

繰り込み可能な $L_\mu - L_\tau$ 模型による Hubble tension の解決

令和 2 年度修了

埼玉大学大学院理工学研究科 物理機能系専攻物理学コース

学籍番号 19MP112

粕谷 竜太

2021 年 3 月 29 日

概要

標準模型 (Standard Model, SM) は素粒子の間に働く相互作用を記述する理論であり、これまで数多くの素粒子実験の結果を矛盾なく説明してきた。今日では、標準模型は素粒子物理学における基礎理論として確立し、最も成功した理論として知られている。しかし、その一方で標準模型では説明できない物理現象が存在することがいくつか報告されており、これまでに標準模型を超えた物理 (Beyond the Standard Model, BSM) の研究が精力的に行われてきた。

標準模型では説明できない現象の 1 つとして素粒子物理学の分野では、ミューオンの異常磁気モーメントの実験値と標準模型から予言される理論値が大きく異なる問題が古くから存在する。この問題は $g_\mu - 2$ anomaly と呼ばれていて、現在 4σ 程度のずれがあることが報告されている。また、宇宙論の分野では観測方法の違いにより Hubble 定数の推定値が大きく異なるという問題がある。Hubble 定数の測定方法には大きく分けて、近傍宇宙の観測から推定する方法と、遠方宇宙の観測結果から Λ CDM モデルに基づいて推定する方法があるが、これらそれぞれから推定される Hubble 定数の間に $3 - 5\sigma$ 程度のずれがあることが報告されている。このずれは Hubble tension と呼ばれている。先行研究ではニュートリノの有効数 N_{eff} を SM による理論値よりも大きくすることで、この Hubble tension を解決できることが提唱されていた。また、MeV 程度の質量をもつ新たな gauge 粒子 Z' を導入する $L_\mu - L_\tau$ 模型を用いることで上記の方法により Hubble tension を解決するだけでなく、 $g_\mu - 2$ anomaly も同時に解決できることが示されていた。しかし、先行研究で用いられている $L_\mu - L_\tau$ 模型は Z' の質量を手で加えているため、理論のもつ gauge 対称性は明らかに破れていることになる。つまり、 $L_\mu - L_\tau$ 模型は繰り込み不可能な理論であり、あくまで低エネルギースケールにおける有効理論なのである。

そこで本論文では、より理論的に厳密な模型としてニュートリノの質量起源まで説明できる繰り込み可能な $L_\mu - L_\tau$ 模型を考えた際に、Hubble tension と $g_\mu - 2$ anomaly を同時解決できるようなパラメータが存在するかを探索する。また、ニュートリノの質量起源を説明する模型の多くは、新たに軽い粒子として Majoron が生じるため、この模型には新たな軽い粒子として Majoron と Z' が含まれることになる。Majoron か Z' のどちらかがあるパラメータ領域に固定した場合に、Planck による N_{eff} への制限からもう一方の粒子のパラメータ空間に対してどのような制限がつけられるかを議論する。

目次

第 1 章	Introduction	1
第 2 章	標準模型における N_{eff}	4
2.1	平衡状態の定義	4
2.2	N_{eff} の定義	5
2.3	Boltzmann 方程式	6
2.4	温度の時間発展方程式	8
2.5	粒子数遷移率とエネルギー遷移率の計算	11
2.6	数値計算	12
第 3 章	$L_{\mu} - L_{\tau}$ 模型における N_{eff}	14
3.1	$L_{\mu} - L_{\tau}$ 模型	14
3.2	温度の時間発展方程式	19
3.3	エネルギー遷移率の計算	19
3.4	数値計算	22
第 4 章	繰りこみ可能な $L_{\mu} - L_{\tau}$ 模型における N_{eff}	25
4.1	繰りこみ可能な $L_{\mu} - L_{\tau}$ 模型	25
4.2	Majoron の相互作用	27
4.3	温度と化学ポテンシャルの時間発展方程式	28
4.4	初期宇宙の時間発展方程式	28
4.5	粒子数とエネルギー遷移率の計算	31
4.6	有効反応率	32
4.7	数値計算	34
第 5 章	まとめと今後の課題	41
付録 A	特殊関数	43
A.1	第 2 種変形 Bessel 関数	43
A.2	多重対数関数	43
付録 B	積分公式	45
付録 C	$1 + 2 \leftrightarrow 3 + 4$ に対する衝突項積分 (一般論)	47

付録 D	$1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ に対する衝突項積分	51
付録 E	崩壊一逆崩壊過程に対する粒子数遷移率とエネルギー遷移率	54
付録 F	弱い相互作用過程に対する粒子数遷移率とエネルギー遷移率の計算	56
F.1	$\nu_\alpha \bar{\nu}_\alpha \leftrightarrow e^- e^+$	56
F.2	$\nu_\alpha e^\pm \leftrightarrow \nu_\alpha e^\pm$	58
F.3	$\bar{\nu}_\alpha e^\pm \leftrightarrow \bar{\nu}_\alpha e^\pm$	60
付録 G	脱結合した粒子の分布関数	62
付録 H	熱力学量の公式	64
付録 I	Boltzmann 方程式と Gamow の基準	67
付録 J	数値計算	71
J.1	微分方程式の解法	71
J.2	情報落ちの緩和方法	71
J.3	適応刻み幅制御	72
J.4	非相対論的極限における熱力学量の冪級数展開	74
J.5	熱力学量に含まれる特殊関数の取り扱い	75
J.6	熱力学量の数値積分	75
謝辞		76
参考文献		77

第 1 章

Introduction

Hubble 定数 H_0 とは、現在の宇宙の膨張率を表す物理量である。現在、いくつかの実験グループが Hubble 定数を測定する実験を行っているが、その測定方法は大きく分けて 2 つ存在する。

方法 1. 近傍宇宙の観測から、Hubble 定数を推定する方法。(直接測定)

(説明):近傍宇宙の観測とは銀河までの距離とその赤方偏移の観測のことを指す。銀河までの距離 d_L と赤方偏移 z が分かれば、Hubble の法則

$$cz = H_0 d_L \quad (1.1)$$

から H_0 を推定することができる。赤方偏移は、その銀河のスペクトルを観測することで容易に求められる一方で、銀河までの距離を精度よく測定するのはとても難しい。そのため、銀河までの距離をいかに精度よく測定できるかが重要となってくる。現在では銀河までの距離の測定方法として標準光源^{*1}を用いる方法以外に、重力レンズや重力波を用いる方法も存在する。

方法 2. 遠方宇宙の観測から、 Λ CDM モデルに基づいて Hubble 定数を推定する方法。(間接測定)

(説明):遠方宇宙の観測とは、宇宙背景放射 (CMB) の観測である。 Λ CDM モデルによる要請から、現在の宇宙の放射成分は光子とニュートリノのみから構成され、ニュートリノのエネルギー密度 ρ_ν は

$$\rho_\nu = \frac{7}{8} \left(\frac{4}{11} \right)^{4/3} N_{\text{eff}} \rho_\gamma \quad (1.2)$$

と記述されることを仮定する [39, 3.2 節]。ここで、 ρ_γ は光子のエネルギー密度、 N_{eff} はニュートリノの有効数である。ここでは SM を仮定しているため、 $N_{\text{eff}} = 3.045$ [12] である。

さまざまな実験グループによる Hubble 定数の測定値を図 1.1 に示す。この図を全体として見ると、いくつか例外は見られるものの直接測定と間接測定の間には大きな隔たりがあることが分かる。この隔たりのことを Hubble tension という。これらの測定値のなかで最も離れているのが Planck と SH0ES で、その間には 5σ 程度の食い違いがある。上記で述べたように、Hubble 定数の測定方法における唯一の仮定が Λ CDM モデルであることから、Hubble tension は Λ CDM モデルに何かしらの修正が必要であることを示唆していると考えられる。^{*2}

^{*1} 標準光源とは、何らかの方法によって絶対光度が推定できるような星のことをいう。絶対等級が分かれば見かけの等級と比べることで、その光源が属している銀河までの距離を推定することができる。

^{*2} Hubble tension の原因が観測データのなかに含まれる未知の系統誤差である可能性もあるが、今回はこのように考えること

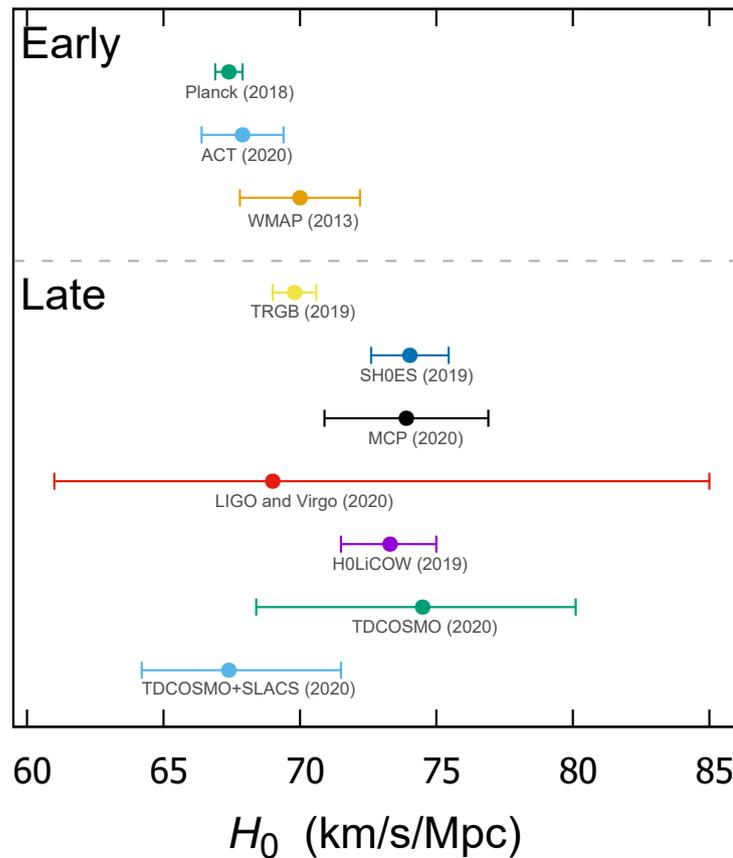


図 1.1 さまざまな実験グループによる Hubble 定数の測定値. 遠方宇宙の観測から Λ CDM モデルに基づいて測定した Hubble 定数は上段に (Planck 2018 [39], Atacama Cosmology Telescope(ACT) 2020 [31], WMAP 2013 [38]), 近傍宇宙の観測から測定した Hubble 定数は下段に (Tip Of Red Giant Branch(TRGB) 2019 [32], SH0ES 2019 [34], Megamaser Cosmology Project(MCP) 2020 [37], Ligo and Virgo 2020 [30], H0LiCOW 2019 [33], TDCOSMO, TDCOSMO+SLACS 2020 [36]) 示す。

現在、Hubble tension を解決する方法として様々なものが提唱されているが、その中の 1 つに光子の脱結合が起こる前 ($T \gtrsim 0.3\text{eV}$) の初期宇宙において光子のエネルギー密度に対するニュートリノのエネルギー密度の比 ρ_ν/ρ_γ を大きくすることで Hubble 定数を増大させる方法がある。これは図 1.2 を見ると分かりやすい。この図は Planck 2015 のデータ (青色の領域) と Planck 2015+BAO のデータ (緑色の領域) による $H_0 - N_{\text{eff}}$ パラメータ空間への制限を示したものである。 N_{eff} はニュートリノの有効数と呼ばれ、 ρ_ν/ρ_γ の大きさを特徴づけるようなパラメータである。 SM の場合、理論値は $N_{\text{eff}}^{\text{SM}} = 3.045$ [12] であるので、その時の H_0 がおよそ 68 km/s/Mpc と読み取ることができる。また、 N_{eff} を大きくしていくとその値から推定される H_0 も大きくなり、直接測定によって得られた H_0 に近づくことが分かる。仮に何らかの機構によって $N_{\text{eff}} \simeq 3.4 - 3.5$ ぐらいにすることができれば、直接測定による H_0 からのずれも 2σ 程度におさまることになり、Hubble tension は解決できたとみなすことができるであろう。

にする。実際、Planck による CMB の観測データと SH0ES のデータを複数回調べたが今のところ重要な系統誤差は見つかっていないことが報告されている [40]。このことから、少なくとも Planck と SH0ES の間には Hubble tension は存在していそうである。

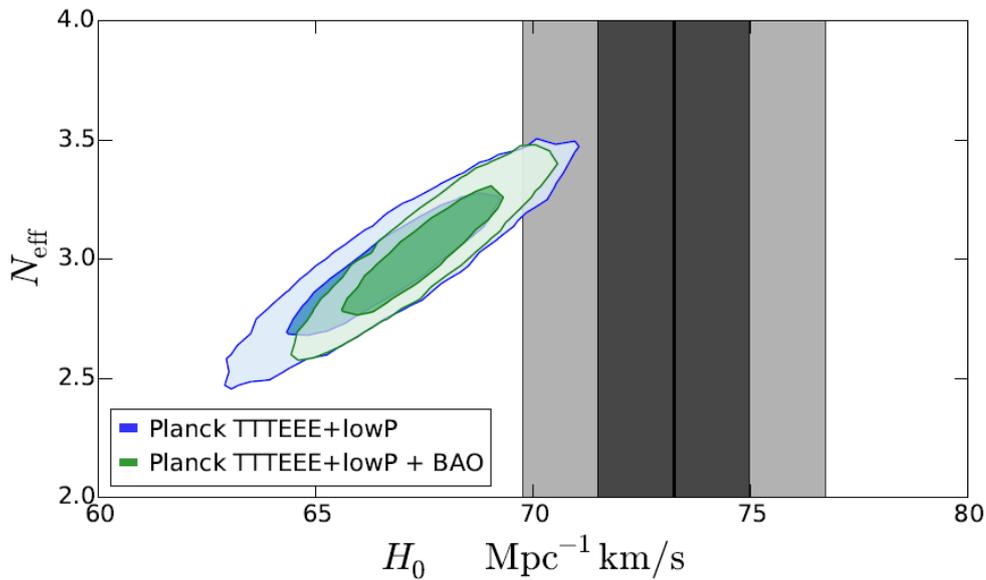


図 1.2 Planck 2015 のデータ (青色の領域) と Planck 2015+BAO のデータ (緑色の領域) による $H_0 - N_{\text{eff}}$ パラメータ空間への制限 [19]. 縦の黒い帯は、直接測定による Hubble 定数の測定値 $H_0 = 73.24 \pm 1.74 \text{ km/s/Mpc}$ (SH0ES 2016 [35]) を表している。

先行研究では、MeV 程度の質量をもつ新たな gauge 粒子 Z' を導入する $L_\mu - L_\tau$ 模型を用いることで上記の方法により Hubble tension を解決するだけでなく、 $g_\mu - 2$ anomaly も同時に解決できることが示されていた [7]。しかし、先行研究で用いられている $L_\mu - L_\tau$ 模型は Z' の質量を手で加えているため、理論のもつ gauge 対称性は明らかに破れていることになる。つまり、 $L_\mu - L_\tau$ 模型は繰り込み不可能な理論であり、あくまで低エネルギースケールにおける有効理論なのである。

そこで本論文では、より理論的に厳密な模型としてニュートリノの質量起源まで説明できる繰り込み可能な $L_\mu - L_\tau$ 模型を考えた際に、Hubble tension と $g_\mu - 2$ anomaly を同時解決できるようなパラメータが存在するかを探索する。また、ニュートリノの質量起源を説明する模型の多くは、新たに軽い粒子として Majoron が生じるため、この模型には新たな軽い粒子として Majoron と Z' が含まれることになる。Majoron か Z' のどちらかあるパラメータ領域に固定した場合に、実験による N_{eff} への制限からもう一方の粒子のパラメータ空間に対してどのような制限がつけられるかを議論する。

本論文は次のように構成されている。2 章では、最も基本となる SM の場合に対して N_{eff} を計算する。3 章では、2 章の結果を用いて $L_\mu - L_\tau$ 模型の場合に対して N_{eff} を計算する。4 章では、3 章の結果を用いてニュートリノの質量起源を説明できる繰り込み可能な $L_\mu - L_\tau$ 模型の場合に対して N_{eff} を計算する。また、実験による N_{eff} への制限から Z' と Majoron のパラメータ空間に対してどのような制限がつけられるかを議論する。最後に 5 章では、本研究で得られた結果をまとめる。

第 2 章

標準模型における N_{eff}

この章では、最も基本となる SM の場合に対してニュートリノの有効数 N_{eff} を計算する。まず初めに準備として平衡状態、 N_{eff} 、Boltzmann 方程式について説明する。次に N_{eff} の計算方法を定式化する。 N_{eff} の計算方法として、[12, 13] で述べられているようなより厳密な方法もあるが、今回は [9] に従い議論していく。ただし、有限温度の QED 補正は無視することにする。この方法は、いくつか近似を用いるため数値的に解くべき方程式は比較的簡単であり、なおかつ高い正確度で N_{eff} を計算できるという利点がある。そして最後に、この方法による計算結果を示す。

2.1 平衡状態の定義

これから主に初期宇宙の熱的ダイナミクスについて議論していくにあたり、まず準備として平衡状態について説明する。初期宇宙において、いくつかの粒子種から構成されるある流体系が平衡状態を保つためには、その系を平衡状態に向かわせるような反応過程が宇宙の膨張率よりも十分早く生じている必要がある。これを式で表すと次のようになる。

$$\Gamma \gg H \quad (2.1)$$

ここで、 Γ は着目している流体系を平衡状態に向かわせるような反応過程の反応率、 H は Hubble rate(宇宙の膨張率) である。

着目している流体系を構成する粒子の間にどのような反応過程が十分早く起こっているかによって、平衡状態は以下の 3 つに分類される [3]。

- 運動学的平衡

$a + b \leftrightarrow a + b$ のような反応過程が十分すばやく起こっている時、粒子種 a, b によって構成される流体系は運動学的平衡であるという。この時、この系の温度は全体として共通の温度 T となり、粒子種 a, b の分布関数は次の熱平衡分布関数によって記述される。

$$f_i^{(\text{eq})}(\mathbf{p}) = \frac{1}{e^{(E_i - \mu_i)/T} \pm 1} \quad (i = a, b) \quad (2.2)$$

ここで、 $E_i = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_i^2}$ はエネルギー、 μ_i は化学ポテンシャルである。また、 $+$ は fermion に対応し $-$ は boson に対応する。

- 化学平衡

$a + b + \dots \leftrightarrow i + j + \dots$ のような反応過程が十分すばやく起こっているような状態のことをいう。この時、これらの粒子種に対する化学ポテンシャルの間に $\mu_a + \mu_b + \dots = \mu_i + \mu_j + \dots$ という関

係式が成立する。

- 熱平衡

いくつかの粒子種から構成される系が運動学的平衡であり、かつ化学平衡であるとき、この系は熱平衡であるという。定義から分かるように、熱平衡は最上位の平衡状態である。

2.2 N_{eff} の定義

ここでは、本論文において重要な役割を担うパラメータ、ニュートリノの有効数 N_{eff} について説明する [20]。初期宇宙における比較的遅い時期、つまり e^\pm が対消滅し標準模型を超えた (BSM) 軽い粒子 χ も崩壊や対消滅をしていなくなった後の宇宙 (温度 $T_{\gamma 0}$) を考える。この時に存在する相対論的な粒子は、光子とニュートリノと反ニュートリノとニュートリノ的な BSM 粒子 ξ である。^{*1} よって、 $T_{\gamma 0} \ll \min[m_e, m_\chi]$ における宇宙の放射成分のエネルギー密度を光子のエネルギー密度で規格化した量は

$$\left(\frac{\rho_R}{\rho_\gamma}\right)_0 = 1 + \left(\frac{\rho_\nu}{\rho_\gamma}\right)_0 + \left(\frac{\rho_\xi}{\rho_\gamma}\right)_0 = 1 + \left(\frac{\rho_\nu/3}{\rho_\gamma}\right)_0 \left[3 + \left(\frac{3\rho_\xi}{\rho_\nu}\right)_0\right] \quad (2.3)$$

と書ける。ここで、 ρ_ν は全ニュートリノのエネルギー密度、 ρ_ξ は ξ のエネルギー密度、下付き添え字”0”は宇宙の温度が $T_{\gamma 0}$ における物理量であることを表す (以下でもこの表記法を用いる)。十分初期の宇宙において χ が存在する場合、 χ は後に崩壊もしくは対消滅してエントロピーが光子やニュートリノに流入しエネルギー密度が上昇しうるため、 χ が存在する場合と存在しない場合では $\rho_{\gamma 0}$, $\rho_{\nu 0}$ の値は一般に異なってくる。つまり、 χ が存在しない場合の $\rho_{\gamma 0}$, $\rho_{\nu 0}$ をそれぞれ $\rho_{\gamma 0}|_{\text{SM}}$, $\rho_{\nu 0}|_{\text{SM}}$ とすると

$$\rho_{\gamma 0} = \rho_{\gamma 0}|_{\text{SM}} + \delta\rho_{\gamma 0} \quad (2.4)$$

$$\rho_{\nu 0} = \rho_{\nu 0}|_{\text{SM}} + \delta\rho_{\nu 0} \quad (2.5)$$

と書くことができる。これを用いると、(2.3) 式は

$$\begin{aligned} \left(\frac{\rho_R}{\rho_\gamma}\right)_0 &= 1 + \left(\frac{\rho_\nu/3}{\rho_\gamma}\right)_0 \Big|_{\text{SM}} \left[3 + \left(\frac{3\rho_\xi}{\rho_\nu}\right)_0 + \left(\frac{3\delta\rho_\nu}{\rho_\nu}\right)_0 - \left(\frac{\delta\rho_\gamma}{\rho_\gamma}\right)_0 + \dots\right] \\ &\equiv 1 + \left(\frac{\rho_\nu/3}{\rho_\gamma}\right)_0 \Big|_{\text{SM}} (3 + \Delta N_\nu) \end{aligned} \quad (2.6)$$

となる。この式から分かるように $\rho_{\xi 0} = 0$ の場合、 $\Delta N_\nu > 0$ ならば χ からニュートリノにエネルギーが流入したことを表し、 $\Delta N_\nu < 0$ ならば χ から光子にエネルギーが流入したことを表す。このように、十分初期の宇宙に χ が存在したことによる $\rho_{\gamma 0}$, $\rho_{\nu 0}$ への影響を ΔN_ν で特徴づけられることが分かる。

一方 SM の場合、 $T_\gamma \lesssim 2 - 3\text{MeV}$ になるとニュートリノは光子の熱浴から脱結合し、その後 $T_\gamma \ll m_e$ となると e^\pm が対消滅してそのほとんどのエントロピーが光子に流入する。これにより、光子の温度が最終的にニュートリノの温度より高くなる。この時の光子とニュートリノの温度比は、ニュートリノが光子の熱浴から瞬間的に脱結合したと仮定すると、エントロピー保存則から簡単に評価できて

$$\left(\frac{T_\nu}{T_\gamma}\right)_0 \Big|_{\text{SM}} = \left(\frac{4}{11}\right)^{1/3} \quad (2.7)$$

^{*1} 本論文では、 ξ を含むような模型は考えないが、ここではより一般的な場合に対して議論する。

となる。また、この仮定のもとではニュートリノの分布関数は脱結合後も相対論的な熱平衡分布関数の形を保つので (付録 G 参照)、

$$\left. \left(\frac{\rho_\nu/3}{\rho_\gamma} \right) \right|_{0|\text{SM}} = \left. \frac{7}{8} \left(\frac{T_\nu}{T_\gamma} \right)^4 \right|_{0|\text{SM}} \quad (2.8)$$

が成り立つ。

以上の結果を用いて、温度が $T_{\gamma 0}$ のときに存在する ξ の放射成分への寄与と、宇宙の十分初期に χ が存在したことによる $\rho_{\gamma 0}$, $\rho_{\nu 0}$ への影響を特徴づけるパラメータとして、ニュートリノの有効数 N_{eff} を次のように定義する。

$$\left. \left(\frac{\rho_R}{\rho_\gamma} \right) \right|_0 = 1 + \left. \left(\frac{\rho_\nu/3}{\rho_\gamma} \right) \right|_{0|\text{SM}} (3 + \Delta N_\nu) = 1 + \left. \frac{7}{8} \left(\frac{T_\nu}{T_\gamma} \right)^4 \right|_{0|\text{SM}} (3 + \Delta N_\nu) \equiv 1 + \frac{7}{8} \left(\frac{4}{11} \right)^{4/3} N_{\text{eff}} \quad (2.9)$$

N_{eff} について解くと

$$N_{\text{eff}} = \frac{8}{7} \left(\frac{11}{4} \right)^{4/3} \left. \left(\frac{\rho_R - \rho_\gamma}{\rho_\gamma} \right) \right|_0 \quad (2.10)$$

となる。温度 $T_{\gamma 0}$ の宇宙における放射成分として光子とニュートリノしか存在しない場合、 $\rho_{R0} = \rho_{\gamma 0} + \rho_{\nu 0}$ より

$$N_{\text{eff}} = \frac{8}{7} \left(\frac{11}{4} \right)^{4/3} \left. \left(\frac{\rho_\nu}{\rho_\gamma} \right) \right|_0 \quad (2.11)$$

となる。

2.3 Boltzmann 方程式

一様等方で平坦な宇宙では、粒子種 a の分布関数 $f_a = f_a(|\mathbf{p}_a|, t)$ の時間発展は次の Boltzmann 方程式によって決まる。

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} - H \mathbf{p}_a \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{p}_a} = C[f_a] \quad (2.12)$$

ここで、 $\mathbf{p}_a = |\mathbf{p}_a|$ は粒子種 a の運動量、 H は Hubble rate、 $C[f_a]$ は衝突項である。 H は Friedmann 方程式から次のように与えられる。

$$H = \sqrt{\frac{8\pi}{3} \frac{\rho_{\text{tot}}}{m_{Pl}^2}} \quad (2.13)$$

ここで、 ρ_{tot} は全エネルギー密度、 m_{Pl} は Plank 質量である。また、粒子種 a に対する衝突項は一般に次式で与えられる。

$$C[f_a] = \sum_{X,Y} C_{a+X \leftrightarrow Y}[f_a] \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} C_{a+X \leftrightarrow Y}[f_a] = & -\frac{1}{2E_a} \int \prod_i d\Pi_{X_i} \prod_j d\Pi_{Y_j} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_a + \sum_i p_{X_i} - \sum_j p_{Y_j}) \\ & \times \left[\sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{a+X \rightarrow Y}|^2 f_a \prod_i f_{X_i} \prod_j (1 \pm f_{Y_j}) - \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{Y \rightarrow a+X}|^2 \prod_j f_{Y_j} (1 \pm f_a) \prod_i (1 \pm f_{X_i}) \right] \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$d\Pi_{X_i} \equiv \frac{d^3 \mathbf{p}_{X_i}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{X_i}} \quad (2.16)$$

ここで、 $\sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{a+X \rightarrow Y}|^2$ は過程 $a + X \rightarrow Y$ に対する振幅を2乗し、始状態と終状態にわたってスピン和をとったものである。 $X = \{X_i\}, Y = \{Y_j\}$ は一般に多粒子状態を表す。また、 $+$ は boson、 $-$ は fermion に対応し、 $(1 \pm f)$ はそれぞれ Bose enhancement、Pauli blocking の効果を表す因子である。実際に計算するときの規則として、始状態か終状態の中に同種粒子が n 個存在する場合、積分において同じ状態を複数回足し上げてしまわないよう全体を $1/n!$ で割るものとする。

(2.12) 式の両辺に積分測度 $d^3 p_a / (2\pi)^3$ をかけて両辺積分すると、粒子種 a の数密度 n_a の時間発展を記述する方程式が得られる。

$$\frac{dn_a}{dt} + 3Hn_a = \int \frac{d^3 p_a}{(2\pi)^3} C[f_a] \equiv \frac{\delta n_a}{\delta t} \quad (2.17)$$

ここで、 f_a は $p_a \rightarrow \infty$ に対して $f_a \rightarrow 0$ であるとした。 $\delta n_a / \delta t$ は粒子数遷移率と呼ばれ、(2.14) 式から次のように書き表すこともできる。

$$\frac{\delta n_a}{\delta t} = \sum_{X,Y} \frac{\delta n_a}{\delta t} \Big|_{a+X \leftrightarrow Y} \quad (2.18)$$

$$\frac{\delta n_a}{\delta t} \Big|_{a+X \leftrightarrow Y} \equiv \int \frac{d^3 p_a}{(2\pi)^3} C_{a+X \leftrightarrow Y}[f_a] \quad (2.19)$$

ここで、(2.17) 式の物理的な意味を考えておこう。 $3Hn_a$ を右辺にもっていくとより意味が明確になり、この式は粒子数密度の時間変化が $-3Hn_a$ と $\delta n_a / \delta t$ によって決まるということを言っている。 $-3Hn_a$ は宇宙が膨張することによって粒子数密度が薄まる効果を表していて、 $\delta n_a / \delta t$ は相互作用によって粒子 a の粒子数が増える効果を表している。もし、粒子種 a が相互作用しない場合、 $\delta n_a / \delta t = 0$ より $n_a \propto R^{-3}$ (R : scale factor) となり、期待通り粒子数が増えない場合の解が得られる。

同様に、(2.12) 式の両辺に積分測度 $E_a d^3 p_a / (2\pi)^3$ をかけて両辺積分すると、粒子種 a のエネルギー密度 ρ_a の時間発展を記述する方程式が得られる。

$$\frac{d\rho_a}{dt} + 3H(\rho_a + P_a) = \int \frac{d^3 p_a}{(2\pi)^3} E_a C[f_a] \equiv \frac{\delta \rho_a}{\delta t} \quad (2.20)$$

ここで、 P_a は粒子種 a の圧力である。 $\delta \rho_a / \delta t$ はエネルギー遷移率と呼ばれ、次のように書き表すこともできる。

$$\frac{\delta \rho_a}{\delta t} = \sum_{X,Y} \frac{\delta \rho_a}{\delta t} \Big|_{a+X \leftrightarrow Y} \quad (2.21)$$

$$\frac{\delta \rho_a}{\delta t} \Big|_{a+X \leftrightarrow Y} \equiv \int \frac{d^3 p_a}{(2\pi)^3} E_a C_{a+X \leftrightarrow Y}[f_a] \quad (2.22)$$

(2.20) 式の物理的な意味についても粒子数密度の場合と同様に考えることができる。

また、一様等方宇宙における全エネルギー運動量テンソルに対する保存則 $T^{\mu}_{\nu;\mu} = 0$ の $\nu = 0$ 成分から

$$\frac{d\rho_{\text{tot}}}{dt} = -3H(\rho_{\text{tot}} + P_{\text{tot}}) \quad (2.23)$$

を得る。ここで、 $\rho_{\text{tot}}, P_{\text{tot}}$ はそれぞれ宇宙の全エネルギー密度と全圧力である。この式は、Boltzmann 方程式からも導くことができる。宇宙に存在する全粒子種にわたって (2.20) 式を足し上げると

$$\frac{d\rho_{\text{tot}}}{dt} + 3H(\rho_{\text{tot}} + P_{\text{tot}}) = \sum_a \frac{\delta \rho_a}{\delta t} \quad (2.24)$$

となる。 $\delta\rho_a/\delta t$ は各粒子間を行き来するエネルギーを表している。宇宙の外にでもエネルギーが逃げ出さない限り、各粒子間でやりとりするエネルギーは保存するはずなので

$$\sum_a \frac{\delta\rho_a}{\delta t} = 0 \quad (2.25)$$

となる。よって、(2.23) 式が再現される。

2.4 温度の時間発展方程式

ここでは、Boltzmann 方程式といくつかの近似を用いることで光子とニュートリノの時間発展方程式を導出する。 N_{eff} には ρ_ν/ρ_γ の形で入っていることから、ニュートリノが光子と電子の熱浴から脱結合する時期からその後にかけての物理が重要になってくる。^{*2}そこで、宇宙の温度がおよそ 10MeV 程度以下となった初期宇宙を考えよう。この時期に存在する SM 粒子は、光子 γ 、ニュートリノ ν_α 、反ニュートリノ $\bar{\nu}_\alpha$ 、電子 e^- 、陽電子 e^+ である。

2.4.1 近似

Boltzmann 方程式から導かれる光子とニュートリノの時間発展方程式を簡単にするために、ここではいくつかの近似を行う。以下に用いる近似とその妥当性について述べる [9]。

近似 1. 全ての SM 粒子たちは熱平衡分布関数 $f^{(eq)} = f^{(eq)}(T(t), \mu(t)) = 1/[e^{(E-\mu)/T} \pm 1]$ に従う。(つまり、fermion は Fermi–Dirac 統計、boson は Bose–Einstein 統計に従う。)

(妥当性)：十分初期の宇宙では温度が非常に高く、SM 粒子たちは頻ぱんに衝突、反応を起こして熱平衡状態であったため、全 SM 粒子は良い近似で熱平衡分布関数に従う。宇宙の膨張に伴って宇宙の温度が下がってくると $T \sim 3\text{MeV}$ でニュートリノは脱結合してしまうが、この脱結合が瞬間的に起こったと仮定すると、ニュートリノの分布関数は脱結合後も熱平衡分布関数の形を保ち続ける (付録 G 参照)。しかし、実際には $T \lesssim 3\text{MeV}$ でもニュートリノと電子の相互作用はわずかに残っているため脱結合後のニュートリノの正確な分布関数は、脱結合が瞬間的に起こった場合のものからの小さなずれとして記述されるはずである。

実際、脱結合したニュートリノの分布関数の熱平衡分布関数からのずれは 1% 未満であることが報告されている [9]。

近似 2. 衝突項の中では、Maxwell–Boltzmann 統計を用いる。

(妥当性)：十分高温では、分布関数 $f(E)$ はエネルギー E が大きな状態にまで広く分布するため、各状態の占有率はとても小さい。つまり、近似 1 を用いると $f = 1/[e^{(E-\mu)/T} \pm 1] \ll 1$ 。これは、 $e^{(E-\mu)/T} \gg 1$ であることに対応する。よって、 $f \simeq e^{-(E-\mu)/T}$ となる。また、 $f \ll 1$ であることから $1 \pm f \simeq 1$ と近似できる。

実際、衝突項において Maxwell–Boltzmann 統計で近似することによるずれは 20% 以下であることが報告されている [8]。

近似 3. ニュートリノの質量を無視する。

^{*2} 全 SM 粒子が同じ熱浴にいるような初期宇宙では、 ρ_ν/ρ_γ が変化することはないため。

(妥当性): Planck 2018 [39,40] からニュートリノの質量 m_{ν_i} に対して、 $\sum_i m_{\nu_i} < 0.12\text{eV}$ という制限がついているため、 $T \gg 0.1\text{eV}$ の初期宇宙を考える限りはニュートリノは massless 粒子として問題ない。

