left(\frac{r}{r_s}\right)^\alpha - 1\right]\right\}\quad . \tag{83}$$

などが挙げられる。ここで ρ_s, r_s, α は観測から決定される量である [21]。また、それぞれのプロファイルについては以下のグラフで表されている。

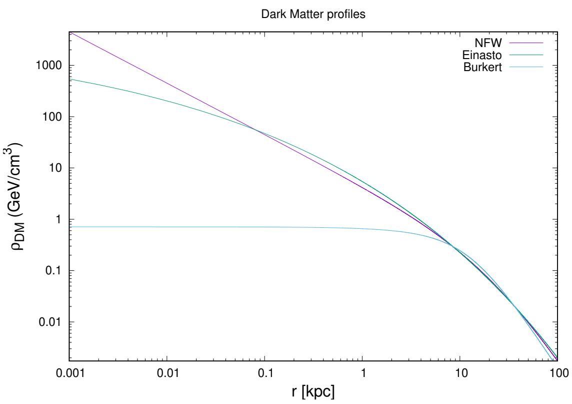


図 6 暗黒物質のプロファイル。NFW, Burkert, Einasto プロファイルはそれぞれ紫、青、緑色で示されている。

次に particle physics によるパラメータから決定される部分について考える。cross section $\langle\sigma v\rangle$ に関しては前節で議論した (77) 式を用いる。次にエネルギースペクトル dN_f/dE について考えるが、今回は pythia [12]

を用いて各終状態についてのスペクトルを計算した。以下は暗黒物質が対消滅することによってできた粒子が γ へと崩壊するエネルギースペクトルである。
Z ボソンの崩壊スペクトルは

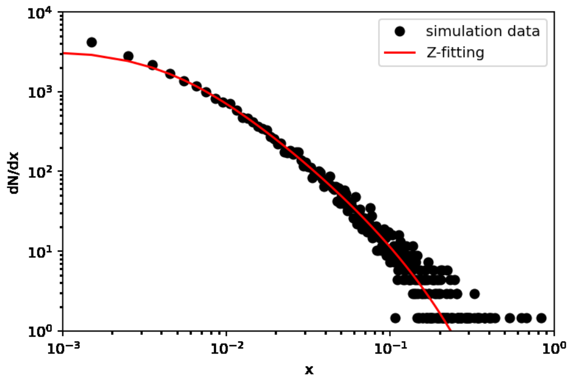


図 7　$\widetilde{\chi}\widetilde{\chi} \to Z^0 Z^0$ の反応によって生じた Z^0 が γ へと崩壊する際のエネルギースペクトル

$$\frac{dN_Z}{dx} = \frac{0.642e^{-7.98x}}{x^{1.59} + 1.88 \times 10^{-4}} \tag{84}$$

のように描ける。ただし、$x = E/m_\chi$ としている。また、W ボソンと τ についての崩壊スペクトルは

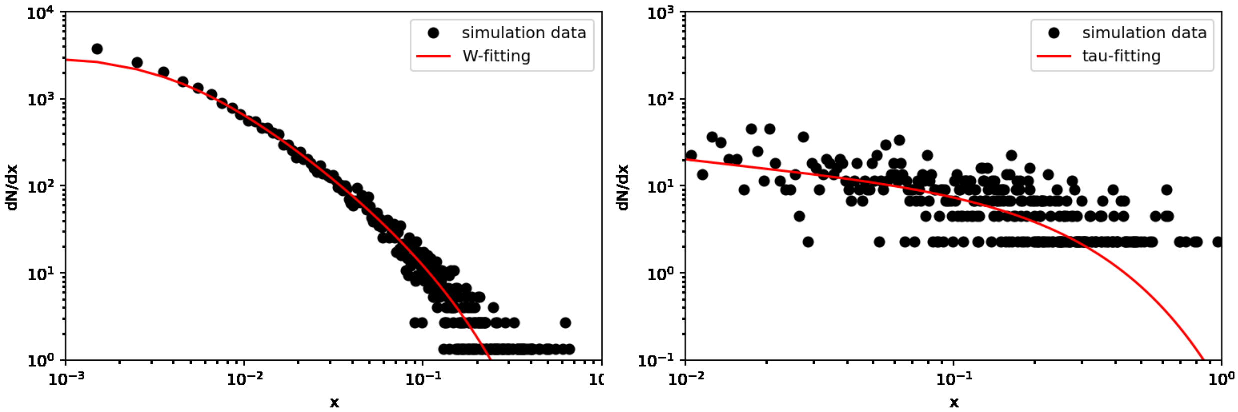


図 8　$\widetilde{\chi}\widetilde{\chi} \to W^+W^-, \tau^+\tau^-$ の反応によって生じた W ボソンと τ が γ へと崩壊する際のエネルギースペクトル。左が W ボソンの場合で右が τ の場合を表している。

$$\frac{dN_W}{dx} = \frac{0.931e^{-8.60x}}{x^{1.49} + 2.87 \times 10^{-4}}, \qquad \frac{dN_\tau}{dx} = \frac{0.0264e^{-5.24x}}{x^{3.89\times10^{-4}} - 0.997} \tag{85}$$

と描ける。一方で、$\gamma\gamma$ に直接消滅する場合のスペクトルは

$$\frac{dN_\gamma}{dE} = 2\delta(E - m) \tag{86}$$

のようにかけるため暗黒物質の信号は連続スペクトルではなく、単色型の形になる。

4 Result

4.1 Numerical results

ここでは 3 章で定式化した cross section を数値計算した結果を見る。数値計算の際に用いたパラメータは Appendix で書かれている、Li 問題を解決することができるようなパラメータである [15]。この計算では δm を特定の値に固定した時の Sommerfeld enhancement の影響を受けた cross section を計算している。ここで、stau の質量は ATLAS 実験 [5] によって約 430(GeV) まで制限されているため、以降の結果では特に、enhancement によるピークが 430(GeV) 付近になるように δm を設定したものに注目する。
次に Sec3-2 で定式化した cross section を数値的に解いた結果を示す。まず、$\widetilde{\chi}\widetilde{\chi} \to \gamma\gamma$ となるような消滅断面積を異なる δm についてプロットした結果は次のようになる。

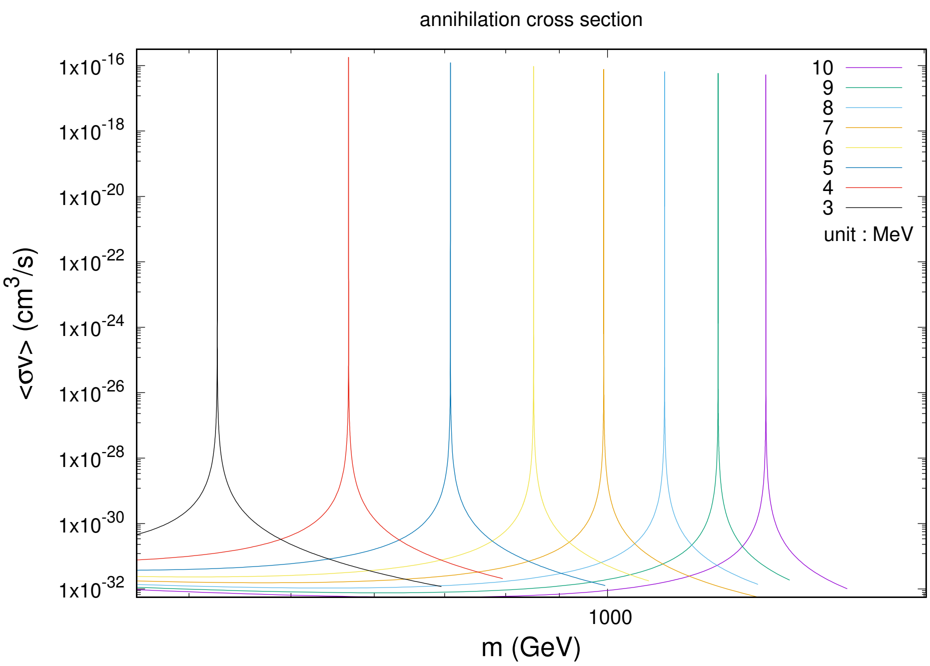


図 9　δm 毎の photon への消滅断面積。それぞれのグラフの凡例は MeV 単位で書かれている

これより、δm 毎に異なる点で enhancement が生じており、δm が増加するにつれてそれぞれの消滅断面積が減少していることが確かめられた。同様にして $\widetilde{\chi}\widetilde{\chi} \to Z^0 Z^0$, $\widetilde{\chi}\widetilde{\chi} \to W^+W^-$, $\widetilde{\chi}\widetilde{\chi} \to \tau^+\tau^-$ それぞれの消滅チャンネルに対する消滅断面積次のようになる。

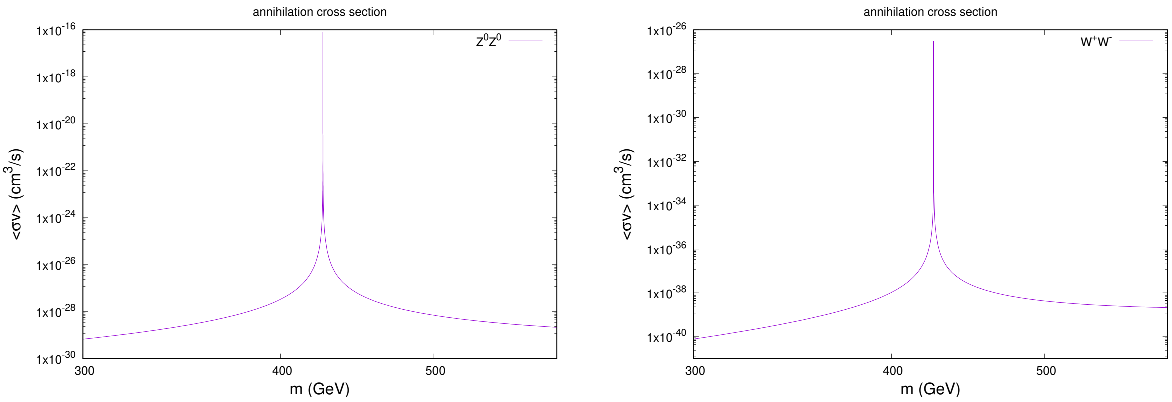


図 10　左が Z^0Z^0、右が W^+W^- へ消滅する場合の cross section を表す。ここでは $\delta m = 0.003$[GeV] に設定している。

