

修士論文
荷電レプトンフレーバー対称性の破れの探索における
背景事象の精密計算

埼玉大学大学院 理工学研究科
物理機能系専攻 物理学コース博士前期課程2年

18MP112 平良 優奈

2020/3/30

概 要

1970年代に体系化された素粒子標準模型は、それまでに見つかった現象を非常によく説明するものであり、多くの実験で精密に検証されてきた。その一方で、現在までにこの模型では説明することのできない事象や理論的な限界も複数見つかっており、標準模型を超えた理論の構築が試みられている。そうして拡張された枠組みの中で提唱されている予言の一つが、レプトンフレーバー対称性の破れ (Lepton Flavor Violation, LFV) である。1998年にニュートリノ振動が発見されたことにより、LFVは必須であることが実証されたが、荷電レプトンに対するLFV (Charged LFV, CLFV) は未だ観測されておらず、盛んに探索が行われている。CLFV探索実験のためには荷電レプトンを多く生成する必要があるため、ミューオンを用いた実験が主流となっている。その中でもミューオン原子を用いたCLFV探索は、自由ミューオンを用いた場合には探索できない種類の相互作用への感度があることや、電子のみの明確なシグナルが得られやすいこと、そして原子核の選び方によって遷移確率を上昇させることができるなどの利点を持っている。このミューオン原子を用いたCLFV探索実験は、日本でも実験開始に向けて準備が進められている。

ミューオン原子を用いたCLFV探索で主な背景事象となるのは、ミューオンの原子軌道上での崩壊 (Decay In Orbit, DIO) である。このDIOスペクトルの精密計算は不可欠であり、いくつかの補正を取り入れた計算がなされてきた。しかし、将来実験で測定精度が向上すれば、より精密なスペクトルの計算が必要となる。本研究では、この計算においてこれまで取り扱いが明確でなかった原子核の質量を考慮する必要性を議論し、放射補正を取り入れたうえでスペクトルの精密計算を行った。

目次

1	序論	1
1.1	レプトンフレーバー対称性	1
1.2	CLFV 探索	3
1.3	Decay In Orbit	4
2	ミューオン原子の崩壊	4
2.1	ミューオン原子	4
2.2	軌道上での崩壊	4
3	レプトン波動関数	6
3.1	Coulomb ポテンシャル中の Dirac 方程式	6
3.1.1	Dirac 方程式の球面波解	7
3.2	束縛状態	9
3.3	散乱状態	9
3.3.1	部分波展開	10
3.3.2	数値計算手法	12
4	DIO 崩壊率	13
4.1	定式化	13
4.2	平面波近似を用いた表式	16
4.3	部分波展開を用いた表式	18
4.4	放射補正：真空偏極	23
5	結果・考察	24
5.1	波動関数	24
5.2	エネルギースペクトル	28
6	まとめ・今後の展望	32
	付録 A 記法	33
	付録 B 点電荷 Coulomb ポテンシャルを含む Dirac 方程式の解	34
	付録 B.1 束縛状態	34
	付録 B.2 連続状態	37

1 序論

1.1 レプトンフレーバー対称性

素粒子の標準模型に含まれるレプトンは、荷電粒子である電子 (e)、ミュー粒子 (またはミューオン, μ)、タウ粒子 (またはタウオン, τ)、そしてそれぞれの対となるニュートリノ (電子ニュートリノ ν_e , ミューニュートリノ ν_μ , タウニュートリノ ν_τ) の6種類であり、これらは異なるフレーバーを持つと表現される。電子、ミュー粒子、タウ粒子及びそれらの対のニュートリノは、それぞれ第一世代、第二世代、第三世代に属しており、世代に対応する量子数としてレプトンフレーバー数 (L_e, L_μ, L_τ) が表1のように定義される。慣例として、粒子に対しては正、反粒子に対しては負のレプトンフレーバー数を割り当てる。レプトン以外の粒子については0が割り当てられる。

表 1: レプトンフレーバー数

	e^-, ν_e	μ^-, ν_μ	τ^-, ν_τ	$e^+, \bar{\nu}_e$	$\mu^+, \bar{\nu}_\mu$	$\tau^+, \bar{\nu}_\tau$
L_e	+1	0	0	-1	0	0
L_μ	0	+1	0	0	-1	0
L_τ	0	0	+1	0	0	-1

3つの荷電レプトンは性質がよく似ているが、その質量は大きく異なっており、それぞれ $m_e = 0.511\text{MeV}$, $m_\mu = 106\text{MeV}$, $m_\tau = 1777\text{MeV}$ である。この理由は未だ解明されておらず、標準模型では説明することのできない謎の一つとなっている。質量の大きいミュー粒子とタウ粒子は、弱い相互作用によってより軽い粒子へと崩壊する。例として、ミュー粒子の崩壊モードの中でほとんどの割合を占める Michel 崩壊は

$$\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu \quad (1.1)$$

という過程であり、始状態と終状態でレプトンフレーバー数が保存している。一方でミュー粒子が電子と光子に崩壊する過程

$$\mu^- \rightarrow e^- \gamma \quad (1.2)$$

を考えると、始状態では $L_\mu = 1$, $L_e = 0$ に対して終状態では $L_\mu = 0$, $L_e = 1$ となっており、それぞれの世代に対するレプトンフレーバー数は保存しない。標準模型の枠組みにおいては、このようにレプトンフレーバー数が始状態と終状態で異なるような遷移は禁止される。