近似 4. 弱い相互作用過程に対する衝突項の計算では、電子の質量 m_e を無視する。

(妥当性): 電子とニュートリノの相互作用が脱結合する前 ($T \gtrsim 3\text{MeV}$) では、電子はまだ相対論的であるため $m_e = 0$ は良い近似で成立する。ニュートリノの脱結合後 ($T \lesssim 3\text{MeV}$)、電子は次第に自身の質量を感じるようになるため温度の低下とともにこの近似は悪くなるが、 $T \sim 3\text{MeV}$ の時点で電子とニュートリノの相互作用に対する衝突項は Boltzmann 方程式の中で十分小さいため問題ない。実際、電子の質量を無視することによる数値計算誤差は数 % 以下であることが報告されている [9]。

近似 5. 全ての SM 粒子の化学ポテンシャル μ を無視する。

(妥当性): 初期宇宙でのレプトン非対称性が存在しないとすれば、あるレプトン ψ に対して $n_\psi = n_{\bar{\psi}}$ と近似 1 から

$$\frac{1}{e^{(E-\mu_\psi)/T} \pm 1} = \frac{1}{e^{(E-\mu_{\bar{\psi}})/T} \pm 1}$$

$$\Rightarrow \mu_\psi = \mu_{\bar{\psi}}$$

が成り立つ。ただし、レプトンと反レプトンは運動学的平衡であるとした。

まず、光子について考える。光子は 2 重 Compton 散乱 $e^- + \gamma \leftrightarrow e^- + \gamma + \gamma$ によって化学平衡であることから $\mu_\gamma = 0$ である。

次に、電子と陽電子について考える。 $e^- e^+ \leftrightarrow e^- e^+$ により、電子と陽電子は運動学的平衡である。また、 $e^+ e^- \leftrightarrow 2\gamma$ が化学平衡であることから

$$\mu_{e^-} + \mu_{e^+} = 2\mu_{e^-} = 2\mu_\gamma = 0$$

$$\Rightarrow \mu_{e^-} = 0$$

となる。最後に、ニュートリノについて考える。 $T \gtrsim 3\text{MeV}$ では、 $\nu_\alpha \bar{\nu}_\alpha \leftrightarrow \nu_\alpha \bar{\nu}_\alpha$ によりニュートリノと反ニュートリノは運動学的平衡である。また、 $\nu_\alpha \bar{\nu}_\alpha \leftrightarrow e^+ e^-$ が化学平衡であることから

$$\mu_{\nu_\alpha} + \mu_{\bar{\nu}_\alpha} = 2\mu_{\nu_\alpha} = \mu_{e^-} + \mu_{e^+} = 0$$

$$\Rightarrow \mu_{\nu_\alpha} = 0$$

となる。一方で $T \lesssim 3\text{MeV}$ では、ニュートリノは脱結合してしまうため $\mu_{\nu_\alpha} = 0$ は保証されないが、ここでは $|\mu_{\nu_\alpha}/T_{\nu_\alpha}| \ll 1$ であると仮定することにする。

実際、ニュートリノの化学ポテンシャルを無視せずに計算しても無視した場合と比べて大きな違いは計算結果にあらわれないことが報告されている [8, Appendix.3]。

近似 6. $T_{\nu_e} = T_{\nu_\mu} = T_{\nu_\tau} \equiv T_\nu$, $T_\gamma = T_{e^-} = T_{e^+}$ が成り立つ。

(妥当性): 電子、陽電子は $e^\pm \gamma \leftrightarrow e^\pm \gamma$ によって光子と運動学的平衡なので、 $T_\gamma = T_{e^-} = T_{e^+}$ は良い近似で成立する。また、 $T \gtrsim 3\text{MeV}$ ではニュートリノどうしても $\nu_\alpha \nu_\beta \leftrightarrow \nu_\alpha \nu_\beta$ によって運動学的平衡なので、 $T_{\nu_\alpha} = T_{\nu_\beta}$ は良い近似で成立する。 $T \lesssim 3\text{MeV}$ では、ニュートリノどうしの相互作用はほとんど効いてこなくなる一方で、ニュートリノ振動による効果が効いてくる [9, Appendix.1]。ニュートリノ振動は、各フレーバーに対するニュートリノの分布関数を全て

同じにするようにはたらくため [12, fig.1]、近似 1 と 5 を用いると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^{p/T_{\nu_\alpha}} + 1} &\simeq \frac{1}{e^{p/T_{\nu_\beta}} + 1} \\ \Rightarrow T_{\nu_\alpha} &\simeq T_{\nu_\beta} \end{aligned}$$

となる。よって、 $T_{\nu_e} = T_{\nu_\mu} = T_{\nu_\tau}$ は良い近似で成立する。

2.4.2 温度の時間発展方程式の導出

(2.11) 式と近似 1, 3, 5, 6 から N_{eff} は次のように書くことができる。

$$N_{\text{eff}} = 3 \left(\frac{11}{4} \right)^{4/3} \left(\frac{T_\nu}{T_\gamma} \right)_0^4 \quad (2.26)$$

よって、 $T_\gamma \sim 10 \text{ MeV}$ から $T_\gamma \ll m_e$ にわたって T_ν/T_γ の時間発展を追うことで、 N_{eff} を計算することができる。以下では、上記の正当化された近似と Boltzmann 方程式を用いて光子とニュートリノの温度の時間発展方程式を導く。

ある粒子種 a のエネルギー密度 ρ_a は一般に分布関数の運動量積分として書けるので、近似 1 と 5 から $\rho_a = \rho_a(T_a(t))$ と書くことができる。(2.20) 式を用いると、次のように T_a の時間発展方程式を得る。

$$\frac{d\rho_a}{dt} = \frac{\partial \rho_a}{\partial T_a} \frac{dT_a}{dt} = -3H(\rho_a + P_a) + \frac{\delta \rho_a}{\delta t} \quad (2.27)$$

この式を用いて、まずニュートリノの温度 T_ν の時間発展方程式を導く。近似 6 から全てのフレーバーに対して $T_{\nu_\alpha} = T_{\bar{\nu}_\alpha} = T_\nu$ が成り立つので*3、(2.27) 式をニュートリノと反ニュートリノに対して適用すると

$$\frac{d\rho_{\nu_\alpha}}{dt} = \frac{\partial \rho_{\nu_\alpha}}{\partial T_\nu} \frac{dT_\nu}{dt} = -4H\rho_{\nu_\alpha} + \frac{\delta \rho_{\nu_\alpha}}{\delta t} \quad (2.28)$$

$$\frac{d\rho_{\bar{\nu}_\alpha}}{dt} = \frac{\partial \rho_{\bar{\nu}_\alpha}}{\partial T_\nu} \frac{dT_\nu}{dt} = -4H\rho_{\bar{\nu}_\alpha} + \frac{\delta \rho_{\bar{\nu}_\alpha}}{\delta t} \quad (2.29)$$

となる。(2.28) 式と (2.29) 式の両辺を足して全フレーバーにわたって足し上げると、次の T_ν に対する方程式が得られる。

$$\frac{d\rho_\nu}{dt} = \frac{\partial \rho_\nu}{\partial T_\nu} \frac{dT_\nu}{dt} = -4H\rho_\nu + \frac{\delta \rho_\nu}{\delta t} \quad (2.30)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dT_\nu}{dt} = - \left(\frac{\partial \rho_\nu}{\partial T_\nu} \right)^{-1} \left[4H\rho_\nu - \frac{\delta \rho_\nu}{\delta t} \right] \quad (2.31)$$

ここで、 $\rho_\nu, \delta \rho_\nu/\delta t$ は

$$\rho_\nu \equiv \sum_\alpha (\rho_{\nu_\alpha} + \rho_{\bar{\nu}_\alpha}) \quad (2.32)$$

$$\frac{\delta \rho_\nu}{\delta t} \equiv \sum_\alpha \left(\frac{\delta \rho_{\nu_\alpha}}{\delta t} + \frac{\delta \rho_{\bar{\nu}_\alpha}}{\delta t} \right) \quad (2.33)$$

*3 本論文では宇宙の最初期におけるレプトン非対称性を考えず、CP を破るような相互作用も存在しないため、 $T_{\nu_\alpha} = T_{\bar{\nu}_\alpha}$ が成り立つ。このことは、 $\delta \rho_{\nu_\alpha}/\delta t = \delta \rho_{\bar{\nu}_\alpha}/\delta t$ と $T_{\nu_\alpha} = T_{\bar{\nu}_\alpha}$ (at $T_\gamma \gg 1 \text{ MeV}$) より、 T_{ν_α} と $T_{\bar{\nu}_\alpha}$ が初期条件まで含めて同じ微分方程式 ((2.27) 式で $a = \nu_\alpha, \bar{\nu}_\alpha$ としたもの) に従うということからも理解できる。

である。また、(2.23) 式を用いると T_γ に対する方程式は

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \rho_\gamma}{\partial T_\gamma} + \frac{\partial \rho_e}{\partial T_\gamma} \right) \frac{dT_\gamma}{dt} + \frac{d\rho_\nu}{dt} &= -4H\rho_\gamma - 3H(\rho_e + P_e) - 4H\rho_\nu \\ \Leftrightarrow \frac{dT_\gamma}{dt} &= - \left(\frac{\partial \rho_\gamma}{\partial T_\gamma} + \frac{\partial \rho_e}{\partial T_\gamma} \right)^{-1} \left[4H\rho_\gamma + 3H(\rho_e + P_e) + \frac{\delta\rho_\nu}{\delta t} \right] \end{aligned} \quad (2.34)$$

となる。ここで、 $\rho_e \equiv \rho_{e^-} + \rho_{e^+}$, $P_e \equiv P_{e^-} + P_{e^+}$ である。また2行目の式に移る際、(2.30) 式を用いた。 e^\pm が対消滅して光子にエントロピーが流入し、光子の温度をニュートリノの温度と比べて相対的に上昇させる効果は、この方程式の右辺の2項目 $-3H(\rho_e + P_e)$ に入っている。なぜなら、 $T \lesssim m_e$ となると $\rho_e \sim e^{-m_e/T}$, $\rho_e \gtrsim P_e$ となり ρ_e, P_e は急激に減少するため、 $-3H(\rho_e + P_e)$ が小さくなり光子の温度の減少が緩和されるからである。

2.5 粒子数遷移率とエネルギー遷移率の計算

前節で導いた温度の時間発展方程式を解くには、全反応過程に対するニュートリノのエネルギー遷移率 $\delta\rho_\nu/\delta t$ を求める必要がある。そこで、ここでは $\delta\rho_\nu/\delta t$ の表式を具体的に求める。また、後のため全反応過程に対するニュートリノの粒子数遷移率 $\delta n_\nu/\delta t$ も計算しておく。

まず、ニュートリノが関与する反応過程として、 $\nu_\alpha \bar{\nu}_\alpha \leftrightarrow e^- e^+$, $\nu_\alpha e^\pm \leftrightarrow \nu_\alpha e^\pm$, $\bar{\nu}_\alpha e^\pm \leftrightarrow \bar{\nu}_\alpha e^\pm$, $\nu_\alpha \nu_\beta \leftrightarrow \nu_\alpha \nu_\beta$, $\nu_\alpha \bar{\nu}_\beta \leftrightarrow \nu_\alpha \bar{\nu}_\beta$, $\bar{\nu}_\alpha \bar{\nu}_\beta \leftrightarrow \bar{\nu}_\alpha \bar{\nu}_\beta$ が存在する。しかし、近似1と5のもとでは、同じ熱浴中で起こる反応過程(始状態と終状態の粒子の温度が全て同じである場合)に対する衝突項は0になる。なぜなら、近似1のもとでは

$$1 \pm f_a = f_a e^{(E_a - \mu_a)/T_a} \quad (2.35)$$

が成り立つので、

$$\begin{aligned} f_3 f_4 (1 \pm f_1) (1 \pm f_2) &= (1 \pm f_3) e^{-(E_3 - \mu_3)/T} (1 \pm f_4) e^{-(E_4 - \mu_4)/T} f_1 e^{(E_1 - \mu_1)/T} f_2 e^{(E_2 - \mu_2)/T} \\ &= f_1 f_2 (1 \pm f_3) (1 \pm f_4) e^{(\mu_3 + \mu_4 - \mu_1 - \mu_2)/T} \\ &= f_1 f_2 (1 \pm f_3) (1 \pm f_4) \end{aligned} \quad (2.36)$$

となり、 $1+2 \leftrightarrow 3+4$ に対する衝突項内の分布関数の部分がちょうどキャンセルするからである。(上式を見て分かるように、正確には全ての粒子の化学ポテンシャルが0でなくても、 $1+2 \leftrightarrow 3+4$ が化学平衡であればこの議論は成り立つ。) 今の場合、全てのニュートリノの温度は等しいとしているので、実際に衝突項として効いてくるのは、 $\nu_\alpha \bar{\nu}_\alpha \leftrightarrow e^- e^+$, $\nu_\alpha e^\pm \leftrightarrow \nu_\alpha e^\pm$, $\bar{\nu}_\alpha e^\pm \leftrightarrow \bar{\nu}_\alpha e^\pm$ だけである。それぞれの反応過程に対する粒子数とエネルギー遷移率を計算すると、

$$\left. \frac{\delta n_{\nu_\alpha}}{\delta t} \right|_{\nu_\alpha \bar{\nu}_\alpha \leftrightarrow e^- e^+} = \left. \frac{\delta n_{\bar{\nu}_\alpha}}{\delta t} \right|_{\nu_\alpha \bar{\nu}_\alpha \leftrightarrow e^- e^+} = \frac{16G_F^2 (g_{\alpha L}^2 + g_{\alpha R}^2)}{\pi^5} (T_\gamma^8 - T_\nu^8) \quad (2.37)$$

$$\left. \frac{\delta \rho_{\nu_\alpha}}{\delta t} \right|_{\nu_\alpha \bar{\nu}_\alpha \leftrightarrow e^- e^+} = \left. \frac{\delta \rho_{\bar{\nu}_\alpha}}{\delta t} \right|_{\nu_\alpha \bar{\nu}_\alpha \leftrightarrow e^- e^+} = \frac{64G_F^2 (g_{\alpha L}^2 + g_{\alpha R}^2)}{\pi^5} (T_\gamma^9 - T_\nu^9) \quad (2.38)$$

$$\left. \frac{\delta n_{\nu_\alpha}}{\delta t} \right|_{\nu_\alpha e^\pm \leftrightarrow \nu_\alpha e^\pm} = \left. \frac{\delta n_{\bar{\nu}_\alpha}}{\delta t} \right|_{\bar{\nu}_\alpha e^\pm \leftrightarrow \bar{\nu}_\alpha e^\pm} = 0 \quad (2.39)$$

$$\left. \frac{\delta \rho_{\nu_\alpha}}{\delta t} \right|_{\nu_\alpha e^\pm \leftrightarrow \nu_\alpha e^\pm} = \left. \frac{\delta \rho_{\bar{\nu}_\alpha}}{\delta t} \right|_{\bar{\nu}_\alpha e^\pm \leftrightarrow \bar{\nu}_\alpha e^\pm} = \frac{112G_F^2 (g_{\alpha L}^2 + g_{\alpha R}^2)}{\pi^5} T_\gamma^4 T_\nu^4 (T_\gamma - T_\nu) \quad (2.40)$$

となる (詳しい計算は付録 F を参照)。ここで、 $g_{\alpha L}$, $g_{\alpha R}$ は

$$g_{\alpha L} = \begin{cases} \frac{1}{2}(C_A + C_V + 2) = \frac{1}{2} + \sin^2 \theta_W & (\alpha = e) \\ \frac{1}{2}(C_V + C_A) = -\frac{1}{2} + \sin^2 \theta_W & (\alpha = \mu, \tau) \end{cases} \quad (2.41)$$

$$g_{\alpha R} = \frac{1}{2}(C_V - C_A) = \sin^2 \theta_W \quad (\alpha = e, \mu, \tau) \quad (2.42)$$

である。これらを用いると、 $\delta n_{\nu_\alpha}/\delta t$, $\delta n_{\bar{\nu}_\alpha}/\delta t$, $\delta \rho_{\nu_\alpha}/\delta t$, $\delta \rho_{\bar{\nu}_\alpha}/\delta t$ は

$$\left. \frac{\delta n_{\nu_\alpha}}{\delta t} \right|_{SM} = \left. \frac{\delta n_{\nu_\alpha}}{\delta t} \right|_{\nu_\alpha \bar{\nu}_\alpha \leftrightarrow e^- e^+} + \left. \frac{\delta n_{\nu_\alpha}}{\delta t} \right|_{\nu_\alpha e^\pm \leftrightarrow \bar{\nu}_\alpha e^\pm} = \frac{16G_F^2}{\pi^5} (g_{\alpha L}^2 + g_{\alpha R}^2) (T_\gamma^8 - T_\nu^8) \quad (2.43)$$

$$\left. \frac{\delta n_{\bar{\nu}_\alpha}}{\delta t} \right|_{SM} = \left. \frac{\delta n_{\bar{\nu}_\alpha}}{\delta t} \right|_{\nu_\alpha \bar{\nu}_\alpha \leftrightarrow e^- e^+} + \left. \frac{\delta n_{\bar{\nu}_\alpha}}{\delta t} \right|_{\bar{\nu}_\alpha e^\pm \leftrightarrow \nu_\alpha e^\pm} = \frac{16G_F^2}{\pi^5} (g_{\alpha L}^2 + g_{\alpha R}^2) (T_\gamma^8 - T_\nu^8) \quad (2.44)$$

$$\left. \frac{\delta \rho_{\nu_\alpha}}{\delta t} \right|_{SM} = \left. \frac{\delta \rho_{\nu_\alpha}}{\delta t} \right|_{\nu_\alpha \bar{\nu}_\alpha \leftrightarrow e^- e^+} + \left. \frac{\delta \rho_{\nu_\alpha}}{\delta t} \right|_{\nu_\alpha e^\pm \leftrightarrow \bar{\nu}_\alpha e^\pm} = \frac{2G_F^2}{\pi^5} (g_{\alpha L}^2 + g_{\alpha R}^2) F(T_\gamma, T_\nu) \quad (2.45)$$

$$\left. \frac{\delta \rho_{\bar{\nu}_\alpha}}{\delta t} \right|_{SM} = \left. \frac{\delta \rho_{\bar{\nu}_\alpha}}{\delta t} \right|_{\nu_\alpha \bar{\nu}_\alpha \leftrightarrow e^- e^+} + \left. \frac{\delta \rho_{\bar{\nu}_\alpha}}{\delta t} \right|_{\bar{\nu}_\alpha e^\pm \leftrightarrow \nu_\alpha e^\pm} = \frac{2G_F^2}{\pi^5} (g_{\alpha L}^2 + g_{\alpha R}^2) F(T_\gamma, T_\nu) \quad (2.46)$$

となる。ここで、

$$F(T_1, T_2) = 32(T_1^9 - T_2^9) + 56T_1^4 T_2^4 (T_1 - T_2) \quad (2.47)$$

である。よって、 $\delta n_\nu/\delta t$, $\delta \rho_\nu/\delta t$ は

$$\left. \frac{\delta n_\nu}{\delta t} \right|_{SM} = \sum_\alpha \left(\left. \frac{\delta n_{\nu_\alpha}}{\delta t} + \frac{\delta n_{\bar{\nu}_\alpha}}{\delta t} \right) \right|_{SM} = \frac{32G_F^2}{\pi^5} \left[(g_{eL}^2 + g_{eR}^2) + 2(g_{\mu L}^2 + g_{\mu R}^2) \right] (T_\gamma^8 - T_\nu^8) \quad (2.48)$$

$$\left. \frac{\delta \rho_\nu}{\delta t} \right|_{SM} = \sum_\alpha \left(\left. \frac{\delta \rho_{\nu_\alpha}}{\delta t} + \frac{\delta \rho_{\bar{\nu}_\alpha}}{\delta t} \right) \right|_{SM} = \frac{4G_F^2}{\pi^5} \left[(g_{eL}^2 + g_{eR}^2) + 2(g_{\mu L}^2 + g_{\mu R}^2) \right] F(T_\gamma, T_\nu) \quad (2.49)$$

となる。

2.6 数値計算

前節で求めた $\delta \rho_\nu/\delta t$ と付録 H の熱力学量の公式を用いることで、(2.31) 式と (2.34) 式を数値的に解くことができる。今回、この微分方程式系を解くための数値解法として 4 次の Runge–Kutta 法を採用し、局所的な計算精度を 10^{-6} 以下に設定した (数値計算の詳細については付録 J を参照)。初期条件として、全 SM 粒子が熱平衡状態である温度 $T_\gamma = T_\nu = 10\text{MeV}$ から解き始め、 e^\pm が対消滅し終わる温度 $T_\gamma \simeq 10^{-2}\text{MeV}$ まで解いた。

図 2.1 に、(2.31) 式と (2.34) 式を解くことで得られたニュートリノの温度の時間発展を示す。ニュートリノの脱結合が瞬間的に起こった場合の曲線は、 $\delta \rho_\nu/\delta t$ として

$$\left. \frac{\delta \rho_\nu}{\delta t} \right|_{SM, \text{inst}} = \begin{cases} \left. \frac{\delta \rho_\nu}{\delta t} \right|_{SM} & (T_\gamma > 3\text{MeV}) \\ 0 & (T_\gamma \leq 3\text{MeV}) \end{cases} \quad (2.50)$$

を用いて計算することで得られたものである。また、この図を見ると $T_\gamma \sim 0.5\text{MeV}$ あたりから T_γ/T_ν が上昇していることが分かる。これは、このあたりから e^\pm が生成されにくくなり、 e^\pm の対消滅 $e^- e^+ \rightarrow 2\gamma$

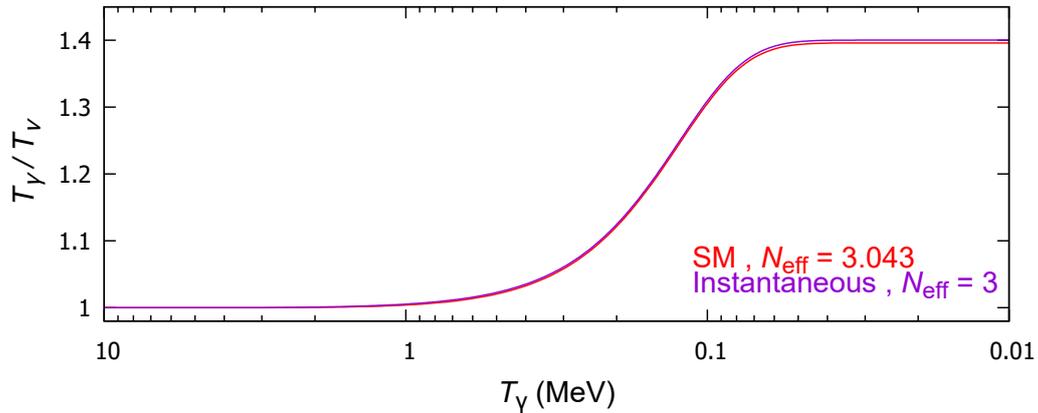


図 2.1 光子の温度とニュートリノの温度の比 T_γ/T_ν の時間発展. 赤色の線は (2.31) 式と (2.34) 式を (2.49) 式のエネルギー遷移率のもとで解くことで得られたものである. $T_\gamma/m_e \ll 1$ では、この温度比は一定値 $T_\gamma/T_\nu = 1.39605$ となるので、 $N_{\text{eff}} \simeq 3.043$ となる。また、紫色の線はニュートリノが $T_\gamma = 3\text{MeV}$ で瞬間的に脱結合した場合を表し、 $N_{\text{eff}} = 3.00$ となる。

が始まるからである。これにより e^\pm の持っているほとんどのエントロピーが光子に流入するためニュートリノの温度と比べて光子の温度が相対的に上昇するのである。

図 2.1 において、 $T_\gamma/m_e \ll 1$ では $T_\gamma/T_\nu = 1.39605$ であることから、(2.26) 式より $N_{\text{eff}} = 3.04295 \simeq 3.043$ となる。これは、[12] のより厳密な計算によって得られる結果 $N_{\text{eff}} = 3.045$ とかなりよく一致していることが分かる。

SM であるにもかかわらず、ニュートリノの数を表す N_{eff} が 3 よりも少し大きいには理由がある。元々 N_{eff} は SM においてニュートリノが瞬間的に脱結合した場合に $N_{\text{eff}} = 3$ となるよう定義された量である。しかし、実際には瞬間的ではなく徐々に脱結合していくというのが正しい描像である。ニュートリノ脱結合と e^\pm 対消滅は時間的に近いことから、 e^\pm が対消滅始めたころにはまだわずかに e と ν の間の相互作用が残っている。そのため、 e^\pm のエントロピーが $e^-e^+ \rightarrow 2\gamma$ によって全て光子に流入するのではなく、一部のわずかなエントロピーは $e^-e^+ \rightarrow \nu_\alpha\bar{\nu}_\alpha$ によってニュートリノにも流入する。これにより T_ν がわずかに上昇するため、結果的に N_{eff} が 3 より少し大きくなるのである。

第 3 章

$L_\mu - L_\tau$ 模型における N_{eff}

この章では、 $L_\mu - L_\tau$ 模型の場合に対して N_{eff} を計算する。まず初めに SM の $U(1)$ 拡張模型の 1 つである $L_\mu - L_\tau$ 模型について説明する。この際、 $L_\mu - L_\tau$ 模型の動機づけの 1 つである $g_\mu - 2$ anomaly についても説明する。次に先行研究 [7] に基づいて光子の温度とニュートリノの温度の時間発展方程式を導出する。最後にこれらの時間発展方程式を数値的に解いた結果を示し、得られた結果を物理的に考察する。

3.1 $L_\mu - L_\tau$ 模型

3.1.1 Lagrangian

$L_\mu - L_\tau$ 模型とは、SM のもつ gauge 対称性 G_{SM} に新たな gauge 対称性 $U(1)_{L_\mu - L_\tau}$ を加えて拡張した模型である [15–17]。この模型は数少ない anomaly free な SM の $U(1)$ 拡張模型の中の 1 つとして知られている。 $G_{\text{SM}} \times U(1)_{L_\mu - L_\tau}$ 対称性をもつ Lagrangian を得るには、SM の Lagrangian に対して次のおきかえを行えばよい。

$$\partial_\rho \psi \rightarrow (\partial_\rho - ig_{\mu-\tau}(L_\mu - L_\tau)Z'_\rho)\psi \quad (3.1)$$

ここで、 Z'_μ は $U(1)_{L_\mu - L_\tau}$ gauge 場、 $g_{\mu-\tau}$ は $U(1)_{L_\mu - L_\tau}$ gauge 結合定数、 $L_\mu - L_\tau$ は μ -レプトン数と τ -レプトン数の差を表し、 ψ に入る場に応じて表 3.1 のように割り当てられている。

上記の手続きにより、次の $G_{\text{SM}} \times U(1)_{L_\mu - L_\tau}$ 対称性を持つ Lagrangian を得る。

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{SM}} - \frac{1}{4}Z'^{\rho\sigma}Z'_{\rho\sigma} + g_{\mu-\tau}Z'_\rho J_{\mu-\tau}^\rho \quad (3.2)$$

ここで、 \mathcal{L}_{SM} は SM の Lagrangian、 $Z'_{\rho\sigma} = \partial_\rho Z'_\sigma - \partial_\sigma Z'_\rho$ は Z' 場の強さ、 $\mu - \tau$ カレント $J_{\mu-\tau}^\rho$ は

$$J_{\mu-\tau}^\rho = \bar{\mu}\gamma^\rho\mu + \bar{\nu}_\mu\gamma^\rho P_L\nu_\mu - \bar{\tau}\gamma^\rho\tau - \bar{\nu}_\tau\gamma^\rho P_L\nu_\tau \quad (3.3)$$

	ℓ_μ	ℓ_τ	μ_R	τ_R
$L_\mu - L_\tau$	1	-1	1	-1

表 3.1 $L_\mu - L_\tau$ charge の割り当て。 ℓ_μ, ℓ_τ は $SU(2)_W$ 2 重項、 μ_R, τ_R は $SU(2)_W$ 1 重項である。その他の SM 粒子に対しては $L_\mu - L_\tau = 0$ である。

である。 Z' に質量を与えるために (3.2) 式に質量項を手で加えると、Lagrangian は

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{SM} - \frac{1}{4} Z'^{\rho\sigma} Z'_{\rho\sigma} + \frac{1}{2} m_{Z'}^2 Z'^\rho Z'_\rho + g_{\mu-\tau} Z'_\rho J_{\mu-\tau}^\rho \quad (3.4)$$

となる。ここで注意しなければならないのは、 Z' の質量項は手で加えたため、理論のもつ $U(1)_{L_\mu - L_\tau}$ gauge 対称性は明白に破れているということである。つまり、上式の Lagrangian はくりこみ不可能であり、あくまで低エネルギースケールにおける有効理論である。 Z' の質量項をより厳密に取り扱った模型については4章で議論することにして、本章ではこの Lagrangian を用いて以下議論をしていく。

新たに加えた対称性が $U(1)$ であることから、

$$\mathcal{L}_{\text{mixing}} = -\frac{\chi}{2} B^{\rho\sigma} Z'_{\rho\sigma} \quad (3.5)$$

のようなものも考えることができる。ここで、 $B_{\mu\nu}$ は $U(1)_Y$ gauge 場の強さである。このような項は kinetic mixing term と呼ばれる。これは Lorentz 不変であり、かつ gauge 不変であることから一般に Lagrangian に加えることが許されるが、本論文では導入しないものとする。

3.1.2 有効結合

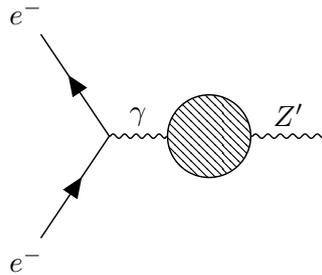


図 3.1 Z' と電子の loop を通した結合

前節で見たように、電子に対しては $L_\mu - L_\tau = 0$ なので電子は $L_\mu - L_\tau$ gauge boson Z' と tree level では結合しない。しかし 1-loop order まで考えると、図 3.1 のように Z' は電子と結合することができる。この diagram を評価するために、まず Z' が loop を通して光子と結合する diagram を評価しておく。1-loop order では

$$\begin{aligned} \mu \text{---} \gamma \text{---} \text{loop} \text{---} Z' \text{---} \nu &= \text{loop with } \mu \text{ and } \tau \text{ labels} + \text{loop with } \tau \text{ and } \mu \text{ labels} \\ &= \sum_\ell (-ie)(ig_{\mu\tau} Q_\ell)(-1) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[\gamma^\mu \frac{i}{\not{k} - m_\ell} \gamma^\nu \frac{i}{\not{k} + \not{q} - m_\ell} \right] \\ &= i(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \Pi(q^2) \end{aligned} \quad (3.6)$$

となる。ここで、 q は loop への入射運動量、 $\Pi(q^2)$ は

$$\begin{aligned}\epsilon \equiv \Pi(q^2) &= \sum_\ell \frac{8g_{\mu-\tau}Q_\ell e}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx x(1-x) \frac{\Gamma(2-d/2)}{[m_\ell^2 - x(1-x)q^2]^{2-d/2}} \\ &= \sum_\ell \frac{Q_\ell g_{\mu-\tau} e}{2\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \left(\frac{2}{\epsilon} - \log[m_\ell^2 - x(1-x)q^2] - \gamma + \log 4\pi \right) \quad (\epsilon \rightarrow 0) \\ &= \frac{g_{\mu-\tau} e}{2\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \log \left[\frac{m_\tau^2 - x(1-x)q^2}{m_\mu^2 - x(1-x)q^2} \right]\end{aligned}\quad (3.7)$$

$$Q_\ell = \begin{cases} 1 & (\ell = \mu) \\ -1 & (\ell = \tau) \end{cases}\quad (3.8)$$

である。発散する部分は μ と τ に対して逆符号で charge が割り当てられているため、キャンセルする構造となっている。また、本論文で考える宇宙のエネルギースケールはせいぜい 20MeV 程度なので、 $|q^2| \lesssim (20\text{MeV})^2 \ll m_\mu^2, m_\tau^2$ より ϵ は

$$\begin{aligned}\epsilon &\simeq \frac{g_{\mu-\tau} e}{2\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \log \frac{m_\tau^2}{m_\mu^2} \\ &= \frac{g_{\mu-\tau} e}{12\pi^2} \log \frac{m_\tau^2}{m_\mu^2} \simeq \frac{g_{\mu-\tau}}{70}\end{aligned}\quad (3.9)$$

と簡単な形になる。

以上の結果を用いて、 Z' が 1-loop を通して電子と結合する diagram を評価すると、

$$= -ie\gamma^\rho \frac{-ig_{\rho\mu}}{q^2} i(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \epsilon = -ie\epsilon\gamma^\nu \quad (3.10)$$

となる。2つ目の等号では、カレント保存則を用いた。最終的に得られた上式の diagram と数式の対応関係から、 Z' と電子の 1-loop 結合を考慮することは新たな相互作用項

$$\mathcal{L} \supset -\epsilon e Z'_\mu \bar{e} \gamma^\mu e \quad (3.11)$$

を Lagrangian(3.4) 式に加えることと等価であることが分かる。

これにより、 $m_{Z'} > m_e/2$ の場合には Z' は e^+e^- に崩壊することができる。 $Z' \rightarrow e^+e^-$ に対する崩壊幅は

$$\Gamma_{Z' \rightarrow e^-e^+} = \frac{(\epsilon e)^2 m_{Z'}}{12\pi} \left(1 + \frac{2m_e^2}{m_{Z'}^2} \right) \sqrt{1 - \frac{4m_e^2}{m_{Z'}^2}} \quad (3.12)$$

となる。また、 $Z' \rightarrow \nu_{\alpha'} \bar{\nu}_{\alpha'}$ ($\alpha' = \mu, \tau$) に対する崩壊幅は

$$\Gamma_{Z' \rightarrow \nu_{\alpha'} \bar{\nu}_{\alpha'}} = \frac{g_{\mu-\tau}^2 m_{Z'}}{24\pi} \quad (3.13)$$

となる。ここで、ニュートリノの質量は無視した。よって、崩壊モード $Z' \rightarrow e^+e^-$ への分岐比は

$$\text{Br}_{Z' \rightarrow e^-e^+} = \frac{\Gamma_{Z' \rightarrow e^-e^+}}{\Gamma_{Z' \rightarrow e^-e^+} + \Gamma_{Z' \rightarrow \nu_\mu \bar{\nu}_\mu} + \Gamma_{Z' \rightarrow \nu_\tau \bar{\nu}_\tau}} \simeq \left(\frac{e\epsilon}{g_{\mu\tau}} \right)^2 \simeq 2 \times 10^{-5} \quad (3.14)$$

となる。ここで、 $m_{Z'} < m_\mu$ であると仮定した。この分岐比の大きさは $g_{\mu-\tau}$ に依らず一定であることが分かる。

3.1.3 $g_\mu - 2$ anomaly

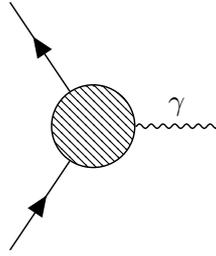


図 3.2 異常磁気モーメントの計算。

スピン 1/2 粒子は磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}$ をもつため、磁場と相互作用する。その相互作用ハミルトニアンは

$$H_{\text{int}} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = g \frac{e}{2m} \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \right) \cdot \mathbf{B} \quad (3.15)$$