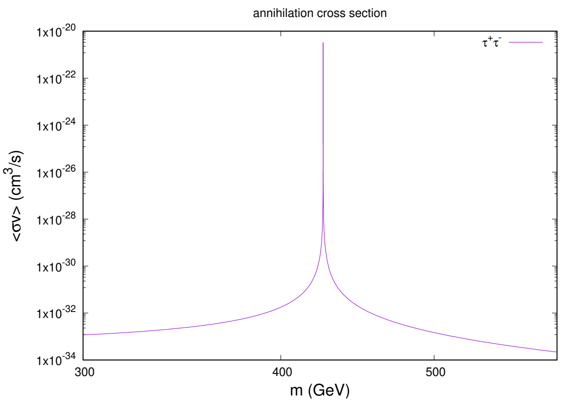


図 11　τ へ消滅する場合の cross section。ここでは $\delta m = 3$MeV に設定している。

以上のように、それぞれの消滅チャンネルで enhancement が生じることが確かめられた。次に (79) 式で表される flux を計算した際の結果について見る。まず、line-spectrum になるような flux として $\widetilde{\chi}\widetilde{\chi} \to \gamma\gamma$ となるような場合の flux を示すと次の図のようになる。

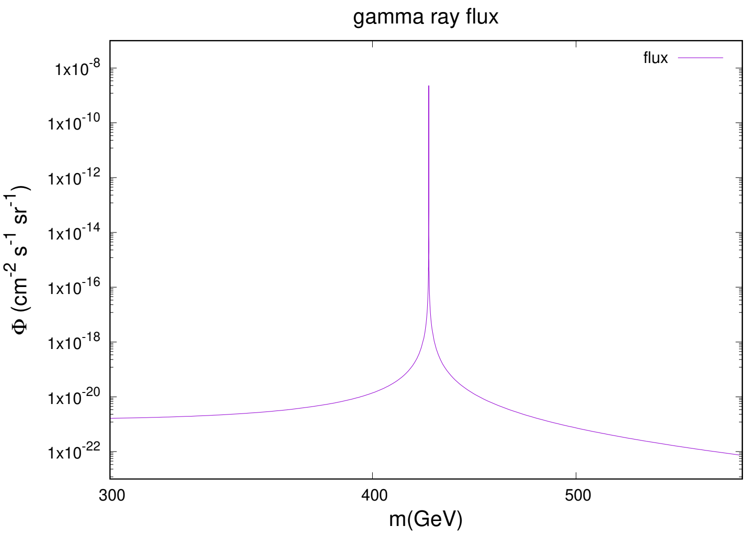


図 12　暗黒物質が直接 γ 線に消滅する場合の flux. $\delta m = MeV$ で cross section と同じ位置にピークが存在している。

これはエネルギースペクトルは (86) 式で表されることから、この flux は基本的に 9 で示されているような cross section と同様の性質を持つ。また、J-factor については [22] の文献より $J = 10 \times 10^{20}(\mathrm{GeV}^2/\mathrm{cm}^5)$ を、角度分解能は $\Delta\Omega = 1 \times 10^{-5}$ を用いて計算している。
同様に continuum flux の例として Z^0Z^0, W^+W^- に消滅する場合を図示すると次のようになる。

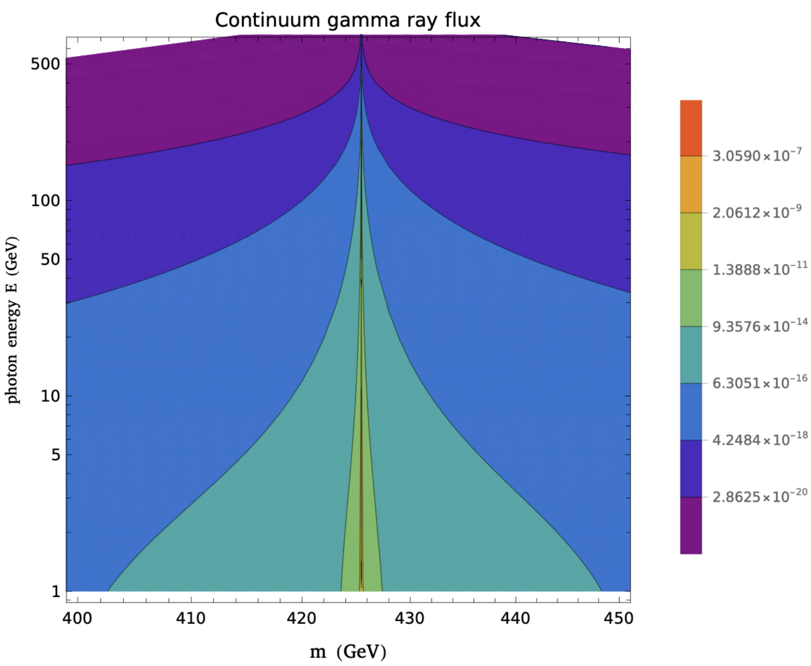


図 13　Z^0Z^0, W^+W^- へ消滅する場合の continuum gamma ray flux. ここでは $\delta m = 3\mathrm{MeV}$ に設定している。

この図は横軸を暗黒物質の質量、縦軸を観測される γ 線のエネルギーとして、観測される flux を等高線として描いたものである。図から明らかなように、cross section のピークの位置で γ 線のエネルギーが小さいような領域で最も大きな flux を得ることができ、そこから離れるにつれ flux が小さくなっていくということが分かった。

4.2 Discussion

次に、Sommerfeld Enhancement の効果で cross section が増加したことによって実際に間接検出で観測可能な領域まで信号が大きくなるのかを見る。これをするためにまず、$\tilde{\chi}\tilde{\chi} \to \gamma\gamma$ についての結果を coanihilation 領域に絞って HESS[22] の結果、そして CTA で実現される感度 [23] と比較したグラフは次のようになる。

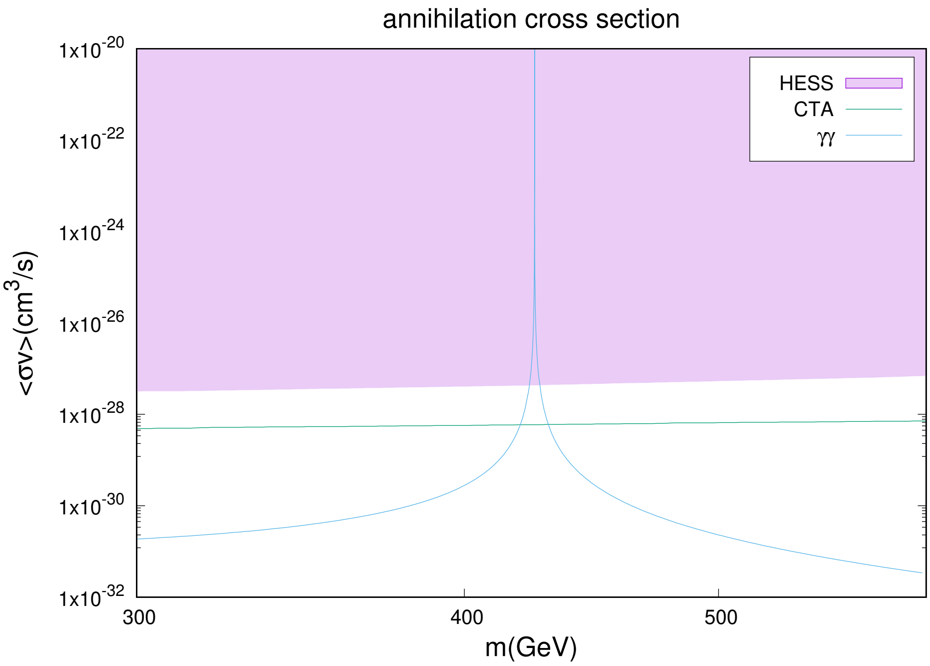


図 14　coanihilation 領域における $\delta m = 3\text{MeV}$ の場合の cross section を HESS の結果,CTA の感度 [22,23] と比較したもの。青い線が計算結果、紫色の領域が HESS の結果を表している。また、実現される CTA の感度が緑色の線で書かれている。

上の図から分かるように、今回の計算した結果は現在の実験で得られている感度よりも大きなものになっていることが分かる。これより、緑色の線で書かれた CTA のように現在の実験よりも感度が良くなれば暗黒物質由来の信号が近い将来観測される可能性があるということが分かる。また、この図において紫色で塗られた領域は禁止されているため、$\delta m = 3\text{MeV}$ における暗黒物質の質量の範囲に制限をかけることができる領域があることが存在することが分かる。さらに、直接 γ に消滅するチャンネル以外の例として $\tilde{\chi}\tilde{\chi} \to \tau^+\tau^-$ のチャンネルを実験値と比較したグラフは次のようになる。

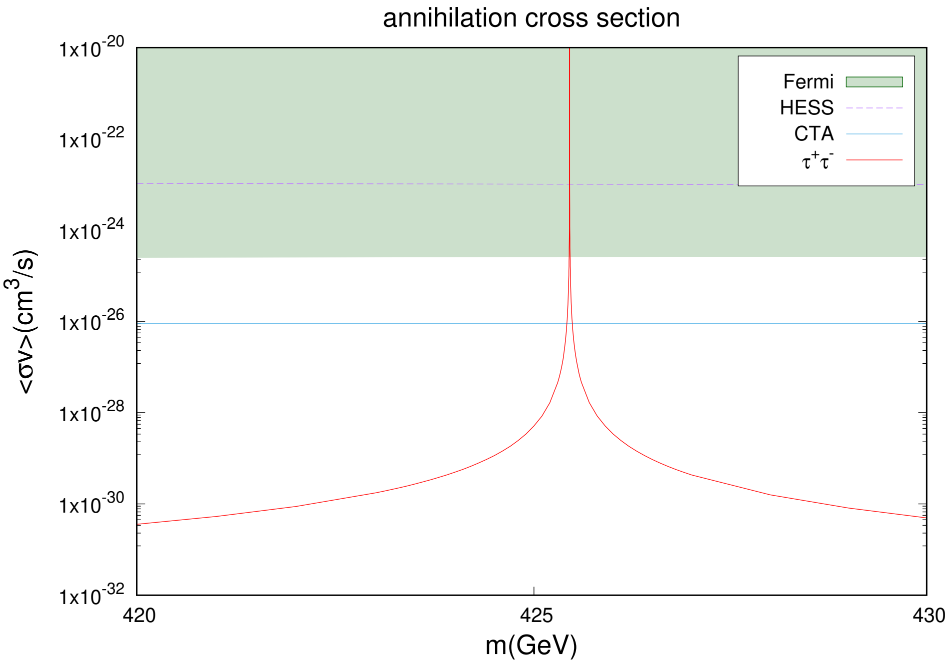


図 15　coanihilation 領域における $\delta m = 3\text{MeV}$ の場合の cross section を HESS の結果 [9],Fermi-LAT による結果 [8], そして CTA の感度 [23] と比較したグラフ。赤い線が計算結果、紫色の線が HESS の結果、そして緑色の領域が Fermi-LAT によって禁止されている領域を表している。また、実現される CTA の感度が青色の線で書かれている。