レプトンフレーバー対称性の概念は1960年代に生まれた。パリティ保存則の破れの発見後、弱い相互作用を仲介する荷電ベクトルボソンの存在が提案された (Feynman and Gell-Mann, 1958) が、そのようなボソンが存在すれば $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$ の崩壊分岐比が 10^{-4} となり、当時の実験による制限 $B(\mu \rightarrow e \gamma) < 2 \times 10^{-5}$ と整合しないことが指摘された (Feinberg, 1958)。しかしこの矛盾は、電子ではなくミュー粒子と対になる第2のニュートリノを導入することにより解決され (Nishijima, 1957; Schwinger, 1957)、このニュートリノ仮説は1962年に Brookhaven National Laboratory (BNL) で実験的にも確かめられた (Danby et al.)。このことからそれぞれの世代に対応したレプトンフレーバー数 L_e , L_μ , L_τ が導入され、それぞれが独立に保存するという概念が生まれた。

素粒子の標準模型は 1961 年に Glashow によって提案された $SU(2) \times U(1)$ ゲージ理論を基に体系化された。この理論はくりこみ可能であり、それまでの多くの実験と無矛盾であったことから、少なくとも我々の扱えるエネルギースケールにおいては非常に成功した理論であると言える。標準模型において、レプトンフレーバーが保存する積極的な動機や根拠は存在しないが、最も単純な模型である、1つのヒッグス 2 重項と質量が 0 のニュートリノを仮定した場合は、ゲージ不変性とラグランジアンのかくりこみ可能性からレプトンフレーバーの保存則が自動的に表れる。

しかし 1998 年、太陽ニュートリノ及び大気ニュートリノに関して、ニュートリノが異なる世代間で移り変わる現象 (ニュートリノ振動) が発見されたことによって、ニュートリノがゼロではない質量を持っていること、そしてレプトンフレーバー対称性が破れる (Lepton Flavor Violation, LFV) 過程が存在することが実証された。ただし、標準模型において有限のニュートリノ質量を仮定すると荷電レプトンに対しても LFV が引き起こされる可能性は出てくるが、 $\mu \rightarrow e\gamma$ の例を考えると

$$\begin{aligned} B(\mu \rightarrow e\gamma) &= \frac{\Gamma(\mu^+ \rightarrow e^+\gamma)}{\Gamma(\mu^+ \rightarrow e^+\nu_e\bar{\nu}_\mu)} \\ &= \frac{3\alpha}{32\pi} \sum_{i=2,3} \left| U_{\mu i}^* U_{ei} \frac{m_{i1}^2}{m_W^2} \right|^2 < 10^{-54} \end{aligned} \quad (1.3)$$

(ただし U_{ij} は PMNS 行列、 m_{ij}^2 は異なるニュートリノ i, j の質量二乗差) となっているように、崩壊分岐比は極めて小さい。これは現在の実験で観測できるようなものではなく、荷電レプトンに対する LFV (Charged Lepton Flavor Violation, CLFV) が未だ見つからないことは標準模型と無矛盾であると言える。

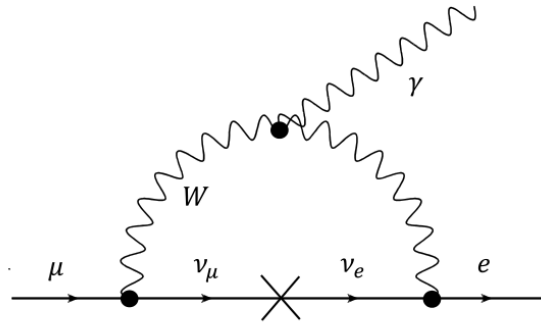


図 1: 中間状態のニュートリノ振動による CLFV 過程。この崩壊分岐比は極めて小さい。

一方、標準模型では説明することのできない現象や理論的な限界が複数発見されたことによって、標準模型を超えた理論の構築が試みられている。それらの新たな枠組みの下ではレプトンフレーバー対称性の破れを引き起こす種がいくつも存在し、実際に多くの拡張理論において観測可能な大きさの CLFV が予言されている。しかし CLFV は未だ発見された報告がなく、現在も盛んに探索が行われている。

1.2 CLFV 探索

LFV 探索の歴史は、1937 年に宇宙線の中から 2 番目のレプトンであるミューオンが発見されたことに始まる (Neddermeyer and Anderson[1])。当初は、湯川の予言した中間子の質量に近いことから強い相互作用を媒介する粒子であると考えられたが、後にこの粒子は強い相互作用をせず、したがって湯川の π 中間子ではないことが実証された。その後、ミューオンは質量を除いて性質がほぼ同じである電子に崩壊すると考えられ、 $\mu \rightarrow e\gamma$ の崩壊モードの存在が予想された。この過程は運動量や角運動量、電荷などの保存則の観点からは禁止されない。最初の探索は 1947 年に Hincks, Pontecorvo によって宇宙線ミューオンを用いて行われ、その崩壊分岐比は 10% 以下であることが確認された。これが事実上の LFV 探索の始まりである。

1948 年には、ミューオンが電子と 2 つの中性粒子へと 3 体崩壊することを示唆する電子の連続スペクトルが確認された (Steinberger, 1948)。その後すぐに、原子核によるニュートリノを放出しないミューオン捕獲 ($\mu^- N \rightarrow e^- N$) の探索も行われたが、発見されることはなかった (Lagarrigue and Peyrou, 1952)。