で与えられる。ここで、 $\boldsymbol{\sigma}$ は Pauli 行列、 g は g 因子と呼ばれる。相対論的量子力学の枠組みでは、電磁場中の Dirac 方程式に対して非相対論的極限をとることで厳密に $g = 2$ であることが予言される。しかし、実際の観測によって得られる g 因子の値は 2 から少しずれている。この 2 からの小さなずれは量子論的效果によるもので、異常磁気モーメントと呼ばれている。異常磁気モーメント a は次式で定義される。

$$a = \frac{g - 2}{2} \quad (3.16)$$

異常磁気モーメントは、場の量子論により図 3.2 のスピン 1/2 粒子と電磁場の相互作用を表す diagram を評価することで理論的に計算することができる。

電子とミュオン異常磁気モーメントは理論、実験ともに詳細に調べられている。電子の異常磁気モーメントは

$$a_e^{\text{exp}} = 1159652180.73(28) \times 10^{-12} \quad (3.17)$$

$$a_e^{\text{SM}} = 1159652181.606(229)(11)(12) \times 10^{-12} \quad (3.18)$$

$$\Delta a_e = a_e^{\text{exp}} - a_e^{\text{SM}} = -0.88(36) \times 10^{-12} \quad (3.19)$$

と実験値と SM の理論値で 9 桁にわたって一致しているのに対して^{*1} [22]、ミュオンの異常磁気モーメント

^{*1} (3.18) 式の 1 つ目の括弧は微細構造定数 α からくる不確かさ、2 つ目の括弧は $\mathcal{O}(\alpha^5)$ の数値計算からくる不確かさ、3 つ目の括弧はハドロン寄与からくる不確かさを表す。また、この節で紹介している a_e , a_μ の理論値はセシウムから決まる微細構造定数: $\alpha^{-1}(\text{Cs}) = 137.035999046(27)$ [22] を用いて計算したものである。

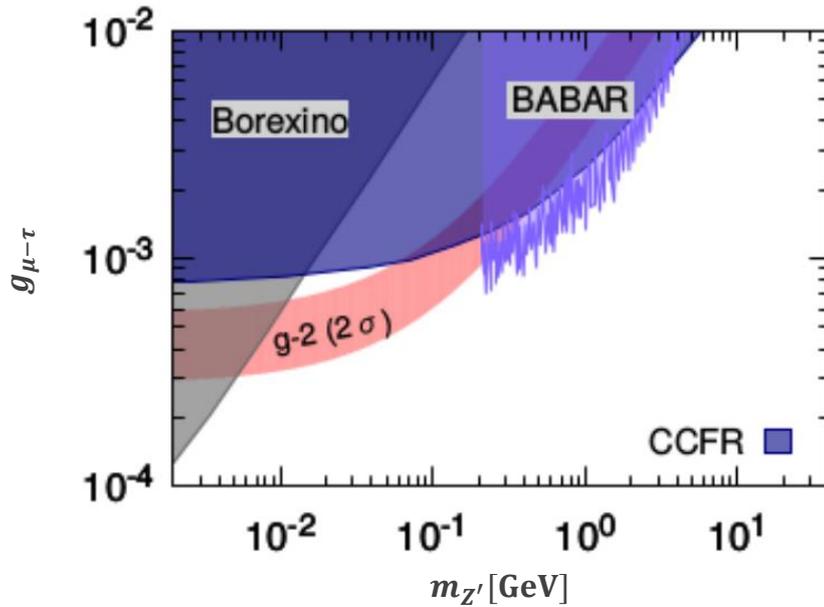


図 3.3 Z' のパラメータ空間 [18]. 赤色の領域は、 $g_\mu - 2$ anomaly を 2σ 以内で解決できるような領域である。暗色の領域は、Borexino 実験、BABAR 実験、CCFR 実験によって除外されている。

ントは

$$a_\mu^{\text{exp}} = 116592089(63) \times 10^{-11} \quad (3.20)$$

$$a_\mu^{\text{SM}} = 116591810(43) \times 10^{-11} \quad (3.21)$$

$$\Delta a_\mu = a_\mu^{\text{exp}} - a_\mu^{\text{SM}} = 279(76) \times 10^{-11} \quad (3.22)$$

のように実験値と SM の理論値で 3.7σ 程度の食い違いがあることが報告されている [21]。この問題は古くから存在し、 $g_\mu - 2$ anomaly と呼ばれている。 $g_\mu - 2$ anomaly は、ミューオンに対しては働くが電子に対しては働かないような新しい相互作用を SM に加えて拡張したような模型であれば解決できる可能性がある。 $L_\mu - L_\tau$ 模型はまさにそのような模型の 1 つである。実際に、 $L_\mu - L_\tau$ 模型を用いて図 3.2 の diagram を評価すると

$$(3.23)$$

となる。1 つ目の diagram が $g = 2$ に対応するため、新たに加わった 3 つ目の diagram は異常磁気モーメントに対して leading order で効いてくることになる。新たに加わった diagram からくる異常磁気モーメントへの寄与 $\Delta a_\mu^{Z'}$ は

$$\Delta a_\mu^{Z'} = \frac{g_{\mu-\tau}^2}{8\pi^2} \int_0^1 dx \frac{2m_\mu^2 x(1-x)^2}{m_\mu^2(1-x)^2 + m_{Z'}^2 x} \simeq 1.3 \times 10^{-10} \left(\frac{g_{\mu-\tau}}{10^{-4}} \right)^2 \quad (3.24)$$

となる。ここで、 $m_\mu \gg m_{Z'}$ の極限をとった。よって、 $\Delta a_\mu^{Z'}$ によって (3.22) 式の Δa_μ をキャンセルするには $g_{\mu-\tau} \simeq (3-8) \times 10^{-4}$ であればよいことが分かる。 Z' のパラメータ空間において、(3.24) 式によって $g_\mu - 2$ anomaly を 2σ 以内で解決できるような領域を図 3.3 に示す。

3.2 温度の時間発展方程式

ここでは、新たな軽い粒子として Z' が存在するときに宇宙初期の温度の時間発展がどのように記述できるかを考える。本論文では、 Z' のパラメータとして $m_{Z'} \simeq 10\text{MeV}$, $g_{\mu-\tau} \gtrsim 10^{-5}$ のような場合を考えることにする。

3.2.1 近似

初期宇宙の温度の時間発展方程式を簡易化するために、いくつかの近似を行う。まず、SM 粒子に対する近似については、2章で議論した近似 1 から 6 を引き続き用いることにする。 Z' に対しては以下の近似を適用する [7]。

近似 8. Z' は Bose-Einstein 統計に従い、 $T_{Z'} = T_{\nu_{\mu,\tau}}$ が成り立つ。

近似 9. Z' の化学ポテンシャルを無視する。

3.2.2 温度の時間発展方程式の導出

前節で述べた近似を用いて、SM に Z' が加わった場合の T_γ と T_ν の時間発展方程式を求める。まず、近似 6 と 8 より $T_{Z'} = T_\nu$ が成り立つ。よって、(2.27) 式を Z' に対して適用すると

$$\frac{d\rho_{Z'}}{dt} = \frac{\partial \rho_{Z'}}{\partial T_\nu} \frac{dT_\nu}{dt} = -3H(\rho_{Z'} + P_{Z'}) + \frac{\delta \rho_{Z'}}{\delta t} \quad (3.25)$$

となる。(2.30) 式と (3.25) 式の両辺を足すと、次の T_ν に対する方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \rho_\nu}{\partial T_\nu} + \frac{\partial \rho_{Z'}}{\partial T_\nu} \right) \frac{dT_\nu}{dt} &= -4H\rho_\nu - 3H(\rho_{Z'} + P_{Z'}) + \frac{\delta \rho_\nu}{\delta t} + \frac{\delta \rho_{Z'}}{\delta t} \\ \Leftrightarrow \frac{dT_\nu}{dt} &= - \left(\frac{\partial \rho_\nu}{\partial T_\nu} + \frac{\partial \rho_{Z'}}{\partial T_\nu} \right)^{-1} \left[4H\rho_\nu + 3H(\rho_{Z'} + P_{Z'}) - \frac{\delta \rho_\nu}{\delta t} - \frac{\delta \rho_{Z'}}{\delta t} \right] \end{aligned} \quad (3.26)$$

また、 T_γ に対する方程式は (2.23) 式を用いると

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \rho_\gamma}{\partial T_\gamma} + \frac{\partial \rho_e}{\partial T_\gamma} \right) \frac{dT_\gamma}{dt} + \frac{d\rho_\nu}{dt} + \frac{d\rho_{Z'}}{dt} &= -4H\rho_\gamma - 3H(\rho_e + P_e) - 4H\rho_\nu - 3H(\rho_{Z'} + P_{Z'}) \\ \Leftrightarrow \frac{dT_\gamma}{dt} &= - \left(\frac{\partial \rho_\gamma}{\partial T_\gamma} + \frac{\partial \rho_e}{\partial T_\gamma} \right)^{-1} \left[4H\rho_\gamma + 3H(\rho_e + P_e) + \frac{\delta \rho_\nu}{\delta t} + \frac{\delta \rho_{Z'}}{\delta t} \right] \end{aligned} \quad (3.27)$$

となる。

3.3 エネルギー遷移率の計算

前節で導いた温度の時間発展方程式を解くには、 $\delta \rho_\nu / \delta t$, $\delta \rho_{Z'} / \delta t$ を求める必要がある。(3.4) 式の Lagrangian から分かるようにニュートリノに新たな相互作用が生じるため、2章で得られた SM に対する $\delta \rho_\nu / \delta t$ の表式からは少しずれることになる。以下では、これらの計算について詳しく議論する。

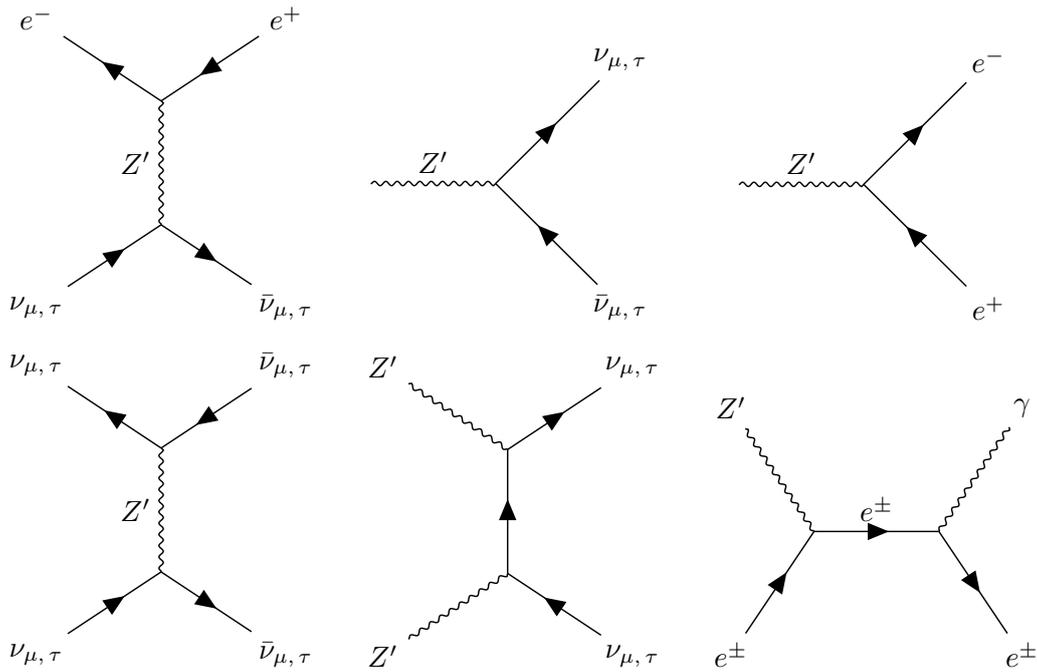


図 3.4 Z' が中間状態もしくは外線粒子として関与する反応過程. これらの反応過程はニュートリノ脱結合に影響を与える。

3.3.1 $\delta\rho_{Z'}/\delta t$ の計算

Z' が関与する反応過程として、 $Z'\gamma \leftrightarrow e^+e^-$, $Z'e^\pm \leftrightarrow \gamma e^\pm$, $Z' \leftrightarrow e^+e^-$, $Z' \leftrightarrow \nu_{\mu,\tau}\bar{\nu}_{\mu,\tau}$, $Z'\nu_{\mu,\tau} \leftrightarrow Z'\nu_{\mu,\tau}$, $Z'\bar{\nu}_{\mu,\tau} \leftrightarrow Z'\bar{\nu}_{\mu,\tau}$, $2Z' \leftrightarrow \nu_{\mu,\tau}\bar{\nu}_{\mu,\tau}$ が存在する。diagram で書くと図 3.4 のようになる。しかし、2.5 節で述べたように化学ポテンシャルを無視する近似のもとでは、同じ熱浴中で起こる反応過程に対する衝突項は効いてこない (計算すると 0 になる)。今の場合、近似 7 により Z' はニュートリノと同じ熱浴にしているため、実際に衝突項として効いてくるのは $Z'\gamma \leftrightarrow e^+e^-$, $Z'e^\pm \leftrightarrow \gamma e^\pm$, $Z' \leftrightarrow e^+e^-$ だけである。また、

$$|\mathcal{M}_{Z' \leftrightarrow e^+e^-}|^2 \sim (\epsilon g_{\mu-\tau})^2 \quad (3.28)$$

$$|\mathcal{M}_{Z'\gamma \leftrightarrow e^+e^-}|^2, |\mathcal{M}_{Z'e^\pm \leftrightarrow \gamma e^\pm}|^2 \sim \alpha(\epsilon g_{\mu-\tau})^2 \quad (3.29)$$

より、 $Z'\gamma \leftrightarrow e^+e^-$, $Z'e^\pm \leftrightarrow \gamma e^\pm$ は $Z' \leftrightarrow e^+e^-$ に比べて $\alpha \sim 1/137$ 倍だけ小さいため、本論文では $Z'\gamma \leftrightarrow e^+e^-$, $Z'e^\pm \leftrightarrow \gamma e^\pm$ の寄与は無視することにする。

以上の議論から、 $\delta\rho_{Z'}/\delta t$ に寄与してくる過程として $Z' \leftrightarrow e^+e^-$ だけを考えればよい。 $Z' \leftrightarrow e^+e^-$ に対するエネルギー遷移率は、付録 E より

$$\frac{\delta\rho_{Z'}}{\delta t} = \frac{3m_{Z'}^3}{2\pi^2} \left[T_\gamma K_2\left(\frac{m_{Z'}}{T_\gamma}\right) - T_\nu K_2\left(\frac{m_{Z'}}{T_\nu}\right) \right] \Gamma_{Z' \rightarrow e^+e^-} \quad (3.30)$$

となる。

3.3.2 $\delta\rho_\nu/\delta t$ の計算

$\nu_{\alpha'}\bar{\nu}_{\alpha'} \leftrightarrow e^-e^+$ ($\alpha' = \mu, \tau$) に対する散乱振幅は

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M} = & \begin{array}{c} e^- \\ \swarrow \\ k \\ \searrow \\ Z^0 \\ \swarrow \\ p \\ \searrow \\ \nu_{\alpha'} \end{array} \begin{array}{c} \nearrow \\ e^+ \\ \nearrow \\ k' \\ \nearrow \\ p' \\ \nearrow \\ \bar{\nu}_{\alpha'} \end{array} + \begin{array}{c} e^- \\ \swarrow \\ k \\ \searrow \\ Z' \\ \swarrow \\ p \\ \searrow \\ \nu_{\alpha'} \end{array} \begin{array}{c} \nearrow \\ e^+ \\ \nearrow \\ k' \\ \nearrow \\ p' \\ \nearrow \\ \bar{\nu}_{\alpha'} \end{array} \\
 \simeq & -i\frac{2G_F}{\sqrt{2}}\bar{u}(k)\gamma^\mu(C_V - C_A\gamma^5)v(k')\bar{v}(p')\gamma_\mu P_L u(p) + iL_{\alpha'}\frac{g_{\mu-\tau\epsilon e}}{m_{Z'}^2}\bar{u}(k)\gamma^\mu v(k')\bar{v}(p')\gamma_\mu P_L u(p)
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

となる。ここで、 G_F は Fermi 結合定数、 $L_{\alpha'}$ は

$$L_{\alpha'} = \begin{cases} 1 & (\alpha' = \mu) \\ -1 & (\alpha' = \tau) \end{cases} \tag{3.32}$$

である。(3.31) 式の 1 項目と 2 項目を比較すると、1 項目に対して

$$G_F \rightarrow -L_{\alpha'}\frac{\sqrt{2}g_{\mu-\tau\epsilon e}}{2m_{Z'}^2}, \quad C_V \rightarrow 1, \quad C_A \rightarrow 0 \tag{3.33}$$

というおきかえをすると 2 項目が得られることが分かる。この C_V , C_A に対するおきかえは $g_{\alpha'L}$, $g_{\alpha'R} \rightarrow 1/2$ に対応する。 $\nu_{\alpha'}e^\pm \leftrightarrow \nu_{\alpha'}e^\pm$ ($\alpha' = \mu, \tau$) の場合に対しても同様のおきかえが適用できるので、 Z^0 を交換する diagram からくる $\delta\rho_{\nu_{\alpha'}}$ / δt への寄与は (2.45) 式そのものであり、 Z' を交換する diagram からくる $\delta\rho_{\nu_{\alpha'}}$ / δt への寄与は (2.45) 式に対して上記のおきかえをすることで得られる。よって、 $\delta\rho_{\nu_{\alpha'}}$ / δt は

$$\frac{\delta\rho_{\nu_{\alpha'}}}{\delta t} = \left. \frac{\delta\rho_{\nu_{\alpha'}}}{\delta t} \right|_{SM} + \frac{(g_{\mu-\tau\epsilon e})^2}{\pi^5 m_{Z'}^4} F(T_\gamma, T_\nu) + L_{\alpha'} (\text{cross term}) \tag{3.34}$$

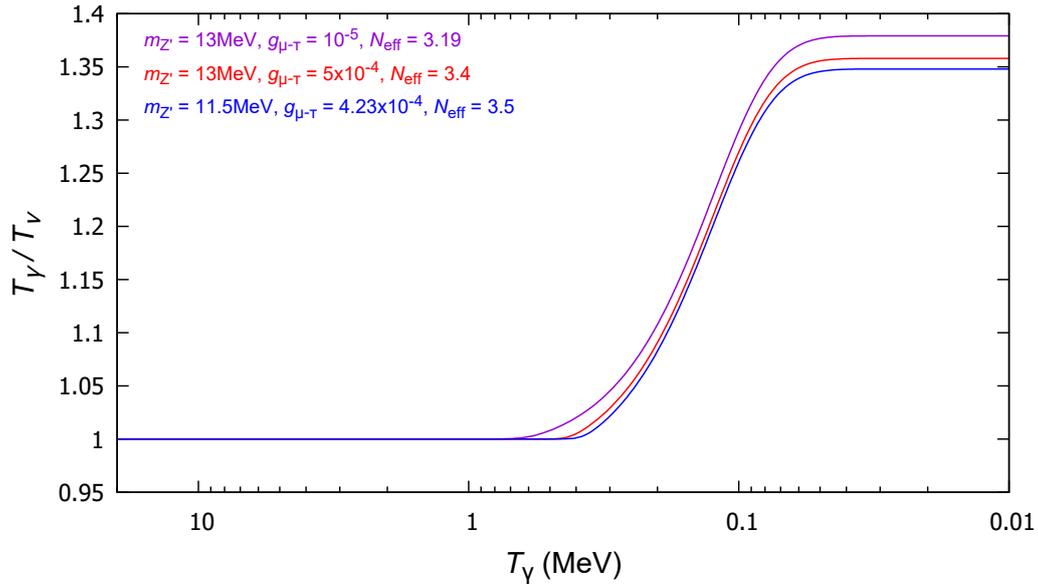
となる。ここで、(cross term) は Z^0 を交換する diagram と Z' を交換する diagram の cross term (干渉項) からくる寄与を表す。 Z' は ν_e とは結合しないので、

$$\left. \frac{\delta\rho_{\nu_e}}{\delta t} \right|_{SM} = \frac{\delta\rho_{\nu_e}}{\delta t} \tag{3.35}$$

であることに注意すると、 $\delta\rho_\nu/\delta t$ は

$$\frac{\delta\rho_\nu}{\delta t} = \sum_\alpha \left(\frac{\delta\rho_{\nu_\alpha}}{\delta t} + \frac{\delta\rho_{\bar{\nu}_\alpha}}{\delta t} \right) = 2 \sum_\alpha \frac{\delta\rho_{\nu_\alpha}}{\delta t} = \left. \frac{\delta\rho_\nu}{\delta t} \right|_{SM} + \frac{2(g_{\mu-\tau\epsilon e})^2}{\pi^5 m_{Z'}^4} F(T_\gamma, T_\nu) \tag{3.36}$$

となる。


 図 3.5 さまざまな Z' のパラメータに対する T_γ/T_ν の時間発展.

3.4 数値計算

前節で求めた $\delta\rho_\nu/\delta t$, $\delta\rho_{Z'}/\delta t$ と付録 H の熱力学公式を用いることで、(3.26) 式と (3.27) 式を数値的に解くことができる。今回、この微分方程式系を解くための数値解法として 4 次の Runge-Kutta 法を採用し、局所的な計算精度を 10^{-6} 以下に設定した (数値計算の詳細については付録 J を参照)。ただし、 $m_{Z'} \simeq 10\text{MeV}$, $g_{\mu-\tau} \gtrsim 10^{-4}$ の場合には、刻み幅がかなり小さくなり計算時間が 40 時間程度かかって大変なので、Python の odeint パッケージを用いた。初期条件として、全粒子が熱平衡状態である温度 $T_\gamma = T_\nu = 20\text{MeV}$ から解き始め、 e^\pm が対消滅し終わる温度 $T_\gamma \sim 10^{-2}\text{MeV}$ まで解いた。

図 3.5 に、(3.26) 式と (3.27) 式を解くことで得られたニュートリノの温度の時間発展を示す。この図から分かるように、SM に新しい gauge 粒子 Z' が入ったことによって、 N_{eff} の値が SM の場合と比べて少し大きくなっている。このような T_γ/T_ν の振る舞いが得られた理由は次のように考えられる。 $T_\gamma \gtrsim m_{Z'}$ では、全粒子は十分すばやく相互作用をして熱平衡状態にある。 $T_\gamma \simeq m_{Z'}/3$ となると、 Z' は $Z' \rightarrow \nu\bar{\nu}$ によってニュートリノに崩壊し始める。この反応過程により過剰になったニュートリノは $\nu\bar{\nu} \rightarrow e^+e^-$ によって電子・陽電子に転化され、欠乏した Z' は $e^+e^- \rightarrow Z'$ によって補充される。^{*2}つまり、 $Z' \rightarrow \nu\bar{\nu} \rightarrow e^+e^- \rightarrow Z'$ によって光子と電子から成る熱浴 (フォトンセクター) とニュートリノと Z' から成る熱浴 (ニュートリノセクター) の間で平衡状態が達成されている。これが図中の平坦な部分に対応する。 $T_\gamma \simeq m_e$ になると、電子・陽電子は光子へと対消滅し始める。これにより電子・陽電子の数が急激に減少するため、 $e^+e^- \rightarrow Z'$ は起こらなくなり上記の平衡状態は崩れ、フォトンセクターとニュートリノセクターは分離する。電子・陽電子のもつエントロピーは $e^+e^- \rightarrow 2\gamma$ によってほとんど光子に流入するため T_γ が上昇し、その結果 T_γ/T_ν が上昇する。この時、SM の場合と比べて T_γ/T_ν の上がり方が小さいのは、 $Z' \rightarrow \nu\bar{\nu}$ によってニュートリノにもエントロピーが流入しているためである。

^{*2} この時、典型的な電子のもつエネルギーは $m_{Z'}$ を下回っているが、電子・陽電子は大量に (ニュートリノの数と同程度) 存在するので $e^+e^- \rightarrow Z'$ は十分に起こりうる。

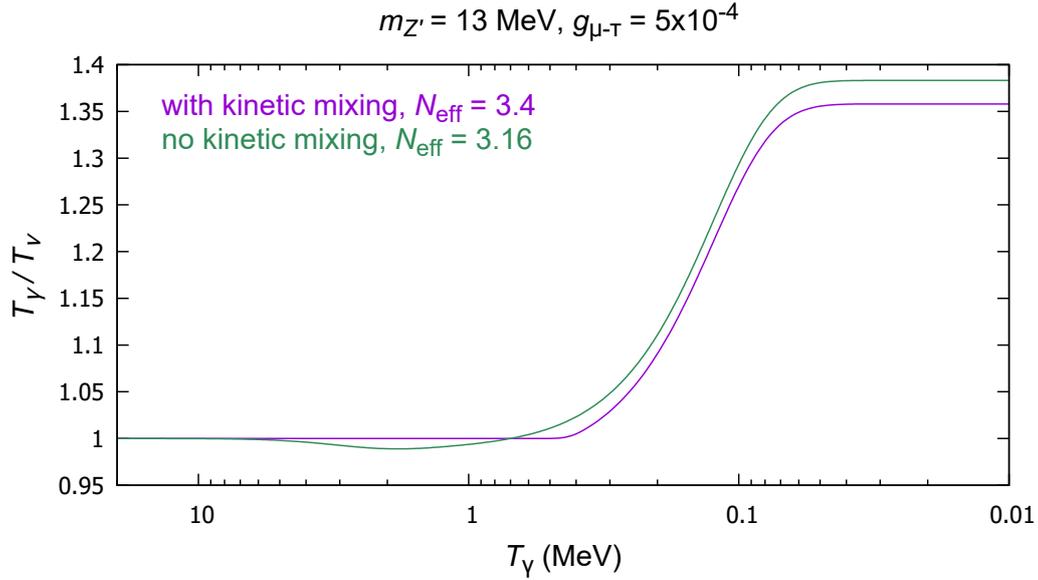


図 3.6 $\epsilon \simeq g_{\mu-\tau}/70$ (紫色) と $\epsilon = 0$ (緑色) の場合に対する T_γ/T_ν の時間発展. パラメータはどちらの場合も $m_{Z'} = 13\text{MeV}$, $g_{\mu-\tau} = 5 \times 10^{-4}$ にとっている。

図 3.6 に $\epsilon \simeq g_{\mu-\tau}/70$ (紫色) と $\epsilon = 0$ (緑色) の場合に対する T_γ/T_ν の時間発展を示す。この図から、 Z' の電子との結合はニュートリノとの結合と比べると小さいにもかかわらず、 $Z' \leftrightarrow e^+e^-$ は大きな影響を与えることが分かる。 $\epsilon = 0$ の場合、 T_γ/T_ν が一旦減少した後に上昇する理由は次のように考えられる。 $T_\gamma \simeq m_{Z'}/3$ になると、 Z' は $Z' \rightarrow \nu\bar{\nu}$ によってニュートリノに崩壊し始める。このとき $e^+e^- \rightarrow Z'$ は起きないため、上記で述べたような平衡状態が達成されることはない。また、フォトンセクターとニュートリノセクターをつなげる弱い相互作用が切れつつあるので、この崩壊過程によって Z' のもつエントロピーが一旦ニュートリノにのみ流入し T_ν が上昇する。その後、(電子の数と比べて) 過剰になったニュートリノが $\nu\bar{\nu} \rightarrow e^+e^-$ によって徐々に電子・陽電子に転化されていき、その結果 T_γ が上昇する。^{*3} $T_\gamma \simeq m_e$ になると、 $e^+e^- \rightarrow 2\gamma$ によって電子・陽電子のもつエントロピーが光子に流入するため、そこからさらに T_γ が上昇する。

図 3.7 に Z' のパラメータ空間において $g_\mu - 2$ anomaly を解決可能な領域付近の N_{eff} 等高線を示す。青色の帯は、Hubble tension を解決できるような領域を表している。この図から分かるように、 $m_{Z'} \simeq 10 - 13 \text{ MeV}$, $g_{\mu-\tau} \simeq (3.5 - 7) \times 10^{-4}$ であれば Hubble tension と $g_\mu - 2$ anomaly を同時解決することができる。

本論文では N_{eff} の制限として、次の Planck 2018+BAO+SH0ES による制限を用いることにする [40]:

$$N_{\text{eff}} = 3.27 \pm 0.15 \quad (68\% \text{CL, TT + TE + EE + lowE + lensing + BAO + SH0ES}). \quad (3.37)$$

この制限を基準にすると、図 3.7 の青い実線より左側の領域は 2σ 以上で排除される。

^{*3} (補足説明): フォトンセクターとニュートリノセクターが強く結合しているのであれば、仮にある粒子がニュートリノに崩壊したとしてもそのエントロピーはフォトンセクターにも瞬時に渡るため、系全体の温度が上昇する (T_γ/T_ν は一定である)。しかし、今回はフォトンセクターとニュートリノセクターをつなげる相互作用が切れかけていたため、それがボトルネックとなり、このような振る舞いになったのである。

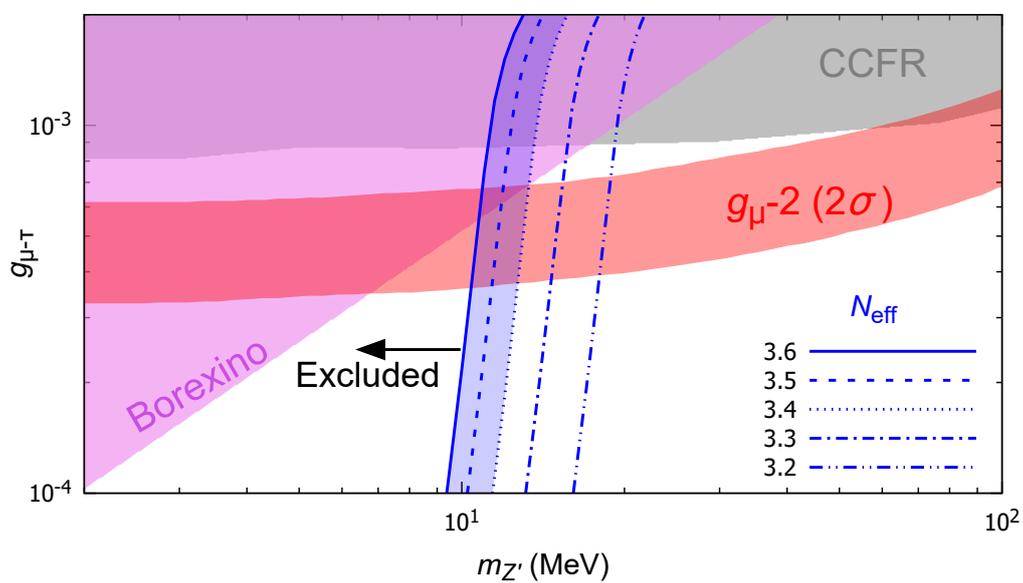


図 3.7 Z' のパラメータ空間における N_{eff} の等高線. 青色の帯は、Hubble tension を解決できるような領域を表している。赤色の帯は、 $g_\mu - 2$ anomaly を 2σ 以内で解決できるような領域を表している。暗色の領域は、Borexino 実験、CCFR 実験によって除外されている [18]。

第4章

繰りこみ可能な $L_\mu - L_\tau$ 模型における N_{eff}

この章では、ニュートリノの質量起源まで説明できる繰りこみ可能な $L_\mu - L_\tau$ 模型の場合に対して N_{eff} を計算する。まず初めに、ニュートリノの質量起源まで説明できる繰りこみ可能な $L_\mu - L_\tau$ 模型について具体例を交えながら説明する。次に先行研究 [8] に基づいて温度と化学ポテンシャルの時間発展方程式を導出する。最後にこれらの時間発展方程式を数値的に解いた結果を示し、得られた結果を物理的に考察する。また、実験による N_{eff} への制限から Z' と Majoron のパラメータ空間に対してどのような制限をつけることができるかを議論する。

4.1 繰りこみ可能な $L_\mu - L_\tau$ 模型

より厳密な $L_\mu - L_\tau$ 模型として、ニュートリノの質量起源まで説明できる繰りこみ可能な $L_\mu - L_\tau$ 模型 [14] を考える。この模型は $G_{\text{SM}} \times U(1)_{L_\mu - L_\tau} \times U(1)_L$ 対称性を持つ理論である。ここで、 G_{SM} は SM の gauge 群、 $U(1)_L$ は global なレプトン数 L の対称性である。前章の $L_\mu - L_\tau$ 模型と比べて新たに global $U(1)_L$ 対称性が加わったのは、ニュートリノの質量起源まで説明しようとする、ニュートリノのマヨラナ性などを議論する必要があるためである。

低エネルギースケールにおいて、 $U(1)_{L_\mu - L_\tau}$ gauge 対称性が自発的に破れると、 $U(1)_{L_\mu - L_\tau}$ gauge boson Z' は質量 $m_{Z'}$ を獲得する。一方で、global $U(1)_L$ 対称性が自発的に破れると南部-Goldstone boson ϕ が生じる。この ϕ は Majoron と呼ばれる。Majoron は基本的には massless であるが、元々理論が持っていた global $U(1)_L$ 対称性が近似的なもの (つまり global $U(1)_L$ 対称性がわずかに破れていた) であった場合、Majoron は小さな質量 m_ϕ を持つ。^{*1} また、Majoron は $\overline{\nu}_L^c \nu_L \phi$ の形でニュートリノと弱く相互作用する。以下では、ニュートリノの質量起源を説明する機構として最もシンプルなタイプ I シーソー機構の場合を例にこの相互作用が生じることを説明する。

	l_e, l_μ, l_τ	e_R, μ_R, τ_R	$N_{R,e}, N_{R,\mu}, N_{R,\tau}$	H	S_L	$S_{\mu-\tau}$
$L_\mu - L_\tau$	0, 1, -1	0, 1, -1	0, 1, -1	0	0	1
L	1	1	1	0	-2	0

表 4.1 $U(1)_{L_\mu - L_\tau}$ と $U(1)_L$ charge の割り当て. l_e, l_μ, l_τ は $SU(2)_W$ 2 重項、 e_R, μ_R, τ_R は $SU(2)_W$ 1 重項である。

^{*1} 逆に、Lagrangian に global $U(1)_L$ の soft braking term を加えておけば、Majoron に小さな質量を持たせることができる。

タイプ I シーソー機構では、新たに SM gauge singlet の右巻きニュートリノ $N_{R,\alpha}$ を SM に加えて模型を拡張する。これにより、Lagrangian には新たに Majorana 質量項 $M_R \overline{(N_R)^c} N_R / 2 + h.c.$ が加わる。通常のタイプ I シーソー機構では Majorana 質量 M_R は Lagrangian のパラメータとして扱われる (つまり手で加えている) が、Majorana 質量項がレプトン数の対称性 $U(1)_L$ を明らかに破っていることから、元々理論が持っていた $U(1)_L$ 対称性が自発的に破れることで N_R は M_R を獲得すると考えた方がより自然であろう。これを実現するために、レプトン数 -2 を持つ SM gauge singlet の複素スカラー場 S_L を導入する。SM でもそうであるように、この $U(1)_L$ は global な対称性だとしよう。さらに、 Z' に質量を与えるために $L_\mu - L_\tau = 1$ をもつ SM gauge singlet の複素スカラー場 $S_{\mu-\tau}$ を導入する。このとき、 $G_{SM} \times U(1)_{L_\mu-L_\tau} \times U(1)_L$ 対称性をもつ Lagrangian の中で、ニュートリノの質量に関係してくる部分は次式で与えられる。

$$\mathcal{L}_\ell = -\bar{\ell} y \tilde{H} N_R - \frac{1}{2} \overline{N_R^c} y_R N_R S_L + h.c. \quad (4.1)$$