このグラフより、現在の実験から制限できるパラメータ領域は γ に直接消滅する場合に比べてほとんど得られないことが分かる。同様に Z^0Z^0, W^+W^- のような他の消滅チャンネルでもほとんど制限をつけられない結果となり、結果的に γ に直接消滅する場合が最もパラメータに制限をつけることができることがわかった。さらに、これを $\delta m = 3\text{MeV}$ 以外の領域でも同様の操作をして禁止される領域を求め、それをグラフ化したものは次のようになる。これより、現在の制限に対しては狭い領域で δm と m の間の関係を禁止するようなパラメータを見つけることができることがわかった。さらに、現在得られている制限が CTA や将来的に感度が上がることによって 100 倍強くなった時の禁止されるような領域を描いたグラフは次のようになる。

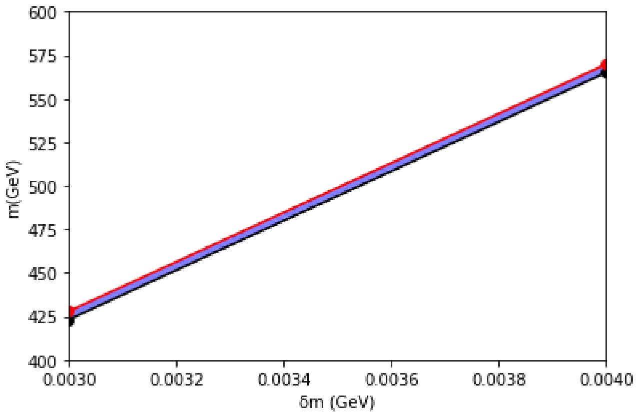


図 16　今回計算した cross section と現在の実験の制限を比較することで得られた禁止されるパラメータ領域を描いたグラフ。青い領域が禁止された部分を表している。

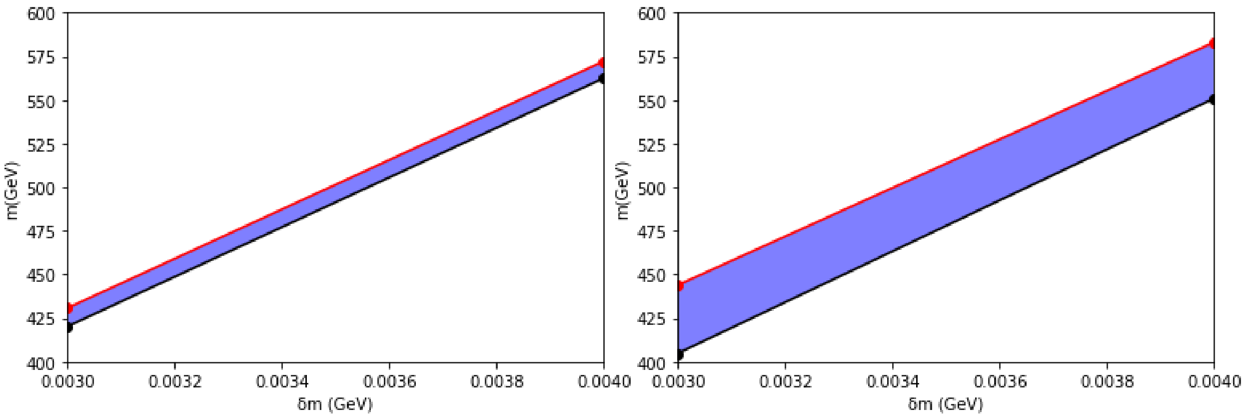


図 17　左図は CTA の感度と比較することによって得られた禁止されるパラメータ領域を、右図は現在の制限よりも 100 倍強くなった場合の禁止されるパラメータ領域を描いたグラフである。

この図より将来的には現在よりもかなり広い領域で δm についての制限をつけられる可能性があることがわかった。

以上から、今回考えたモデルにおいて、暗黒物質の annihilation cross section は現在の感度で検出することができるぐらいまで増幅されることが分かった。これによって、現在はまだ観測されていない暗黒物質による信号を近い将来検出することができるかもしれないと考えられる。また、検出されない場合でも今回用いた Li 問題を解決することができるモデルのパラメータを禁止する領域が広がり、このモデルの妥当性を評価することができることが分かった。また、今回は数値計算で用いた暗黒物質の質量に関するパラメータが先行研究で用いられたパラメータと僅かに異なっても結果はほとんど変わらないと仮定しているが、今後はこのパラメータの差異が結果にどれほど影響を与えるのかを評価する必要がある。

5 Appendix

5.1 integrate out

ここでは Sec3-1 で述べられている A_μ 以外の場についての integrate out の結果を記述する。

- Z_μ に関係する項を抜き出し、integrate out した場合の effective action は次のようになる。

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_Z =&2ie^2g_z^2\left(s_w^2-\frac{1}{2}N_{\tilde{l}1}{}^{i}N^{\dagger}_{\tilde{l}}{}_{i}{}^{1}\right)^2\\&\qquad\times\mathrm{tr}\int d^4x_1d^4x_2|\tilde{\tau}|^2(x_1)|\tilde{\tau}|^2(x_2)D^Z_{\mu\nu}(x_1-x_2)D^{A\nu\rho}(x_2-x_1)\\&+ig_z^4\left(s_w^2-\frac{1}{2}N_{\tilde{l}1}{}^{i}N^{\dagger}_{\tilde{l}}{}_{i}{}^{1}\right)^4\\&\qquad\times\mathrm{tr}\int d^4x_1d^4x_2|\tilde{\tau}|^2(x_1)|\tilde{\tau}|^2(x_2)D^Z_{\mu\nu}(x_1-x_2)D^{Z\nu\rho}(x_2-x_1)\\&+\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ^\mu_Z(x)D^Z_{\mu\nu}(x-y)J^\nu_Z(y),\end{aligned}\tag{87}$$

ただし、

$$D^Z_{\mu\nu}(x-y)=-i\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{g_{\mu\nu}}{q^2-m_Z^2+i\epsilon}e^{-iq(x-y)},\tag{88}$$

$$J^\mu_Z(x)=-ig_z\left(s_w^2-\frac{1}{2}N_{\tilde{l}1}{}^{i}N^{\dagger}_{\tilde{l}}{}_{i}{}^{1}\right)\tilde{\tau}^*\overleftrightarrow{\partial}^\mu\tilde{\tau}.\tag{89}$$

- W^+,W^- について

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_W =&\frac{i}{4}g^4\left(N_{\tilde{l}1}{}^{i}N^{\dagger}_{\tilde{l}}{}_{i}{}^{1}\right)^2\mathrm{tr}\int d^4x_1d^4x_2|\tilde{\tau}|^2(x_1)|\tilde{\tau}|^2(x_2)D^W_{\mu\nu}(x_1-x_2)D^{W\nu\rho}(x_2-x_1)\\&+i\int d^4xd^4yJ^\mu_W(x)D^W_{\mu\nu}(x-y)J^\nu_W{}^\dagger(y),\end{aligned}\tag{90}$$

ただし、

$$D^W_{\mu\nu}(x-y)=-i\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{g_{\mu\nu}}{q^2-m_W^2+i\epsilon}e^{-iq(x-y)},\tag{91}$$

$$J^\mu_W(x)=-i\frac{\sqrt{2}}{2}gN_{\tilde{l}1}{}^{i}\tilde{\tau}^*\overleftrightarrow{\partial}^\mu\tilde{\nu}_i,\tag{92}$$

$$J^\mu_W{}^\dagger(x)=-i\frac{\sqrt{2}}{2}gN^{\dagger}_{\tilde{l}}{}_{i}{}^{1}\tilde{\nu}^{*i}\overleftrightarrow{\partial}^\mu\tilde{\tau}.\tag{93}$$

である。

- $\tilde{\nu}^{*i},\tilde{\nu}_i$ について

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{\tilde{\nu}} =&2ig^4N^{\dagger}_{\tilde{l}}{}_{i}{}^{1}N_{\tilde{l}1}{}^{j}N^{\dagger}_{\tilde{l}}{}_{k}{}^{1}N_{\tilde{l}1}{}^{l}\mathrm{tr}\int d^4x_1d^4x_2d^4x_3d^4x_4\\&\times\partial^\sigma\tilde{\tau}^*(x_1)\partial^\mu\tilde{\tau}(x_2)\partial^\nu\tilde{\tau}^*(x_3)\partial^\rho\tilde{\tau}(x_4)\\&\times D^{\tilde{\nu}}{}_j{}^i(x_1-x_2)D^W_{\mu\nu}(x_3-x_2)D^{\tilde{\nu}}{}_l{}^k(x_3-x_4)D^W_{\rho\sigma}(x_1-x_4),\end{aligned}\tag{94}$$

ただし、

$$D^{\widetilde{\nu}}{}_i{}^j(x-y) = -i\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{\delta_i^j}{q^2-m_{\widetilde{\nu}}^2+i\epsilon}e^{-iq(x-y)}. \tag{95}$$

- $e_D, \bar{e}_D$ について

$$\mathcal{S}_e = i\int d^4xd^4y\widetilde{\tau}^*(x)\widetilde{\tau}(y)\bar{\widetilde{\chi}}(x)\left[C_1^iP_L + C_2^iP_R\right]S^\tau(x-y)_i{}^j\left[C^\dagger{}_{1j}P_R + C^\dagger{}_{2j}P_L\right]\widetilde{\chi}(y), \tag{96}$$

ただし、

$$S^\tau(x-y)_i{}^j = i\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{\not{q}\delta_i^j + (m_e)_i{}^j}{q^2-m_e^2+i\epsilon}e^{-iq(x-y)}, \tag{97}$$

$$C_1^i = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}g'N_{\widetilde{l}1}{}^iN_{\widetilde{G}1}{}^1 + \frac{\sqrt{2}}{2}gN_{\widetilde{l}1}{}^iN_{\widetilde{G}1}{}^2 + \frac{1}{2}N_{\widetilde{l}1}{}^{j+3}y_j{}^iN_{\widetilde{G}1}{}^4\right), \tag{98}$$

$$C_2^i = \left(-\sqrt{2}g'N_{\widetilde{l}1}{}^{i+3}N_{\widetilde{G}1}{}^1 + \frac{1}{2}N_{\widetilde{l}1}{}^iy^\dagger{}_i{}^1N_{\widetilde{G}1}{}^4\right). \tag{99}$$