CLFV 探索実験のためには荷電レプトンを多く生成する必要があるが、加速器によって人工的にミューオンビームが生成されるようになったことで、探索は飛躍的に進歩していった。大量に生成することができ、比較的寿命の長い粒子であるミューオンを用いた CLFV 探索は現在も主流となっており、いくつかの崩壊過程が提案されている。一般に、CLFV を引き起こすメカニズムは 2 種類あり、光子交換型の長距離相互作用と光子を伴わない短距離相互作用に分類される。自由ミューオンの崩壊 $\mu^+ \rightarrow e^+\gamma$ は、長距離相互作用に対しては感度があるが短距離相互作用では引き起こされない。また、終状態に光子を含むため測定精度の問題がある。これに対して、3 体崩壊 $\mu^+ \rightarrow e^+e^+e^-$ や、ミューオン原子を利用した $\mu^- N \rightarrow e^- N$ ($\mu-e$ conversion)、 $\mu^- e^- \rightarrow e^- e^-$ の崩壊過程は短距離相互作用に対する感度があり、 $\mu^+ \rightarrow e^+\gamma$ に比べると小さいが長距離相互作用への感度も持つ。また、電子のみの明確なシグナルが得られやすく、高い測定精度での実験が期待できる。さらに、ミューオン原子を用いた CLFV 探索においては、原子番号 Z の大きな原子核を用いることで遷移確率を上昇させることができるといった利点も挙げられる。

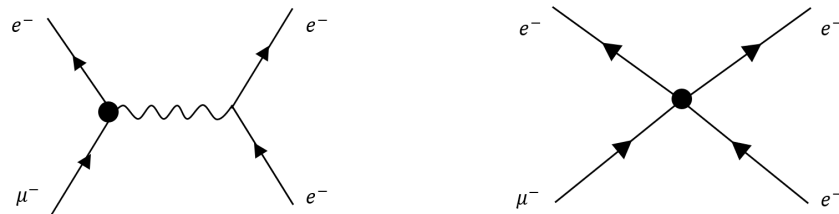


図 2: 2 種類の CLFV 相互作用。【左】長距離相互作用 (光子交換) 過程、【右】短距離相互作用過程

1.3 Decay In Orbit

CLFV 探索実験のうち、ミューオン原子を用いた $\mu^- N \rightarrow e^- N$ ($\mu - e$ conversion) や $\mu^- e^- \rightarrow e^- e^-$ では、Michel 崩壊による原子軌道上のミューオンの崩壊 (Decay In Orbit, DIO) が主なバックグラウンドとなる。エネルギー保存則より、 $\mu - e$ conversion では m_μ 程度のエネルギーを持つ電子が1つ、 $\mu e \rightarrow ee$ では $m_\mu/2$ 程度の電子が2つ放出されるため、それらのエネルギー付近でバックグラウンドとなる電子のエネルギースペクトルを精密に計算する必要がある。

1987年に渡辺らによってDIOの電子スペクトルが計算されたが、このときミューオンの質量としては換算質量が用いられた[10]。その後、Shankerによって原子核の反跳による補正を取り入れた計算がなされ[11][12]、2016年には放射補正を含めた計算がSzafron, Czarneckiによってなされた[14]。ただし、これらの計算では通常のミューオン質量が用いられた。

本論文では、ミューオンの質量や原子核の反跳の取り扱いを明確にし、より精密なDIOスペクトルの計算を目的とする。以下では、2章でミューオン原子におけるDIOについて説明し、3章と4章でそれぞれレプトン波動関数、DIO崩壊率の定式化を行う。その後、5章で結果を示す。

2 ミューオン原子の崩壊

2.1 ミューオン原子

物質中に μ^- を停止させると、原子核とのCoulomb相互作用によってミューオンは電氣的に束縛される。これがミューオン原子であり、通常の原子において一つの電子をミューオンに置き換えたものになっている。原子核に束縛されたばかりのミューオンは、一般には励起状態にあるが、電子におけるPauliの排他律が適用されないため、オージェ電子や光子を放出して速やかに1S状態へ遷移する。

ミューオンの質量は $m_\mu = 105.6583745(24)\text{MeV}$ であり、電子に比べて約207倍重い。つまりBohr半径は電子の $1/207$ であり、束縛されたミューオンは原子核のかなり近くに局在することになる。したがって、ミューオンの波動関数は原子核の電荷分布などの詳細による影響を受ける。また、原子核の持つ有限な質量は電子に対してはほとんど影響を及ぼさないが、特に Z が小さい場合にはミューオンの波動関数に影響する。

2.2 軌道上での崩壊

原子軌道上では、ミューオンの通常のMichel崩壊 $\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$ に加えて、原子核中の陽子によるミューオン捕獲 $\mu^- + p \rightarrow \nu_\mu + n$ も起こる。ミューオン捕獲による崩壊率 Γ_c とMichel崩壊による崩壊率 Γ_d を用いて、原子軌道上にあるミューオンの崩壊率は

$$\Gamma_t = \Gamma_c + Q\Gamma_d \quad (2.1)$$

と表される。ここで Q はHuff因子と呼ばれるもので、自由ミューオンに対して束縛ミューオンのMichel崩壊が変化する効果を表している。

まず、ミューオン捕獲による崩壊率 Γ_c について考える。原子核を点電荷と仮定すれば、原子番号 Z が大きいほどミューオンの軌道半径は Z^{-1} に比例して小さくなり、波動関数の原点での値は Z^3 で大きくなる。また、ミューオン捕獲に関与することのできる陽子の数も Z に比例して増えるため、 Γ_c は Z^4 に比例すると考えられる。ただし、実際の原子核は有限な広がりを持っており、ミューオンの波動関数はその内側に入り込んでいるため、次の実効的な陽子数 Z_{eff} を用いるのがよい [15][16]。

$$Z_{\text{eff}} = Z \left[\int d^3\mathbf{r} |\psi_\mu(\mathbf{r})|^2 \mathcal{D}(\mathbf{r}) \right]^{1/4} \quad (2.2)$$