ここで、 $y_{\alpha\beta}$, $(y_R)_{\alpha\beta}$ は Yukawa 結合定数、 ℓ_α はレプトンの $SU(2)_W$ 2 重項、 H は SM Higgs である。Yukawa 結合定数は $U(1)_{L_\mu-L_\tau}$ 対称性により次のような形に制限される。

$$y = \begin{pmatrix} y^{ee} & 0 & 0 \\ 0 & y^{\mu\mu} & 0 \\ 0 & 0 & y^{\tau\tau} \end{pmatrix}, \quad y_R = \begin{pmatrix} y_R^{ee} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_R^{\mu\tau} \\ 0 & y_R^{\mu\tau} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

このように $U(1)_{L_\mu-L_\tau}$ 対称性を課すことは、理論に含まれるパラメータの数を減らし理論の予言能力を上げることができるというメリットもある。

スカラーポテンシャルによって $SU(2)_W \times U(1)_Y \times U(1)_{L_\mu-L_\tau} \times U(1)_L$ 対称性が自発的に破れることで、スカラー場たちは 0 でない真空期待値 $\langle H \rangle = (0, v_{\text{ew}}/\sqrt{2})^T$, $\langle S_{\mu-\tau} \rangle = v_{\mu-\tau}/\sqrt{2}$, $\langle S_L \rangle = v_L/\sqrt{2}$ を持つようになる。これにより、(4.1) 式の Lagrangian からは次のような項が生じる。

$$\mathcal{L}_\ell \supset -\frac{1}{2} \overline{(\nu_L^c, N_R)^c} \begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D^T & M_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L^c \\ N_R \end{pmatrix} + h.c. \quad (4.3)$$

ここで、 $m_D = y v_{\text{ew}}/\sqrt{2}$, $M_R = y_R v_L/\sqrt{2}$, $m_{Z'} = g_{\mu-\tau} v_{\mu-\tau}$ である。 $M_R \gg m_D$ となるように v_L を選ぶと、基底変換

$$\begin{pmatrix} \nu_L^c \\ N_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} \eta^* \eta^T & \eta^* \\ -\eta^T & 1 - \frac{1}{2} \eta^T \eta^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu^c \\ N \end{pmatrix}, \quad \eta = m_D M_R^{-1} \quad (4.4)$$

により、ニュートリノの質量行列は次のように近似的にブロック対角化することができる。

$$\begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D^T & M_R \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} m_\nu & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

このとき、 $m_\nu \simeq -m_D^T \eta = -m_D M_R^{-1} m_D^T$ となり、ニュートリノの質量が非常に小さいことが説明される。

global $U(1)_L$ 対称性が自発的に破れた今、 S_L は v_L まわりのゆらぎとして記述されるわけだが、そのゆらぎのなかの 1 自由度として ϕ が含まれている。この ϕ は一般的に理論に導入したスカラー場の線形結合として記述される。また、(4.4) 式より N_R には $-\eta^T \nu$ の形でニュートリノが含まれているので、(4.1) 式の 2 項目から次のような Majoron とニュートリノの相互作用項が生じる。

$$-\frac{1}{2} \overline{N_R^c} y_R N_R S_L \supset -\frac{1}{2} \nu^c \eta y_R \eta^T \nu \phi \quad (4.6)$$

後で見るように、この相互作用は初期宇宙において大きな影響を与える。

4.2 Majoron の相互作用

前節で見たように、ニュートリノの質量起源を説明できる繰りこみ可能な $L_\mu - L_\tau$ 模型では新たな軽い粒子として Z' と Majoron ϕ が生じ、 ϕ とニュートリノの相互作用項は次式のように与えられた。

$$\mathcal{L} = g_{\alpha\beta} \bar{\nu}_{L,\alpha} \nu_{L,\beta}^c \phi + h.c. \quad (4.7)$$

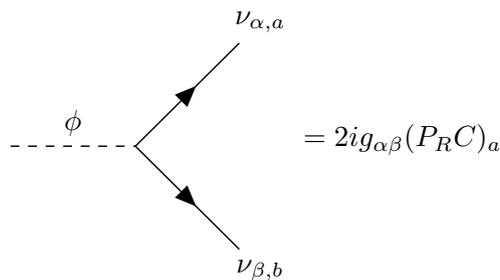
ここで、 $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$ は結合定数、 $\nu_{L,\alpha}^c$ は

$$\nu_{L,\alpha}^c \equiv (\nu_{L,\alpha})^c = C \bar{\nu}_{L,\alpha}^T \quad (4.8)$$

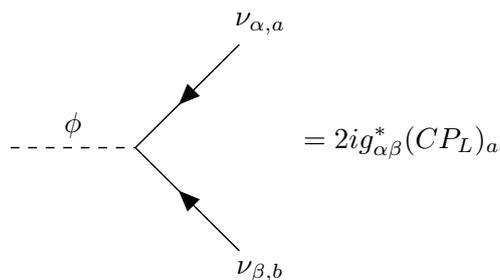
で C は荷電共役行列である。 $\nu_{L,\alpha} = P_L \nu_\alpha$ のように射影演算子を抜き出して Lagrangian を書き換えると

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= g_{\alpha\beta} \bar{\nu}_\alpha P_R C \bar{\nu}_\beta^T \phi + g_{\alpha\beta}^* \nu_\alpha^T C P_L \nu_\beta \phi \\ &= \sum_\alpha g_{\alpha\alpha} \bar{\nu}_\alpha P_R C \bar{\nu}_\alpha^T \phi + 2 \sum_{\alpha < \beta} g_{\alpha\beta} \bar{\nu}_\alpha P_R C \bar{\nu}_\beta^T \phi + \sum_\alpha g_{\alpha\alpha}^* \nu_\alpha^T C P_L \nu_\alpha \phi + 2 \sum_{\alpha < \beta} g_{\alpha\beta}^* \nu_\alpha^T C P_L \nu_\beta \phi \end{aligned} \quad (4.9)$$

となる。1つ目の等号では $C(\gamma^5)^T = \gamma^5 C$ を用いた。これにより、Feynman 則は次のようになる。



$$= 2ig_{\alpha\beta} (P_R C)_{ab} \quad (4.10)$$



$$= 2ig_{\alpha\beta}^* (C P_L)_{ab} \quad (4.11)$$

ここで、 $\alpha = \beta$ の場合でも2倍がかかるのは、同じ寄与を与えるような縮約のとり方が2通りあるためである。実際に計算する際には、スピノルの添え字 a, b については和をとるものとする。

この Feynman 則を用いて $\phi \rightarrow \nu_\alpha \nu_\beta$, $\phi \rightarrow \bar{\nu}_\alpha \bar{\nu}_\beta$ に対する崩壊幅を計算すると

$$\Gamma_{\phi \rightarrow \nu_\alpha \nu_\beta} = \Gamma_{\phi \rightarrow \bar{\nu}_\alpha \bar{\nu}_\beta} = \frac{|g_{\alpha\beta}|^2 m_\phi}{4\pi S_{\alpha\beta}} \quad (4.12)$$

となる。ここで、 $S_{\alpha\beta}$ は対称性因子で

$$S_{\alpha\beta} = \begin{cases} 2 & (\alpha = \beta) \\ 1 & (\alpha \neq \beta) \end{cases} \quad (4.13)$$

である。

4.3 温度と化学ポテンシャルの時間発展方程式

ここでは、一般に熱平衡分布関数に従うある粒子種に対する温度と化学ポテンシャルの時間発展方程式を導出する。一般に熱力学量は分布関数の運動量積分として記述されるので、これらの時間発展方程式を解くことで、全ての熱力学量のダイナミクスを決定することができる。

ある粒子種 a が熱浴と十分すばやく相互作用している場合を考える。このとき、粒子種 a は熱平衡分布関数に従う。つまり、fermion は Fermi–Dirac 分布関数、boson は Bose–Einstein 分布関数

$$f_a^{(\text{eq})} = \frac{1}{e^{(E_a - \mu_a)/T_a} \pm 1} \quad (4.14)$$

に従う。ここで、 $E_a = \sqrt{p_a^2 + m_a^2}$ である。boson の場合、分布関数の物理的意味から任意の E_a に対して $f_a \geq 0$ でなければならないので、化学ポテンシャルは

$$\mu_a \leq m_a \quad (4.15)$$

を満たさなければならない。

粒子種 a の粒子数密度 n_a とエネルギー密度 ρ_a は一般に分布関数の運動量積分として書けるので、今の場合それぞれ $n_a = n_a(T_a(t), \mu_a(t))$, $\rho_a = \rho_a(T_a(t), \mu_a(t))$ と書ける。よって、これらの時間微分は

$$\begin{pmatrix} \frac{dn_a}{dt} \\ \frac{d\rho_a}{dt} \end{pmatrix} = J_a \begin{pmatrix} \frac{dT_a}{dt} \\ \frac{d\mu_a}{dt} \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

$$J_a \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial n_a}{\partial T_a} & \frac{\partial n_a}{\partial \mu_a} \\ \frac{\partial \rho_a}{\partial T_a} & \frac{\partial \rho_a}{\partial \mu_a} \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

となる。 dT_a/dt , $d\mu_a/dt$ について解くと

$$\frac{dT_a}{dt} = \frac{1}{\det J_a} \left(\frac{\partial \rho_a}{\partial \mu_a} \frac{dn_a}{dt} - \frac{\partial n_a}{\partial \mu_a} \frac{d\rho_a}{dt} \right) \quad (4.18)$$

$$\frac{d\mu_a}{dt} = \frac{1}{\det J_a} \left(\frac{\partial n_a}{\partial T_a} \frac{d\rho_a}{dt} - \frac{\partial \rho_a}{\partial T_a} \frac{dn_a}{dt} \right) \quad (4.19)$$

となる。これらの式の dn_a/dt と $d\rho_a/dt$ に (2.17) 式と (2.20) 式を代入して整理すると、次のように粒子種 a に対する温度と化学ポテンシャルの時間発展方程式が導かれる。

$$\frac{dT_a}{dt} = -\frac{1}{\det J_a} \left[-3H \left((\rho_a + P_a) \frac{\partial n_a}{\partial \mu_a} - n_a \frac{\partial \rho_a}{\partial \mu_a} \right) + \frac{\partial n_a}{\partial \mu_a} \frac{\delta \rho_a}{\delta t} - \frac{\partial \rho_a}{\partial \mu_a} \frac{\delta n_a}{\delta t} \right] \quad (4.20)$$

$$\frac{d\mu_a}{dt} = \frac{1}{\det J_a} \left[-3H \left((\rho_a + P_a) \frac{\partial n_a}{\partial T_a} - n_a \frac{\partial \rho_a}{\partial T_a} \right) + \frac{\partial n_a}{\partial T_a} \frac{\delta \rho_a}{\delta t} - \frac{\partial \rho_a}{\partial T_a} \frac{\delta n_a}{\delta t} \right] \quad (4.21)$$

これらの式から、 T_a , μ_a の時間発展は $\delta n_a/\delta t$, $\delta \rho_a/\delta t$ によって決まることが分かる。また、 n_a , ρ_a などの熱力学量については付録 H にまとめておく。

4.4 初期宇宙の時間発展方程式

ここでは新たな軽い粒子として Z' と Majoron が存在する場合に、初期宇宙の熱的ダイナミクスがどのように記述できるかを考える。簡易化のため、本論文では以下の状況に限定して議論することにする。

1. Z' のパラメータは $g_\mu - 2$ anomaly を解決できるようなパラメータ領域の近傍 ($m_{Z'} \simeq 10\text{MeV}$, $g_{\mu-\tau} \gtrsim 10^{-4}$) にとる。
2. $|g_{\alpha\beta}| \lesssim 10^{-7}$
3. Majoron は宇宙の最初期には存在せず、 e^\pm 対消滅が終わった後 ($T_\gamma \lesssim 0.01\text{MeV}$) に生成される。

条件2により、Majoronの関与する散乱、対消滅過程による寄与は十分小さいため無視することができる。そのため、Majoronの関与する反応過程として $\phi \leftrightarrow \nu_\alpha \nu_\beta$, $\phi \leftrightarrow \bar{\nu}_\alpha \bar{\nu}_\beta$ だけを考えればよい。条件2は $|g_{\alpha\beta}| \gtrsim 10^{-7}$ の領域がビッグバン元素合成 (BBN) [10]、KamLAND-Zen [29]、SN1987A [27, 28] からの制限によって排除されていることから正当化される。また、条件1と3により e^\pm 対消滅が完了する時期より前 ($T_\gamma \gtrsim 10^{-2}\text{MeV}$) での温度の時間発展は3章の結果をそのまま用いることができる。以下では、 e^\pm 対消滅後の宇宙の時間発展方程式について考えていく。

4.4.1 近似

e^\pm 対消滅後の宇宙の時間発展方程式を簡易化するため、いくつかの近似を行う。以下に用いる近似とその妥当性について述べる。

近似1. 全ての粒子は熱平衡分布関数に従う。

(妥当性): e^\pm 対消滅後の宇宙に存在しうる粒子は、光子、ニュートリノ、Majoron、非相対論的な電子である。電子と光子は $T \simeq 0.3\text{eV}$ までは $e^- \gamma \leftrightarrow e^- \gamma$ によって運動学的平衡なので熱平衡分布関数に良い近似で従う。一方、ニュートリノとMajoronについては非平衡過程*2を含むため一般には熱平衡分布関数で近似することはできない。このような非平衡過程を含む問題を厳密に解くには(2.12)式の Boltzmann 方程式を解かなければならないが、これは硬い積分-微分方程式であるため実際に解くとなるとかなり難しい。そこで、Majoronとニュートリノが従う時間発展方程式を簡単にするために本論文では、Majoronとニュートリノは熱平衡分布関数に従うと仮定することにする。

実際、このような近似を行ったとしても、(2.12)式の Boltzmann 方程式を解いて得られた結果とほとんど変わらないことが報告されている [8]。

近似2. 衝突項積分の中では、Maxwell-Boltzmann 統計を用いる。

(妥当性): 2章の近似2と同様。

近似3. ニュートリノの質量を無視する。

(妥当性): 2章の近似3と同様。

近似4. $T_{\nu_e} = T_{\nu_\mu} = T_{\nu_\tau} \equiv T_\nu$, $\mu_{\nu_e} = \mu_{\nu_\mu} = \mu_{\nu_\tau} \equiv \mu_\nu$ が成り立つ。

(妥当性): $T \lesssim 3\text{MeV}$ ではニュートリノ振動の効果が効いてくる。2章でも述べたように、ニュートリノ振動は各フレーバーに対するニュートリノの分布関数を全て同じにするようにはたらくため、近似1を用いると

$$\frac{1}{e^{(p-\mu_{\nu_\alpha})/T_{\nu_\alpha}} + 1} \simeq \frac{1}{e^{(p-\mu_{\nu_\beta})/T_{\nu_\beta}} + 1}$$

*2 具体的には、Majoronの数がまだそれほどいない時に起こる $\nu_\alpha \nu_\beta \rightarrow \phi$ である。なぜなら、Majoronの数が少ないうちはこれの逆過程 $\phi \rightarrow \nu_\alpha \nu_\beta$ は起こらないからである。

となる。よって、 $T_{\nu_\alpha} = T_{\nu_\beta}$, $\mu_{\nu_\alpha} = \mu_{\nu_\beta}$ は良い近似で成立する。

4.4.2 時間発展方程式の導出

前節で述べた近似と Boltzmann 方程式を用いて、 e^\pm 対消滅後の宇宙の時間発展方程式を導出する。まず、4.3 節で見たように近似 1 が適用できる場合には粒子種 a の温度と化学ポテンシャルの時間発展方程式は (4.20) 式、(4.21) 式で与えられる。近似 4 より $T_{\nu_\alpha} = T_{\bar{\nu}_\alpha} = T_\nu$, $\mu_{\nu_\alpha} = \mu_{\bar{\nu}_\alpha} = \mu_\nu$ が成り立つので*3、ニュートリノと反ニュートリノに対して (4.20) 式を用いると、

$$\frac{dT_\nu}{dt} = -\frac{1}{\det J_{\nu_\alpha}} \left[-3H \left((\rho_{\nu_\alpha} + P_{\nu_\alpha}) \frac{\partial n_{\nu_\alpha}}{\partial \mu_\nu} - n_{\nu_\alpha} \frac{\partial \rho_{\nu_\alpha}}{\partial \mu_\nu} \right) + \frac{\partial n_{\nu_\alpha}}{\partial \mu_\nu} \frac{\delta \rho_{\nu_\alpha}}{\delta t} - \frac{\partial \rho_{\nu_\alpha}}{\partial \mu_\nu} \frac{\delta n_{\nu_\alpha}}{\delta t} \right] \quad (4.22)$$

$$\frac{dT_\nu}{dt} = -\frac{1}{\det J_{\bar{\nu}_\alpha}} \left[-3H \left((\rho_{\bar{\nu}_\alpha} + P_{\bar{\nu}_\alpha}) \frac{\partial n_{\bar{\nu}_\alpha}}{\partial \mu_\nu} - n_{\bar{\nu}_\alpha} \frac{\partial \rho_{\bar{\nu}_\alpha}}{\partial \mu_\nu} \right) + \frac{\partial n_{\bar{\nu}_\alpha}}{\partial \mu_\nu} \frac{\delta \rho_{\bar{\nu}_\alpha}}{\delta t} - \frac{\partial \rho_{\bar{\nu}_\alpha}}{\partial \mu_\nu} \frac{\delta n_{\bar{\nu}_\alpha}}{\delta t} \right] \quad (4.23)$$

となる。ここで、近似 4 より $\{\nu_\alpha\}$, $\{\bar{\nu}_\alpha\}$ に対する各熱力学量が全て同じであることから、全ニュートリノに対する粒子数密度 n_ν 、エネルギー密度 ρ_ν 、圧力 P_ν を用いて

$$n_{\nu_\alpha} = n_{\bar{\nu}_\alpha} = \frac{1}{6} n_\nu \quad (4.24)$$

$$\rho_{\nu_\alpha} = \rho_{\bar{\nu}_\alpha} = \frac{1}{6} \rho_\nu \quad (4.25)$$

$$P_{\nu_\alpha} = P_{\bar{\nu}_\alpha} = \frac{1}{6} P_\nu \quad (4.26)$$

と書くことができる。(4.22) 式と (4.23) 式の両辺を足して全フレーバーにわたって和をとると、次の T_ν に対する時間発展方程式が得られる。

$$\frac{dT_\nu}{dt} = -\frac{1}{\det J_\nu} \left[-3H \left((\rho_\nu + P_\nu) \frac{\partial n_\nu}{\partial \mu_\nu} - n_\nu \frac{\partial \rho_\nu}{\partial \mu_\nu} \right) + \frac{\partial n_\nu}{\partial \mu_\nu} \frac{\delta \rho_\nu}{\delta t} - \frac{\partial \rho_\nu}{\partial \mu_\nu} \frac{\delta n_\nu}{\delta t} \right] \quad (4.27)$$

ここで、

$$\frac{\delta n_\nu}{\delta t} = \sum_\alpha \left(\frac{\delta n_{\nu_\alpha}}{\delta t} + \frac{\delta n_{\bar{\nu}_\alpha}}{\delta t} \right) \quad (4.28)$$

$$\frac{\delta \rho_\nu}{\delta t} = \sum_\alpha \left(\frac{\delta \rho_{\nu_\alpha}}{\delta t} + \frac{\delta \rho_{\bar{\nu}_\alpha}}{\delta t} \right) \quad (4.29)$$

である。また、同様の計算から次の μ_ν に対する時間発展方程式が得られる。

$$\frac{d\mu_\nu}{dt} = \frac{1}{\det J_\nu} \left[-3H \left((\rho_\nu + P_\nu) \frac{\partial n_\nu}{\partial T_\nu} - n_\nu \frac{\partial \rho_\nu}{\partial T_\nu} \right) + \frac{\partial n_\nu}{\partial T_\nu} \frac{\delta \rho_\nu}{\delta t} - \frac{\partial \rho_\nu}{\partial T_\nu} \frac{\delta n_\nu}{\delta t} \right] \quad (4.30)$$

Majoron については、(4.20) 式と (4.21) 式から

$$\frac{dT_\phi}{dt} = -\frac{1}{\det J_\phi} \left[-3H \left((\rho_\phi + P_\phi) \frac{\partial n_\phi}{\partial \mu_\phi} - n_\phi \frac{\partial \rho_\phi}{\partial \mu_\phi} \right) + \frac{\partial n_\phi}{\partial \mu_\phi} \frac{\delta \rho_\phi}{\delta t} - \frac{\partial \rho_\phi}{\partial \mu_\phi} \frac{\delta n_\phi}{\delta t} \right] \quad (4.31)$$

$$\frac{d\mu_\phi}{dt} = \frac{1}{\det J_\phi} \left[-3H \left((\rho_\phi + P_\phi) \frac{\partial n_\phi}{\partial T_\phi} - n_\phi \frac{\partial \rho_\phi}{\partial T_\phi} \right) + \frac{\partial n_\phi}{\partial T_\phi} \frac{\delta \rho_\phi}{\delta t} - \frac{\partial \rho_\phi}{\partial T_\phi} \frac{\delta n_\phi}{\delta t} \right] \quad (4.32)$$

*3 本論文では宇宙最初期におけるレプトン数の非対称性を考えず、CP を破るような相互作用も存在しないため、 $T_{\nu_\alpha} = T_{\bar{\nu}_\alpha}$, $\mu_{\nu_\alpha} = \mu_{\bar{\nu}_\alpha}$ が成り立つ。

となる。光子については、(2.23) 式より、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_\gamma}{\partial T_\gamma} \frac{dT_\gamma}{dt} + \frac{d\rho_\nu}{dt} + \frac{d\rho_\phi}{dt} &= -4H\rho_\gamma - 4H\rho_\nu - 3H(\rho_\phi + P_\phi) \\ \Leftrightarrow \frac{dT_\gamma}{dt} &= -\left(\frac{\partial \rho_\gamma}{\partial T_\gamma}\right)^{-1} \left[4H\rho_\gamma + \frac{\delta\rho_\nu}{\delta t} + \frac{\delta\rho_\phi}{\delta t}\right] \end{aligned} \quad (4.33)$$

となる。

4.5 粒子数とエネルギー遷移率の計算

前節で導いた温度と化学ポテンシャルの時間発展方程式を解くには、粒子数とエネルギー遷移率を求める必要がある。付録 E より、 $\phi \leftrightarrow \nu_\alpha \nu_\beta$, $\phi \leftrightarrow \bar{\nu}_\alpha \bar{\nu}_\beta$ に対する ϕ の粒子数遷移率とエネルギー遷移率は

$$\left.\frac{\delta n_\phi}{\delta t}\right|_{\phi \leftrightarrow \nu_\alpha \nu_\beta} = \left.\frac{\delta n_\phi}{\delta t}\right|_{\phi \leftrightarrow \bar{\nu}_\alpha \bar{\nu}_\beta} = \frac{m_\phi^2 \Gamma_{\phi \rightarrow \nu_\alpha \nu_\beta}}{2\pi^2} \left[T_\nu e^{2\mu_\nu/T_\nu} K_1\left(\frac{m_\phi}{T_\nu}\right) - T_\phi e^{\mu_\phi/T_\phi} K_1\left(\frac{m_\phi}{T_\phi}\right) \right] \quad (4.34)$$

$$\left.\frac{\delta \rho_\phi}{\delta t}\right|_{\phi \leftrightarrow \nu_\alpha \nu_\beta} = \left.\frac{\delta \rho_\phi}{\delta t}\right|_{\phi \leftrightarrow \bar{\nu}_\alpha \bar{\nu}_\beta} = \frac{m_\phi^3 \Gamma_{\phi \rightarrow \nu_\alpha \nu_\beta}}{2\pi^2} \left[T_\nu e^{2\mu_\nu/T_\nu} K_2\left(\frac{m_\phi}{T_\nu}\right) - T_\phi e^{\mu_\phi/T_\phi} K_2\left(\frac{m_\phi}{T_\phi}\right) \right] \quad (4.35)$$

となる。実際には ϕ の関与する反応過程として散乱・対消滅過程も存在するが、 $|g_{\alpha\beta}| \lesssim 10^{-7}$ より (4.4 節参照) これらの寄与は $\phi \leftrightarrow \nu_\alpha \nu_\beta$, $\phi \leftrightarrow \bar{\nu}_\alpha \bar{\nu}_\beta$ と比べて十分小さいので無視することにする。このとき、 ϕ の全ての反応過程に対する粒子数遷移率は

$$\begin{aligned} \frac{\delta n_\phi}{\delta t} &= \left(\sum_{\alpha, \beta} \delta_{\alpha\beta} + \sum_{\alpha < \beta} \right) \left(\left.\frac{\delta n_\phi}{\delta t}\right|_{\phi \leftrightarrow \nu_\alpha \nu_\beta} + \left.\frac{\delta n_\phi}{\delta t}\right|_{\phi \leftrightarrow \bar{\nu}_\alpha \bar{\nu}_\beta} \right) \\ &= \frac{m_\phi^2 \Gamma_\phi}{2\pi^2} \left[T_\nu e^{2\mu_\nu/T_\nu} K_1\left(\frac{m_\phi}{T_\nu}\right) - T_\phi e^{\mu_\phi/T_\phi} K_1\left(\frac{m_\phi}{T_\phi}\right) \right] \end{aligned} \quad (4.36)$$

となる。ここで、 Γ_ϕ は ϕ の全崩壊幅で

$$\begin{aligned} \Gamma_\phi &\equiv \left(\sum_{\alpha, \beta} \delta_{\alpha\beta} + \sum_{\alpha < \beta} \right) (\Gamma_{\phi \rightarrow \nu_\alpha \nu_\beta} + \Gamma_{\phi \rightarrow \bar{\nu}_\alpha \bar{\nu}_\beta}) = 2 \left(\sum_{\alpha, \beta} \delta_{\alpha\beta} + \sum_{\alpha < \beta} \right) \frac{|g_{\alpha\beta}|^2 m_\phi}{4\pi S_{\alpha\beta}} \\ &= \frac{m_\phi}{2\pi} \left(\sum_{\alpha} \frac{|g_{\alpha\alpha}|^2}{2} + \sum_{\alpha < \beta} |g_{\alpha\beta}|^2 \right) = \frac{m_\phi}{4\pi} \sum_{\alpha, \beta} |g_{\alpha\beta}|^2 \\ &= \frac{m_\phi}{4\pi} \text{tr}(g^\dagger g) \\ &\equiv \frac{m_\phi \lambda^2}{4\pi} \end{aligned} \quad (4.37)$$

である。同様にして、 ϕ の全ての反応過程に対するエネルギー遷移率は

$$\begin{aligned} \frac{\delta \rho_\phi}{\delta t} &= \left(\sum_{\alpha, \beta} \delta_{\alpha\beta} + \sum_{\alpha < \beta} \right) \left(\left.\frac{\delta \rho_\phi}{\delta t}\right|_{\phi \leftrightarrow \nu_\alpha \nu_\beta} + \left.\frac{\delta \rho_\phi}{\delta t}\right|_{\phi \leftrightarrow \bar{\nu}_\alpha \bar{\nu}_\beta} \right) \\ &= \frac{m_\phi^3 \Gamma_\phi}{2\pi^2} \left[T_\nu e^{2\mu_\nu/T_\nu} K_2\left(\frac{m_\phi}{T_\nu}\right) - T_\phi e^{\mu_\phi/T_\phi} K_2\left(\frac{m_\phi}{T_\phi}\right) \right] \end{aligned} \quad (4.38)$$

となる。

$\delta n_\nu/\delta t$, $\delta \rho_\nu/\delta t$ は粒子数とエネルギー保存則から求められる。今の場合、近似 3 によりニュートリノの質量は無視しているため、物理はニュートリノの基底の取り方に依らない。これは、 Γ_ϕ が $\text{tr}(g^\dagger g)$ の

形で $g_{\alpha\beta}$ に依存していることから理解できる。よって、一般性を失うことなく $g_{\alpha\beta}$ は対角成分しかないとすることができる。この時、粒子数保存則から

$$\left. \frac{\delta n_{\nu_\alpha}}{\delta t} \right|_{\phi \leftrightarrow \nu_\alpha \nu_\alpha} = -2 \left. \frac{\delta n_\phi}{\delta t} \right|_{\phi \leftrightarrow \nu_\alpha \nu_\alpha} \quad (4.39)$$

が成り立つ。よって、 $\delta n_\nu / \delta t$ は

$$\begin{aligned} \frac{\delta n_\nu}{\delta t} &= \sum_\alpha \left(\left. \frac{\delta n_{\nu_\alpha}}{\delta t} \right|_{\phi \leftrightarrow \nu_\alpha \nu_\alpha} + \left. \frac{\delta n_{\bar{\nu}_\alpha}}{\delta t} \right|_{\phi \leftrightarrow \bar{\nu}_\alpha \bar{\nu}_\alpha} \right) \\ &= -2 \sum_\alpha \left. \frac{\delta n_\phi}{\delta t} \right|_{\phi \leftrightarrow \nu_\alpha \nu_\alpha} \times 2 \\ &= -2 \frac{\delta n_\phi}{\delta t} \end{aligned} \quad (4.40)$$

となる。また、エネルギー保存則より

$$\left. \frac{\delta \rho_{\nu_\alpha}}{\delta t} \right|_{\phi \leftrightarrow \nu_\alpha \nu_\alpha} = - \left. \frac{\delta \rho_\phi}{\delta t} \right|_{\phi \leftrightarrow \nu_\alpha \nu_\alpha} \quad (4.41)$$

が成り立つので、 $\delta \rho_\nu / \delta t$ は

$$\begin{aligned} \frac{\delta \rho_\nu}{\delta t} &= \sum_\alpha \left(\left. \frac{\delta \rho_{\nu_\alpha}}{\delta t} \right|_{\phi \leftrightarrow \nu_\alpha \nu_\alpha} + \left. \frac{\delta \rho_{\bar{\nu}_\alpha}}{\delta t} \right|_{\phi \leftrightarrow \bar{\nu}_\alpha \bar{\nu}_\alpha} \right) \\ &= - \sum_\alpha \left. \frac{\delta \rho_\phi}{\delta t} \right|_{\phi \leftrightarrow \nu_\alpha \nu_\alpha} \times 2 \\ &= - \frac{\delta \rho_\phi}{\delta t} \end{aligned} \quad (4.42)$$

となる。これにより T_ν に対する時間発展方程式 (4.33) 式は

$$\frac{dT_\nu}{dt} = -HT_\nu \quad (4.43)$$

となる。

4.6 有効反応率

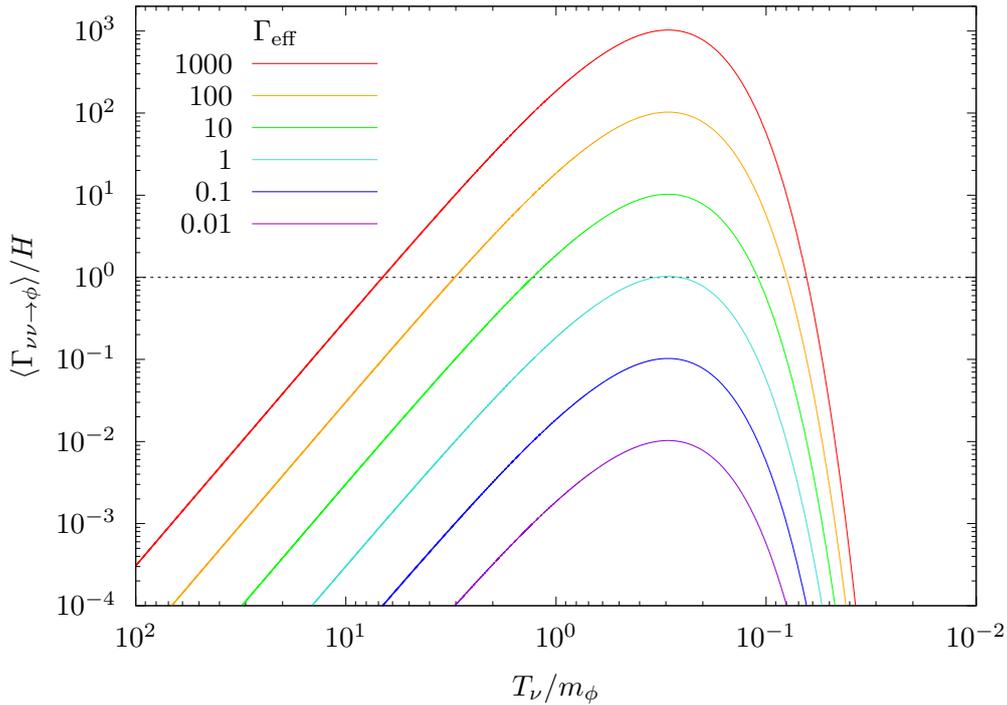
数値計算に入る前にここでは、Majoron の生成過程 $\nu\nu \rightarrow \phi$ が宇宙のどの時期に効いてくるかを調べておく。そのためには、 $\nu\nu \rightarrow \phi$ に対する反応率の熱平均 $\langle \Gamma_{\nu\nu \rightarrow \phi} \rangle$ と Hubble rate H との比を計算すればよい。 $\langle \Gamma_{\nu\nu \rightarrow \phi} \rangle$ は付録 I より次式で与えられる。

$$\langle \Gamma_{\nu\nu \rightarrow \phi} \rangle = \frac{1}{n_\nu} \left. \frac{\delta n_\phi}{\delta t} \right|_{\nu\nu \rightarrow \phi} = \frac{\Gamma_\phi}{12} \left(\frac{m_\phi}{T_\nu} \right)^2 K_1 \left(\frac{m_\phi}{T_\nu} \right) \quad (4.44)$$

また、放射優勢期では Hubble rate は

$$H(T_\nu) \simeq 1.66 g_\star^{1/2} \frac{T_\nu^2}{m_{\text{Pl}}} = H(T_\nu = m_\phi/3) \frac{9T_\nu^2}{m_\phi^2} \quad (4.45)$$

で与えられる。ここで、 g_\star は有効自由度である。これにより、 $\langle \Gamma_{\nu\nu \rightarrow \phi} \rangle / H$ の T_ν 依存性をパラメータごとに調べるることができる。しかし、 $m_\phi - \lambda$ のパラメータ領域全体にわたって $\langle \Gamma_{\nu\nu \rightarrow \phi} \rangle / H$ の振る舞いを


 図 4.1 $\nu\nu \rightarrow \phi$ に対する反応率の熱平均 $\langle \Gamma_{\nu\nu \rightarrow \phi} \rangle$ と Hubble rate H との比の温度依存性.