- $\nu_D, \bar{\nu}_D$ について

$$\mathcal{S}_{\widetilde{\nu}} = i\int d^4xd^4y\widetilde{\tau}^*(x)\widetilde{\tau}(y)\bar{\widetilde{C}}_\alpha(x)C^{i\alpha}P_LS^\nu(x-y)_i{}^jC^\dagger_{j\beta}P_R\widetilde{C}^\beta(y), \tag{100}$$

ここで、

$$S^\nu(x-y)_i{}^j = i\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{\not{q}\delta_i^j}{q^2+i\epsilon}e^{-iq(x-y)}, \tag{101}$$

$$C^{i\alpha} = -gN_{\widetilde{l}1}{}^iU^\dagger{}_1{}^\alpha - \frac{1}{2}N_{\widetilde{l}1}{}^{j+3}y_j{}^iU^\dagger{}_2{}^\alpha. \tag{102}$$

- $\bar{\widetilde{C}}, \widetilde{C}$ について

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{\widetilde{C}} = &\frac{i}{2}\mathrm{tr}\int d^4x_1d^4x_2d^4x_3d^4x_4\widetilde{\tau}^*(x_1)\widetilde{\tau}(x_2)\widetilde{\tau}^*(x_3)\widetilde{\tau}(x_4)\\ &\times S^{\widetilde{C}}(x_1-x_2)_\alpha{}^\beta C^{i\alpha}P_LS^\nu(x_2-x_3)_i{}^jC^\dagger_{j\beta}P_RS^{\widetilde{C}}(x_3-x_4)_\gamma{}^\delta C^{k\gamma}P_LS^\nu(x_4-x_1)_k{}^lC^\dagger_{l\delta}P_R,\end{aligned} \tag{103}$$

ただし、

$$S^{\widetilde{C}}(x-y)_\alpha{}^\beta = i\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{\not{q}+m_{C_\alpha}}{q^2-m_{C_\alpha}^2+i\epsilon}\delta_\alpha^\beta e^{-iq(x-y)}. \tag{104}$$

- h^0 について

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{h^0} = &iC_{h^0}^{(4)\,2}\mathrm{tr}\int d^4x_1d^4x_2|\widetilde{\tau}|^2(x_1)|\widetilde{\tau}|^2(x_2)D^{h^0}(x_1-x_2)D^{h^0}(x_2-x_1)\\ &-\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ^{h^0}(x)D^{h^0}(x-y)J^{h^0}(y),\end{aligned} \tag{105}$$

ただし、

$$D^{h^0}(x-y) = -i\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{1}{q^2-m_{h^0}^2+i\epsilon}e^{-iq(x-y)},$$

$$J^{h^0}(x) = |\widetilde{\tau}(x)|^2C_{h^0},$$

$$
\begin{aligned}
C_{h^0}^{(4)} =& -\frac{1}{8}g^2(c_\alpha^2 - s_\alpha^2)N_{\widetilde{l}1}{}^{i}N_{\widetilde{l}}^{\dagger}{}_{i}{}^{1} - \frac{1}{8}g'^2(c_\alpha^2 - s_\alpha^2)\left(-N_{\widetilde{l}1}{}^{i}N_{\widetilde{l}}^{\dagger}{}_{i}{}^{1} + 2N_{\widetilde{l}1}{}^{i+3}N_{\widetilde{l}}^{\dagger}{}_{i+3}{}^{1}\right) \\
& - \frac{1}{2}s_\alpha^2\left(N_{\widetilde{l}1}{}^{i}y^{\dagger}{}_{i}{}^{k}y_k{}^{j}N_{\widetilde{l}}^{\dagger}{}_{j}{}^{1} + N_{\widetilde{l}1}{}^{i+3}y_i{}^{k}y^{\dagger}{}_{k}{}^{j}N_{\widetilde{l}}^{\dagger}{}_{j+3}{}^{1}\right), \qquad (106) \\
C_{h^0} =& \frac{1}{\sqrt{2}}\left[-\frac{1}{2}(c_\alpha v_u + s_\alpha v_d)\left(g^2 N_{\widetilde{l}1}{}^{i}N_{\widetilde{l}}^{\dagger}{}_{i}{}^{1} + g'^2\left(-N_{\widetilde{l}1}{}^{i}N_{\widetilde{l}}^{\dagger}{}_{i}{}^{1} + 2N_{\widetilde{l}1}{}^{i+3}N_{\widetilde{l}}^{\dagger}{}_{i+3}{}^{1}\right)\right)\right. \\
& + 2s_\alpha v_d\left(N_{\widetilde{l}1}{}^{i}y^{\dagger}{}_{i}{}^{k}y_k{}^{j}N_{\widetilde{l}}^{\dagger}{}_{j}{}^{1} + N_{\widetilde{l}1}{}^{i+3}y_i{}^{k}y^{\dagger}{}_{k}{}^{j}N_{\widetilde{l}}^{\dagger}{}_{j+3}{}^{1}\right) \\
& \left. + c_\alpha\left(\mu^* N_{\widetilde{l}1}{}^{i+3}y_i{}^{j}N_{\widetilde{l}}^{\dagger}{}_{j}{}^{1} + h.c.\right)s_\alpha\left(N_{\widetilde{l}1}{}^{i+3}a_i{}^{j}N_{\widetilde{l}}^{\dagger}{}_{j}{}^{1} + h.c.\right)\right]. \qquad (107)
\end{aligned}
$$

と定義している。

また、

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}'_A =& ie^4 \mathrm{tr}\int d^4x_1 d^4x_2 |\widetilde{\tau}|^2(x_1)|\widetilde{\tau}|^2(x_2)D_{\mu\nu}^{A}(x_1 - x_2)D^{A\nu\rho}(x_2 - x_1) \\
& + \frac{i}{2}\int d^4x d^4y J_A^{\mu}(x)D_{\mu\nu}^{A}(x - y)J_A^{\nu}(y), \qquad (108) \\
\mathcal{S}'_W =& \frac{i}{4}g^4\left(N_{\widetilde{l}1}{}^{i}N_{\widetilde{l}}^{\dagger}{}_{i}{}^{1}\right)^2 \mathrm{tr}\int d^4x_1 d^4x_2 |\widetilde{\tau}|^2(x_1)|\widetilde{\tau}|^2(x_2)D_{\mu\nu}^{W}(x_1 - x_2)D^{W\nu\rho}(x_2 - x_1), \qquad (109)
\end{aligned}
$$

で定義している。

5.2 Imaginary part の計算

Sec 3-1 で行われている Imaginary part の詳細な計算について考える。(33) における imaginary part についての action は次のような tr を含むような項で書ける。

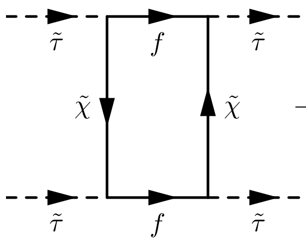
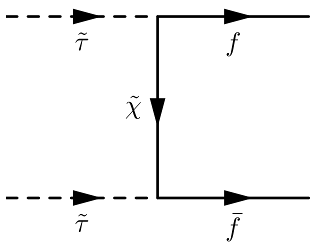
$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}_{\mathrm{Im}} =& + ie^4 \mathrm{tr} \int d^4x_1 d^4x_2 |\widetilde{\tau}|^2(x_1)|\widetilde{\tau}|^2(x_2) D^A_{\mu\nu}(x_1-x_2) D^{A\nu\rho}(x_2-x_1) \\
& + 2ie^2 g_z^2 \left(s_w^2 - \frac{1}{2} N_{\widetilde{l}1}{}^i N^\dagger_{\widetilde{l}}{}_i{}^1 \right)^2 \mathrm{tr} \int d^4x_1 d^4x_2 |\widetilde{\tau}|^2(x_1)|\widetilde{\tau}|^2(x_2) D^Z_{\mu\nu}(x_1-x_2) D^{A\nu\rho}(x_2-x_1) \\
& + ig_z^4 \left(s_w^2 - \frac{1}{2} N_{\widetilde{l}1}{}^i N^\dagger_{\widetilde{l}}{}_i{}^1 \right)^4 \mathrm{tr} \int d^4x_1 d^4x_2 |\widetilde{\tau}|^2(x_1)|\widetilde{\tau}|^2(x_2) D^Z_{\mu\nu}(x_1-x_2) D^{Z\nu\rho}(x_2-x_1) \\
& + \frac{i}{4} g^4 \left(N_{\widetilde{l}1}{}^i N^\dagger_{\widetilde{l}}{}_i{}^1 \right)^2 \mathrm{tr} \int d^4x_1 d^4x_2 |\widetilde{\tau}|^2(x_1)|\widetilde{\tau}|^2(x_2) D^W_{\mu\nu}(x_1-x_2) D^{W\nu\rho}(x_2-x_1) \\
& + i{C^{(4)}_{h^0}}^2 \mathrm{tr} \int d^4x_1 d^4x_2 |\widetilde{\tau}|^2(x_1)|\widetilde{\tau}|^2(x_2) D^{h^0}(x_1-x_2) D^{h^0}(x_2-x_1) \\
& + 2ig^4 N^\dagger_{\widetilde{l}}{}_i{}^1 N_{\widetilde{l}1}{}^j N^\dagger_{\widetilde{l}}{}_k{}^1 N_{\widetilde{l}1}{}^l \mathrm{tr} \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 \partial^\sigma \widetilde{\tau}^*(x_1) \partial^\mu \widetilde{\tau}(x_2) \partial^\nu \widetilde{\tau}^*(x_3) \partial^\rho \widetilde{\tau}(x_4) \\
& \quad \times D^{\widetilde{\nu}}{}_j{}^i(x_1-x_2) D^W_{\mu\nu}(x_3-x_2) D^{\widetilde{\nu}}{}_l{}^k(x_3-x_4) D^W_{\rho\sigma}(x_1-x_4) \\
& + i \mathrm{tr} \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 \widetilde{\tau}(x_1) \widetilde{\tau}^*(x_2) \widetilde{\tau}(x_3) \widetilde{\tau}^*(x_4) \\
& \quad \times S^{\widetilde{\chi}}(x_1-x_2) \left[C_1^i P_L + C_2^i P_R \right] S^\tau(x_2-x_3)_i{}^j \left[C^\dagger{}_{1j} P_R + C^\dagger{}_{2j} P_L \right] \\
& \quad \times S^{\widetilde{\chi}}(x_3-x_4) \left[C_1^k P_L + C_2^k P_R \right] S^\tau(x_4-x_1)_k{}^l \left[C^\dagger{}_{1l} P_R + C^\dagger{}_{2l} P_L \right] \\
& - \frac{i}{2} \sum_{\phi,\phi'} a_\phi a_{\phi'} \mathrm{tr} \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 D^{\widetilde{\tau}}(x_1-x_2) \delta A_\phi(x_2,x_3) D^{\widetilde{\tau}}(x_3-x_4) \delta A_{\phi'}(x_4,x_1) \\
& + \frac{i}{2} \mathrm{tr} \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 \widetilde{\tau}^*(x_1) \widetilde{\tau}(x_2) \widetilde{\tau}^*(x_3) \widetilde{\tau}(x_4) \\
& \quad \times S^{\widetilde{C}}(x_1-x_2)_\alpha{}^\beta C^{i\alpha} P_L S^\nu(x_2-x_3)_i{}^j C^\dagger_{j\beta} P_R S^{\widetilde{C}}(x_3-x_4)_\gamma{}^\delta C^{k\gamma} P_L S^\nu(x_4-x_1)_k{}^l C^\dagger_{l\delta} P_R
\end{aligned}
\tag{110}
$$