ここで、 $\psi_\mu(\mathbf{r})$ は 1S ミューオンの波動関数、 $\mathcal{D}(\mathbf{r})$ は原子核における陽子の密度関数である。また、一般に原子核は中性子の数が陽子の数よりも多いため、Pauli の排他律によって陽子から中性子への遷移が制限される。これによってミューオン捕獲が抑制される効果を考慮すると、崩壊率 Γ_c は

$$\Gamma_c = Z_{\text{eff}}^4 X_1 \left[1 - X_2 \left(\frac{A - Z}{2A} \right) \right] \quad (2.3)$$

と書き表すことができる [19]。ここで X_1 は水素原子核に対する陽子のミューオン捕獲反応率、 X_2 は中性子の排他律による崩壊率減少の効果を表しており、それぞれの値は

$$X_1 = 170\text{s}^{-1}, \quad X_2 = 3.125 \quad (2.4)$$

である。

次に、Michel 崩壊と同じメカニズムで束縛ミューオンが崩壊することを考える。一般に Huff 因子 Q は 1 より小さく、自由ミューオンの場合よりも崩壊率は小さくなる。このとき崩壊率が変わる理由は、次の 3 つの効果によるものと考えられる。まず一つ目は、ミューオンの束縛エネルギーによって終状態の位相空間が狭まる効果で、これによって崩壊率は小さくなる。二つ目は、原子核のクーロンポテンシャルによりミューオンと電子の波動関数が内側に引き寄せられ、波動関数の重なりが大きくなる効果である。この効果は崩壊率の上昇をもたらすが、電磁ゲージ対称性のために一つ目の効果とほとんど打ち消しあう [17][18]。三つ目に、束縛されているミューオンが平均速度 $Z\alpha$ で運動していることによって相対論的な時間の遅れが生じ、崩壊率が小さくなる効果がある。以上の 3 つの効果を合わせると、特に原子番号があまり大きくない原子核においては、主に相対論的な時間の遅れによって崩壊率が小さくなる。

原子軌道上におけるミューオンの崩壊は、原子番号 Z が小さいものでは Michel 崩壊による寄与 Γ_d が主要であるが、 Z が大きくなると原子核によるミューオン捕獲の寄与 Γ_c が主に効いてくる。ミューオンの寿命の Z 依存性は、実験から図 3 のようになることが知られている [20]。水素原子の場合は、自由粒子のときとほぼ同じ約 2.2ms の寿命で崩壊するが、鉛原子核になると寿命は約 75ns と非常に短くなる。

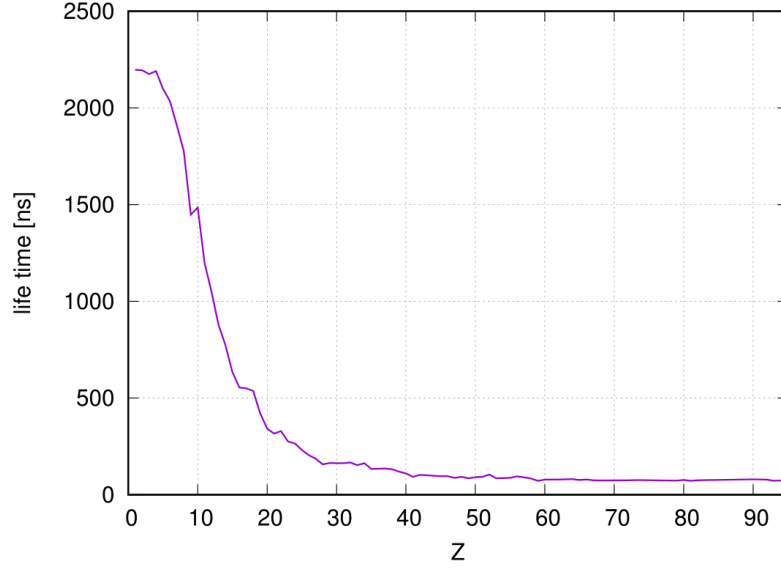


図 3: 原子番号 Z の原子軌道上に束縛されたミュオンの平均寿命

3 レプトン波動関数

この節では、DIO に登場するミュオンや電子の波動関数の導出を行う。独立粒子模型を適用し、原子核との Coulomb 相互作用は静電場によるポテンシャル $\phi(\mathbf{r})$ 中の運動として扱う。また、原子核の電荷分布は球対称であるとして $\phi(\mathbf{r}) = \phi(r)$ を仮定する。Coulomb ポテンシャルを含む Dirac 方程式を考えたとき、原子核が点電荷の場合には解析解が得られるが、そうでなければ解析的に解くことはできないため、数値計算を行う必要がある。ここではその方法についても説明する。

3.1 Coulomb ポテンシャル中の Dirac 方程式

電磁相互作用のある場合、電荷 $(-e)$ を持つフェルミオンの満たす Dirac 方程式は

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + e\gamma^\mu A_\mu - m)\psi(x) = 0 \quad (3.1)$$