調べるのは大変なうえ、見通しもあまりよくない。そこで、 $\langle \Gamma_{\nu\nu \rightarrow \phi} \rangle / H$ のパラメータ依存性を見やすくするために有効反応率 Γ_{eff} を定義する。

$$\Gamma_{\text{eff}} \equiv \left. \frac{\langle \Gamma_{\nu\nu \rightarrow \phi} \rangle}{H} \right|_{T_\nu = m_\phi/3} = \frac{3K_1(3)}{4} \frac{\Gamma_\phi}{H(T_\nu = m_\phi/3)} \simeq \left(\frac{\lambda}{4 \times 10^{-12}} \right)^2 \left(\frac{\text{keV}}{m_\phi} \right) \quad (4.46)$$

ここで、 $K_1(3) \simeq 0.04$ である。これにより、 $\langle \Gamma_{\nu\nu \rightarrow \phi} \rangle / H$ は Γ_{eff} を用いて

$$\frac{\langle \Gamma_{\nu\nu \rightarrow \phi} \rangle}{H} = \frac{1}{81K_1(3)} \Gamma_{\text{eff}} \left(\frac{m_\phi}{T_\nu} \right)^4 K_1 \left(\frac{m_\phi}{T_\nu} \right) \quad (4.47)$$

と書くことができる。図 4.1 に様々な Γ_{eff} に対して、 $\langle \Gamma_{\nu\nu \rightarrow \phi} \rangle / H$ を T_ν / m_ϕ の関数としてプロットしたものを示す。この図から分かるように、 $T_\nu \gg m_\phi$ では $\nu\nu \rightarrow \phi$ はほとんど起こらない。これは、 $T_\nu \gg m_\phi$ では m_ϕ 程度のエネルギーをもつニュートリノの数が少ないためである。^{*4} 宇宙の温度が冷えてきて $T_\nu \gtrsim m_\phi$ となると、 m_ϕ 程度のエネルギーをもつニュートリノの数が増えてくるため、 $\nu\nu \rightarrow \phi$ によって Majoron が生成され始める。 $E_\nu \lesssim m_\phi \simeq 3T_\nu$ 、つまり $T_\nu \lesssim m_\phi/3$ になると運動学的に Majoron を生成できなくなってくるため、 $T_\nu \simeq m_\phi/3$ あたりで Majoron の生成率が増加から減少へと変わる。 $\langle \Gamma_{\nu\nu \rightarrow \phi} \rangle / H$ が $T_\nu \simeq m_\phi/3$ で極大となるのはこのためであり、この極大値が Γ_{eff} である。よって、 $\Gamma_{\text{eff}} \gtrsim 1$ ならば、Majoron とニュートリノは宇宙初期のある有限区間で熱平衡化することを意味する。

^{*4} $\nu\nu \rightarrow \phi$ は 2 つの ν のエネルギーの和が m_ϕ と等しくなった時にのみ起こるため、 m_ϕ 程度のエネルギーをもつニュートリノがたぐさいないとほとんど起こらないのである。

4.7 数値計算

4.5 節の結果を用いることで、(4.27) 式、(4.30)–(4.33) 式の微分方程式系を数値的に解くことができる。以下では、この微分方程式系をどのような初期条件とパラメータに対して解くべきかを議論し、最後に数値計算の結果を示す。

4.7.1 初期条件と積分範囲

Majoron がほとんど存在しない温度から解くことを考える。^{*5} $\langle \Gamma_{\nu\nu\rightarrow\phi} \rangle / H \lesssim 1$ であったとしても、ニュートリノの数が多いため $\nu\nu \rightarrow \phi$ により Majoron は多少なりとも生成されうる。そのため、Majoron がほとんど存在しないと確信するには $\langle \Gamma_{\nu\nu\rightarrow\phi} \rangle / H \ll 1$ でなければならない。 $\langle \Gamma_{\nu\nu\rightarrow\phi} \rangle / H < 10^{-4}$ と課すと、(4.47) 式より

$$\begin{aligned} \frac{\langle \Gamma_{\nu\nu\rightarrow\phi} \rangle}{H} &= \frac{1}{81K_1(3)} \Gamma_{\text{eff}} \left(\frac{m_\phi}{T_\nu} \right)^4 K_1 \left(\frac{m_\phi}{T_\nu} \right) \simeq \frac{1}{81K_1(3)} \Gamma_{\text{eff}} \left(\frac{m_\phi}{T_\nu} \right)^3 < 10^{-4} \\ \Leftrightarrow \frac{T_\nu}{m_\phi} &> \left(\frac{\Gamma_{\text{eff}}}{81K_1(3) \times 10^{-4}} \right)^{1/3} \simeq 10 \Gamma_{\text{eff}}^{1/3} \end{aligned} \quad (4.48)$$

のように T_ν に対する条件式が得られる。ここで、今見たいのは $T_\nu/m_\phi > 1$ (図 4.1 でいうピークの左側) なので、 $K_1(x) \sim 1/x$ (for $x < 1$) と近似できることを用いた。 Γ_{eff} の動かす範囲として $\Gamma_{\text{eff}} \leq 10^3$ とすると、 $T_\nu \gtrsim 100m_\phi$ であれば問題ないと考えられる。そこで、 T_ν の初期条件として

$$T_\nu = 100m_\phi \quad (4.49)$$

のようにとることにする。

T_γ/T_ν の初期条件については、3 章の数値計算によって得られた e^\pm 対消滅後 ($T_\gamma \sim 10^{-2}\text{MeV}$) の T_γ/T_ν の値を初期条件として用いる。ここで、 T_ν の初期値 $100m_\phi$ が $100m_\phi \gg 10^{-2}\text{MeV}$ のような場合でも、この初期条件を用いて問題ない。なぜなら、今解くべき微分方程式系の解として、 e^\pm 対消滅前に粒子が崩壊したり対消滅するようなものはないため、 $T_\nu/T_\gamma = \text{const.}$ (for $T_\gamma \gg 10^{-2}\text{MeV}$) が成り立つからである。よって、 $100m_\phi \gg 10^{-2}\text{MeV}$ のような場合でも e^\pm 対消滅後の T_γ/T_ν の値を初期条件として解くのは適切である。ただし、この微分方程式系は e^\pm 対消滅後の宇宙に対して正しくふるまうように作ったものなので、 $T_\gamma \simeq 20\text{MeV}$ から Majoron が崩壊しきるまでの全体像を見たい場合には、この微分方程式系を解くことで得られた $T_\gamma \gtrsim 10^{-2}\text{MeV}$ に対する解は捨てて、残りの $T_\gamma \lesssim 10^{-2}\text{MeV}$ に対する解と 3 章で得られた解 (図 3.5) を滑らかにつなぐものとする。

残りの初期条件については、 $\rho_\phi/\rho_\nu < 10^{-12}$ を満たすように決める。 $T_\nu = 100m_\phi$ では Majoron は十

^{*5} Majoron が多少存在しうるようなところでは、どの程度存在するのか分からないため初期条件を設定しようがないからである。

分相対論的なので massless 粒子として扱くと、 ρ_ϕ/ρ_ν は

$$\begin{aligned} \frac{\rho_\phi}{\rho_\nu} &= \frac{1}{6} \left(\frac{T_\phi}{T_\nu} \right)^4 \frac{\text{Li}_4(e^{\mu_\phi/T_\phi})}{-\text{Li}_4(-e^{\mu_\nu/T_\nu})} \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{T_\phi}{T_\nu} \right)^4 \frac{\zeta(4) \left[1 + a \frac{\mu_\phi}{T_\phi} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\mu_\phi}{T_\phi} \right)^2 \right) \right]}{\frac{7}{8} \zeta(4) \left[1 + \frac{6}{7} a \frac{\mu_\nu}{T_\nu} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\mu_\nu}{T_\nu} \right)^2 \right) \right]} \\ &= \frac{4}{21} \left(\frac{T_\phi}{T_\nu} \right)^4 \left(1 + a \frac{\mu_\phi}{T_\phi} - \frac{6}{7} a \frac{\mu_\nu}{T_\nu} + \dots \right) \end{aligned} \quad (4.50)$$

と書ける。ここで、 $a \equiv \zeta(3)/\zeta(4) \sim 1.2/1.08 \sim 1.1$ 、 $\text{Li}_s(z)$ は多重対数関数である (付録 A 参照)。よって、 $\rho_\phi/\rho_\nu < 10^{-12}$ を満たすには

$$\frac{T_\phi}{T_\nu} \lesssim 10^{-3}, \quad \left| \frac{\mu_\phi}{T_\phi} \right| < 1, \quad \left| \frac{\mu_\nu}{T_\nu} \right| < 1 \quad (4.51)$$

でなければならない。これにより、 μ_ϕ に対する条件は

$$\left| \frac{\mu_\phi}{T_\nu} \right| = \left| \frac{\mu_\phi}{T_\phi} \right| \frac{T_\phi}{T_\nu} < \frac{T_\phi}{T_\nu} \lesssim 10^{-3} \quad (4.52)$$

となる。また、Majoron は boson なので (4.15) 式より

$$\frac{\mu_\phi}{T_\nu} < \frac{m_\phi}{T_\nu} = 10^{-2} \quad (4.53)$$

を満たさなければならない。ここで、Majoron がほとんど存在しないことから Bose–Einstein 凝縮は起こりえないので等号は外した。(4.51) 式から (4.53) 式の条件を満たすものとして、本論文では [8] に従い

$$\frac{T_\phi}{T_\nu} = 10^{-3}, \quad \frac{\mu_\nu}{T_\nu} = -10^{-4}, \quad \frac{\mu_\phi}{T_\nu} = -10^{-5} \quad (4.54)$$

のようにとることとする。^{*6}

微分方程式を解く範囲については、生成された Majoron が完全に崩壊してほとんどいなくなる $\rho_\phi/\rho_\nu < 10^{-6}$ となるまで解くこととする。^{*7}

4.7.2 パラメータ

先ほども述べたように、 e^\pm 対消滅が終わった後 ($T_\gamma \lesssim 10^{-2} \text{MeV}$) に Majoron が生成されるような場合に対して計算をする。これを実現するためには、次の条件を満たすようなパラメータでなければならない。

- Majoron の生成が最も活発になるのが e^\pm 対消滅後である。
- e^\pm 対消滅が完了したあたり ($T_\gamma \sim 10^{-2} \text{MeV}$) では Majoron の生成反応はまだそこまで効いてこない。

^{*6} ここで行われている議論では化学ポテンシャルの初期値をマイナス符号に選ぶ理由までは説明できないが、いくつかの場合に対しては最終的な結果が化学ポテンシャルの初期値の符号の選び方にほとんど依らないことを確認した。

^{*7} $\Gamma_{\text{eff}} < 0.1$ の場合、Majoron が崩壊しきるのに時間がかかるため $\rho_\phi/\rho_\nu < 10^{-7}$ となるまで解いた。

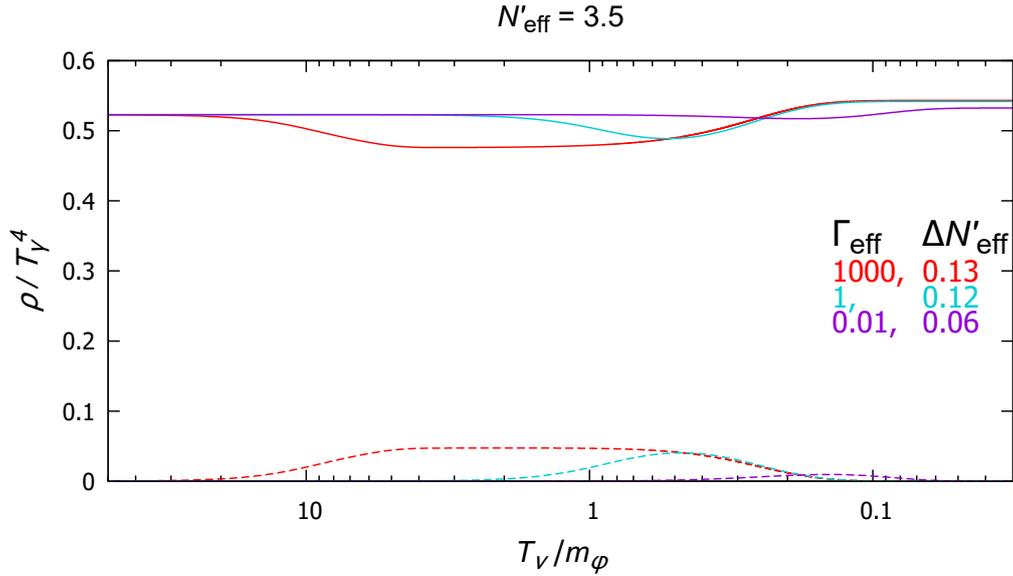


図 4.2 $N'_{\text{eff}} = 3.5$ の場合に対するニュートリノ (実線) と Majoron (点線) のエネルギー密度の時間発展.

図 4.1 を参考にして、これらの条件を数式で表すと

$$\left\{ \begin{array}{l} m_\phi/3 < 10^{-2}\text{MeV} \\ \left. \frac{\langle \Gamma_{\nu\nu\rightarrow\phi} \rangle}{H} \right|_{T_\nu=10^{-2}\text{MeV}} < 1 \end{array} \right. \quad (4.55)$$

となる。(4.46) 式と (4.47) 式を用いて、上式の 2 つ目の式を λ について解くと

$$\lambda^2 < 16 \cdot 17\pi \frac{H(T_\nu = m_\phi/3)}{m_\phi} \left[\left(\frac{m_\phi}{T_\nu} \right)^4 K_1 \left(\frac{m_\phi}{T_\nu} \right) \right]^{-1} \Big|_{T_\nu=10^{-2}\text{MeV}} \quad (4.56)$$

となる。

4.7.3 結果

ここでは、4.7.1 節で設定した初期条件を用いて、(4.27) 式、(4.30)–(4.33) 式の微分方程式系を解いた結果を示す。今回、この微分方程式系を解くための数値解法として 4 次の Runge–Kutta 法を採用し、局所的な計算精度を 10^{-6} 以下に設定して解いた (数値計算の詳細については J 参照)。

本来、ニュートリノの有効数は $T_\gamma \ll \min[m_e, m_\phi] = m_\phi$ において定義される量であるが、今回は e^\pm 対消滅が完了した時を基準としてその前と後で別々に扱っているため、 N_{eff} を次のように書いておくと便利である。

$$N_{\text{eff}} = N'_{\text{eff}} + \Delta N'_{\text{eff}} \quad (4.57)$$

ここで、 N'_{eff} は e^\pm 対消滅が完了した後の $T_\nu/T_\gamma = \text{const.}$ となった地点でのニュートリノの有効数を表し、次のように定義される。

$$N'_{\text{eff}} \equiv 3 \left(\frac{11}{4} \right)^{4/3} \left(\frac{T_\nu}{T_\gamma} \right)^4 \Big|_{T_\gamma \simeq 10^{-2}\text{MeV}} \quad (4.58)$$

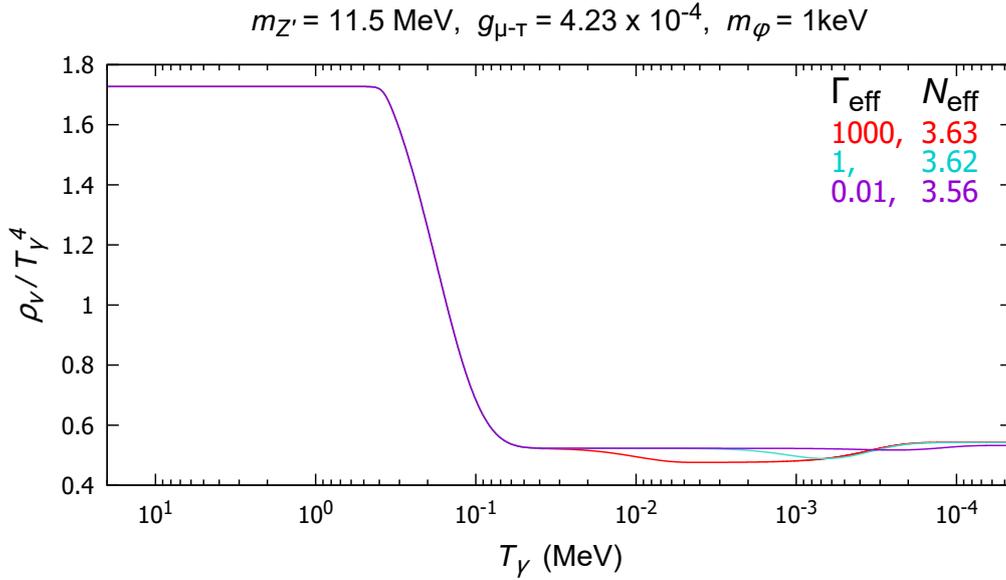


図 4.3 $N'_{\text{eff}} = 3.5, m_\phi = 1 \text{ keV}$ の場合に対するニュートリノのエネルギー密度の時間発展.

また、 $\Delta N'_{\text{eff}}$ は e^\pm 対消滅が完了した後に Majoron が生成されることによるニュートリノの有効数の変化量を表す。後で見ると、 N'_{eff} と $\Delta N'_{\text{eff}}$ は完全に独立ではなく、 $\Delta N'_{\text{eff}}$ は N'_{eff} にわずかに依存する。

まず、図 4.2 に $N'_{\text{eff}} = 3.5$ の場合*8 に対するニュートリノと Majoron のエネルギー密度の時間発展を示す。この図から分かるように、 $\Gamma_{\text{eff}} \gtrsim 1$ の場合、 $T_\nu \gtrsim m_\phi$ となると $\nu\nu \rightarrow \phi$ によって Majoron が生成され始め、しだいにニュートリノと Majoron は熱平衡化する。これは、図中の山のピークあたりのなだらかになっているところに対応する。この時、 $\phi \leftrightarrow \nu\nu$ による正味のエネルギー遷移はほとんどないので、(2.30) 式と (2.20) よりニュートリノと Majoron のエネルギー密度の時間発展は

$$\frac{d\rho_\nu}{dt} + 4H\rho_\nu = 0 \quad (4.59)$$

$$\frac{d\rho_\phi}{dt} + 3H(\rho_\phi + P_\phi) = 0 \quad (4.60)$$

によって決まる。 $T_\nu \lesssim m_\phi$ となると、Majoron は非相対論的になる。この時、 $\rho_\phi \gg P_\phi$ となるので P_ϕ を無視する近似のもとで上式を解くと、 ρ_ν, ρ_ϕ は

$$\rho_\nu \propto R^{-4} \quad (4.61)$$

$$\rho_\phi \propto R^{-3} \quad (4.62)$$

となる。ここで、 R は scale factor である。よって、宇宙膨張にともなうエネルギー密度のうすまり方 (減少率) が Majoron のほうが小さいため、Majoron が非相対論的になってから崩壊するまでの間に Majoron とニュートリノのエネルギー密度の間に違いが生じることになる。 $T_\nu \sim m_\phi/3$ になると、Majoron はニュートリノへと崩壊する。これにより生成されたニュートリノは既存のニュートリノと比べてより大きなエネルギーを持つため、ニュートリノ全体のエネルギー密度が少し上昇し、その結果 N_{eff} が少し大きくなる。このように、massive な粒子のエネルギー密度がうすまりにくい性質を利用して、相対論的な粒子のエネルギー密度を上昇させる機構は freeze-in と呼ばれる。

*8 これは微分方程式系を解く時の初期条件として $T_\nu/T_\nu = 1.348055$ を用いて解いたことに対応する。

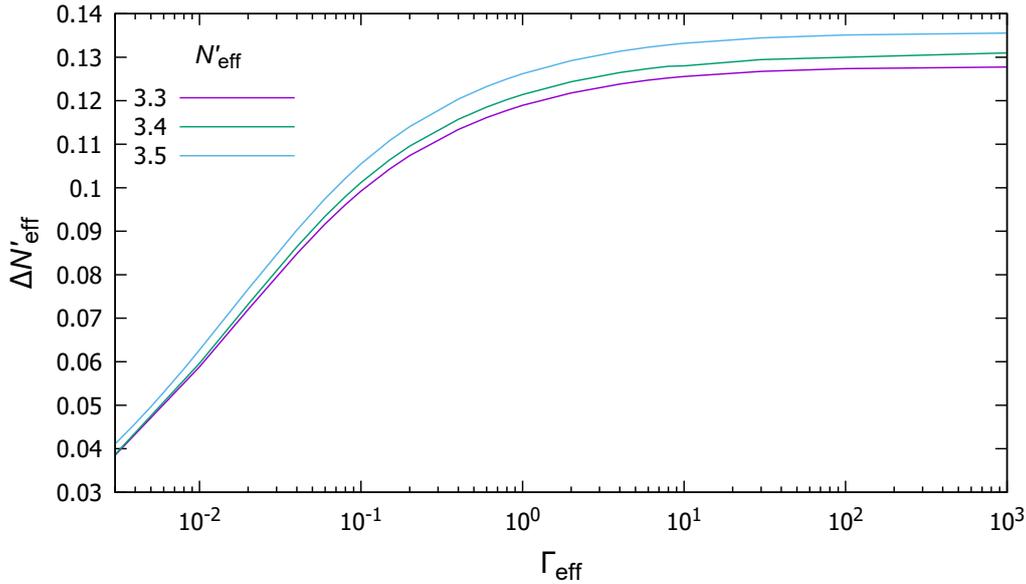


図 4.4 様々な N'_{eff} に対する $\Delta N'_{\text{eff}}$ の Γ_{eff} 依存性.

図 4.3 に $N'_{\text{eff}} = 3.5$, $m_\phi = 1\text{keV}$ の場合に対するニュートリノのエネルギー密度の時間発展を示す。この図は、3 章で得られた計算結果と図 3.7 で示した計算結果を $T_\gamma \simeq 10^{-2}\text{MeV}$ で滑らかにつなぐことで得られたものである。

図 4.4 に様々な N'_{eff} に対する $\Delta N'_{\text{eff}}$ の Γ_{eff} 依存性を示す。この図から分かるように、 N'_{eff} が大きいほど $\Delta N'_{\text{eff}}$ は大きくなる。この理由は次のように考えられる。 N'_{eff} が大きいことは、 e^\pm 対消滅後におけるニュートリノの数が多いことに対応する。 $\Gamma_{\text{eff}} \gtrsim 1$, つまり Majoron とニュートリノ間の熱平衡状態 $\phi \leftrightarrow \nu\nu$ が初期宇宙のある時期において達成されるような場合、 $\phi \leftrightarrow \nu\nu$ は Majoron とニュートリノの数を等しくするようにはたらくため、 e^\pm 対消滅後のニュートリノの数が多いほどより多くのニュートリノが Majoron に分配される。その結果、 $T_\nu \ll m_\phi$ におけるニュートリノのエネルギー密度はより大きくなり、 $\Delta N'_{\text{eff}}$ が増加する。一方で、 $\Gamma_{\text{eff}} \ll 1$ の場合、 ν と ϕ の間で熱平衡状態には達成しないが $\nu\nu \rightarrow \phi$ によって少し Majoron が生成される。 e^\pm 対消滅後のニュートリノの数が多いほど、この反応過程は起こりやすくなるので、生成される Majoron もわずかに増加する。その結果、 $\Delta N'_{\text{eff}}$ が増加する。

先ほど述べたように、 N_{eff} は N'_{eff} と $\Delta N'_{\text{eff}}$ を用いて、 $N_{\text{eff}} = N'_{\text{eff}} + \Delta N'_{\text{eff}}$ と書くことができた。 N_{eff} に対しては実験からの制限 $N_{\text{eff}} = 3.27 \pm 0.15$, 68% C.L. ((3.37) 式) があるため、 N'_{eff} もしくは $\Delta N'_{\text{eff}}$ のどちらかある値に固定すればもう一方のパラメータに対して制限をつけることができる。そのため様々なパターンが考えられるが、ここでは以下の 2 つの場合に対してのみ議論する。

- $N'_{\text{eff}} \simeq 3.5$ に固定した場合

図 4.5 に $N'_{\text{eff}} = 3.5$ を実現するような Z' が存在する場合に対する Majoron のパラメータ空間を示す。縦に引かれた紫色の線より左側の領域と、斜めに引かれた紫色の点線より下側の領域はそれぞれ (4.55) 式に対応している。青色の領域 ($\Delta N'_{\text{eff}} \lesssim 0.1$) は、Hubble tension を解決 ($N_{\text{eff}} \simeq 3.4 - 3.5$) できるような領域を表す。Majoron の質量の下限を 10^{-6}MeV にとっているのは、これより下では近似 3 が破綻するためである。仮に Z' が $g_\mu - 2$ anomaly を解決できるようなパラメータであった場合、図中の青色の領域は Hubble tension と $g_\mu - 2$ anomaly を同時解決

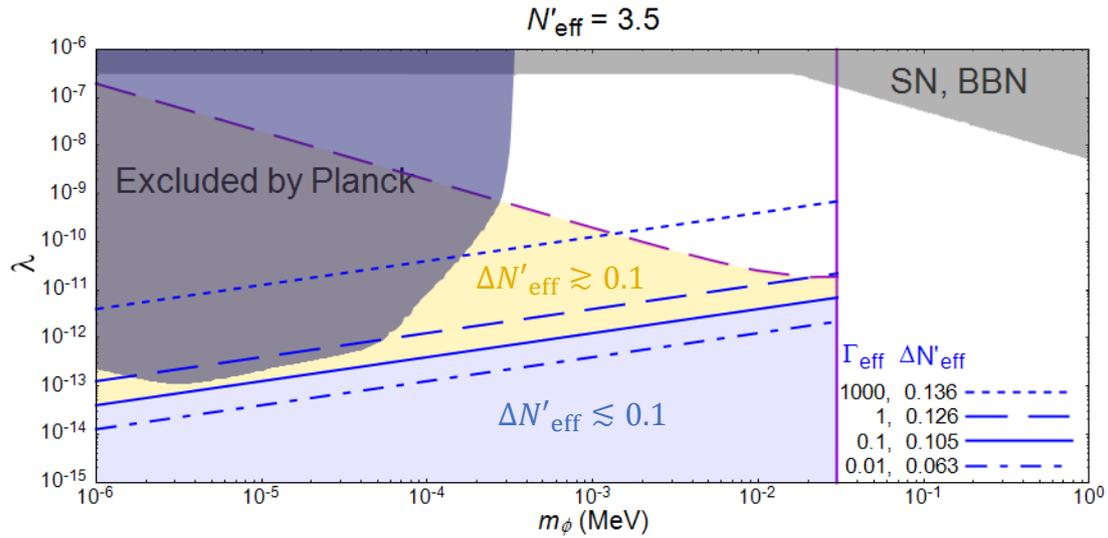


図 4.5 $N'_{\text{eff}} = 3.5$ を実現するような Z' が存在する場合に対する Majoron のパラメータ空間. 青色の実線または点線は $\Delta N'_{\text{eff}}$ (Γ_{eff}) の等高線である. 縦に引かれた紫色の線より左側の領域と、斜めに引かれた紫色の点線より下側の領域はそれぞれ (4.55) 式に対応している. 金色の領域は、 $\Delta N'_{\text{eff}} \gtrsim 0.1$ である領域を表している. 青色の領域は、Hubble tension を解決できるようなパラメータ領域を表している. 紺色の領域は Planck 2018 のデータによって排除されている [10]. 灰色の領域は SN1987A [27, 28]、ビッグバン元素合成 (Big Bang Nucleosynthesis, BBN) [10] からの制限によって排除されている. 白い領域は本論文では取り扱うことができない.

できるようなパラメータ領域となる. また、図中の $\Delta N'_{\text{eff}} = 0.1$ の等高線より上側の金色の領域は 2σ 以上で排除される.

- $\Delta N'_{\text{eff}} \simeq 0.1$ に固定した場合

図 4.6 に Z' のパラメータ空間において $g_\mu - 2$ anomaly を解決できるような領域付近の N'_{eff} 等高線を示す. 図中の青色の帯は、 $\Delta N'_{\text{eff}} \simeq 0.1$ を実現するような Majoron が存在するのときに Hubble tension を解決 ($N_{\text{eff}} \simeq 3.4 - 3.5$) できるような領域を表す. この図から分かるように、 $m_{Z'} \simeq 11 - 15 \text{ MeV}$, $g_{\mu-\tau} \simeq (3.6 - 7) \times 10^{-4}$ であれば Hubble tension と $g_\mu - 2$ anomaly を同時解決することができる. また、図中の $N'_{\text{eff}} = 3.5$ の等高線より左側の領域は 2σ 以上で排除される. 新たな軽い粒子として Z' しかない場合 (図 3.7) と比べると、Majoron がいることによって青色の帯が少し右側にずれたことになる.

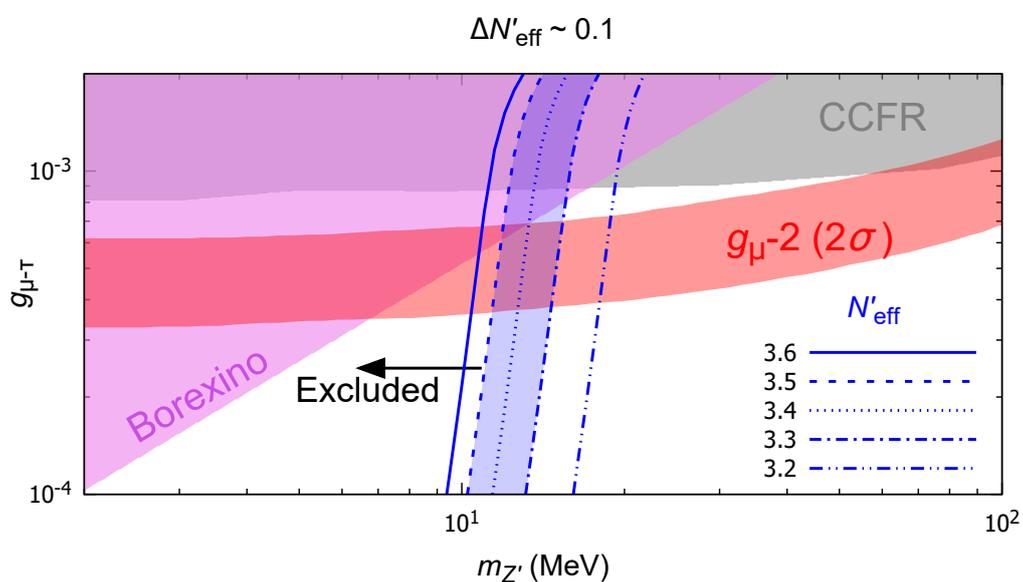


図 4.6 Z' のパラメータ空間において $g_\mu - 2$ anomaly を解決できるような領域付近の N'_{eff} 等高線. 青色の帯は、 $\Delta N'_{\text{eff}} \simeq 0.1$ を実現するような Majoron が存在するときに Hubble tension を解決できるようなパラメータ領域を表している。赤色の帯は、 $g_\mu - 2$ anomaly を 2σ 以内で解決できるような領域を表している。暗色の領域は、Borexino 実験、CCFR 実験によって除外されている [18]。

第 5 章

まとめと今後の課題

本論文では、より厳密な模型としてニュートリノの質量起源を説明できる繰りこみ可能な $L_\mu - L_\tau$ 模型を考えたときに Hubble tension と $g_\mu - 2$ anomaly を同時解決可能なパラメータが存在するかを探索した。また、実験による N_{eff} への制限から Z' と Majoron のパラメータ空間に対してどのような制限をつけることができるかを議論した。

まず、このような模型を模型を考えた場合、新たに軽い $U(1)_{L_\mu - L_\tau}$ gauge 粒子 Z' と軽いスカラー粒子、つまり Majoron ϕ が生じる。Majoron は近似的な global $U(1)_L$ 対称性の自発的破れによって生じ、ニュートリノと弱く相互作用する。本論文では、最も簡単なタイプ I シーソー機構の場合に、この相互作用が重いニュートリノと軽いニュートリノの混合行列を通して生じることを示した。

Z' のパラメータは、今回の研究動機から $g_\mu - 2$ anomaly を解決できるパラメーターの近傍領域 $g_{\mu-\tau} \gtrsim 10^{-5}$, $m_{Z'} \simeq 10\text{MeV}$ に設定した。また、Majoron のパラメータは簡単化のため、Majoron が宇宙の最初期には存在せず、 e^\pm 対消滅後に $\nu\nu \rightarrow \phi$ によって生成されるようなパラメータに限定して N_{eff} を計算した。このとき、 N_{eff} は e^\pm 対消滅後のニュートリノの有効数 N'_{eff} と Majoron が生成されたことによるニュートリノの有効数の変化量 $\Delta N'_{\text{eff}}$ を用いて $N_{\text{eff}} = N'_{\text{eff}} + \Delta N'_{\text{eff}}$ と書くことができた。 N'_{eff} か $\Delta N'_{\text{eff}}$ どちらかの値を固定してもう一方に対して制限をつけようとするときさまざまなパターンが考えられるが、本論文では以下の 2 つの場合に対して議論した。

- $N'_{\text{eff}} \simeq 3.5$ の場合

Majoron のパラメータ空間において、 $\Delta N'_{\text{eff}} \lesssim 0.1$ となる広い領域 ($\lambda \lesssim 10^{-12} - 10^{-14}$) で Hubble tension を解決 ($N_{\text{eff}} \simeq 3.4 - 3.5$) することができる。また、実験による N_{eff} への制限から、 $\Delta N'_{\text{eff}} \gtrsim 0.1$ となる領域 ($\lambda \gtrsim 10^{-12} - 10^{-14}$) は 2σ 以上で排除される。

- $\Delta N'_{\text{eff}} \simeq 0.1$ の場合

Z' のパラメータ空間において、 $m_{Z'} \simeq 11 - 15\text{MeV}$, $g_{\mu-\tau} \simeq (3.6 - 7) \times 10^{-4}$ であれば Hubble tension と $g_\mu - 2$ anomaly を同時解決することができる。実験による N_{eff} への制限から、 $m_{Z'} \lesssim 10\text{MeV}$ の領域は 2σ 以上で排除される。また、新たな軽い粒子として Z' しか存在しない場合 (図 3.7) と比べると、Majoron が存在することによって Hubble tension を解決できる領域が $m_{Z'}$ が大きい方に少しずれたことになる。

これらの結果は、図 4.5 と図 4.6 にまとめられている。

今回行った研究の結果、 Z' の質量 $m_{Z'}$ が大きいほど N'_{eff} は小さくなるので、Hubble tension を解決するためには Majoron からの寄与 $\Delta N'_{\text{eff}}$ がより必要になることが分かった。また、ニュートリノの有効

数 N_{eff} への Z' からの寄与 N'_{eff} と Majoron からの寄与 $\Delta N'_{\text{eff}}$ は完全に独立ではなく、わずかに依存関係にあることが分かった。

今後の研究については、Majoron が e^\pm 対消滅前に生成されるような、より一般的な場合に対してでも適用できるように温度と化学ポテンシャルの時間発展方程式を修正することである。これにより、図 4.5 の Majoron パラメータ空間において白い領域に対しても制限をつけることができるようになる。また、 Z' と Majoron の反応過程として崩壊と逆崩壊過程のみを考えたが、散乱・対消滅過程が本当に初期宇宙において効いてこないのかはもう少し厳密に議論する必要がある。