ただし、ϕ は $\phi = A_\mu, Z^0, h^0$ であり、$a_\phi, \delta A_\phi$ はそれぞれ次のように書ける。

$$
\begin{aligned}
a_A =& \frac{ie^2}{2}, \qquad a_Z = \frac{ig_z^2}{2} \left(s_w^2 - \frac{1}{2} N_{\widetilde{l}1}{}^i N^\dagger{}_{\widetilde{l}i}{}^1 \right)^2, \qquad a_h = \frac{iC^2_{h^0}}{2} \\
\delta A_A(x,y) =& \overleftrightarrow{\partial}^\mu \widetilde{\tau}(x) (D^A_{\mu\nu}(x-y) + D^A_{\mu\nu}(y-x) \widetilde{\tau}^*(y) \overleftrightarrow{\partial}^\nu \\
\delta A_Z(x,y) =& \overleftrightarrow{\partial}^\mu \widetilde{\tau}(x) (D^Z_{\mu\nu}(x-y) + D^Z_{\mu\nu}(y-x) \widetilde{\tau}^*(y) \overleftrightarrow{\partial}^\nu \\
\delta A_h(x,y) =& \widetilde{\tau}(x) (D^{h^0}_{\mu\nu}(x-y) + D^{h^0}_{\mu\nu}(y-x) \widetilde{\tau}^*(y)
\end{aligned}
\tag{111}
$$

のように tr を含む項で得られる。この effective action を得るために、それぞれの項に対応するダイアグラムを optical theorem を用いて計算していく。

まず、fermion が回るダイアグラムは次のように計算される。

$\mathcal{M} =$  $\rightarrow M =$  (112)

$$
\begin{aligned}
iM =& i\bar{u}(k_2)^j \left(C^\dagger_{1j} P_R + C^\dagger_{2j} P_L\right) \frac{i(\not{q}+m)}{q^2-m^2+i\varepsilon} \left(C_1^i P_L + C_2^i P_R\right) v(k_1)_i \\
\rightarrow |M|^2 =& i\bar{u}(k_2)^i \left(C^\dagger_{1i} P_R + C^\dagger_{2i} P_L\right) \frac{i(\not{q}+m)}{q^2-m^2+i\varepsilon} \left(C_1^j P_L + C_2^j P_R\right) v(k_1)_j \\
& \times i\bar{v}(k_1)^k \left(C^\dagger_{1k} P_R + C^\dagger_{2k} P_L\right) \frac{i(\not{q}+m)}{q^2-m^2-i\varepsilon} \left(C_1^l P_L + C_2^l P_R\right) v(k_2)_l \\
=& \frac{1}{4}\mathrm{tr}\left[\frac{i(\not{q}+m)}{q^2-m^2+i\varepsilon} \left(C_1^i P_R + C_i^i P_L\right) \left(\not{k}_1 \delta_i^j - (m_e)^j{}_i\right) \left(C^\dagger_{1j} P_R + C^\dagger_{2j} P_L\right)\right. \qquad (113) \\
& \left. \times \frac{i(\not{q}+m)}{q^2-m^2+i\varepsilon} \left(C_1^i P_R + C_i^i P_L\right) \left(\not{k}_1 \delta_i^j - (m_e)^j{}_i\right) \left(C^\dagger_{1j} P_R + C^\dagger_{2j} P_L\right)\right] \\
=& \frac{1}{4}\frac{1}{(q^2-m^2)} \left[4(|C_1|^2+|C_2|^2)\ 4m^2 k_1\cdot k_2 |C_1|^2|C_2|^2 - 2mq\cdot k_2 \left(m_c^\dagger |C_1|^2 + m_c|C_2|^2\right)\right] \qquad (114)
\end{aligned}
$$

ただし、$m_c = C_1^i m_{ei}{}^j C_j^\dagger$ で定義している。さらに重心系をとり, Fermion のエネルギーを $E = \sqrt{k^2+m_e^2}$ として

$$
\begin{aligned}
p_1 =& (m, p\boldsymbol{e}_z), \qquad p_2 = (m, -p\boldsymbol{e}_z) \\
k_1 =& (E, k\sin\theta, 0, \cos\theta), \quad k_2 = (E, -k\sin\theta, 0, -\cos\theta)
\end{aligned}
$$

でそれぞれの運動量を割り当てると、$\mathcal{M}$ の虚部は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Im}\mathcal{M} =& \frac{1}{2}\int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3}\frac{d^3k_2}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_1}\frac{1}{2E_2}|M|^2(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1+p_2-k_1-k_2) \\
=& \frac{1}{16\pi}\int \frac{k^2dk}{E^2}|M|^2\delta^{(0)}(E-m) \\
=& \frac{1}{16\pi}\int dE\sqrt{1-\left(\frac{m_e}{E}\right)^2}|M|^2\delta(E-m)
\end{aligned}
$$

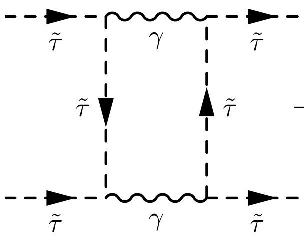
ここで

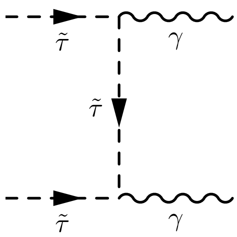
$$
\begin{aligned}
q =& p_1 - k_2 \simeq (m-E, \boldsymbol{k}) \\
\rightarrow q^2 =& (m-E)^2 - k^2 \\
=& m^2 - 2mE + E^2 - k^2 \\
=& -m^2 + m_e^2
\end{aligned}
$$

などに注意して計算し、action の形に直すと、

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}_e = &\frac{i}{16\pi}\frac{\left(1-m_e^2/m^2\right)^{3/2}}{(2m^2-m_e^2)^2}\left[(|C_1|^2+|C_2|^2)(m_e^2+m(m_c+m_c^\dagger))+m_c m_c^\dagger+m^2|C_1|^2|C_2|^2)\right]\\
&\times\int d^4x\eta^*(x)\eta(x)\xi^*(x)\xi(x)\\
\equiv\ & i\Gamma_{e_ie_i}\int d^4x\eta^*(x)\eta(x)\xi^*(x)\xi(x).
\end{aligned}
$$

が得られる。同様にして他の粒子についても考える。光子が回るダイアグラムは

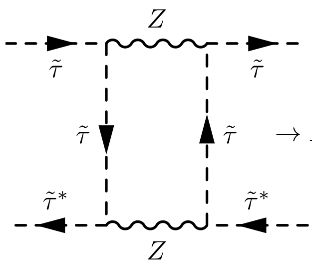
$\mathcal{M} =$ 

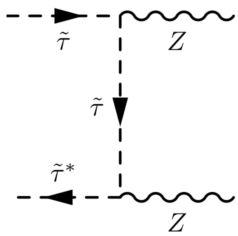
$\to M =$ 

(115)

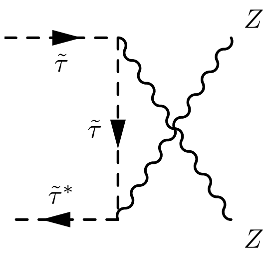
$$
\begin{aligned}
iM =&i(-4e^2)g^{\mu\nu}\partial_\mu\widetilde{\tau}\epsilon_\nu g^{\rho\sigma}\partial_\rho\widetilde{\tau}^*\epsilon_\sigma\frac{-i}{q^2-m_{\widetilde{\tau}}^2+i\epsilon}\\
\sim&\partial_0\widetilde{\tau}\epsilon_0\partial_0\widetilde{\tau}^*\epsilon_0\\
=&0
\end{aligned}
\tag{116}
$$

となる。ここで ϵ_μ は光子の偏極ベクトルで、光子は横波成分しか持たないので、このダイアグラムの寄与は 0 となる。従って、ϕ で光子を含むような寄与は考えないことにする。次に Z ボソンが回るダイアグラムについては次のように計算される。

$\mathcal{M} =$ 

$\to M =$ 

(117)

$\to M' =$ 

(118)

$$iM \sim 4g_z^2 \left(s_w^2 - \frac{1}{2} N_{\widetilde{l}1}{}^i N^\dagger{}_{\widetilde{l}i}{}^1 \right)^2 \partial_0 \widetilde{\tau} \epsilon_0^{(Z)}(k_1) \partial_0 \widetilde{\tau}^* \epsilon_0^{(Z)}(k_2) \frac{1}{q^2 - m_{\widetilde{\tau}}^2}$$

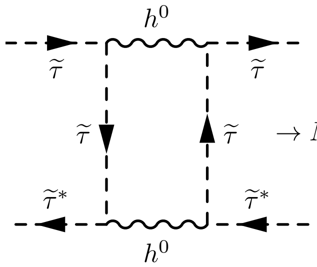
$$iM' \sim 4g_z^2 \left(s_w^2 - \frac{1}{2} N_{\widetilde{l}1}{}^i N^\dagger{}_{\widetilde{l}i}{}^1 \right)^2 \partial_0 \widetilde{\tau} \epsilon_0^{(Z)}(k_1) \partial_0 \widetilde{\tau}^* \epsilon_0^{(Z)}(k_2) \frac{1}{q'^2 - m_{\widetilde{\tau}}^2} \tag{119}$$