ここで電磁場として球対称静電ポテンシャルを仮定すると、

$$A_\mu(x) = (A_0(x), \mathbf{A}(x)) = (\phi(r), 0) \quad (3.2)$$

である。フェルミオンの波動関数 $\psi(x)$ に対して変数分離形 $\psi(x) = e^{-iEt}\psi(\mathbf{r})$ を仮定すれば、空間部分 $\psi(\mathbf{r})$ の満たす方程式は

$$[-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + m\beta - e\phi(r)]\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \quad (3.3)$$

となる。非相対論的 Schrödinger 方程式との対応を考えて、

$$H = -i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + m\beta - e\phi(r) \quad (3.4)$$

をハミルトニアンと呼ぶ。

3.1.1 Dirac 方程式の球面波解

まず、Dirac 方程式における角運動量について考える。軌道角運動量演算子 $\mathbf{L}$ を非相対論の場合との対応から

$$L_i = (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_i = -i\varepsilon_{ijk}r_j\partial_k \quad (3.5)$$

と定義すると、ハミルトニアン H との交換関係は

$$[H, L_i] = -\varepsilon_{ijk}\alpha_j\partial_k \neq 0 \quad (3.6)$$

となり $\mathbf{L}$ 単独では保存量にならないことが分かる。同様に、スピン角運動量演算子 $\mathbf{S}$ を

$$S_i = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

と定義すると

$$[H, S_i] = \varepsilon_{ijk}\alpha_j\partial_k \neq 0 \quad (3.8)$$

となり、 $\mathbf{S}$ も単独では保存しない。しかし、(3.5) 式と (3.8) 式を見ると全角運動量演算子

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S} \quad (3.9)$$

はハミルトニアンと可換であり、球対称ポテンシャルを含む Dirac 方程式において $\mathbf{J}$ は保存量になっている。したがって、(3.3) 式の解は $\mathbf{J}$ の固有状態として求めるのが有用である。そこで、

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{j} & 0 \\ 0 & \mathbf{j} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} = \mathbf{l} + \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \quad (3.10)$$

に対し、次の固有値方程式

$$\mathbf{j}^2\chi_{j,\nu} = j(j+1)\chi_{j,\nu}, \quad j_z\chi_{j,\nu} = \nu\chi_{j,\nu} \quad (3.11)$$

を満たす 2 成分固有関数 $\xi_{j,\nu}, \eta_{j,\nu}$ を用いて

$$\psi_{j,\nu}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \xi_{j,\nu}(\mathbf{r}) \\ \eta_{j,\nu}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

と表す。(3.11) 式の解はスピノール球面調和関数

$$\begin{aligned} \Omega_{j\nu}^l(\hat{r}) &= \sum_{m,\sigma} (l, m, 1/2, \sigma | j, \nu) Y_l^m(\hat{r}) \chi_{1/2}^\sigma \\ &= \begin{cases} \sqrt{\frac{l+1/2+\nu}{2l+1}} Y_l^{\nu-1/2}(\hat{r}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sqrt{\frac{l+1/2-\nu}{2l+1}} Y_l^{\nu+1/2}(\hat{r}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & (j = l + 1/2) \\ -\sqrt{\frac{l+1/2-\nu}{2l+1}} Y_l^{\nu-1/2}(\hat{r}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sqrt{\frac{l+1/2+\nu}{2l+1}} Y_l^{\nu+1/2}(\hat{r}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & (j = l - 1/2) \end{cases} \end{aligned} \quad (3.13)$$

を使って表すことができる。

ここで、新たな量子数 κ を導入するのが便利である。

$$\kappa \equiv \begin{cases} -(l+1) = -(j+1/2) & (j = l+1/2) \\ l = j+1/2 & (j = l-1/2) \end{cases} \quad (3.14)$$

と定義すると、(3.11) 式の解は

$$\chi_{\kappa,\nu}(\hat{r}) = \begin{cases} \Omega_{j,\nu}^{j-1/2}(\hat{r}) & (\kappa < 0) \\ \Omega_{j,\nu}^{j+1/2}(\hat{r}) & (\kappa > 0) \end{cases} \quad (3.15)$$

と書き直すことができ、これを用いると、一般に Dirac 方程式の解 $\psi_{j,\nu}(\mathbf{r})$ は

$$\psi_{j,\nu}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} g_{\kappa}(r)\chi_{\kappa,\nu}(\hat{r}) + g_{-\kappa}(r)\chi_{-\kappa,\nu}(\hat{r}) \\ if_{\kappa}(r)\chi_{-\kappa,\nu}(\hat{r}) + if_{-\kappa}(r)\chi_{\kappa,\nu}(\hat{r}) \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

と表せる。ただし $g_{\kappa}(r), f_{\kappa}(r)$ は原点からの距離 r にのみ依存する関数である。

これを (3.3) 式に代入すると、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla [f_{\kappa}(r)\chi_{-\kappa,\nu}(\hat{r}) + f_{-\kappa}(r)\chi_{\kappa,\nu}(\hat{r})] \\ + (m - E - e\phi(r))(g_{\kappa}(r)\chi_{\kappa,\nu}(\hat{r}) + g_{-\kappa}(r)\chi_{-\kappa,\nu}(\hat{r})) = 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla [g_{\kappa}(r)\chi_{\kappa,\nu}(\hat{r}) + g_{-\kappa}(r)\chi_{-\kappa,\nu}(\hat{r})] \\ + (m + E + e\phi(r))(f_{\kappa}(r)\chi_{-\kappa,\nu}(\hat{r}) + f_{-\kappa}(r)\chi_{\kappa,\nu}(\hat{r})) = 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