付録 A

特殊関数

A.1 第 2 種変形 Bessel 関数

ここでは、衝突項の積分をする際に現れる第 2 種変形 Bessel 関数についてまとめておく。第 2 種変形 Bessel 関数は次式で定義される [6]。

$$K_\nu(z) = \frac{\sqrt{\pi}(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu + 1/2)} \int_1^\infty dt (t^2 - 1)^{\nu-1/2} e^{-zt} \quad (\text{Re}[\nu] > -1/2, \text{Re}[z] > 0) \quad (\text{A.1})$$

ここで、 $\Gamma(s)$ はガンマ関数である。また、 z, ν は一般に複素数である。 $\nu = 1$ と $\nu = 2$ の場合について具体的に書き下すと、

$$K_1(z) = z \int_1^\infty dt (t^2 - 1)^{1/2} e^{-zt} \quad (\text{A.2})$$

$$K_2(z) = \frac{z^2}{3} \int_1^\infty dt (t^2 - 1)^{3/2} e^{-zt} = z \int_1^\infty dt t (t^2 - 1)^{1/2} e^{-zt} \quad (\text{A.3})$$

となる。ここで、 $K_2(z)$ の 2 つ目の等号では部分積分を実行した。

A.2 多重対数関数

ここでは、付録 H の massless 粒子に対する熱力学公式の中で現れる多重対数関数についてまとめておく。多重対数関数は次式で定義される。

$$\text{Li}_s(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^s} \quad (|z| < 1) \quad (\text{A.4})$$

ここで、 z, s は一般に複素数である。多重対数関数に対して次の関係式が成り立つ。

$$\lim_{z \rightarrow 1} \text{Li}_s(z) = \zeta(s) \quad (\text{A.5})$$

$$\lim_{z \rightarrow -1} \text{Li}_s(z) = (2^{1-s} - 1)\zeta(s) \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{d}{dz} \text{Li}_s(z) = \frac{1}{z} \text{Li}_{s-1}(z) \quad (\text{A.7})$$

$$\text{Li}_s(z) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt \frac{t^{s-1}}{z^{-1}e^t - 1} \quad (\text{A.8})$$

ここで、 $\zeta(s)$ はゼータ関数、 $\Gamma(s)$ はガンマ関数である。

(A.8) 式の証明:

右辺の積分部分を計算すると、

$$\begin{aligned}\int_0^\infty dt \frac{t^{s-1}}{z^{-1}e^t - 1} &= \int_0^\infty dt t^{s-1} z e^{-t} \frac{1}{1 - z e^{-t}} \\ &= \int_0^\infty dt t^{s-1} z e^{-t} (1 + z e^{-t} + (z e^{-t})^2 + \dots) \\ &= \int_0^\infty dt t^{s-1} \sum_{n=1}^\infty (z e^{-t})^n \\ &= \sum_{n=1}^\infty z^n \int_0^\infty dt t^{s-1} e^{-nt} \\ &= \sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{n^s} \int_0^\infty d(nt) (nt)^{s-1} e^{-nt} \\ &= \text{Li}_s(z) \Gamma(s)\end{aligned}$$

となる。よって、(A.8) 式は示された。

付録 B

積分公式

ここでは、以下の積分公式が成り立つことを示す。

$$\int_{\alpha}^{\beta} dx \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{\pi}{\sqrt{-a}} \quad (\text{B.1})$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} dx \frac{x}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = -\frac{\pi b}{2a\sqrt{-a}} \quad (\text{B.2})$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} dx \frac{x^2}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{\pi(3b^2 - 4ac)}{8a^2\sqrt{-a}} \quad (\text{B.3})$$

ここで、 α, β ($\alpha < \beta$) は $ax^2 + bx + c = 0$ ($a < 0$) の実数解である。この積分公式は付録 C の衝突項積分の計算で必要となる。

証明:

次の積分を考える。

$$I_n \equiv \int_{\alpha}^{\beta} dx \frac{x^n}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{B.4})$$

まず、 $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$ と書けるので

$$I_n = \frac{1}{\sqrt{-a}} \int_{\alpha}^{\beta} dx \frac{x^n}{\sqrt{-(x - \alpha)(x - \beta)}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \int_{\alpha}^{\beta} dx \frac{x^n}{\sqrt{B - (x - A)^2}} \quad (\text{B.5})$$

となる。ここで、 $A \equiv (\alpha + \beta)/2$, $B \equiv (\alpha + \beta)^2/4 - \alpha\beta = (\beta - \alpha)^2/4$ である。さらに、 $x - A = \sqrt{B} \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) と変換変換すると、

$$I_n = \frac{1}{\sqrt{-a}} \int_{\pi}^0 d\theta \frac{-\sqrt{B} \sin \theta (A + \sqrt{B} \cos \theta)^n}{\sqrt{B - B \cos^2 \theta}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \int_0^{\pi} d\theta (A + \sqrt{B} \cos \theta)^n \quad (\text{B.6})$$

となる。 $n = 0, 1, 2$ の場合に対して具体的に計算すると

$$I_0 = \frac{1}{\sqrt{-a}} \int_0^{\pi} d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{-a}} \quad (\text{B.7})$$

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{-a}} \int_0^{\pi} d\theta (A + \sqrt{B} \cos \theta) = \frac{\pi A}{\sqrt{-a}} = -\frac{\pi b}{2a\sqrt{-a}} \quad (\text{B.8})$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{\sqrt{-a}} \int_0^\pi d\theta (A^2 + 2A\sqrt{B} \cos \theta + B \cos^2 \theta) \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{-a}} \left(A^2 + \frac{1}{2}B \right) \\ &= \frac{\pi}{8\sqrt{-a}} (3(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta) \\ &= \frac{\pi(3b^2 - 4ac)}{8a^2\sqrt{-a}} \end{aligned} \tag{B.9}$$

となる。よって、上記の積分公式は示された。

付録 C

1 + 2 ↔ 3 + 4 に対する衝突項積分 (一般論)

ここでは、1 + 2 ↔ 3 + 4 に対する衝突項積分

$$\mathcal{I} \equiv \int d\Pi_2 d\Pi_3 d\Pi_4 \Lambda(\{f_i\}) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 \quad (\text{C.1})$$

$$d\Pi_i = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_i}{2E_i} \quad (\text{C.2})$$

を [23–25] の方法に基づいて 2 重積分にまで落とし込むことを考える。ここで、 $f_i = f_i(|\mathbf{p}_i|, t)$ は粒子種 i の分布関数、 $\sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2$ は反応過程 $1(p_1) + 2(p_2) \rightarrow 3(p_3) + 4(p_4)$ に対する振幅を 2 乗して始状態と終状態にわたってスピンの和をとったものである。

まず、Lorentz 不変な積分測度に対する公式

$$\frac{d^3 p_i}{2E_i} = d^4 p_i \delta(p_i^2 - m_i^2) \Theta(p_i^0) \quad (\text{C.3})$$

を用いて p_4 積分を実行すると、

$$\mathcal{I} = \int d\Pi_2 d\Pi_3 \Lambda(\{f_i\}) (2\pi) \delta(p_4^2 - m_4^2) \Theta(p_4^0) \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 \Big|_{p_4=p_1+p_2-p_3} \quad (\text{C.4})$$

となる。残りの積分を実行するために \mathbf{p}_1 が z 軸方向を向くような座標系をとり、次のようにして 4 元ベクトルを定める。

$$\mathbf{p}_1 = (E_1, 0, 0, p_1) \quad (\text{C.5})$$

$$\mathbf{p}_2 = (E_2, p_2 \sin \alpha \cos \beta, p_2 \sin \alpha \sin \beta, p_2 \cos \alpha) \quad (\text{C.6})$$

$$\mathbf{p}_3 = (E_3, p_3 \sin \theta \cos \mu, p_3 \sin \theta \sin \mu, p_3 \cos \theta) \quad (\text{C.7})$$

$$\mathbf{p}_4 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 \quad (\text{C.8})$$

ただし、 $p_i \equiv |\mathbf{p}_i|$ である。ここで、 \mathbf{p}_2 と \mathbf{p}_3 の間の方位角を固定したまま \mathbf{p}_2 と \mathbf{p}_3 を \mathbf{p}_1 まわりで回転させる操作の下で対称であることから、一般性を失うことなく $\mu = 0$ とおくことができる。これにより、デルタ関数の引数は

$$\begin{aligned} f(\beta) &\equiv p_4^2 - m_4^2 \\ &= (p_1 + p_2 - p_3)^2 - m_4^2 \\ &= \omega + 2[p_2 p_3 (\sin \alpha \sin \theta \cos \beta + \cos \alpha \cos \theta) - p_1 p_2 \cos \alpha] \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

となる。ここで、

$$\omega \equiv Q + 2(\gamma + p_1 p_3 \cos \theta) \quad (\text{C.10})$$

$$Q \equiv m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 - m_4^2 \quad (\text{C.11})$$

$$\gamma \equiv E_1 E_2 - E_2 E_3 - E_3 E_1 \quad (\text{C.12})$$

である。 $d^3 p_2 d^3 p_3 = p_2^2 dp_2 d \cos \alpha d\beta p_3^2 dp_3 d \cos \theta d\mu$ より、 μ について積分すると

$$\mathcal{I} = \frac{1}{4(2\pi)^4} \int \frac{dp_2 p_2^2}{E_2} \frac{dp_3 p_3^2}{E_3} \Lambda(\{f_i\}) \int d \cos \theta d \cos \alpha \int_0^{2\pi} d\beta \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 \delta(f(\beta)) \Theta(p_4^0) \quad (\text{C.13})$$

となる。

β 積分については次のデルタ関数に対する公式を用いる。

$$\delta(f(\beta)) = \sum_i \frac{1}{|f'(\beta)|} \delta(\beta - \beta_i) \quad (\text{C.14})$$

ここで、 β_i は $f(\beta) = 0$ の解である。 $f(\beta_i) = 0$ を $\cos \beta_i$ について解くと

$$\cos \beta_i = -\frac{1}{2p_2 p_3 \sin \alpha \sin \theta} [\omega + 2(p_2 p_3 \cos \alpha \cos \theta - p_1 p_2 \cos \alpha)] \quad (\text{C.15})$$

となる。よって、 $\beta_i = \pm \beta_0$ ($0 \leq \beta_0 \leq \pi$) となるような 2 つの解が存在する。上式を用いて $f'(\beta_i)$ の絶対値を評価すると

$$\begin{aligned} |f'(\beta_i)| &= |\mp 2p_2 p_3 \sin \alpha \sin \theta \sin \beta_0| \\ &= |2p_2 p_3 \sin \alpha \sin \theta \sqrt{1 - \cos \beta_0}| \\ &= |2p_2 p_3 \sin \alpha \sin \theta| \frac{1}{|2p_2 p_3 \sin \alpha \sin \theta|} \\ &\quad \times \sqrt{(2p_2 p_3 \sin \alpha \sin \theta)^2 - [\omega + 2(p_2 p_3 \cos \alpha \cos \theta - p_1 p_2 \cos \alpha)]^2} \\ &= \sqrt{a \cos^2 \alpha + b \cos \alpha + c} \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

となる。ここで、

$$a \equiv -4p_2^2(p_1^2 + p_3^2 - 2p_1 p_3 \cos \theta) \quad (\text{C.17})$$

$$b \equiv 4\omega p_2(p_1 - p_3 \cos \theta) \quad (\text{C.18})$$

$$c \equiv 4p_2^2 p_3^2 \sin^2 \theta - \omega^2 \quad (\text{C.19})$$

である。 $\sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2$ の β 依存性は 4 元運動量の内積を通じて $\cos \beta$ に依存するため、 $\beta_i = \pm \beta_0$ どちらの場合に対しても同じ寄与を与える。以上より、 β 積分を実行すると

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\beta \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 \delta(f(\beta)) \Theta(p_4^0) &= \int_0^\pi d\beta \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 \frac{1}{|f'(\beta)|} \delta(\beta - \beta_0) \Theta(p_4^0) \times 2 \\ &= \frac{2}{|f'(\beta_0)|} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 \Big|_{\beta=\beta_0} \Theta(p_4^0) \Theta(|f'(\beta_0)|^2) \\ &= \frac{2}{\sqrt{a \cos^2 \alpha + b \cos \alpha + c}} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 \Theta(a \cos^2 \alpha + b \cos \alpha + c) \Theta(p_4^0) \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

となる。2 つ目の等号で新たに生じた階段関数 $\Theta(|f'(\beta_0)|^2)$ は、 $\cos \beta_0$ が満たさなければならない条件

$$\begin{aligned} \cos^2 \beta_0 = 1 - \sin^2 \beta_0 \leq 1 &\Leftrightarrow \sin^2 \beta_0 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (2p_2 p_3 \sin \alpha \cos \theta)^2 \sin^2 \beta_0 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow |f'(\beta_0)|^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

から生じたものである。

ここからは角度積分 \mathcal{J} にのみ着目して議論を進めていく。

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2(2\pi)^4} \int \frac{dp_2 p_2^2}{E_2} \frac{dp_3 p_3^2}{E_3} \Lambda(\{f_i\}) \times \mathcal{J} \quad (\text{C.22})$$

$$\mathcal{J} \equiv \int d \cos \theta d \cos \alpha \frac{1}{\sqrt{a \cos^2 \alpha + b \cos \alpha + c}} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 \Theta(a \cos^2 \alpha + b \cos \alpha + c) \Theta(p_4^0) \quad (\text{C.23})$$

$\cos \alpha$ 積分は $\Theta(a \cos^2 \alpha + b \cos \alpha + c)$ があるため、 $a \cos^2 \alpha + b \cos \alpha + c \geq 0$ となる場合にのみ積分値に寄与してくる。そのような領域が存在する場合とは、 $a \leq 0$ なので実数解が 2 つ存在する場合 ($b^2 - 4ac > 0$) に対応する。よって、 $\Theta(a \cos^2 \alpha + b \cos \alpha + c)$ と $\Theta(b^2 - 4ac)$ は等価なのでおきかえることができる。2 つの実数解 $\cos \alpha_{\pm} = (-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$ が常に $\cos \alpha_+ \leq 1, \cos \alpha_- \geq -1$ を満たすことに注意すると、 \mathcal{J} は

$$\mathcal{J} = \int d \cos \theta \Theta(b^2 - 4ac) \Theta(p_4^0) F(\{p_i\}, \cos \theta) \quad (\text{C.24})$$

$$F(\{p_i\}, \cos \theta) \equiv \int_{\cos \alpha_-}^{\cos \alpha_+} d \cos \alpha \frac{1}{\sqrt{a \cos^2 \alpha + b \cos \alpha + c}} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 \quad (\text{C.25})$$

となる。 $\sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2$ の中に $\cos \alpha$ はべきの形で入ってくるので、 $\cos \alpha$ 積分は付録 B の積分公式を用いて直ちに実行できる。

$\cos \theta$ 積分は $\Theta(b^2 - 4ac)$ があるため、 $b^2 - 4ac \geq 0$ を満たす部分だけが積分値に寄与してくる。この条件式を書き換えると

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= (4p_2 p_3 \sin \theta)^2 (a' \cos^2 \theta + b' \cos \theta + c') \geq 0 \\ &\Leftrightarrow a' \cos^2 \theta + b' \cos \theta + c' \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

となる。ここで、

$$a' \equiv -4p_1^2 p_3^2 \quad (\text{C.27})$$

$$b' \equiv -4p_1 p_3 (Q + 2\gamma + 2p_2^2) \quad (\text{C.28})$$

$$c' \equiv 4p_2^2 (p_1^2 + p_3^2) - (Q + 2\gamma)^2 \quad (\text{C.29})$$

である。 $a' \leq 0$ なので $a' \cos^2 \theta + b' \cos \theta + c' = 0$ の 2 つの実数解

$$\cos \theta_{\pm} = -\frac{Q + 2\gamma + 2p_2^2 \mp 2p_2 \sqrt{Q + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + 2\gamma}}{2p_1 p_3} \quad (\text{C.30})$$

で挟まれた領域が $\cos \theta$ 積分の積分領域となる。ただし、 $\cos \theta_{\pm}$ が区間 $[-1, 1]$ の外に出る場合があるのでそのことに注意すると、 \mathcal{J} は最終的に

$$\mathcal{J} = \int_{\max(\cos \theta_-, -1)}^{\min(\cos \theta_+, 1)} d \cos \theta F(\{p_i\}, \cos \theta) \Theta(p_4^0) \quad (\text{C.31})$$

となる。

以上まとめると

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2(2\pi)^4} \int \frac{dp_2 p_2^2}{E_2} \frac{dp_3 p_3^2}{E_3} \Lambda(\{f_i\}) \int_{\max(\cos \theta_-, -1)}^{\min(\cos \theta_+, 1)} d \cos \theta F(\{p_i\}, \cos \theta) \Theta(p_4^0) \quad (\text{C.32})$$

となる。

最後に、全ての粒子が massless の場合を考える。このとき、 $Q = 0$ より $\cos \theta_{\pm}$ は

$$\begin{aligned} \cos \theta_{\pm} &= -\frac{1}{2p_1 p_3} [2p_2^2 + 2(p_1 p_2 - p_2 p_3 - p_3 p_1) \mp 2|p_1 + p_2 - p_3|] \\ &= 1, \quad -\frac{2p_2(p_1 + p_2 - p_3)}{p_1 p_3} + 1 \end{aligned} \quad (\text{C.33})$$

となる。2 つ目の等号では、 $\Theta(p_4^0) = \Theta(p_1 + p_2 - p_3)$ があるため絶対値記号がはずれることを用いた。また、 p_2, p_3 の積分領域は $\Theta(p_1 + p_2 - p_3)$ により $p_2 \geq 0, p_3 \geq 0, p_2 \geq p_3 - p_1$ で囲まれた領域となる。よって、全粒子が massless の場合に対する衝突項積分の公式は

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2(2\pi)^4} \int_0^{\infty} dp_2 p_2 \int_0^{p_1+p_2} dp_3 p_3 \Lambda(\{f_i\}) \int_{\max(\cos \theta_-, -1)}^1 d \cos \theta F(\{p_i\}, \cos \theta) \quad (\text{C.34})$$

となる。

付録 D

1 + 2 → 3 + 4 に対する衝突項積分

ここでは、[26] の方法に基づいて 1 + 2 → 3 + 4 に対する衝突項積分の計算をする。1 + 2 → 3 + 4 に対する衝突項は一般に次式で与えられる。

$$C_{1+2 \rightarrow 3+4}[f_1] = -\frac{1}{2E_1} \int d\Pi_2 d\Pi_3 d\Pi_4 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \times \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{1+2 \rightarrow 3+4}|^2 f_1 f_2 (1 \pm f_3)(1 \pm f_4) \quad (\text{D.1})$$

$$d\Pi_i \equiv \frac{d^3\mathbf{p}_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_i} \quad (\text{D.2})$$

計算を簡単にするため、以下の近似を用いることにする。

1. 全粒子は熱平衡分布関数に従うとする。つまり、 $f_i = 1/[e^{(E_i - \mu_i)/T_i} \pm 1]$ 。
2. Bose enhancement、Pauli blocking factor を無視する。つまり、 $1 \pm f_i \simeq 1$ 。
3. 全粒子の化学ポテンシャルを無視する。

2 つ目の近似により、(D.1) 式は

$$C_{1+2 \rightarrow 3+4}[f_1] = -\frac{1}{2E_1} f_1 \int d\Pi_2 f_2 \int d\Pi_3 d\Pi_4 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{1+2 \rightarrow 3+4}|^2 \quad (\text{D.3})$$

となる。

まず、 $\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4$ 積分

$$I \equiv \int d\Pi_3 d\Pi_4 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{1+2 \rightarrow 3+4}|^2 \quad (\text{D.4})$$

を実行する。 I は Lorentz 不変なので、積分する際にどの慣性系を選んでも問題ない。そこで、重心系 ($\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$, \mathbf{p}_1 と \mathbf{p}_3 のなす角: θ_{CM}) を選んで積分することにする。 \mathbf{p}_4 積分を実行すると、

$$I = \frac{1}{4(2\pi)^2} \int_0^\infty d\mathbf{p}_3 p_3^2 \int d\Omega_{\text{CM}} \frac{1}{E_3 E_4} \delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{1+2 \rightarrow 3+4}|^2 \Big|_{\mathbf{p}_4 = -\mathbf{p}_3} \quad (\text{D.5})$$

となる。変数変換 $x \equiv E_3 + E_4|_{\mathbf{p}_4 = -\mathbf{p}_3}$ を行うと、

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{8\pi} \int_{m_3+m_4}^\infty dx \frac{p_3}{x} \delta(E_1 + E_2 - x) \int d\cos\theta_{\text{CM}} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{1+2 \rightarrow 3+4}|^2 \\ &= \frac{p_3}{8\pi} \frac{1}{\sqrt{s}} \Theta(\sqrt{s} - (m_3 + m_4)) \int d\cos\theta_{\text{CM}} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{1+2 \rightarrow 3+4}|^2 \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

となる。ここで、重心系では $E_1 + E_2 = \sqrt{s}$ (s : Mandelstam 変数) が成り立つことを用いた。 $\Theta(x)$ は階段関数である。また、 p_1, p_3 は $E_3 + E_4|_{\mathbf{p}_4 = -\mathbf{p}_3} = \sqrt{s}$, $E_1 + E_2|_{\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1} = \sqrt{s}$ によって次のように決まる。

$$p_1 = \frac{1}{2\sqrt{s}} \sqrt{\lambda(s, m_1^2, m_2^2)} \equiv p_{12} \quad (\text{D.7})$$

$$p_3 = \frac{1}{2\sqrt{s}} \sqrt{\lambda(s, m_3^2, m_4^2)} \quad (\text{D.8})$$

$$\begin{aligned} \lambda(s, m_1^2, m_2^2) &\equiv s^2 + m_1^4 + m_2^4 - 2sm_1^2 - 2sm_2^2 - 2m_1^2m_2^2 \\ &= (s - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2m_2^2 \\ &= [s - (m_1 + m_2)^2][s - (m_1 - m_2)^2] \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

さらに、変数変換 $t = (p_1 - p_3)^2 = m_1^2 + m_2^2 - 2E_1E_3 + 2p_1p_3 \cos \theta_{\text{CM}}$ を行くと、

$$I = \frac{1}{16\pi\sqrt{s}p_{12}} \Theta(\sqrt{s} - (m_3 + m_4)) \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} dt \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{1+2 \rightarrow 3+4}|^2 \quad (\text{D.10})$$

$$t_{\min} \equiv m_1^2 + m_3^2 - \frac{1}{2s}(s + m_1^2 - m_2^2)(s + m_3^2 - m_4^2) - \frac{1}{2s} \sqrt{\lambda(s, m_1^2, m_2^2)} \sqrt{\lambda(s, m_3^2, m_4^2)} \quad (\text{D.11})$$

$$t_{\max} \equiv m_1^2 + m_3^2 - \frac{1}{2s}(s + m_1^2 - m_2^2)(s + m_3^2 - m_4^2) + \frac{1}{2s} \sqrt{\lambda(s, m_1^2, m_2^2)} \sqrt{\lambda(s, m_3^2, m_4^2)} \quad (\text{D.12})$$

となる。この式は積分変数も含め、Lorentz 不変量だけで書けていることが重要である。

次に \mathbf{p}_2 積分を実行する。座標系は \mathbf{p}_1 が z 軸方向を向くようにとり、 \mathbf{p}_1 と \mathbf{p}_2 のなす角を θ_2 とする。 $d^3p_2 = 2\pi p_2^2 d \cos \theta_2 dp_2$ より変数変換

$$s = (p_1 + p_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2 - 2p_1p_2 \cos \theta_2 \quad (\text{D.13})$$

$$E_2 = \sqrt{p_2^2 + m_2^2} \quad (\text{D.14})$$

を行うと、積分測度は

$$dsdE_2 = \frac{2p_1p_2^2}{E_2} d \cos \theta_2 dp_2 \quad (\text{D.15})$$

となる。 s の積分範囲は

$$\begin{aligned} s &= m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2 - 2p_1p_2 \cos \theta_2 \\ &\geq m_1^2 + m_2^2 + 2(E_1E_2 - p_1p_2) \\ &\geq (m_1 + m_2)^2 \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

より $(m_1 + m_2)^2 \leq s \leq \infty$ となる。ここで、最後の不等号では $p_2 \geq 0$ に対して $E_1E_2 - p_1p_2$ が $p_2 = m_2p_1/m_1$ ($m_1 \neq 0$) のときに最小値をとることを用いた。また、 E_2 の積分範囲は $p_2 = \sqrt{E_2^2 - m_2^2} \geq 0 \Rightarrow E_2 \geq m_2$ を満たし、かつ

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta_2 &\leq 1 \\ \Leftrightarrow 4p_1^2p_2^2 \cos^2 \theta &= (m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2 - s)^2 \leq 4p_1^2p_2^2 \\ \Leftrightarrow 4m_1^2E_2^2 + 4(m_1^2 + m_2^2 - s)E_1E_2 + (m_1^2 + m_2^2 - s)^2 + 4m_2^2p_1^2 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow E_2^-(s) \leq E_2 \leq E_2^+(s) \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

を満たす領域である。ここで、 $E_2^\pm(s)$ は

$$E_2^\pm(s) = \frac{E_1(s - m_1^2 - m_2^2) \pm p_1 \sqrt{\lambda(s, m_1^2, m_2^2)}}{2m_1^2} \quad (\text{D.18})$$

である。 $m_2 < E_2^-(s)$ より、 E_2 の積分範囲は $E_2^-(s) \leq E_2 \leq E_2^+(s)$ となる。

以上より、 $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ に対する衝突項は

$$\begin{aligned} C_{1+2 \rightarrow 3+4}[f_1] &= -\frac{1}{32\pi^2 p_1 E_1} f_1 \int_{(m_1+m_2)^2}^{\infty} ds \int_{E_2^-(s)}^{E_2^+(s)} dE_2 f_2 \\ &\quad \times \frac{1}{16\pi\sqrt{s}p_{12}} \Theta(\sqrt{s} - (m_3 + m_4)) \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} dt \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{1+2 \rightarrow 3+4}|^2 \\ &= -\frac{1}{512\pi^3 p_1 E_1} f_1 \int_{s_{\max}}^{\infty} ds \frac{1}{\sqrt{s}p_{12}} \int_{E_2^-(s)}^{E_2^+(s)} dE_2 \frac{1}{e^{E_2/T_2} \pm 1} \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} dt \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{1+2 \rightarrow 3+4}|^2 \\ &= \mp \frac{T_2 f_1}{512\pi^3 p_1 E_1} \int_{s_{\max}}^{\infty} ds \frac{1}{\sqrt{s}p_{12}} \ln \left(\frac{1 \pm e^{-E_2^-(s)/T_2}}{1 \pm e^{-E_2^+(s)/T_2}} \right) \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} dt \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{1+2 \rightarrow 3+4}|^2 \end{aligned} \quad (\text{D.19})$$

となる。ただし、 $s_{\max} = \max[(m_1 + m_2)^2, (m_3 + m_4)^2]$ である。

付録 E

崩壊—逆崩壊過程に対する粒子数遷移率 とエネルギー遷移率

ここでは、粒子 a (温度 T_a 、化学ポテンシャル μ_a) から粒子 i, j (温度 T 、化学ポテンシャル μ) への崩壊過程と、その逆崩壊過程に対する粒子数遷移率とエネルギー遷移率を Maxwell-Boltzmann 近似のもとで導く。

まず、 $a \leftrightarrow i + j$ に対する衝突項は次式で与えられる。

$$C_{a \leftrightarrow i+j}[f_a] = -\frac{1}{2E_a S_{ij}} \int d\Pi_i d\Pi_j (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_a - p_i - p_j) \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{a \rightarrow i+j}|^2 \\ \times \left[f_a(p_a)(1 \pm f_i(p_i))(1 \pm f_j(p_j)) - f_i(p_i)f_j(p_j)(1 \pm f_a(p_a)) \right] \quad (\text{E.1})$$

ここで、 S_{ij} は対称性因子で

$$S_{ij} = \begin{cases} 2 & i = j \\ 1 & i \neq j \end{cases} \quad (\text{E.2})$$

である。粒子 a, i, j が近似的に Maxwell-Boltzmann 分布に従い、量子論的效果を表す因子 $(1 \pm f)$ を無視できるとすると衝突項は

$$C_{a \leftrightarrow i+j}(p_a) = -\frac{g_a m_a}{E_a} \left(e^{-(E_a - \mu_a)/T_a} - e^{-(E_a - 2\mu)/T} \right) \\ \times \frac{1}{2m_a S_{ij}} \int d\Pi_i d\Pi_j (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_a - p_i - p_j) \frac{1}{g_a} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{a \rightarrow i+j}|^2 \\ = -\frac{g_a m_a \Gamma_a}{E_a} \left(e^{-(E_a - \mu_a)/T_a} - e^{-(E_a - 2\mu)/T} \right) \quad (\text{E.3})$$

となる。ここで、1つ目の等号ではデルタ関数 $\delta(E_a - E_i - E_j)$ があることから

$$f_i(p_i)f_j(p_j) = e^{-(E_i + E_j - 2\mu)/T} = e^{-(E_a - 2\mu)/T} \quad (\text{E.4})$$

が成り立つことを用いた。また、 g_a, Γ_a はそれぞれ粒子 a の内部自由度と崩壊幅である。

よって、 $a \leftrightarrow i + j$ に対する粒子数遷移率とエネルギーの遷移率はそれぞれ

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\delta n_a}{\delta t} \right|_{a \leftrightarrow i+j} &= \int \frac{d^3 p_a}{(2\pi)^3} C_{a \leftrightarrow i+j}(p_a) \\
&= \frac{m_a g_a \Gamma_a}{2\pi^2} \int_0^\infty dp_a \frac{p_a^2}{E_a} \left(e^{-(E_a - 2\mu)/T} - e^{-(E_a - \mu_a)/T_a} \right) \\
&= \frac{m_a^2 g_a \Gamma_a}{2\pi^2} \left[T e^{2\mu/T} K_1 \left(\frac{m_a}{T} \right) - T_a e^{\mu_a/T_a} K_1 \left(\frac{m_a}{T_a} \right) \right]
\end{aligned} \tag{E.5}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\delta \rho_a}{\delta t} \right|_{a \leftrightarrow i+j} &= \int \frac{d^3 p_a}{(2\pi)^3} E_a C_{a \leftrightarrow i+j}(p_a) \\
&= \frac{m_a g_a \Gamma_a}{2\pi^2} \int_0^\infty dp_a p_a^2 \left(e^{-(E_a - 2\mu)/T} - e^{-(E_a - \mu_a)/T_a} \right) \\
&= \frac{m_a^3 g_a \Gamma_a}{2\pi^2} \left[T e^{2\mu/T} K_2 \left(\frac{m_a}{T} \right) - T_a e^{\mu_a/T_a} K_2 \left(\frac{m_a}{T_a} \right) \right]
\end{aligned} \tag{E.6}$$

となる。ここで、 $K_j(x)$ は第 2 種変形ベッセル関数である (付録 A 参照)。

付録 F

弱い相互作用過程に対する粒子数遷移率 とエネルギー遷移率の計算

ここでは、(2.37) 式から (2.40) 式の導出を行う。弱い相互作用過程 $\nu_\alpha \bar{\nu}_\alpha \leftrightarrow e^- e^+$, $\nu_\alpha e^\pm \leftrightarrow \nu_\alpha e^\pm$, $\bar{\nu}_\alpha e^\pm \leftrightarrow \bar{\nu}_\alpha e^\pm$ に対する粒子数遷移率とエネルギー遷移率を計算するには、各反応過程に対する 2 乗振幅を計算しなければならない。そこで、その際に必要になる弱い相互作用 Lagrangian についてまず簡単にまとめておく。弱い相互作用 Lagrangian は次式で与えられる。

$$\mathcal{L}_{\text{SM}} \supset \mathcal{L}_W + \mathcal{L}_Z \quad (\text{F.1})$$

$$\mathcal{L}_W = \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \bar{e}_\alpha \gamma^\mu P_L \nu_\alpha + h.c. \quad (\text{F.2})$$

$$\mathcal{L}_Z = \frac{g}{2 \cos \theta_W} Z_\mu [\bar{\nu}_\alpha \gamma^\mu P_L \nu_\alpha + \bar{e}_\alpha \gamma^\mu (C_V - C_A \gamma^5) e_\alpha] \quad (\text{F.3})$$

ここで、 g は $SU(2)_W$ の gauge 結合定数、 P_L は左巻き成分への射影演算子、 θ_W は Weinberg 角である。また、 C_A , C_V は $SU(2)_W$ 生成子の第 3 成分 T_W^3 と電荷 ($U(1)_{\text{em}}$ charge) Q を用いて

$$C_V = T_W^3 - 2Q \sin^2 \theta_W \quad (\text{F.4})$$

$$C_A = T_W^3 \quad (\text{F.5})$$

のように与えられる。

F.1 $\nu_\alpha \bar{\nu}_\alpha \leftrightarrow e^- e^+$

$\nu_\alpha \bar{\nu}_\alpha \leftrightarrow e^- e^+$ に対する衝突項は、2 章の近似 2~5 より

$$\begin{aligned} C_{\nu_\alpha \bar{\nu}_\alpha \leftrightarrow e^- e^+} [f_{\nu_\alpha}] &= -\frac{1}{2E_1} \int d\Pi_2 d\Pi_3 d\Pi_4 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{\nu_\alpha \bar{\nu}_\alpha \rightarrow e^- e^+}|^2 \\ &\quad \times \left(f_{\nu_\alpha}(p_1) f_{\bar{\nu}_\alpha}(p_2) - f_{e^-}(p_3) f_{e^+}(p_4) \right) \\ &= -\frac{1}{2E_1} \int d\Pi_2 (e^{-(p_1+p_2)/T_\nu} - e^{-(p_1+p_2)/T_\gamma}) \\ &\quad \times \int d\Pi_3 d\Pi_4 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{\nu_\alpha \bar{\nu}_\alpha \rightarrow e^- e^+}|^2 \end{aligned} \quad (\text{F.6})$$

となる。2 つ目の等号では、 $\delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4)$ があることから

$$f_{e^-}(\mathbf{p}_3)f_{e^+}(\mathbf{p}_4) = e^{-(E_3+E_4)/T_\gamma} = e^{-(E_1+E_2)/T_\gamma} = e^{-(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2)/T_\gamma}$$

が成り立つことを用いた。

まず、 $\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4$ 積分

$$I \equiv \int d\Pi_3 d\Pi_4 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4) \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{\nu_\alpha \bar{\nu}_\alpha \rightarrow e^- e^+}|^2 \quad (\text{F.7})$$