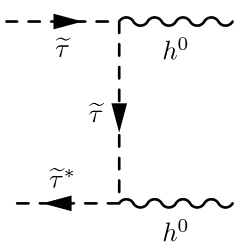
ここで $\epsilon_\mu^{(Z)}$ は Z ボソンの偏極ベクトルを表していて、上と同様の方法によって action に書き直すと、

$$\mathcal{S}_Z = \frac{2g_z^4 \left(s_w^2 - \frac{1}{2} N_{\widetilde{l}1}{}^i N^\dagger{}_{\widetilde{l}i}{}^1 \right)^4 m^6}{\pi m_z^4} \frac{\left(1 - \frac{m_z^2}{m^2}\right)^5 /2}{(m^2 + m_{\widetilde{\tau}}^2 - m_z^2)^2} \int d^4x \eta^*(x)\eta(x)\xi^*(x)\xi(x) \tag{120}$$

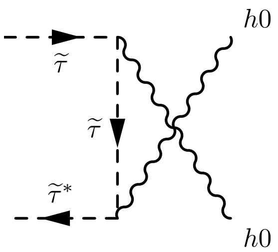
となる。

・h^0 が回る場合について

$\mathcal{M} =$ 

$\rightarrow M =$ 

(121)

$\rightarrow M' =$ 

(122)

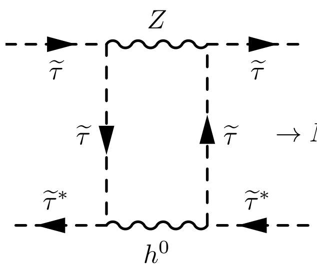
$$iM = C_{h^0}^2 \frac{1}{q^2 - m_{\widetilde{\tau}}}, \qquad iM' = C_{h^0}^2 \frac{1}{q'^2 - m_{\widetilde{\tau}}} \tag{123}$$

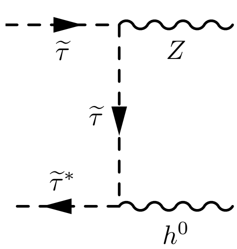
これを計算すると

$$\mathcal{S}_{h^0} = \frac{iC_{h^0}^4}{4\pi m^2} \sqrt{1 - \frac{m_{h^0}^2}{m^2}} \frac{1}{(m^2 + m_{\widetilde{\tau}} - m_{h^0}^2)^2} \int d^4x \eta^*(x)\eta(x)\xi^*(x) \tag{124}$$

となる。

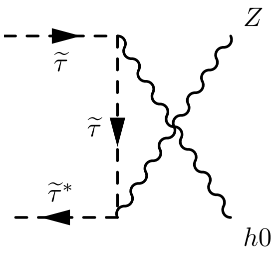
・Z とヒッグスが回る場合について

$\mathcal{M} =$ 

$\rightarrow M =$ 

(125)

$$\to M' = $$



(126)

$$\begin{aligned} iM &\sim 2ig_z\left(s_w^2 - \frac{1}{2}N_{\widetilde{l}1}{}^{i}N^{\dagger}{}_{\widetilde{l}i}{}^{1}\right)^2 C_{h^0}\partial_0\widetilde{\tau}\widetilde{\tau}^*\epsilon_0^{(Z)}(k_1)\frac{1}{q^2-m_{\widetilde{\tau}}^2} \\ iM' &\sim 2ig_z\left(s_w^2 - \frac{1}{2}N_{\widetilde{l}1}{}^{i}N^{\dagger}{}_{\widetilde{l}i}{}^{1}\right)^2 C_{h^0}\partial_0\widetilde{\tau}\widetilde{\tau}^*\epsilon_0^{(Z)}(k_2)\frac{1}{q'^2-m_{\widetilde{\tau}}^2} \end{aligned} \tag{127}$$

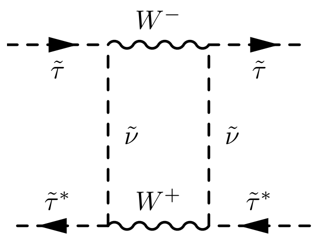
これを計算すると

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{Zh^0} =& \frac{16ig_z^2\left(s_w^2 - \frac{1}{2}N_{\widetilde{l}1}{}^{i}N^{\dagger}{}_{\widetilde{l}i}{}^{1}\right)^2 C_{h^0}^2 m}{\pi m_z^2}\left[\left(\frac{4m^2-m_z^2-m_{h^0}}{4m}\right)^2 - \left(\frac{m_z m_{h^0}}{2m}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} \\ &\times\frac{1}{4m^2-m_z^2+m_{h^0}^2}\frac{1}{(2m^2+2m_{\widetilde{\tau}}-m_z^2-m_{h^0}^2)^2}\int d^4x\eta^*(x)\eta(x)\xi^*(x)\xi(x) \\ \equiv& \Gamma_{Z^0h^0}\int d^4x\eta^*(x)\eta(x)\xi^*(x)\xi(x) \end{aligned} \tag{128}$$

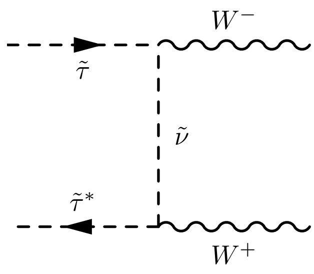
となる。

・W ボソンが回るダイアグラムについて

$$\mathcal{M} = $$



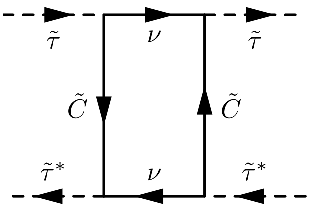
$$\to M = $$

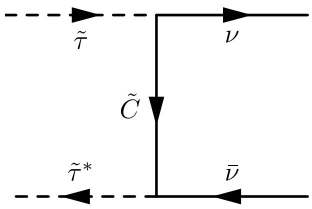


(129)

$$\begin{aligned} iM \sim& 2g^2 N_{\widetilde{l}1}{}^{i}N_{\widetilde{l}1}{}^{i}N^{\dagger}{}_{\widetilde{l}i}{}^{1}\partial_0\widetilde{\tau}\epsilon_0^{(W^+)}(k_1)\partial_0\widetilde{\tau}^*\epsilon_0^{(W^-)}(k_2)\frac{1}{q^2-m_{\widetilde{\nu}}^2} \\ \to S_W =& \frac{g^4\left(N_{\widetilde{l}1}{}^{i}N^{\dagger}{}_{\widetilde{l}i}{}^{1}\right)^4 m^6}{8\pi m_W^4}\left(1-\frac{m_W^2}{m^2}\right)^{\frac{5}{2}}\frac{1}{\left(m^2+m_{\widetilde{\nu}}^2-m_W^2\right)^2}\int d^4x\eta^*(x)\eta(x)\xi^*(x) \end{aligned} \tag{130}$$

・ニュートリノが回るダイアグラムについて

$\mathcal{M} =$ 

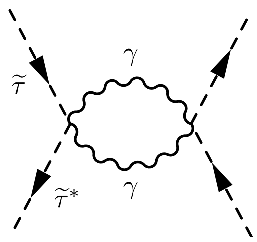
$\to M =$ 

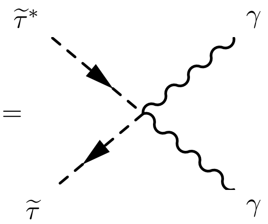
(131)

$$
\begin{aligned}
iM =& i\bar{u}(k_2)^j C^{\dagger}_{j\beta} P_R \frac{\not{q} + m_C}{q^2 - m_C^2 + i\epsilon} \delta^{\beta}_{\alpha} C^{i\alpha} P_L v(k_1)_i \\
\mathcal{S}_{\nu} =& \frac{\left(C^{i\alpha} C^{\dagger}_{i\alpha}\right)^2}{32\pi} \frac{m_C^2}{\left(m^2 + m_C^2\right)^2} \int d^4x \eta^*(x)\eta(x)\xi^*(x)\xi(x)
\end{aligned}
$$

となる。

次に、次のダイアグラムで示されるような 4 点の相互作用を計算していく。まず、γ が中を飛ぶ場合には

$\mathcal{M} =$ 

$\to M =$ 

(132)

$$
\begin{aligned}
S_A^{(4)} &= i\frac{e^4}{8\pi m^2} \int d^4x \eta^*(x)\eta(x)\xi^*(x)\xi(x) \\
&\equiv \Gamma_{\gamma\gamma} \int d^4x \eta^*(x)\eta(x)\xi^*(x)\xi(x) \qquad (133)
\end{aligned}
$$

のようになる。同様にして、他の項についても計算することができて

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}_{AZ}^{(4)} =& i\frac{e^2 g_z^2 \left(s_w^2 - \frac{1}{2} N_{\tilde{l}1}{}^{i} N^{\dagger}_{\tilde{l}}{}_{i}{}^{1}\right)^2}{4\pi m^2} \left(1 - \frac{m_z^2}{4m^2}\right) \int d^4x \eta^*(x)\eta(x)\xi^*(x)\xi(x) \\
\equiv& \Gamma_{\gamma Z^0} \int d^4x \eta^*(x)\eta(x)\xi^*(x)\xi(x) \qquad (134) \\
\mathcal{S}_{Z}^{(4)} =& i\frac{g_z^4 \left(s_w^2 - \frac{1}{2} N_{\tilde{l}1}{}^{i} N^{\dagger}_{\tilde{l}}{}_{i}{}^{1}\right)^4}{8\pi m^2} \sqrt{1 - \frac{m_z^2}{m^2}} \int d^4x \eta^*(x)\eta(x)\xi^*(x)\xi(x) \qquad (135) \\
\mathcal{S}_{W}^{(4)} =& i\frac{g^4 (N_{\tilde{l}1}{}^{i} N^{\dagger}_{\tilde{l}}{}_{i}{}^{1})^4}{16\pi m^2} \sqrt{1 - \frac{m_W^2}{m^2}} \int d^4x \eta^*(x)\eta(x)\xi^*(x)\xi(x) \qquad (136) \\
\mathcal{S}_{h^0}^{(4)} =& i\frac{{C_{h^0}^{(4)}}^4}{32\pi m^2} \sqrt{1 - \frac{m_{h^0}^2}{m^2}} \int d^4x \eta^*(x)\eta(x)\xi^*(x)\xi(x) \qquad (137)
\end{aligned}
$$