ここで、 r のみに依存する任意の関数 $G(r)$ に対して

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla [G(r)\chi_{\kappa,\nu}(\hat{r})] = - \left(\frac{dG(r)}{dr} + \frac{1+\kappa}{r}G(r) \right) \chi_{-\kappa,\nu}(\hat{r}) \quad (3.19)$$

が成り立つことを用いれば、 $g_{\kappa}(r), f_{\kappa}(r)$ に関する方程式

$$\frac{dg_{\kappa}(r)}{dr} + \frac{1+\kappa}{r}g_{\kappa}(r) - (E + m + e\phi(r))f_{\kappa}(r) = 0 \quad (3.20)$$

$$\frac{df_{\kappa}(r)}{dr} + \frac{1-\kappa}{r}f_{\kappa}(r) + (E - m + e\phi(r))g_{\kappa}(r) = 0 \quad (3.21)$$

及び、 $\kappa \rightarrow -\kappa$ と置き換えた場合に対応する $g_{-\kappa}(r), f_{-\kappa}(r)$ に関する方程式が得られる。したがって

$$\psi_{\kappa,\nu}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} g_{\kappa}(r)\chi_{\kappa,\nu}(\hat{r}) \\ if_{\kappa}(r)\chi_{-\kappa,\nu}(\hat{r}) \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

とおくと、 $\psi_{j,\nu}(\mathbf{r})$ は Dirac 方程式の独立な 2 つの解 $\psi_{\kappa,\nu}(\mathbf{r}), \psi_{-\kappa,\nu}(\mathbf{r})$ の重ね合わせで得られることになる。

波動関数の角度部分 $\chi_{\kappa,\nu}(\hat{r})$ は任意の球対称ポテンシャルに対して解析的に解が求まるが、動径部分 $g_{\kappa}(r), f_{\kappa}(r)$ は点電荷ポテンシャルの場合にしか解析解が求められないため、一般には (3.20), (3.21) 式を数値的に解く必要がある。次節では、ポテンシャルが原点で一定の値をとり、無限遠で点電荷ポテンシャルに帰着するとして、数値的に波動関数を求めるための手法を述べる。

3.2 束縛状態

便宜上、動径方向の波動関数を

$$G_\kappa(r) \equiv rg_\kappa(r), \quad F_\kappa(r) \equiv rf_\kappa(r) \quad (3.23)$$

と定義する。(3.20), (3.21) 式より、 $G_\kappa(r), F_\kappa(r)$ の満たす方程式は

$$\frac{dG_\kappa(r)}{dr} + \frac{\kappa}{r}G_\kappa(r) - (E + m + e\phi(r))F_\kappa(r) = 0 \quad (3.24)$$

$$\frac{dF_\kappa(r)}{dr} - \frac{\kappa}{r}F_\kappa(r) + (E - m + e\phi(r))G_\kappa(r) = 0 \quad (3.25)$$

また、波動関数の規格化条件

$$\int_0^\infty dr[G_\kappa^2(r) + F_\kappa^2(r)] = 1 \quad (3.26)$$

を満たすものとする。波動関数が二重可積分であるために、原点における境界条件

$$G_\kappa(0) = 0, \quad F_\kappa(0) = 0 \quad (3.27)$$

を課す。さらに、無限遠でポテンシャルが $e\phi(r) \rightarrow Z\alpha/r$ となることから、原点から十分離れた点において $G_\kappa(r), F_\kappa(r)$ は点電荷ポテンシャルに対する解 $G_\kappa^{\text{PC}}(r), F_\kappa^{\text{PC}}(r)$ に漸近する。

これらの条件の下、線形連立微分方程式 (3.24), (3.25) 式を解くためには Runge-Kutta 法を用いるのが有用である。今回用いる 4 次の Runge-Kutta 法は、実装が容易であり、ステップの刻み幅 h に対して計算精度が $\mathcal{O}(h^5)$ となる非常に実用的な方法である。

ここで数値計算により求めるのは、波動関数 $G_\kappa(r), F_\kappa(r)$ 及び束縛状態のエネルギー E である。Runge-Kutta 法では、まず初期値としてある E の値に対する無限遠での境界条件

$$G_\kappa(r_{\text{ini}}) = G_\kappa^{\text{PC}}(r_{\text{ini}}), \quad F_\kappa(r_{\text{ini}}) = F_\kappa^{\text{PC}}(r_{\text{ini}}) \quad (3.28)$$

を与える。そこから原点に向かって微分方程式を解いていくが、適当な E を与えていなければ、原点での境界条件 (3.27) 式は満たされない。そのため、 E の値を変えながら繰り返し微分方程式を解き、境界条件を満たすものを探索する。ここで得られた E が束縛状態の固有エネルギーである。この探索の際には、Runge-Kutta 法で得られる波動関数の原点での値を E の関数として、二分探索によりゼロ点を求めればよい。

3.3 散乱状態

束縛状態と同様に、(3.20), (3.21) 式を解くことで角運動量の固有状態、すなわち部分波を求めることができるが、まずはそれらをどのように重ね合わせると散乱状態の波動関数が得られるかを考える。

3.3.1 部分波展開

はじめに、自由場の Dirac 方程式に対する平面波解

$$\psi_{\text{pl}}^{p,s}(\mathbf{r}) = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \end{pmatrix} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} \chi_{1/2}^s \quad (3.29)$$