を実行する。 I は Lorentz 不変なので、積分する際にどの慣性系を選んでも問題ない。そこで、重心系 ($\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$, \mathbf{p}_1 と \mathbf{p}_3 のなす角: θ_{CM}) で評価することにする。このとき Mandelstam 変数は、

$$\begin{aligned} s &= 4\mathbf{p}_1^2 \\ t &= -2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_3 = -\mathbf{p}_1^2(1 - \cos \theta_{CM}) = -\frac{1}{2}s(1 - \cos \theta_{CM}) \\ u &= -2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_4 = -\mathbf{p}_1^2(1 + \cos \theta_{CM}) = -\frac{1}{2}s(1 + \cos \theta_{CM}) \end{aligned}$$

となるので、振幅の 2 乗和は 2 章の近似 3, 4 より

$$\begin{aligned} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{\nu_\alpha \bar{\nu}_\alpha \rightarrow e^- e^+}|^2 &= 128G_F^2 \left[g_{\alpha L}^2 \left(\frac{u}{2} \right)^2 + g_{\alpha R}^2 \left(\frac{u}{2} \right)^2 \right] \\ &= 8G_F^2 [g_{\alpha L}^2(1 + \cos \theta_{CM})^2 + g_{\alpha R}^2(1 - \cos \theta_{CM})^2] s^2 \end{aligned} \quad (\text{F.8})$$

となる。ここで、 $g_{\alpha L}, g_{\alpha R}$ は

$$g_{\alpha L} = \begin{cases} \frac{1}{2}(C_A + C_V + 2) = \frac{1}{2} + \sin^2 \theta_W & (\alpha = e) \\ \frac{1}{2}(C_V + C_A) = -\frac{1}{2} + \sin^2 \theta_W & (\alpha = \mu, \tau) \end{cases} \quad (\text{F.9})$$

$$g_{\alpha R} = \frac{1}{2}(C_V - C_A) = \sin^2 \theta_W \quad (\alpha = e, \mu, \tau) \quad (\text{F.10})$$

である。よって、 I は

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{32\pi^2} \int d\Omega_{CM} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{\nu_\alpha \bar{\nu}_\alpha \rightarrow e^- e^+}|^2 \\ &= \frac{1}{32\pi^2} 2\pi 8G_F^2 s^2 \int d\cos \theta_{CM} [g_{\alpha L}^2(1 + \cos \theta_{CM})^2 + g_{\alpha R}^2(1 - \cos \theta_{CM})^2] \\ &= \frac{4G_F^2}{3\pi} (g_{\alpha L}^2 + g_{\alpha R}^2) s^2 \end{aligned} \quad (\text{F.11})$$

となる。右辺は Lorentz 不変量だけで書かれているので、この表式は任意の慣性系で成り立つ。

次に \mathbf{p}_2 積分を行う。そのために \mathbf{p}_1 が z 軸方向を向くような座標系をとり、 \mathbf{p}_1 と \mathbf{p}_2 のなす角を θ_2 とする。この座標系では、Mandelstam 変数 s は

$$s = (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 = 2\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2(1 - \cos \theta_2)$$

となるので、衝突項は

$$\begin{aligned}
C_{\nu_\alpha \bar{\nu}_\alpha \leftrightarrow e^- e^+}(p_1) &= -\frac{1}{2p_1} \int d\Pi_2 (e^{-(p_1+p_2)/T_\nu} - e^{-(p_1+p_2)/T_\gamma}) \frac{4G_F^2}{3\pi} (g_{\alpha L}^2 + g_{\alpha R}^2) s^2 \\
&= -\frac{G_F^2 (g_{\alpha L}^2 + g_{\alpha R}^2)}{6\pi^4} p_1 2\pi \int d\cos\theta_2 (1 - \cos\theta_2)^2 \\
&\quad \times \int_0^\infty dp_2 p_2^3 (e^{-p_1/T_\nu} e^{-p_2/T_\nu} - e^{-p_1/T_\gamma} e^{-p_2/T_\gamma}) \\
&= \frac{16G_F^2 (g_{\alpha L}^2 + g_{\alpha R}^2)}{3\pi^3} p_1 \left(T_\gamma^4 e^{-p_1/T_\gamma} - T_\nu^4 e^{-p_1/T_\nu} \right)
\end{aligned} \tag{F.12}$$

となる。よって、 $\nu_\alpha \bar{\nu}_\alpha \leftrightarrow e^- e^+$ に対する粒子数遷移率とエネルギーの遷移率はそれぞれ

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\delta n_{\nu_\alpha}}{\delta t} \right|_{\nu_\alpha \bar{\nu}_\alpha \leftrightarrow e^- e^+} &= \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} C_{\nu_\alpha \bar{\nu}_\alpha \leftrightarrow e^- e^+}(p_1) \\
&= \frac{8G_F^2}{3\pi^5} (g_{\alpha L}^2 + g_{\alpha R}^2) \int_0^\infty dp_1 p_1^3 \left(T_\gamma^4 e^{-p_1/T_\gamma} - T_\nu^4 e^{-p_1/T_\nu} \right) \\
&= \frac{16G_F^2 (g_{\alpha L}^2 + g_{\alpha R}^2)}{\pi^5} (T_\gamma^8 - T_\nu^8)
\end{aligned} \tag{F.13}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\delta \rho_{\nu_\alpha}}{\delta t} \right|_{\nu_\alpha \bar{\nu}_\alpha \leftrightarrow e^- e^+} &= \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} E_1 C_{\nu_\alpha \bar{\nu}_\alpha \leftrightarrow e^- e^+}(p_1) \\
&= \frac{8G_F^2}{3\pi^5} (g_{\alpha L}^2 + g_{\alpha R}^2) \int_0^\infty dp_1 p_1^4 \left(T_\gamma^4 e^{-p_1/T_\gamma} - T_\nu^4 e^{-p_1/T_\nu} \right) \\
&= \frac{64G_F^2 (g_{\alpha L}^2 + g_{\alpha R}^2)}{\pi^5} (T_\gamma^9 - T_\nu^9)
\end{aligned} \tag{F.14}$$

となる。

F.2 $\nu_\alpha e^\pm \leftrightarrow \nu_\alpha e^\pm$

$\nu_\alpha e^\pm \leftrightarrow \nu_\alpha e^\pm$ に対する衝突項は、2章の近似 2~5 より

$$\begin{aligned}
C_{\nu_\alpha e^\pm \leftrightarrow \nu_\alpha e^\pm}[f_{\nu_\alpha}] &\equiv C_{\nu_\alpha e^- \leftrightarrow \nu_\alpha e^-}[f_{\nu_\alpha}] + C_{\nu_\alpha e^+ \leftrightarrow \nu_\alpha e^+}[f_{\nu_\alpha}] \\
&= -\frac{1}{2E_1} \int d\Pi_2 d\Pi_3 d\Pi_4 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \\
&\quad \times \left[\sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{\nu_\alpha e^- \rightarrow \nu_\alpha e^-}|^2 + \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{\nu_\alpha e^+ \rightarrow \nu_\alpha e^+}|^2 \right] \left(e^{-p_1/T_\nu - p_2/T_\gamma} - e^{-p_3/T_\nu - p_4/T_\gamma} \right) \\
&= -\frac{1}{2E_1} \left[e^{-p_1/T_\nu} \int d\Pi_2 e^{-p_2/T_\gamma} \int d\Pi_3 d\Pi_4 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \right. \\
&\quad \left. - \int d\Pi_2 d\Pi_3 d\Pi_4 e^{-p_3/T_\nu - p_4/T_\gamma} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \right] \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{\nu_\alpha e^\pm \rightarrow \nu_\alpha e^\pm}|^2
\end{aligned} \tag{F.15}$$

となる。ここで、 $\sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{\nu_\alpha e^\pm \rightarrow \nu_\alpha e^\pm}|^2$ は 2 章の近似 3, 4 を用いると

$$\begin{aligned} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{\nu_\alpha e^\pm \rightarrow \nu_\alpha e^\pm}|^2 &\equiv \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{\nu_\alpha e^- \rightarrow \nu_\alpha e^-}|^2 + \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{\nu_\alpha e^+ \rightarrow \nu_\alpha e^+}|^2 \\ &= 128G_F^2 \left[g_{\alpha L}^2 \left(\frac{s}{2} \right)^2 + g_{\alpha R}^2 \left(\frac{u}{2} \right)^2 \right] + 128G_F^2 \left[g_{\alpha L}^2 \left(\frac{u}{2} \right)^2 + g_{\alpha R}^2 \left(\frac{s}{2} \right)^2 \right] \\ &= 128G_F^2 (g_{\alpha L}^2 + g_{\alpha R}^2) \left[\left(\frac{s}{2} \right)^2 + \left(\frac{u}{2} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{F.16})$$

となる。

まず、1 項目から計算する。1 項目は $\nu_\alpha \bar{\nu}_\alpha \leftrightarrow e^- e^+$ の場合と全く同じように計算することができて、

$$(C_{\nu_\alpha e^\pm \leftrightarrow \nu_\alpha e^\pm} \text{ の 1 項目}) = -\frac{16G_F^2 (g_{\alpha L}^2 + g_{\alpha R}^2) T_\gamma^4 p_1 e^{-p_1/T_\nu}}{3\pi^3} \quad (\text{F.17})$$

となる。

次に、2 項目を計算する。2 項目は分布関数 $e^{-p/T}$ を積分の外に出せないため、1 項目のように Lorentz 不変性をうまく使って簡単に積分することができない。そこで、今回は付録 C の積分公式 (C.34) を使って計算する。付録 C で定めた 4 元運動量を用いると、Mandelstam 変数は

$$\begin{aligned} s &= 2p_1 \cdot p_2 = 2p_1 p_2 (1 - \cos \alpha) \\ t &= -2p_1 \cdot p_3 = -2p_1 p_3 (1 - \cos \theta) \\ u &= -s - t = -2p_1 p_2 (1 - \cos \alpha) + 2p_1 p_3 (1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

となる。これにより振幅の 2 乗和は

$$\begin{aligned} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{\nu_\alpha e^\pm \rightarrow \nu_\alpha e^\pm}|^2 &= 128G_F^2 (g_{\alpha L}^2 + g_{\alpha R}^2) \left[p_1^2 p_2^2 (1 - \cos \alpha)^2 + (-p_1 p_2 (1 - \cos \alpha) + p_1 p_3 (1 - \cos \theta))^2 \right] \\ &= 256G_F^2 (g_{\alpha L}^2 + g_{\alpha R}^2) p_1^2 \left[p_2^2 \cos^2 \alpha + p_2 (-2p_2 + p_3 (1 - \cos \theta)) \cos \alpha \right. \\ &\quad \left. + p_2 (p_2 - p_3 (1 - \cos \theta)) + \frac{1}{2} p_3^2 (1 - \cos \theta)^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{F.18})$$

となる。積分公式 (C.34) に含まれる $F(\{p_i\}, \cos \theta)$ は付録 B を用いて

$$\begin{aligned} F(\{p_i\}, \cos \theta) &= \int_{\cos \alpha_-}^{\cos \alpha_+} d \cos \alpha \frac{1}{\sqrt{a \cos^2 \alpha + b \cos \alpha + c}} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{\nu_\alpha e^\pm \rightarrow \nu_\alpha e^\pm}|^2 \\ &= 256G_F^2 (g_{\alpha L}^2 + g_{\alpha R}^2) p_1^2 \frac{\pi}{\sqrt{-a}} \left[p_2^2 \frac{(3b^2 - 4ac)}{8a^2} + p_2 (-2p_2 + p_3 (1 - \cos \theta)) \frac{-b}{2a} \right. \\ &\quad \left. + p_2 (p_2 - p_3 (1 - \cos \theta)) + \frac{1}{2} p_3^2 (1 - \cos \theta)^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{F.19})$$

のように計算でき、 $\Lambda(f)$ は今の場合、

$$\begin{aligned} \Lambda(f) &= e^{-p_3/T_\nu} e^{-p_4/T_\gamma} \\ &= e^{-p_3/T_\nu} e^{-(p_1+p_2-p_3)/T_\gamma} \\ &= e^{-p_1/T_\gamma} e^{-p_3(T_\gamma-T_\nu)/T_\nu T_\gamma} e^{-p_2/T_\gamma} \end{aligned} \quad (\text{F.20})$$

であるので、

$$\begin{aligned}
& (C_{\nu_\alpha e^\pm \leftrightarrow \nu_\alpha e^\pm} \text{の2項目}) \\
&= \frac{1}{2p_1} \frac{1}{2(2\pi)^4} 256G_F^2(g_{\alpha L}^2 + g_{\alpha R}^2) \pi p_1^2 e^{-p_1/T_\gamma} \cdot \int_0^\infty dp_2 \int_0^{p_1+p_2} dp_3 \int_{\max(\cos\theta, -1)}^1 d\cos\theta \\
&\times p_2 e^{-p_2/T_\gamma} p_3 e^{-p_3(T_\gamma - T_\nu)/T_\nu T_\gamma} \frac{1}{\sqrt{-a}} \left[p_2^2 \frac{(3b^2 - 4ac)}{8a^2} + p_2(-2p_2 + p_3(1 - \cos\theta)) \frac{b}{2(-a)} \right. \\
&\quad \left. + p_2(p_2 - p_3(1 - \cos\theta)) + \frac{1}{2} p_3^2(1 - \cos\theta)^2 \right] \\
&= \frac{4G_F^2(g_{\alpha L}^2 + g_{\alpha R}^2)}{\pi^3} p_1 e^{-p_1/T_\gamma} \cdot \frac{4T_\gamma^2 T_\nu^2}{p_1^3 (T_\nu - T_\gamma)^3} e^{-p_1/T_\nu} \left[-e^{p_1/T_\nu} T_\gamma^2 \{p_1^2 (T_\gamma - T_\nu)^2 \right. \\
&\quad + 2p_1 T_\gamma (T_\gamma - T_\nu)^2 + 2T_\gamma^2 (2T_\gamma^2 - 2T_\gamma T_\nu + T_\nu^2)\} + 2e^{p_1/T_\gamma} T_\gamma^2 \{p_1^2 (T_\gamma - T_\nu)^2 \\
&\quad \left. + p_1 T_\nu (2T_\gamma^2 - 3T_\gamma T_\nu + T_\nu^2) + T_\nu^2 (2T_\gamma^2 - 2T_\gamma T_\nu + T_\nu^2)\} \right] \quad (\text{F.21})
\end{aligned}$$

となる。この積分はかなり煩雑であるため Mathematica を用いて計算した。

以上まとめると衝突項は

$$\begin{aligned}
C_{\nu_\alpha e^\pm \leftrightarrow \nu_\alpha e^\pm}(p_1) &= \frac{16G_F^2(g_{\alpha L}^2 + g_{\alpha R}^2)T_\gamma^2}{3p_1^2 \pi^3 (T_\nu - T_\gamma)^3} e^{-p_1/T_\nu} \left[4p_1^3 T_\gamma^2 (T_\gamma - T_\nu)^3 - 6(-1 + e^{p_1(1/T_\nu - 1/T_\gamma)}) \right. \\
&\times T_\gamma^2 T_\nu^4 (2T_\gamma^2 - 2T_\gamma T_\nu + T_\nu^2) + 3p_1^2 T_\nu^2 (T_\gamma - T_\nu)^2 (2T_\gamma^2 - e^{p_1(1/T_\nu - 1/T_\gamma)} T_\nu^2) \\
&\left. + 6p_1 T_\gamma T_\nu^3 (T_\gamma - T_\nu) \{2T_\gamma^2 - (1 + e^{p_1(1/T_\nu - 1/T_\gamma)}) T_\gamma T_\nu + e^{p_1(1/T_\nu - 1/T_\gamma)} T_\nu^2\} \right] \quad (\text{F.22})
\end{aligned}$$

となる。よって、 $\nu_\alpha e^\pm \leftrightarrow \nu_\alpha e^\pm$ に対する粒子数遷移率とエネルギーの遷移率は

$$\left. \frac{\delta n_{\nu_\alpha}}{\delta t} \right|_{\nu_\alpha e^\pm \leftrightarrow \nu_\alpha e^\pm} = 0 \quad (\text{F.23})$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\delta \rho_{\nu_\alpha}}{\delta t} \right|_{\nu_\alpha e^\pm \leftrightarrow \nu_\alpha e^\pm} &= \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} E_1 C_{\nu_\alpha e^\pm \leftrightarrow \nu_\alpha e^\pm}(p_1) \\
&= \frac{112G_F^2(g_{\alpha L}^2 + g_{\alpha R}^2)T_\gamma^4 T_\nu^4 (T_\gamma - T_\nu)}{\pi^5} \quad (\text{F.24})
\end{aligned}$$

となる。(F.23) 式が0になるのは、 $\nu_\alpha e^\pm \leftrightarrow \nu_\alpha e^\pm$ の反応の前後でニュートリノの数が変化しないことから直ちに分かる。

F.3 $\bar{\nu}_\alpha e^\pm \leftrightarrow \bar{\nu}_\alpha e^\pm$

$\bar{\nu}_\alpha e^\pm \leftrightarrow \bar{\nu}_\alpha e^\pm$ に対する衝突項は、2章の近似2~5より

$$\begin{aligned}
C_{\bar{\nu}_\alpha e^\pm \leftrightarrow \bar{\nu}_\alpha e^\pm}[f_{\bar{\nu}_\alpha}] &\equiv C_{\bar{\nu}_\alpha e^- \leftrightarrow \bar{\nu}_\alpha e^-}[f_{\bar{\nu}_\alpha}] + C_{\bar{\nu}_\alpha e^+ \leftrightarrow \bar{\nu}_\alpha e^+}[f_{\bar{\nu}_\alpha}] \\
&= -\frac{1}{2E_1} \left[e^{-p_1/T_\nu} \int d\Pi_2 e^{-p_2/T_\gamma} \int d\Pi_3 d\Pi_4 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \right. \\
&\quad \left. - \int d\Pi_2 d\Pi_3 d\Pi_4 e^{-p_3/T_\nu - p_4/T_\gamma} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \right] \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{\bar{\nu}_\alpha e^\pm \rightarrow \bar{\nu}_\alpha e^\pm}|^2 \quad (\text{F.25})
\end{aligned}$$

となる。ここで、 $\sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{\bar{\nu}_\alpha e^\pm \rightarrow \bar{\nu}_\alpha e^\pm}|^2$ は 2 章の近似 3, 4 を用いると

$$\begin{aligned} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{\bar{\nu}_\alpha e^\pm \rightarrow \bar{\nu}_\alpha e^\pm}|^2 &\equiv \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{\bar{\nu}_\alpha e^- \rightarrow \bar{\nu}_\alpha e^-}|^2 + \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{\bar{\nu}_\alpha e^+ \rightarrow \bar{\nu}_\alpha e^+}|^2 \\ &= 128G_F^2 \left[g_{\alpha L}^2 \left(\frac{u}{2} \right)^2 + g_{\alpha R}^2 \left(\frac{s}{2} \right)^2 \right] + 128G_F^2 \left[g_{\alpha L}^2 \left(\frac{s}{2} \right)^2 + g_{\alpha R}^2 \left(\frac{u}{2} \right)^2 \right] \\ &= 128G_F^2 (g_{\alpha L}^2 + g_{\alpha R}^2) \left[\left(\frac{s}{2} \right)^2 + \left(\frac{u}{2} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{F.26})$$

となる。よって、 $\nu_\alpha e^\pm \leftrightarrow \nu_\alpha e^\pm$ の場合と衝突項の構造が同じで、振幅の 2 乗和の形も同じなので、

$$C_{\bar{\nu}_\alpha e^\pm \leftrightarrow \bar{\nu}_\alpha e^\pm} = C_{\nu_\alpha e^\pm \leftrightarrow \nu_\alpha e^\pm} \quad (\text{F.27})$$

となる。よって、 $\bar{\nu}_\alpha e^\pm \leftrightarrow \bar{\nu}_\alpha e^\pm$ に対する粒子数遷移率とエネルギーの遷移率は

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta n_{\bar{\nu}_\alpha}}{\delta t} \right|_{\bar{\nu}_\alpha e^\pm \leftrightarrow \bar{\nu}_\alpha e^\pm} &= \left. \frac{\delta n_{\nu_\alpha}}{\delta t} \right|_{\nu_\alpha e^\pm \leftrightarrow \nu_\alpha e^\pm} \\ \left. \frac{\delta \rho_{\bar{\nu}_\alpha}}{\delta t} \right|_{\bar{\nu}_\alpha e^\pm \leftrightarrow \bar{\nu}_\alpha e^\pm} &= \left. \frac{\delta \rho_{\nu_\alpha}}{\delta t} \right|_{\nu_\alpha e^\pm \leftrightarrow \nu_\alpha e^\pm} \end{aligned} \quad (\text{F.28})$$

となる。

付録 G

脱結合した粒子の分布関数

ここでは、脱結合した粒子の分布関数がどのように記述されるかについて議論する。脱結合した粒子は膨張宇宙の中で、重力のみを感じながら自由に運動することになる。このような曲がった時空中での自由粒子の運動は次の測地線方程式によって記述される。

$$\frac{dp^\mu}{d\lambda} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu p^\nu p^\rho = 0 \quad (\text{G.1})$$

ここで、 λ はアフィンパラメータ、 $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ は Christoffel 記号、 $p^\mu = dx^\mu/d\lambda$ は 4 元運動量である。一様な時空に対応する Robertson–Walker 計量のもとで、 $\mu = 0$ 成分の式を解くと

$$p \propto R^{-1} \quad (\text{G.2})$$

を得る [5]。ここで、 $p = |\mathbf{p}|$ 、 R は scale factor である。

以上の結果を用いて、脱結合時に十分相対論的であった粒子の脱結合後の分布関数を求める。状況設定として時刻 t_D にある粒子が十分相対論的な状態で熱浴から瞬間的に脱結合したとし、脱結合後の任意の時刻を t とする。また、時刻 t_D における物理量は下付き文字 "D" をつけて表すことにする。まず、粒子数密度は一般に

$$n = g \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f(\mathbf{p}, t) = \frac{g}{2\pi^2} \int_0^\infty dp p^2 f(p, t) \quad (\text{G.3})$$

と書けるので、 $f(\mathbf{p}, t)$ は形式的に

$$\frac{dn}{dp} = \frac{g}{2\pi^2} p^2 f(p, t) \quad (\text{G.4})$$

と書くことができる。脱結合した粒子の粒子数は固定されるので $n \propto R^{-3} \propto p^3$ となる。このとき、分布関数は上式より

$$f(\mathbf{p}, t) \propto \frac{1}{p^2} \frac{dn}{dp} = \text{const.} \quad (\text{G.5})$$

となる。よって、脱結合した粒子の分布関数は

$$\begin{aligned} f(\mathbf{p}, t) &= f(\mathbf{p}_D, t_D) \simeq \left[\exp\left(\frac{p_D - \mu_D}{T_D}\right) \pm 1 \right]^{-1} \\ &= \left[\exp\left(\frac{pR - \mu_D R_D}{T_D R_D}\right) \pm 1 \right]^{-1} \\ &= \left[\exp\left(\frac{p - \mu}{T}\right) \pm 1 \right]^{-1} \end{aligned} \quad (\text{G.6})$$

となる。ここで、2つ目の等号では $p_D R_D = p R$ を用いた。また、 T, μ は

$$T = T_D \frac{R_D}{R}, \quad \mu = \mu_D \frac{R_D}{R} \quad (\text{G.7})$$

である。以上から、脱結合時に十分相対論的であれば、脱結合した後も相対論的な熱平衡分布関数の形を保ち続けることが分かる

付録 H

熱力学量の公式

ここでは、内部自由度 g を持ち熱平衡分布関数 (Fermi-Dirac、もしくは Bose-Einstein 分布関数) に従う粒子の数密度 n 、エネルギー密度 ρ 、さらにそれらを温度 T と化学ポテンシャル μ で微分したもの、圧力 P といった熱力学量に対する公式についてまとめておく [8]。これらの公式は数値計算を行う際に必要になってくる。

Fermi-Dirac

$$n^{\text{FD}} = \frac{g}{2\pi^2} T^3 \int_{m/T}^{\infty} dx \frac{x \sqrt{x^2 - m^2/T^2}}{e^{x-\mu/T} + 1} \quad (\text{H.1})$$

$$\rho^{\text{FD}} = \frac{g}{2\pi^2} T^4 \int_{m/T}^{\infty} dx \frac{x^2 \sqrt{x^2 - m^2/T^2}}{e^{x-\mu/T} + 1} \quad (\text{H.2})$$

$$P^{\text{FD}} = \frac{g}{6\pi^2} T^4 \int_{m/T}^{\infty} dx \frac{(x^2 - m^2/T^2)^{3/2}}{e^{x-\mu/T} + 1} \quad (\text{H.3})$$

$$\frac{\partial n^{\text{FD}}}{\partial T} = \frac{g}{2\pi^2} T^2 \int_{m/T}^{\infty} dx x \sqrt{x^2 - m^2/T^2} \frac{(x - \mu/T)}{4} \cosh^{-2} \left(\frac{x - \mu/T}{2} \right) \quad (\text{H.4})$$

$$\frac{\partial \rho^{\text{FD}}}{\partial T} = \frac{g}{2\pi^2} T^3 \int_{m/T}^{\infty} dx x^2 \sqrt{x^2 - m^2/T^2} \frac{(x - \mu/T)}{4} \cosh^{-2} \left(\frac{x - \mu/T}{2} \right) \quad (\text{H.5})$$

$$\frac{\partial n^{\text{FD}}}{\partial \mu} = \frac{g}{2\pi^2} T^2 \int_{m/T}^{\infty} dx x \sqrt{x^2 - m^2/T^2} \frac{1}{2} \left[\cosh \left(x - \frac{\mu}{T} \right) + 1 \right]^{-1} \quad (\text{H.6})$$

$$\frac{\partial \rho^{\text{FD}}}{\partial \mu} = \frac{g}{2\pi^2} T^3 \int_{m/T}^{\infty} dx x^2 \sqrt{x^2 - m^2/T^2} \frac{1}{2} \left[\cosh \left(x - \frac{\mu}{T} \right) + 1 \right]^{-1} \quad (\text{H.7})$$

Bose-Einstein

$$n^{\text{BE}} = \frac{g}{2\pi^2} T^3 \int_{m/T}^{\infty} dx \frac{x \sqrt{x^2 - m^2/T^2}}{e^{x-\mu/T} - 1} \quad (\text{H.8})$$

$$\rho^{\text{BE}} = \frac{g}{2\pi^2} T^4 \int_{m/T}^{\infty} dx \frac{x^2 \sqrt{x^2 - m^2/T^2}}{e^{x-\mu/T} - 1} \quad (\text{H.9})$$

$$P^{\text{BE}} = \frac{g}{6\pi^2} T^4 \int_{m/T}^{\infty} dx \frac{(x^2 - m^2/T^2)^{3/2}}{e^{x-\mu/T} - 1} \quad (\text{H.10})$$

$$\frac{\partial n^{\text{BE}}}{\partial T} = \frac{g}{2\pi^2} T^2 \int_{m/T}^{\infty} dx x \sqrt{x^2 - m^2/T^2} \frac{(x - \mu/T)}{4} \sinh^{-2} \left(\frac{x - \mu/T}{2} \right) \quad (\text{H.11})$$

$$\frac{\partial \rho^{\text{BE}}}{\partial T} = \frac{g}{2\pi^2} T^3 \int_{m/T}^{\infty} dx x^2 \sqrt{x^2 - m^2/T^2} \frac{(x - \mu/T)}{4} \sinh^{-2} \left(\frac{x - \mu/T}{2} \right) \quad (\text{H.12})$$

$$\frac{\partial n^{\text{BE}}}{\partial \mu} = \frac{g}{2\pi^2} T^2 \int_{m/T}^{\infty} dx x \sqrt{x^2 - m^2/T^2} \frac{1}{4} \sinh^{-2} \left(\frac{x - \mu/T}{2} \right) \quad (\text{H.13})$$

$$\frac{\partial \rho^{\text{BE}}}{\partial \mu} = \frac{g}{2\pi^2} T^3 \int_{m/T}^{\infty} dx x^2 \sqrt{x^2 - m^2/T^2} \frac{1}{4} \sinh^{-2} \left(\frac{x - \mu/T}{2} \right) \quad (\text{H.14})$$

Maxwell-Boltzmann

$$n^{\text{MB}} = g \frac{m^2 T e^{\mu/T}}{2\pi^2} K_2 \left(\frac{m}{T} \right) \quad (\text{H.15})$$

$$\rho^{\text{MB}} = g \frac{m^2 T e^{\mu/T}}{2\pi^2} \left[m K_1 \left(\frac{m}{T} \right) + 3T K_2 \left(\frac{m}{T} \right) \right] \quad (\text{H.16})$$

$$p^{\text{MB}} = g \frac{m^2 T e^{\mu/T}}{2\pi^2} T K_2 \left(\frac{m}{T} \right) \quad (\text{H.17})$$

ここで、 K_j は第 2 種変形 Bessel 関数である (付録 A 参照)。

massless の場合

熱力学量	Fermi-Dirac	Bose-Einstein
n	$-g \frac{T^3}{\pi^2} \text{Li}_3(-x)$	$g \frac{T^3}{\pi^2} \text{Li}_3(x)$
ρ	$-g \frac{3T^4}{\pi^2} \text{Li}_4(-x)$	$g \frac{3T^4}{\pi^2} \text{Li}_4(x)$
p	$\rho/3$	$\rho/3$
$\partial n / \partial T$	$g \frac{T(\mu \text{Li}_2(-x) - 3T \text{Li}_3(-x))}{\pi^2}$	$g \frac{T(3T \text{Li}_3(x) - \mu \text{Li}_2(x))}{\pi^2}$
$\partial \rho / \partial T$	$g \frac{3T^2(\mu \text{Li}_3(-x) - 4T \text{Li}_4(-x))}{\pi^2}$	$g \frac{3T^2(4T \text{Li}_4(x) - \mu \text{Li}_3(x))}{\pi^2}$
$\partial n / \partial \mu$	$-g \frac{T^2}{\pi^2} \text{Li}_2(-x)$	$g \frac{T^2}{\pi^2} \text{Li}_2(x)$
$\partial \rho / \partial \mu$	$-g \frac{3T^3}{\pi^2} \text{Li}_3(-x)$	$g \frac{3T^3}{\pi^2} \text{Li}_3(x)$

ここで、 $x = e^{\mu/T}$ 、 $\text{Li}_s(z)$ は多重対数関数である (付録 A 参照)。

massless の場合 ($\mu = 0$)

熱力学量	Fermi-Dirac	Bose-Einstein	
n	$g \frac{3}{4} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3$	$g \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3$	
ρ	$g \frac{7}{8} \frac{\pi^2}{30} T^4$	$g \frac{\pi^2}{30} T^4$	
p	$\rho/3$	$\rho/3$	
$\partial n / \partial T$	$3n/T$	$3n/T$	
$\partial \rho / \partial T$	$4\rho/T$	$4\rho/T$	(H.19)

ここで、 $\zeta(3) \simeq 1.20206$ である。

付録 I

Boltzmann 方程式と Gamow の基準

ある粒子種 a が平衡状態であるかどうかは次式によっておおまかに判別することができた。

$$\begin{aligned}\Gamma &\gtrsim H \implies \text{粒子種 } a \text{ は平衡状態} \\ \Gamma &\lesssim H \implies \text{粒子種 } a \text{ は脱結合状態}\end{aligned}\tag{I.1}$$

ここで、 H は Hubble rate、 Γ は粒子種 a を平衡状態に向かわせるような反応過程に対する反応率である。この条件は Gamow の基準と呼ばれている。Gamow の基準は Boltzmann 方程式の立場から見るとより意味が明確になる。ここでは、Gamow の基準が Boltzmann 方程式によってどのように解釈できるかを議論する。

まず、粒子種 a の粒子数密度 n_a に対する (積分された) Boltzmann 方程式は (2.17) 式で与えられる。

$$\frac{dn_a}{dt} = -3Hn_a + \frac{\delta n_a}{\delta t}\tag{I.2}$$

ここで、

$$\frac{\delta n_a}{\delta t} = \sum_{X,Y} \frac{\delta n_a}{\delta t} \Big|_{a+X \leftrightarrow Y}\tag{I.3}$$

$$\frac{\delta n_a}{\delta t} \Big|_{a+X \leftrightarrow Y} = \frac{\delta n_a}{\delta t} \Big|_{a+X \rightarrow Y} + \frac{\delta n_a}{\delta t} \Big|_{Y \rightarrow a+X}\tag{I.4}$$

である。上式から分かるように、 n_a が時間変化する原因として宇宙が膨張することによって粒子数密度が薄まる効果 $-3Hn_a$ と、粒子種 a が他の粒子と相互作用することによって a の粒子数が変化する効果 $\delta n_a/\delta t$ の 2 つが存在する。ある反応過程 $a + X \rightarrow Y$ によって粒子数密度が変化する効果 $\delta n_a/\delta t|_{a+X \rightarrow Y}$ が宇宙膨張によって粒子数密度が薄まる効果 $-3Hn_a$ と比べて無視できるほど小さいとき、 $a + X \rightarrow Y$ は初期宇宙において効いてこない、つまりほとんど起こっていないと見なすことができる。逆に、 $a + X \rightarrow Y$ によって粒子数密度が変化する効果が宇宙膨張によって粒子数密度が薄まる効果と比べて同程度かそれ以上の影響力があるとき、 $a + X \rightarrow Y$ は初期宇宙において効いてくる、つまり十分すばやく起こっていると見なすことができる。これを式で表すと次のようになる。

$$\begin{aligned}-\frac{1}{n_a H} \frac{\delta n_a}{\delta t} \Big|_{a+X \rightarrow Y} &\gtrsim 1 \implies \text{反応過程 } a + X \rightarrow Y \text{ は十分すばやく起こっている.} \\ -\frac{1}{n_a H} \frac{\delta n_a}{\delta t} \Big|_{a+X \rightarrow Y} &\ll 1 \implies \text{反応過程 } a + X \rightarrow Y \text{ はほとんど起こっていない.}\end{aligned}\tag{I.5}$$

この条件式は Gamow の基準と等価であることが分かる。つまり、上式において左辺の H 以外の部分が

$a + X \rightarrow Y$ の反応率に対応する;

$$\langle \Gamma_{a+X \rightarrow Y} \rangle = - \frac{1}{n_a} \frac{\delta n_a}{\delta t} \Big|_{a+X \rightarrow Y}. \quad (\text{I.6})$$

以下では、Boltzmann 方程式と (I.6) 式のいくつかの応用例を見ていく。

$a \leftrightarrow 1 + 2$ ($T_1 = T_2 = T, \mu_1 = \mu_2 = \mu$) の場合

粒子種 a の関与する反応過程として $a \leftrightarrow 1 + 2$ (粒子種 1, 2 は massless 粒子) が存在する場合を考える。この時、粒子種 a の粒子数遷移率は次式で与えられる。

$$\frac{\delta n_a}{\delta t} = \frac{\delta n_a}{\delta t} \Big|_{a \leftrightarrow 1+2} + \dots \quad (\text{I.7})$$

ここで、

$$\frac{\delta n_a}{\delta t} \Big|_{a \leftrightarrow 1+2} = \frac{\delta n_a}{\delta t} \Big|_{a \rightarrow 1+2} + \frac{\delta n_a}{\delta t} \Big|_{1+2 \rightarrow a} \quad (\text{I.8})$$