と書ける。また、

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{Z^0Z^0}\int d^4x\eta^*(x)\eta(x)\xi^*(x)\xi(x) \equiv&(120)+(135) \\
\Gamma_{W^+W^-}\int d^4x\eta^*(x)\eta(x)\xi^*(x)\xi(x) \equiv&(130)+(136) \\
\Gamma_{h^0h^0}\int d^4x\eta^*(x)\eta(x)\xi^*(x)\xi(x) \equiv&(124)+(137)
\end{aligned} \tag{138}
$$

とまとめて書くと (42) で書かれた Γ を得ることができる。

5.3 Parameters for numerical calculation

ここでは数値計算の際に用いたパラメータを記載している。このパラメータは [15] で用いられているパラメータで, Li 問題を解決することができるように設定されているものである。本文の計算では neutralino と stau の質量差 δm を動かして cross section を計算しており、表 5.3 に載っている値とは異なる値を使っているが、ほとんど計算に影響しないものと仮定して計算をしている。

parameter	g	g'	s_w^2	$\tan\beta$	$\cot\alpha$	${y_1}^1$	${y_2}^2$	${y_3}^3$
value	0.6387	0.3623	0.23	24.21	-24.21	1.0×10^{-5}	1.5×10^{-2}	0.2542

表 2　数値計算の際に用いた無次元パラメータ [15]

parameter	m	$m_{\tilde{\tau}}$	m_{C_1}	μ	A_0	$m_{e\times10^{-3}}$	m_μ	m_τ	v	m_w	m_z	m_{h^0}
value	379.596576	379.606567	725.76	1.776	-3098.1	0.511	0.105	1.776	243.5786	80.2	91.19	125.18

表 3　数値計算の際に用いたパラメータ、単位はそれぞれ (GeV)。 [15].

neutralino				
real part				
$\mathrm{Re}N^b_{\tilde{G}^a}$	$b=1$	$b=2$	$b=3$	$b=4$
$a=1$	9.99599220×10^{-1}	-2.13656993×10^{-3}	2.72724410×10^{-2}	-7.28340424×10^{-3}
$a=2$	3.78724402×10^{-3}	9.98231872×10^{-1}	-5.41258402×10^{-2}	2.42730150×10^{-2}
$a=3$	$-2.23811821\times10^{-17}$	4.82387775×10^{-17}	6.11227032×10^{-16}	$-6.11568206\times10^{-16}$
$a=4$	2.42682988×10^{-2}	-5.55057268×10^{-2}	-7.05176402×10^{-1}	7.06439245×10^{-1}
imaginary part				
$\mathrm{Im}N_{\tilde{G}a}{}^b$	$b=1$	$b=2$	$b=3$	$b=4$
$a=1$	$-5.13227991\times10^{-16}$	2.88642911×10^{-19}	$-1.03992019\times10^{-17}$	$-1.74565311\times10^{-18}$
$a=2$	$-1.78170707\times10^{-18}$	$-2.33972913\times10^{-16}$	5.73625399×10^{-18}	1.43366353×10^{-18}
$a=3$	1.40749921×10^{-2}	-2.11584124×10^{-2}	-7.06436727×10^{-1}	-7.07319847×10^{-1}
$a=4$	5.84094614×10^{-18}	$-8.37388039\times10^{-18}$	$-6.12074422\times10^{-16}$	$-6.13058014\times10^{-16}$

表 4　neutralino を mass base に変換するためのユニタリー行列の値

slepton						
real part						
$\mathrm{Re}N_{\tilde{l}A}{}^{B}$	B=1	B=2	B=3	B=4	B=5	B=6
A=1	-6.31168044×10^{-9}	$2.63719358 \times 10^{-6}$	$-1.71009221 \times 10^{-1}$	$6.25408690 \times 10^{-11}$	$-5.57777646 \times 10^{-8}$	$-9.85269428 \times 10^{-1}$
A=2	$-4.88052654 \times 10^{-6}$	$-1.47061845 \times 10^{-2}$	$1.26260288 \times 10^{-5}$	$-2.05256544 \times 10^{-8}$	$-7.02536796 \times 10^{-1}$	$-2.18090514 \times 10^{-6}$
A=3	$-1.68078331 \times 10^{-5}$	$-2.88036700 \times 10^{-8}$	$-1.53915085 \times 10^{-10}$	$-1.65361745 \times 10^{-1}$	$2.67385497 \times 10^{-8}$	$-4.95673580 \times 10^{-11}$
A=4	$1.00627884 \times 10^{-7}$	$-5.03237436 \times 10^{-5}$	$9.85269426 \times 10^{-1}$	$-3.17467808 \times 10^{-10}$	$1.00201302 \times 10^{-5}$	$-1.71009221 \times 10^{-1}$
A=5	$6.62240877 \times 10^{-2}$	$6.99028792 \times 10^{-1}$	$7.13839275 \times 10^{-5}$	$-6.76095272 \times 10^{-6}$	$-1.46315410 \times 10^{-2}$	$-8.58412190 \times 10^{-6}$
A=6	$-8.24980621 \times 10^{-1}$	$5.55284568 \times 10^{-2}$	$5.85237100 \times 10^{-6}$	$8.39260849 \times 10^{-5}$	$-1.15816598 \times 10^{-3}$	$-7.02385695 \times 10^{-7}$
imaginary part						
$\mathrm{Im}N_{\tilde{l}A}{}^{B}$	B=1	B=2	B=3	B=4	B=5	B=6
A=1	$-6.69074517 \times 10^{-9}$	$2.68186615 \times 10^{-6}$	$-3.36466824 \times 10^{-15}$	$-6.50682427 \times 10^{-11}$	$-7.01708566 \times 10^{-8}$	$4.44552436 \times 10^{-23}$
A=2	$3.55520850 \times 10^{-6}$	$-1.48888937 \times 10^{-2}$	$-5.52344800 \times 10^{-8}$	$1.51693448 \times 10^{-8}$	$-7.11339651 \times 10^{-1}$	$6.71707263 \times 10^{-16}$
A=3	$1.00325957 \times 10^{-4}$	$-4.18395754 \times 10^{-10}$	$2.93857601 \times 10^{-10}$	$9.86232976 \times 10^{-1}$	$6.16275932 \times 10^{-10}$	$1.39096557 \times 10^{-17}$
A=4	$1.44670207 \times 10^{-7}$	$-5.11527461 \times 10^{-5}$	$1.15540529 \times 10^{-12}$	$7.71687277 \times 10^{-11}$	$1.02274109 \times 10^{-5}$	$-9.52745431 \times 10^{-21}$
A=5	$-4.78727158 \times 10^{-2}$	$7.10102998 \times 10^{-1}$	$-8.62478816 \times 10^{-9}$	$4.88605503 \times 10^{-6}$	$-1.48648974 \times 10^{-2}$	$1.39571889 \times 10^{-17}$
A=6	$5.59222261 \times 10^{-1}$	$5.99258994 \times 10^{-2}$	$3.23933295 \times 10^{-10}$	$-5.68738081 \times 10^{-5}$	$-1.24999822 \times 10^{-3}$	$1.05557136 \times 10^{-18}$

表 5　slepton を mass base に変換するためのユニタリー行列の値

chargino					
real part			imaginary part		
$\mathrm{Re}U_i{}^j$	$j=1$	$j=2$	$\mathrm{Im}U_i{}^j$	$j=1$	$j=2$
$i=1$	$-9.97043970 \times 10^{-1}$	$7.68330827 \times 10^{-2}$	$i=1$	$-2.92376714 \times 10^{-16}$	$9.05483611 \times 10^{-18}$
$i=2$	$7.68330827 \times 10^{-2}$	$9.97043970 \times 10^{-1}$	$i=2$	$-4.61092153 \times 10^{-17}$	$-7.73222256 \times 10^{-16}$
$\mathrm{Re}V_i{}^j$	$j=1$	$j=2$	$\mathrm{Im}V_i{}^j$	$j=1$	$j=2$
$i=1$	$-9.99396601 \times 10^{-1}$	$3.47337437 \times 10^{-2}$	$i=1$	$7.74343187 \times 10^{-16}$	0.00000000×10^{0}
$i=2$	$3.47337437 \times 10^{-2}$	$9.99396601 \times 10^{-1}$	$i=2$	0.00000000×10^{0}	$7.74343187 \times 10^{-16}$

表 6　chargino を mass base に変換するためのユニタリー行列の値

5.4 Pythia

pythia は ATLAS 実験などでシミュレーション解析に使われている event simulator である。プログラムでは高エネルギーの粒子同士を衝突させることによって生じる反応をモンテカルロ法を C++ 言語を用いて計算している。さらに、自身で衝突させる粒子やそのエネルギー、反応中で考える相互作用、崩壊させる粒子など様々な設定を変更できるため、宇宙線のスペクトルの予言など幅広い分野で使われている。ここではインストールの手順からプログラムの説明、そして今回計算したエネルギースペクトルを得るためのプログラムの説明とその実行結果について見ていく。

set up

まずは pythia のインストールからプログラムを実行するまでの流れを見る。まず初めに pythia 公式]HP[23] から git ファイルを入手する。その後、ターミナル上で

make

のコマンドを実行することでプログラムを扱えるようになる。もし、B メソンなどの重いメソンの衝突や崩壊を扱う場合は EvtGen と呼ばれる外部シミュレーターと連動して計算することができるが、その際は以下のようなコマンドを実行する必要がある。

./configure –enable-shared -enable-64biy –with-evtgen=/home/mikuru/evt29niti/EvtGen/R01-07-00 →

make

これによって、他のイベントに特化した event generator を使うことができる。これでプログラムを実行する準備が整ったので、続いて実際にプログラムを実行することを考える。pythia の example フォルダには様々な状況に対するプログラムの例が存在している。[23] では, これらの例に対する簡単な説明がされているため、pythia を使ってプログラムを作成する場合にはこれらの例で状況が近しいものを参考にすると良い。

example フォルダ内の Makefile にはそれぞれのソースコードのコンパイルの方法などが記述されており、

make main.XX

のようなコマンドを実行すると、出力ファイル mainXX を作成することができる。

次にプログラムの詳細について見ていく。

ここでは特定の粒子のエネルギースペクトルを得るために作成したプログラムに使われている関数やコマンドについて取り上げる。

・系全体のエネルギーの決定

```
pythia.readString("Beams:eCM = 2050.");
```

と宣言することによって衝突させる粒子の重心系のエネルギーを 2050(GeV) に設定している。

・衝突させる粒子の設定

```
pythia.readString("Beams:idA = 11");
pythia.readString("Beams:idB = -12");
```

では衝突させる粒子を設定しており、この場合は一方が電子でもう一方が陽電子に設定している。ここで用いている粒子の番号は Particle Data Group(PDG) で設定されている番号を用いている。デフォルトの設定では陽子同士の衝突が仮定されている。