の部分波展開を考える。

$$e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} = \sum_{L,M} 4\pi i^L Y_L^{M*}(\hat{p}) Y_L^M(\hat{r}) j_L(pr) \quad (3.30)$$

となることを用いると、

$$\begin{aligned} \psi_{\text{pl}}^{p,s}(\mathbf{r}) &= \sqrt{E+m} \sum_{L,M} 4\pi i^L Y_L^{M*}(\hat{p}) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \end{pmatrix} j_L(pr) Y_L^M(\hat{r}) \chi_{1/2}^s \\ &= \sqrt{E+m} \sum_{L,M} 4\pi i^L Y_L^{M*}(\hat{p}) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \end{pmatrix} j_L(pr) \sum_{J,\nu} (L, M, 1/2, s | J, \nu) \Omega_{J\nu}^L(\hat{r}) \\ &= \sqrt{E+m} \sum_{\kappa,\nu} 4\pi i^{l_\kappa} Y_{l_\kappa}^{\nu-s*}(\hat{p}) (l_\kappa, \nu-s, 1/2, s | j_\kappa, \nu) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla}}{E+m} \end{pmatrix} j_{l_\kappa}(pr) \chi_{\kappa,\nu}(\hat{r}) \end{aligned} \quad (3.31)$$

さらに、(3.19) 式と球ベッセル関数の漸化式

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dz} - \frac{n}{z} \right) j_n(z) &= -j_{n+1}(z) \\ \left(\frac{d}{dz} + \frac{n+1}{z} \right) j_n(z) &= j_{n-1}(z) \end{aligned} \quad (3.32)$$

を用いれば、

$$\begin{aligned} -i \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla}}{E+m} [j_{l_\kappa}(pr) \chi_{\kappa,\nu}(\hat{r})] &= \frac{i}{E+m} \left[\frac{d}{dr} + \frac{1+\kappa}{r} \right] j_{l_\kappa}(pr) \chi_{-\kappa,\nu}(\hat{r}) \\ &= \frac{ip}{E+m} \text{sign}(\kappa) j_{l_{-\kappa}}(pr) \end{aligned} \quad (3.33)$$

となり、

$$\psi_{\text{pl}}^{p,s}(\mathbf{r}) = \sum_{\kappa,\nu} 4\pi i^{l_\kappa} Y_{l_\kappa}^{\nu-s*}(\hat{p}) (l_\kappa, \nu-s, 1/2, s | j_\kappa, \nu) \begin{pmatrix} g_\kappa^{\text{pl}}(r) \chi_{\kappa,\nu}(\hat{r}) \\ i f_\kappa^{\text{pl}}(r) \chi_{-\kappa,\nu}(\hat{r}) \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} g_\kappa^{\text{pl}}(r) &= \sqrt{E+m} j_{l_\kappa}(pr) \\ f_\kappa^{\text{pl}}(r) &= \sqrt{E-m} \text{sign}(\kappa) j_{l_{-\kappa}}(pr) \end{aligned} \quad (3.35)$$

を得る。動径方向の波動関数 $g_\kappa^{\text{pl}}(r), f_\kappa^{\text{pl}}(r)$ は、無限遠方 ($r \rightarrow \infty$) で

$$\begin{aligned} g_\kappa^{\text{pl}}(r) &\rightarrow \frac{\sqrt{E+m}}{pr} \cos\left(pr - \frac{l_\kappa+1}{2}\pi\right) \\ f_\kappa^{\text{pl}}(r) &\rightarrow -\frac{\sqrt{E-m}}{pr} \sin\left(pr - \frac{l_\kappa+1}{2}\pi\right) \end{aligned} \quad (3.36)$$

のように振る舞うことが分かる。

次に、Coulomb ポテンシャルが存在する場合を考える。球対称なポテンシャルの場合は、平面波解における角度部分は変化せず、動径方向の波動関数のみがポテンシャルの影響を受けて歪曲する。そこで、(3.34) 式を修正して、散乱波の部分波展開を

$$\psi^{p,s}(\mathbf{r}) = \sum_{\kappa,\nu} 4\pi i^{l_\kappa} Y_{l_\kappa}^{\nu-s*}(\hat{p})(l_\kappa, \nu-s, 1/2, s | j_\kappa, \nu) c_\kappa \begin{pmatrix} g_\kappa(r) \chi_{\kappa,\nu}(\hat{r}) \\ i f_\kappa(r) \chi_{-\kappa,\nu}(\hat{r}) \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

と書き表す。ここで $g_\kappa(r), f_\kappa(r)$ は Dirac 方程式 (3.20), (3.21) 式の解であり、 c_κ は部分波を重ね合わせる際に重みを与える係数である。

c_κ を定めるため、波動関数の遠方での振る舞いを考える。 $r \rightarrow \infty$ でポテンシャルは点電荷の場合に漸近するため、波動関数も点電荷ポテンシャルに対する Dirac 方程式の解の重ね合わせで表現することができる。原点で正則な解と非正則な解の線形結合で書けるとすると、

$$\begin{pmatrix} g_\kappa(r) \\ f_\kappa(r) \end{pmatrix} \rightarrow \cos \delta_\kappa \begin{pmatrix} g_\kappa^{\text{reg}}(r) \\ f_\kappa^{\text{reg}}(r) \end{pmatrix} - \sin \delta_\kappa \begin{pmatrix} g_\kappa^{\text{irr}}(r) \\ f_\kappa^{\text{irr}}(r) \end{pmatrix} \quad (r \rightarrow \infty) \quad (3.38)$$