である。以下、粒子種 $a, 1, 2$ は近似的に Maxwell-Boltzmann 統計に従うとする。この時、 $a \rightarrow 1 + 2, 1 + 2 \rightarrow a$ それぞれに対する粒子種 a の粒子数遷移率は、付録 E より

$$\frac{\delta n_a}{\delta t} \Big|_{a \rightarrow 1+2} = - \frac{m_a^2 g_a \Gamma_a}{2\pi^2} T_a e^{\mu_a/T_a} K_1 \left(\frac{m_a}{T_a} \right) \quad (\text{I.9})$$

$$\frac{\delta n_a}{\delta t} \Big|_{1+2 \rightarrow a} = \frac{m_a^2 g_a \Gamma_a}{2\pi^2} T e^{2\mu/T} K_1 \left(\frac{m_a}{T} \right) \quad (\text{I.10})$$

となる。また、粒子種 $a, 1$ の数密度は付録 H より次式で与えられる。

$$n_a = g_a \frac{m_a^2 T_a e^{\mu_a/T_a}}{2\pi^2} K_2 \left(\frac{m_a}{T_a} \right), \quad n_1 = g_1 \frac{T^3}{\pi^2} e^{\mu/T} \quad (\text{I.11})$$

よって、 $a \rightarrow 1 + 2$ に対する反応率は (I.6) 式より

$$\langle \Gamma_{a \rightarrow 1+2} \rangle = - \frac{1}{n_a} \frac{\delta n_a}{\delta t} \Big|_{a \rightarrow 1+2} = \Gamma_a \frac{K_1 \left(\frac{m_a}{T_a} \right)}{K_2 \left(\frac{m_a}{T_a} \right)} \quad (\text{I.12})$$

となる。

同様に $1 + 2 \rightarrow a$ に対する反応率は、 $|\mu/T| \ll 1$ とすると

$$\begin{aligned} \langle \Gamma_{1+2 \rightarrow a} \rangle &= - \frac{1}{n_1} \frac{\delta n_1}{\delta t} \Big|_{1+2 \rightarrow a} = \frac{1}{n_1} \frac{\delta n_a}{\delta t} \Big|_{1+2 \rightarrow a} \\ &= \Gamma_a \frac{g_a}{2g_1} e^{\mu/T} \left(\frac{m_a}{T} \right)^2 K_1 \left(\frac{m_a}{T} \right) \\ &\simeq \Gamma_a \frac{g_a}{2g_1} \left(\frac{m_a}{T} \right)^2 K_1 \left(\frac{m_a}{T} \right) \end{aligned} \quad (\text{I.13})$$

となる。ここで、 $1 + 2 \rightarrow a$ に対する粒子数保存則

$$- \frac{\delta n_1}{\delta t} \Big|_{1+2 \rightarrow a} = \frac{\delta n_a}{\delta t} \Big|_{1+2 \rightarrow a} \quad (\text{I.14})$$

を用いた。^{*1}ここでの一連の議論の結果得られた (I.12) 式と (I.13) 式は、[8] の (A.48) 式と (A.49) 式を完全に再現している。

^{*1} 粒子種 1 と 2 が同種粒子の場合、(I.14) 式の右辺を 2 倍する必要がある。

$1 + 2 \leftrightarrow 3 + 4$ ($T_1 = T_2 = T$, $T_3 = T_4 = T'$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, $\mu_3 = \mu_4 = \mu'$) の場合

粒子種 1 の関与する反応過程として $1 + 2 \leftrightarrow 3 + 4$ が存在する場合を考える。この時、粒子種 1 の粒子数遷移率は次式で与えられる。

$$\frac{\delta n_1}{\delta t} = \frac{\delta n_1}{\delta t} \Big|_{1+2 \leftrightarrow 3+4} + \dots \quad (\text{I.15})$$

ここで、

$$\frac{\delta n_1}{\delta t} \Big|_{1+2 \leftrightarrow 3+4} = \frac{\delta n_1}{\delta t} \Big|_{1+2 \rightarrow 3+4} + \frac{\delta n_1}{\delta t} \Big|_{3+4 \rightarrow 1+2} \quad (\text{I.16})$$

である。以下、全ての粒子種は近似的に Maxwell-Boltzmann 統計に従うとする。この時、 $1 + 2 \leftrightarrow 3 + 4$ に対する衝突項は

$$\begin{aligned} C_{1+2 \leftrightarrow 3+4}[f_1] &= -\frac{1}{2E_1} \int \prod_{i=2}^4 d\Pi_i (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{1+2 \rightarrow 3+4}|^2 (f_1 f_2 - f_3 f_4) \\ &= -g_1 \int g_2 \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} (e^{-(E_1+E_2)/T} e^{2\mu/T} - e^{-(E_1+E_2)/T'} e^{2\mu'/T'}) v_{12} \\ &\times \frac{1}{4E_1 E_2 v_{12}} \int d\Pi_3 d\Pi_4 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \frac{1}{g_1 g_2} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{1+2 \rightarrow 3+4}|^2 \\ &= -g_1 \int g_2 \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} (e^{-(E_1+E_2)/T} e^{2\mu/T} - e^{-(E_1+E_2)/T'} e^{2\mu'/T'}) \sigma_{1+2 \rightarrow 3+4} v_{12} \quad (\text{I.17}) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\sigma_{1+2 \rightarrow 3+4}$ は $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ に対する反応断面積、 v_{ij} は粒子種 i, j 間の‘相対速度’で次式で定義される。

$$v_{ij} = \frac{\sqrt{(p_i \cdot p_j)^2 - m_i^2 m_j^2}}{E_i E_j} \quad (\text{I.18})$$

(I.17) 式を用いると、 $1 + 2 \leftrightarrow 3 + 4$ に対する粒子数遷移率は

$$\begin{aligned} \frac{\delta n_1}{\delta t} \Big|_{1+2 \leftrightarrow 3+4} &= \int \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} C_{1+2 \leftrightarrow 3+4}[f_1] \\ &= -\langle \sigma_{1+2 \rightarrow 3+4} v_{12} \rangle_T e^{2\mu/T} n_1^{eq}(T) n_2^{eq}(T) + \langle \sigma_{1+2 \rightarrow 3+4} v_{12} \rangle_{T'} e^{2\mu'/T'} n_1^{eq}(T') n_2^{eq}(T') \quad (\text{I.19}) \end{aligned}$$

となるので、

$$\frac{\delta n_1}{\delta t} \Big|_{1+2 \rightarrow 3+4} = -\langle \sigma_{1+2 \rightarrow 3+4} v_{12} \rangle_T e^{2\mu/T} n_1^{eq}(T) n_2^{eq}(T) \quad (\text{I.20})$$

$$\frac{\delta n_1}{\delta t} \Big|_{3+4 \rightarrow 1+2} = \langle \sigma_{1+2 \rightarrow 3+4} v_{12} \rangle_{T'} e^{2\mu'/T'} n_1^{eq}(T') n_2^{eq}(T') \quad (\text{I.21})$$

となる。ここで、 $\langle \sigma_{1+2 \rightarrow 3+4} v_{12} \rangle_T$, $n_i^{eq}(T)$ はそれぞれ次のように定義される。

$$n_i^{eq}(T) = g_i \int \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3} e^{-E_i/T} = g_i \frac{m_i^2 T}{2\pi^2} K_2\left(\frac{m_i}{T}\right) \quad (\text{I.22})$$

$$\langle \sigma_{1+2 \rightarrow 3+4} v_{12} \rangle_T = g_1 \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} g_2 \int \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} \frac{e^{-E_1/T}}{n_1^{eq}(T)} \frac{e^{-E_2/T}}{n_2^{eq}(T)} \sigma_{1+2 \rightarrow 3+4} v_{12} \quad (\text{I.23})$$

よって、(I.6) 式より $1+2 \rightarrow 3+4$, $3+4 \rightarrow 1+2$ それぞれに対する反応率は $\mu/T \ll 1$ とすると

$$\langle \Gamma_{1+2 \rightarrow 3+4} \rangle = - \frac{1}{n_1} \frac{\delta n_1}{\delta t} \Big|_{1+2 \rightarrow 3+4} = \langle \sigma_{1+2 \rightarrow 3+4} v_{12} \rangle_T e^{\mu/T} n_2^{eq}(T) \simeq \langle \sigma_{1+2 \rightarrow 3+4} v_{12} \rangle_T n_2^{eq}(T) \quad (\text{I.24})$$

$$\langle \Gamma_{3+4 \rightarrow 1+2} \rangle = - \frac{1}{n_3} \frac{\delta n_3}{\delta t} \Big|_{3+4 \rightarrow 1+2} = \frac{1}{n_3} \frac{\delta n_1}{\delta t} \Big|_{3+4 \rightarrow 1+2} \simeq \langle \sigma_{1+2 \rightarrow 3+4} v_{12} \rangle_{T'} \frac{n_1^{eq}(T') n_2^{eq}(T')}{n_3^{eq}(T')} \quad (\text{I.25})$$

となる。

付録 J

数値計算

ここでは、温度や化学ポテンシャルの時間発展方程式を解くために用いた数値計算の手法について詳しく説明する。

J.1 微分方程式の解法

本論文において解くべき微分方程式系は次のようなものである。

$$\frac{dX_i(t)}{dt} = f_i(\{X_j(t)\}) \quad (i, j = 1, 2, \dots, N) \quad (\text{J.1})$$

ここで、この式の両辺には次元を持つ量が含まれることに注意する必要がある。上式に含まれる次元を持つ全ての物理量 $\{A_j\}$ (変数や関数も含める) を、それらを無次元化した量 $\{\tilde{A}_j = A_j / (\text{unit})_j\}$ ($(\text{unit})_j$: 物理量 A_j の単位) で書きかえると

$$\frac{d\tilde{X}_i(\tilde{t})}{d\tilde{t}} = C \tilde{f}_i(\{\tilde{X}_j(\tilde{t})\}) \quad (i, j = 1, 2, \dots, N) \quad (\text{J.2})$$

となる。ここで、 C は (J.1) 式を無次元化したことによって生じる数係数である。^{*1} さらに、次のような変数変換を行う。

$$x = \ln(\tilde{t}) \quad (\text{J.3})$$

これにより (J.2) 式は

$$\frac{d\tilde{X}_i(x)}{dx} = C e^x \tilde{f}_i(\{\tilde{X}_j(x)\}) \quad (i, j = 1, 2, \dots, N) \quad (\text{J.4})$$

となる。よって、(J.1) のような微分方程式系を解く場合、上式に対して 4 次の Runge-Kutta 法を適用すればよい。

J.2 情報落ちの緩和方法

コンピューターで扱える有効数字の数は限られているため、極端に異なる 2 つの数 a, b ($|a| > |b|$) を足したり引いたりすると、 b の情報の一部もしくは全てが失われ^{*2}、それが誤差となる。この現象を情報落

^{*1} 私自身は全ての物理量の単位を MeV に統一したため $C = 1$ となった。

^{*2} 例えば a に b を足しても、最悪の場合、 a に何も足していなかったことになってしまうということである。

ちという。情報落ちは、繰り返し計算を行うような場合には特に注意が必要である。なぜなら、1回1回の演算で情報落ちが起きていた場合、それが積み重なって最終的に得られる計算結果にはとんでもない誤差を生んでしまう恐れがあるからである。

しかし、情報落ちはアルゴリズムを工夫することで緩和することができる。具体例として、 $S := S + \Delta S_i$ ($:=$ はプログラム上での等号を表す) の計算を i について繰り返し行うような場合を考えよう。ここで、 S の初期値は ΔS_i よりも極端に大きいとする。上記で説明したように、このまま計算をすれば情報落ちが起きうるが、 $S := S + \Delta S_i$ の部分を

$$\begin{aligned} S' &:= S + \Delta S_i + r \\ r &:= \Delta S_i + r - (S' - S) \\ S &:= S' \end{aligned}$$

のように書きかえてあげれば、情報落ちをかなり緩和することができる。ここで、 r の初期値は 0 とする。このアルゴリズムについて説明しておく、まず 1 周目では、1 行目で通常通りの演算 $S + \Delta S_i$ を実行し、2 行目で $S + \Delta S_i$ によって実際に S に足すことができた分 ($S' - S$) を ΔS_i から引くことで $S + \Delta S_i$ によって S に足すことができなかった分 (積み残し分) r を計算する。2 周目以降では、1 行目で通常の演算 $S + \Delta S_i$ に加えて過去の積み残し分 r を足し、2 行目で $S + \Delta S_i + r$ によって S に足すことができなかった分を計算する。

この情報落ちの緩和方法の応用例として、4 次の Runge-Kutta 法がある。微分方程式系

$$\frac{dy_i(x)}{dx} = f_i(x, \{y_j(x)\}) \quad (i, j = 1, 2, \dots, N) \quad (\text{J.5})$$

を 4 次の Runge-Kutta 法で解くことを考えよう。この時、通常の 4 次の Runge-Kutta 公式は次式で与えられる。

$$k_{i1} = f_i(x, \{y_j(x)\}) \quad (\text{J.6})$$

$$k_{i2} = f_i(x + \Delta x/2, \{y_j(x) + k_{j1}\Delta x/2\}) \quad (\text{J.7})$$

$$k_{i3} = f_i(x + \Delta x/2, \{y_j(x) + k_{j2}\Delta x/2\}) \quad (\text{J.8})$$

$$k_{i4} = f_i(x + \Delta x, \{y_j(x) + k_{j3}\Delta x\}) \quad (\text{J.9})$$

$$\Delta y_i = \frac{1}{6}\Delta x(k_{i1} + 2k_{i2} + 2k_{i3} + k_{i4}) \quad (\text{J.10})$$

$$y_i(x + \Delta x) = y_i(x) + \Delta y_i \quad (\text{J.11})$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, N)$$

実際に 4 次の Runge-Kutta 法で計算する場合、 $y_i(x)$ が Δy_i より十何桁も大きくなってしまふことはよく起こる。高い精度で計算する場合には、刻み幅 Δx を小さくするため特にこういった状況が起こりやすい。これによって引き起こされる情報落ちを緩和するには、(J.11) 式を上記で説明したようなアルゴリズムに書きかえてあげればよい。

J.3 適応刻み幅制御

4 次の Runge-Kutta 法により常微分方程式系を解く場合、刻み幅は自分で決める必要がある。刻み幅の取り扱い方の 1 つとして例えば次のようなものがある。まず、それほど小さくない刻み幅 Δx で解いて、次に刻み幅 $\Delta x/2$ で解いて、... というようにどんどん刻み幅を小さくしていった最終的に得られる

結果 (今の場合は N_{eff}) が必要な桁数分だけ収束しているのが見えたなら計算を終了する*³というものである。この場合、1番最後の計算で用いた刻み幅が最も適切であるということになる。

この方法は実際によく用いられるが、その一方でデメリットもある。それは刻み幅を微分方程式を解く区間全体で固定しているため、必要以上に計算時間がかかってしまう可能性があるということである。実際に微分方程式を数値的に解く場合、解いていく区間全体が危険地帯 (刻み幅をかなり小さくとらないと必要な計算精度が得られないような区間) という訳でもなく、安全地帯 (刻み幅をそこまで小さくとらなくても必要な計算精度が得られてしまうような区間) も存在する。そのため、仮に危険地帯が一部しかなかったとしても刻み幅は非常に小さく設定する必要がある、その結果、安全地帯でかなりの計算時間を無駄に費やすことになる。

この問題を解決してくれるのが、適応刻み幅制御である。適応刻み幅制御では、その時の状況 (危険地帯か安全地帯か) に応じて、適宜刻み幅を調節して計算を進めていくため、最小の労力であらかじめ要求した精度の解を得ることができる。(J.5) 式のような常微分方程式系を初期値 $(x_0, \{y_i(x_0) = y_{i0}\})$ で解く場合、適応刻み幅制御のアルゴリズムは次のようなものである。

1. $y_i(x_0 + \Delta x)$ を 4 次の Runge-Kutta 法を用いて、1 ステップ (刻み幅 Δx) で計算したものの $y_i^{(1)}$ と、2 ステップ (各刻み幅 $\Delta x/2$) で計算したものの $y_i^{(2)}$ を用意する。
2. 1 で計算した $y_i^{(1)}$ がほしい精度で得られているかを確認する。つまり、 $y_i^{(1)}$ を $y_i^{(2)}$ と比較したときに必要な桁数だけ収束しているかを見ればよい。このような 1 ステップあたりの計算精度は局所的な計算精度と呼ばれる。^{*4} 今、局所的な計算精度 ε_i として p 桁必要だとすると、 $y_i^{(1)}$ が

$$\varepsilon_i = \left| \frac{y_i^{(1)} - y_i^{(2)}}{y_i^{(1)}} \right| < 10^{-p} \quad (\text{J.12})$$

を満たしているか見ればよい。

3. 全ての i に対して (J.12) 式が満たされていた場合、 $(x_0 + \Delta x, \{y_i(x_0 + \Delta x)\})$ を初期値だと思って手順 1 に戻り次のステップを計算する。ここで、もし $\varepsilon < 10^{-3} \cdot 10^{-p}$ を満たしていた場合には今の刻み幅 Δx が小さすぎることなので、次のステップは刻み幅 $2\Delta x$ で計算する。また、全ての i に対して (J.12) 式が満たされていなかった場合、今の刻み幅 Δx が大きすぎることなので、 $\Delta x \rightarrow \Delta x/2$ として再び手順 1 から 3 を実行する。

この適応刻み幅制御のアルゴリズムはあくまで一例である。例えば [4] に適応刻み幅について詳しく述べられているが、そこで紹介されている方法と比べると、

- 刻み幅を制御するにあたり、大域的な計算精度は考慮していない。
- 刻み幅が小さすぎる場合、その刻み幅を要請している計算精度に対してあとどのくらい増やしてもよいかという基準は適当である。

という点で上記のアルゴリズムの方が劣っている。しかし、今回の研究のなかで遭遇した常微分方程式系に対してはかなり有用であった。

*³ あるいは、必要な桁数分が収束しているのが見える前に外挿によってその収束先を予想してしまう方法もある。当然こちらの方が計算時間は短くなる。

*⁴ 逆に、解くべき区間全体で見たときの計算精度は大域的な計算精度と呼ばれる。

J.4 非相対論的極限における熱力学量の冪級数展開

2章と3章で出てきた温度の時間発展方程式を解く際、各ステップごとに熱力学量の積分を毎回実行するのは大変なので、あらかじめ $\Delta T = 10^{-3}\text{MeV}$ の刻み幅で数表を作っておき補間することで各ステップごとに対する熱力学量の積分値を求めた。補間の方法は、2次の Legendre 補間を用いることで9桁程度の精度で求めることができた。^{*5}しかし、 $T < m/10$ の場合には2次の Legendre 補間を用いても4桁程度の精度しか得られず、必要な精度を得るのが難しかった。そこで、この場合に対しては積分で書かれた熱力学量を冪級数展開し、適当な項数までとることによって必要な精度を達成することを試みる。^{*6}

$T < m/10$, $\mu = 0$ の場合に対して、熱力学量 ρ , P , $\partial\rho/\partial T$ の冪級数展開 (漸近展開) は次のように書くことができる。

$$\rho = \frac{\sqrt{2}gT^4}{2\pi^2} \left(\frac{m}{T}\right)^{5/2} \sum_{n=1}^{\infty} (\mp 1)^{n-1} \left(\frac{1}{n}\right)^{3/2} e^{-nm/T} f\left(\frac{T}{2nm}\right) \quad (\text{J.13})$$

$$P = \frac{gT^4}{6\pi^2} \left(\frac{2m}{T}\right)^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} (\mp 1)^{n-1} e^{-nm/T} \left(\frac{1}{n}\right)^{5/2} g\left(\frac{T}{2nm}\right) \quad (\text{J.14})$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial T} = \frac{\sqrt{2}gT^3}{2\pi^2} \left(\frac{m}{T}\right)^{7/2} \sum_{n=1}^{\infty} (\mp 1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-nm/T} h\left(\frac{T}{2nm}\right) \quad (\text{J.15})$$

ここで、

$$f(x) = \Gamma(1/2 + 1) + \frac{9}{2}\Gamma(1/2 + 2)x + \sum_{k=2}^{\infty} a_k \Gamma(1/2 + k + 1)x^k \quad (\text{J.16})$$

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{3/2}{k} \Gamma(1/2 + k + 2)x^k \quad (\text{J.17})$$

$$h(x) = \Gamma(1/2 + 1) + \frac{13}{2}\Gamma(1/2 + 2)x + \frac{119}{8}\Gamma(1/2 + 3)x^2 + \sum_{k=3}^{\infty} b_k \Gamma(1/2 + k + 1)x^k \quad (\text{J.18})$$

$$a_k = \binom{1/2}{k} + 4 \binom{1/2}{k-1} + 4 \binom{1/2}{k-2} \quad (\text{J.19})$$

$$b_k = \binom{1/2}{k} + 6 \binom{1/2}{k-1} + 12 \binom{1/2}{k-2} + 8 \binom{1/2}{k-3} \quad (\text{J.20})$$

である。また、 $-$ は fermion、 $+$ は boson に対応する。 $\binom{r}{s}$ は一般化された2項係数で

$$\binom{r}{s} = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(s+1)\Gamma(r-s+1)} \quad (\text{J.21})$$

で与えられる。

実際にこの方法によって、 $T < m/10$ の場合に対してでも10桁程度の精度を得ることができた。

^{*5} 2章と3章で出てきた温度の時間発展方程式を解く際、広い範囲で $T_\gamma \simeq T_\nu$ であるうえ、ニュートリノのエネルギー遷移率の式に $T_\gamma - T_\nu$ の形が含まれていることから、有効数字がかなり失われてしまう恐れがある。最終的な計算結果として得られる N_{eff} に4桁程度の精度を持たせるには、数値計算に用いる熱力学量は最低でも9桁程度の精度を持っている必要があると考えられる。

^{*6} 数表の刻み幅をさらに細かくして補間することでさらに高い精度を得ることも可能かもしれない。また、先行研究では質量 m をもつ粒子の熱力学量 (熱力学量の微分も含む) は、 $T < m/30$ では光子やニュートリノのエネルギー密度に比べて無視できるほど小さいということでおいていた。

J.5 熱力学量に含まれる特殊関数の取り扱い

付録 H で紹介したように、化学ポテンシャルが 0 でない場合の massless 粒子に対する熱力学量は多重対数関数 $\text{Li}_s(z)$ を使うと簡単な形で書くことができた。GSL(GNU Scientific Library) には多重対数関数が入っていない代わりに*7完全 Fermi-Dirac 積分と呼ばれる特殊関数が用意されているので、ここでは多重対数関数と完全 Fermi-Dirac 積分の間に成り立つ関係式について紹介する。

完全 Fermi-Dirac 積分 $F_j(x)$ は次式で定義される。

$$F_j(x) = \frac{1}{\Gamma(j+1)} \int_0^\infty \frac{t^j}{\exp(t-x)+1} dt \quad (\text{J.22})$$

ここで、 $\Gamma(s)$ はガンマ関数である。 $F_j(x)$ と $\text{Li}_j(x)$ の間には次の関係式が成立する。

$$\text{Li}_j(-e^x) = -F_{j-1}(x) \quad (\text{J.23})$$

この関係式が成り立つことは、多重対数関数の積分表示 (付録 A 参照) から直ちに分かる。

J.6 熱力学量の数値積分

付録 H の massive な粒子に対する熱力学量の公式は、[8] の Appendix.6 でまとめられているものに対して変数変換 $x = E/T$ を適用したものである。この操作を行ったのは、数値積分をする際に被積分関数の収束性が温度に依存していると扱いにくいからである。また今回使った C のプログラム上では、付録 H において積分記号より右側にある部分を被積分関数として扱っている。

数値積分を行う区間は $[m/T, m/T + 50]$ にとった。これは、 x が十分大きいところでは全ての被積分関数は $\sim e^{-x}$ のようにふるまうので、減衰長が $\mathcal{O}(1)$ であることから、その 10 倍以上に積分区間の長さをとっておけば必要な精度は得られるであろうと考えたためである。実際に、ある温度と化学ポテンシャルに対して積分区間 $[m/T, m/T + 50]$ で数値積分を実行したところ、10 桁程度の精度は得られていることが確認できた。

*7 二重対数関数が入っている。

謝辞

本論文を作成するにあたり、指導教官である佐藤丈准教授にはゼミや研究の相談、発表練習などに多くの時間を割いて熱心にご指導していただきました。厚く御礼申し上げます。

また、谷井義彰教授、高西康敬氏にはゼミで大変お世話になりました。梁正樹氏にはゼミはもちろん、それ以外の時間にも多くの議論をしていただき、研究のさまざまな場面でサポートをしていただきました。東京大学の浅井健人氏、奥羽大学の荒木威講師、宮崎大学の下村崇准教授には共同研究者として多くの議論をしていただき、また論文執筆の際には大変お世話になりました。ミュンヘン工科大学のDr.Miguel Escudero、東京大学宇宙線研究所の小林伸氏には大変有益なアドバイスをいただきました。心から感謝いたします。

加えて、埼玉大学素粒子論研究室の皆様は日本大学から来た私を快く受け入れてくれました。また、ゼミについていくのがやっとだった私を同期の仲間は支えてくれました。深く感謝します。

そして最後に、ここまで支え見守ってくれた家族に感謝したいです。

2021年3月24日

粕谷 竜太

参考文献

- [1] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder , *An Introduction To Quantum Field Theory*, CRC Press, 1995.
- [2] John F. Donoghue, Eugene Golowich and Barry R. Holstein, *Dynamics of the Standard Model*, Cambridge University Press, 2014.
- [3] E.W.Kolb and M.S.Turner, *The Early Universe*, Basic Books, 1990.
- [4] W.H.Press, WT.Vetterling, S.A.Teukolsky and B.P.Flannery, *NUMERICAL RECIPES in C* (日本語版), 技術評論社, 1993.
- [5] 松原 隆彦, 現代宇宙論—時空と物質の共進化 , 東京大学出版会, 2010.
- [6] 森口 繁一, 一松 信 ほか, 岩波 数学公式 3 特殊関数, 岩波書店, 1987.
- [7] M. Escudero, D. Hooper, G. Krnjaic and M. Pierre, *Cosmology with A Very Light $L_\mu - L_\tau$ Gauge Boson*, JHEP **03**, 071 (2019) [arXiv:1901.02010 [hep-ph]].
- [8] M. Escudero Abenza, *Precision early universe thermodynamics made simple: N_{eff} and neutrino decoupling in the Standard Model and beyond*, JCAP **05**, 048 (2020) [arXiv:2001.04466 [hep-ph]].
- [9] M. Escudero, *Neutrino decoupling beyond the Standard Model: CMB constraints on the Dark Matter mass with a fast and precise N_{eff} evaluation*, JCAP **02**, 007 (2019) [arXiv:1812.05605 [hep-ph]].
- [10] M. Escudero and S. J. Witte, *A CMB search for the neutrino mass mechanism and its relation to the Hubble tension*, Eur. Phys. J. C **80**, no.4, 294 (2020) [arXiv:1909.04044 [astro-ph.CO]].
- [11] M. Escudero Abenza and S. J. Witte, *Could the Hubble Tension be Pointing Towards the Neutrino Mass Mechanism?*, [arXiv:2004.01470 [hep-ph]].
- [12] P. F. de Salas and S. Pastor, *Relic neutrino decoupling with flavour oscillations revisited*, JCAP **07**, 051 (2016) [arXiv:1606.06986 [hep-ph]].
- [13] K. Akita and M. Yamaguchi, *A precision calculation of relic neutrino decoupling*, JCAP **08**, 012 (2020) [arXiv:2005.07047 [hep-ph]].
- [14] T. Araki, K. Asai, J. Sato and T. Shimomura, *Low scale seesaw models for low scale $U(1)_{L_\mu-L_\tau}$ symmetry*, Phys. Rev. D **100**, no.9, 095012 (2019) [arXiv:1909.08827 [hep-ph]].
- [15] B. Holdom, *Two $U(1)$'s and Epsilon Charge Shifts*, Phys. Lett. B **166**, 196-198 (1986)
- [16] X. G. He, G. C. Joshi, H. Lew and R. R. Volkas, *NEW Z-prime PHENOMENOLOGY*, Phys. Rev. D **43**, 22-24 (1991)
- [17] X. G. He, G. C. Joshi, H. Lew and R. R. Volkas, *Simplest Z-prime model*, Phys. Rev. D **44**, 2118-2132 (1991)
- [18] T. Araki, S. Hoshino, T. Ota, J. Sato and T. Shimomura, *Detecting the $L_\mu - L_\tau$ gauge boson*

- at Belle II*, Phys. Rev. D **95**, no.5, 055006 (2017) [arXiv:1702.01497 [hep-ph]].
- [19] J. L. Bernal, L. Verde and A. G. Riess, *The trouble with H_0* , JCAP **10**, 019 (2016) [arXiv:1607.05617 [astro-ph.CO]].
- [20] K. M. Nollett and G. Steigman, *BBN And The CMB Constrain Neutrino Coupled Light WIMPs*, Phys. Rev. D **91**, no.8, 083505 (2015) [arXiv:1411.6005 [astro-ph.CO]].
- [21] T. Aoyama, N. Asmussen, M. Benayoun, J. Bijnens, T. Blum, M. Bruno, I. Caprini, C. M. Carloni Calame, M. Cè and G. Colangelo, *et al. The anomalous magnetic moment of the muon in the Standard Model*, Phys. Rept. **887**, 1-166 (2020) [arXiv:2006.04822 [hep-ph]].
- [22] T. Aoyama, T. Kinoshita and M. Nio, *Theory of the Anomalous Magnetic Moment of the Electron*, Atoms **7**, no.1, 28 (2019)
- [23] C. D. Kreisch, F. Y. Cyr-Racine and O. Doré, *Neutrino puzzle: Anomalies, interactions, and cosmological tensions*, Phys. Rev. D **101**, no.12, 123505 (2020) [arXiv:1902.00534 [astro-ph.CO]].
- [24] A. Fradette, M. Pospelov, J. Pradler and A. Ritz, *Cosmological beam dump: constraints on dark scalars mixed with the Higgs boson*, Phys. Rev. D **99**, no.7, 075004 (2019) [arXiv:1812.07585 [hep-ph]].
- [25] S. Hannestad and J. Madsen, *Neutrino decoupling in the early universe*, Phys. Rev. D **52**, 1764-1769 (1995) [arXiv:astro-ph/9506015 [astro-ph]].
- [26] K. J. Bae, A. Kamada, S. P. Liew and K. Yanagi, *Light axinos from freeze-in: production processes, phase space distributions, and Ly- α forest constraints*, JCAP **01**, 054 (2018) [arXiv:1707.06418 [hep-ph]].
- [27] M. Kachelriess, R. Tomas and J. W. F. Valle, *Supernova bounds on Majoron emitting decays of light neutrinos*, Phys. Rev. D **62**, 023004 (2000) [arXiv:hep-ph/0001039 [hep-ph]].
- [28] Y. Farzan, *Bounds on the coupling of the Majoron to light neutrinos from supernova cooling*, Phys. Rev. D **67**, 073015 (2003) [arXiv:hep-ph/0211375 [hep-ph]].
- [29] A. Gando *et al.* [KamLAND-Zen], *Limits on Majoron-emitting double-beta decays of Xe-136 in the KamLAND-Zen experiment*, Phys. Rev. C **86**, 021601 (2012) [arXiv:1205.6372 [hep-ex]].
- [30] B. P. Abbott *et al.* [LIGO Scientific and Virgo], *A gravitational-wave measurement of the Hubble constant following the second observing run of Advanced LIGO and Virgo*, [arXiv:1908.06060 [astro-ph.CO]].
- [31] S. Aiola *et al.* [ACT], *The Atacama Cosmology Telescope: DR4 Maps and Cosmological Parameters*, JCAP **12**, 047 (2020) [arXiv:2007.07288 [astro-ph.CO]].
- [32] W. L. Freedman, B. F. Madore, D. Hatt, T. J. Hoyt, I. S. Jang, R. L. Beaton, C. R. Burns, M. G. Lee, A. J. Monson and J. R. Neeley, *et al. The Carnegie-Chicago Hubble Program. VIII. An Independent Determination of the Hubble Constant Based on the Tip of the Red Giant Branch*, [arXiv:1907.05922 [astro-ph.CO]].
- [33] K. C. Wong, S. H. Suyu, G. C. F. Chen, C. E. Rusu, M. Millon, D. Sluse, V. Bonvin, C. D. Fassnacht, S. Taubenberger and M. W. Auger, *et al. H0LiCOW – XIII. A 2.4 per cent measurement of H_0 from lensed quasars: 5.3 σ tension between early- and late-Universe probes*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **498**, no.1, 1420-1439 (2020) [arXiv:1907.04869 [astro-ph.CO]].
- [34] A. G. Riess, S. Casertano, W. Yuan, L. M. Macri and D. Scolnic, *Large Magellanic Cloud Cepheid Standards Provide a 1% Foundation for the Determination of the Hubble Con-*

- stant and Stronger Evidence for Physics beyond Λ CDM*, *Astrophys. J.* **876**, no.1, 85 (2019) [arXiv:1903.07603 [astro-ph.CO]].
- [35] A. G. Riess, L. M. Macri, S. L. Hoffmann, D. Scolnic, S. Casertano, A. V. Filippenko, B. E. Tucker, M. J. Reid, D. O. Jones and J. M. Silverman, *et al. A 2.4% Determination of the Local Value of the Hubble Constant*, *Astrophys. J.* **826**, no.1, 56 (2016) [arXiv:1604.01424 [astro-ph.CO]].
- [36] S. Birrer, A. J. Shajib, A. Galan, M. Millon, T. Treu, A. Agnello, M. Auger, G. C. F. Chen, L. Christensen and T. Collett, *et al. TDCOSMO - IV. Hierarchical time-delay cosmography – joint inference of the Hubble constant and galaxy density profiles*, *Astron. Astrophys.* **643**, A165 (2020) [arXiv:2007.02941 [astro-ph.CO]].
- [37] D. W. Pesce, J. A. Braatz, M. J. Reid, A. G. Riess, D. Scolnic, J. J. Condon, F. Gao, C. Henkel, C. M. V. Impellizzeri and C. Y. Kuo, *et al. The Megamaser Cosmology Project. XIII. Combined Hubble constant constraints*, *Astrophys. J. Lett.* **891**, no.1, L1 (2020) [arXiv:2001.09213 [astro-ph.CO]].
- [38] G. Hinshaw *et al.* [WMAP], *Nine-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Parameter Results*, *Astrophys. J. Suppl.* **208**, 19 (2013) [arXiv:1212.5226 [astro-ph.CO]].
- [39] N. Aghanim *et al.* [Planck], *Planck 2018 results. I. Overview and the cosmological legacy of Planck*, *Astron. Astrophys.* **641**, A1 (2020) [arXiv:1807.06205 [astro-ph.CO]].
- [40] N. Aghanim *et al.* [Planck], *Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters*, *Astron. Astrophys.* **641**, A6 (2020) [arXiv:1807.06209 [astro-ph.CO]]. LaTeX (US)
- [41] M. Tanabashi *et al.* [Particle Data Group], *Review of Particle Physics*, *Phys. Rev. D* **98**, no.3, 030001 (2018)