・崩壊させる粒子の設定

pythia のシミュレーションでは $\pi^{\pm}$ や μ 粒子などはデフォルトの設定では安定で、崩壊しない設定になっている。これを変更するには

```
pythia.readString("211:mayDecay = true");
pythia.readString("13:mayDecay = true");
```

のように宣言することによってシミュレーション中の反応において崩壊が起こるようにすることができる。この例では $\pi^{\pm}, \mu^{\pm}$ の崩壊を引き起こすように設定されているため、終状態ではこの崩壊による電子やニュートリノが確認できる。実際にプログラムを実行すると実行画面で次の図のような形で表示される部分が出てくるが、これは図の例では $\pi^{\pm}$ が崩壊するように設定されていることを表している。

```
--------  PYTHIA Particle Data Table (changed only)  ------------------------------------------------------------------------------

      id   name            antiName         spn chg col      m0        mWidth      mMin        mMax        tau0    res dec ext vis wid
             no onMode   bRatio   meMode     products

     211  pi+              pi-                1   3   0   0.13957    0.00000    0.00000    0.00000  7.80450e+03   0   1   0   1   0
              0     1   0.9998770    0      -13        14
              1     1   0.0001230    0      -11        12
```

図 18　崩壊させる粒子を設定した場合の実行画面：$\pi^{\pm}$ を崩壊するように設定した場合を表す。

イベントの生成について

pythia.init()

イベントに用いる設定を決定する。

pythia.next()

イベントを生成する。

次に、特定の粒子由来の各終状態についてのエネルギースペクトルを生成するプロセスについて説明する。まず、特定のエネルギーを持つ目的粒子についてのイベントを見るためには次のように宣言すれば良い。

```
  for (int i = 0; i < pythia.event.size(); ++i){
    if (pythia.event[i].idAbs() == 23 && pythia.event[i].e()>=995 && pythia.event[i].e()
        <1005 ){
```

ここで、pythia.event.size() は設定した衝突させるイベントの個数を表している。また 2 行目の () の中の pythia.event.[i].id() == number は PDG における number に対応しており、&& 以下は low-energy$\leq$ particle's energy $<$ high-energy のエネルギーを持つ粒子についてのイベントを表している。例では 1000(GeV) のエネルギーを持つ Z ボソンによるイベントについて考えている。ここで、1000GeV ちょうどで考えていない理由は後述で分かるように、この崩壊の反応は衝突後の反応中に生じる粒子について注目しており、正確に 1000GeV のエネルギーを持つイベントはほぼ発生しないためである。

さらに、この粒子の反応由来のイベントを調べるために

```
vector<int> daughter = pythia.event[i].daughterList();
```

を宣言する。これは i 番目のイベントの娘粒子を daughter という名前で定義している。これに続く

```
if(pythia.event[daughter[d]].idAbs() != 23){
         for(int j = i; j < pythia.event.size(); ++j){
```

```
            if (pythia.event[j].isAncestor(i)){
```

では最終的に崩壊する反応 (この場合には Z ボソンが崩壊する反応) のみに注目するために必要で、2, 3 行目は i 番目以降のイベント j で、i 番目の粒子由来のイベントのみを抽出するために宣言している。ここで isAncestor() はその' 子孫' という意味通り () 内のイベントが由来のイベントを表すような関数である。ただし、これを扱うには注意が必要である。というのも以下のように複数のクォークやグルーオンから複数のハドロンが作られるような反応では全ての生成粒子を追うことができず、i 番目の粒子由来のハドロンによるイベントを追うことができなくなってしまう。そのため、今回は粒子がどんな状態であるかを表す status を限定して場合分けをすることによってこの問題を解決した。
これを実行するためのコマンドは

```
if (pythia.event[j].status() != -83 || pythia.event[j].status() != -84)
```

である。ここで、83,84 はハドロンの反応に関わる status の番号を表しており、負符号はその粒子が反応中であるということを表している。これによってハドロンを生成しない反応から得られるイベントについて考えることができる。次に、ハドロンを生成する反応については上と同様にして

```
if (pythia.event[j].status() == -83 || pythia.event[j].status() == -84)
```

と宣言すれば良いが、これだけではイベント i が由来の反応かどうか判断できないのでこの条件にさらに

```
vector<int> mothers;
mothers = pythia.event[j].motherList();
```

というイベント j の親粒子を表すベクトルを定義し、この親粒子が先程の isAncestor() の関数を用いることでイベント i 由来のものだと保証することができる

最終的に

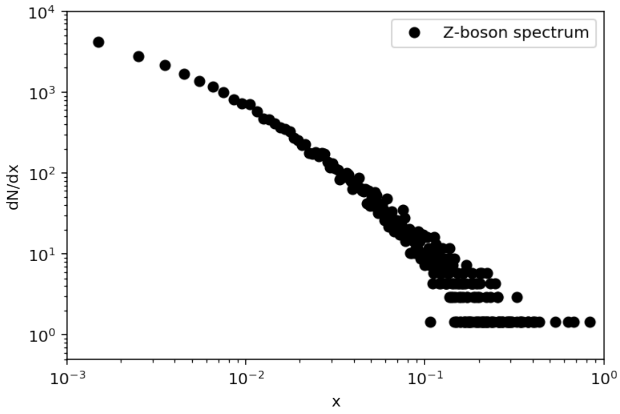
```
if (pythia.event[j].id() == 22) eGamma.fill( pythia.event[j].e() );
```

のでは粒子の持つエネルギー毎にその個数をカウントすることができる。ただし、エネルギー bin は

```
Hist eGamma("energy spectrum of photons",1000, 0., 1000.);
```

という宣言によって規定されている。この場合は 0GeV から 1000GeV まで 1GeV 刻みで photon の数をカウントしている。

以上によってエネルギースペクトルを求めることができる。以下の図は上のプログラムを用いて Z ボソンのスペクトルをグラフ化したものである。



ただし、光子の持つエネルギーを E、DM の質量を m として $x = E/m$ として無次元化している。

参考文献

[1] V. C. Rubin, N. Thonnard, and W. K. Ford, Jr., "Rotational properties of 21 SC galaxies with a large range of luminosities and radii, from NGC 4605 /R = 4kpc/ to UGC 2885 /R = 122 kpc/," Astrophys. J. 238 (1980) 471.

[2] WMAP, E. Komatsu et al., Astrophys. J. Suppl. 192, 18 (2011), arXiv:1001.4538.

[3] https://wmap.gsfc.nasa.gov

[4] S. P. MARTIN, Advanced Series on Directions in High Energy Physics , 1-98 (1998).

[5] ATLAS, M. Aaboud et al., Phys. Rev. D 99, 092007 (2019), arXiv:1902.01636.

[6] XENON100, E. Aprile et al., Phys. Rev. Lett. 109, 181301 (2012), arXiv:1207.5988.

[7] LUX, D. S. Akerib et al., Phys. Rev. Lett. 112, 091303 (2014), arXiv:1310.8214.

[8] Fermi-LAT, M. Ackermann et al., Phys. Rev. Lett. 115, 231301 (2015), arXiv:1503.02641.

[9] H.E.S.S., A. Abramowski et al., Phys. Rev. D 90, 112012 (2014), arXiv:1410.2589.]

[10] CTA, A. Acharyya et al., (2020), arXiv:2007.16129.

[11] IceCube, M. G. Aartsen et al., Phys. Rev. Lett. 110, 131302 (2013), arXiv:1212.4097.

[12] T. Sjostrand et al., Comput. Phys. Commun. 191, 159 (2015), arXiv:1410.3012.

[13] J. Hisano, S. Matsumoto, M. M. Nojiri, and O. Saito, Phys. Rev. D 71, 063528 (2005), arXiv:hep-ph/0412403.

[14] M. Lisanti, Lectures on Dark Matter Physics, in Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics: New Frontiers in Fields and Strings, pp. 399-446, 2017, arXiv:1603.03797.

[15] M. Kubo, J. Sato, T. Shimomura, Y. Takanishi, and M. Yamanaka, Phys. Rev. D 97, 115013 (2018), arXiv:1803.07686.

[16] 九後汰一郎, ゲージ場の量子論 (I), 培風館 (2011)

[17] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, An Introduction To Quantum Field Theory (Frontiers in Physics) (Westview Press, 1995).

[18] S. Matsumoto, J. Sato, and Y. Sato, (2005), arXiv:hep-ph/0505160.

[19] J. F. Navarro, C. S. Frenk, and S. D. M. White, Astrophys. J. 490, 493 (1997), arXiv:astro-ph/9611107.

[20] A. Burkert, IAU Symp. 171, 175 (1996), arXiv:astro-ph/9504041.

[21] M. Cirelli et al., JCAP 03, 051 (2011), arXiv:1012.4515, [Erratum: JCAP 10, E01 (2012)].

[22] HESS, H. Abdallah et al., Phys. Rev. Lett. 120, 201101 (2018), arXiv:1805.05741.

[23] A. Hryczuk et al., JHEP 10, 043 (2019), arXiv:1905.00315.

[24] http://home.thep.lu.se/Pythia/

[25] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T.Vetterling, B.P.Flannery, NUMERICAL RECIPES in C. 丹慶勝市, 奥村晴彦, 佐藤俊郎, 小林誠訳, 技術評論社 (2012) William H. Press [ほか] 著 ; 丹慶勝市 [ほか] 訳

[26] 常見一太 (2020). MSSM における neutralino dark matter の Sommerfeld enhancement による間接検出の可能性　埼玉大学理工学研究科修士論文 (未公刊)

6 謝辞

この論文を作成するにあたり、多くの方にご支援いただきました。特に指導教官である佐藤丈准教授には研究やその進め方に対し数多くのご指導を賜りました。さらに、積極的に学生と交流していただいたことで過ごしやすい研究室の環境を作っていただけました。深く感謝を申し上げます。高西先生や梁先生には研究が行き詰まった際に貴重な助言をいただいただけでなく、日常生活の中でもさまざまなサポートをしていただきました。また、ゼミに参加してくれた粕谷、本田君、酒井君、そして卒業された常見先輩には多くの意見をいただき、さまざまな知見を深めることが出来ました。そして同級生である粕谷、柿澤、廣川には議論を通して多くの刺激を受け、日常生活の何気ない会話で精神的にも支えられていました。その他関わっていただいた多くの皆様の協力があって本論文を完成することができました。本当にありがとうございました。最後に、6 年という長い期間さまざまな面で支援していただいた家族に深く感謝いたします。