と表すことができ、点電荷分布における解の無限遠での漸近形を用いれば

$$\begin{aligned} g_\kappa(r) &\rightarrow \frac{\sqrt{E+m}}{pr} \left[\cos \delta_\kappa \cos\left(pr - \frac{l_\kappa+1}{2}\pi + \delta_C\right) - \sin \delta_\kappa \sin\left(pr - \frac{l_\kappa+1}{2}\pi + \delta_C\right) \right] \\ &= \frac{\sqrt{E+m}}{pr} \cos\left(pr - \frac{l_\kappa+1}{2}\pi + \delta_C + \delta_\kappa\right) \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} f_\kappa(r) &\rightarrow \frac{\sqrt{E-m}}{pr} \left[-\cos \delta_\kappa \sin\left(pr - \frac{l_\kappa+1}{2}\pi + \delta_C\right) - \sin \delta_\kappa \cos\left(pr - \frac{l_\kappa+1}{2}\pi + \delta_C\right) \right] \\ &= -\frac{\sqrt{E-m}}{pr} \sin\left(pr - \frac{l_\kappa+1}{2}\pi + \delta_C + \delta_\kappa\right) \end{aligned} \quad (3.40)$$

となる。ここで δ_C は平面波に対する点電荷ポテンシャルによる位相のずれを表しているため、 δ_κ が点電荷分布の場合に対する一般の球対称ポテンシャルの影響に対応していることが分かる。さらに

$$z = pr - \frac{l_\kappa+1}{2}\pi + \delta_C \quad (3.41)$$

とおき、

$$\begin{aligned}
\cos(z + \delta_\kappa) &= \frac{e^{i(z+\delta_\kappa)} + e^{-i(z+\delta_\kappa)}}{2} \\
&= e^{\mp i\delta_\kappa} \frac{e^{iz} + e^{-iz} - e^{\pm iz} + e^{\pm i(z+2\delta_\kappa)}}{2} \\
&= e^{\mp i\delta_\kappa} \left(\cos z + \frac{e^{\pm 2i\delta_\kappa} - 1}{2} e^{\pm iz} \right) \\
\sin(z + \delta_\kappa) &= \frac{e^{i(z+\delta_\kappa)} - e^{-i(z+\delta_\kappa)}}{2} \\
&= e^{\mp i\delta_\kappa} \frac{e^{iz} - e^{-iz} \mp e^{\pm iz} \pm e^{\pm i(z+2\delta_\kappa)}}{2i} \\
&= e^{\mp i\delta_\kappa} \left(\sin z \pm \frac{e^{\pm 2i\delta_\kappa} - 1}{2i} e^{\pm iz} \right)
\end{aligned}$$

が成り立つことを用いると

$$\begin{pmatrix} g_\kappa(r) \\ f_\kappa(r) \end{pmatrix} \rightarrow e^{\mp i\delta_\kappa} \left[\frac{1}{pr} \begin{pmatrix} \sqrt{E+m} \cos z \\ -\sqrt{E-m} \sin z \end{pmatrix} + \frac{(e^{\pm 2i\delta_\kappa} - 1)e^{\pm iz}}{2pr} \begin{pmatrix} \sqrt{E+m} \\ \pm i\sqrt{E-m} \end{pmatrix} \right] \quad (3.42)$$

と書き直すことができる。したがって、(3.37) 式で導入した係数 c_κ を

$$c_\kappa = e^{\pm \delta_\kappa} \quad (3.43)$$

と選べば、(3.36) 式と見比べることで第一項が平面波のような振る舞いを持っており、第二項が球対称ポテンシャルによる波動関数の歪曲を表していると解釈できる。(ただし、 δ_C が r を含むため、第一項が完全な平面波になっているわけではないことに注意する。) 以上より、一般の球対称ポテンシャルにより歪曲を受けた散乱波の部分波展開は

$$\psi^{p,s}(\mathbf{r}) = \sum_{\kappa,\nu} 4\pi i^{l_\kappa} Y_{l_\kappa}^{\nu-s*}(\hat{p})(l_\kappa, \nu-s, 1/2, s | j_\kappa, \nu) e^{\pm \delta_\kappa} \begin{pmatrix} g_\kappa(r) \chi_{\kappa,\nu}(\hat{r}) \\ i f_\kappa(r) \chi_{-\kappa,\nu}(\hat{r}) \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

と表される。各部分波に対する δ_κ の値は、遠方での境界条件を満たすように数値的に求める必要がある。± の符号は境界条件として外向き/内向き球面波をとることに対応しており、今回の計算で終状態の散乱波を求めるには内向き球面波の境界条件を選ぶ。

3.3.2 数値計算手法

終状態における動径方向の波動関数を求めるため、与えられたエネルギーに対して (3.20), (3.21) 式を解く。

まず、ポテンシャルは原点で有限の値 $\phi(0) = \phi_0$ を持ち、その周りで十分緩やかに変化すると仮定すると、原点付近での微分方程式は

$$\frac{dg_\kappa(r)}{dr} + \frac{1+\kappa}{r} g_\kappa(r) - (E+m+e\phi_0) f_\kappa(r) \simeq 0 \quad (3.45)$$

$$\frac{df_\kappa(r)}{dr} + \frac{1-\kappa}{r} f_\kappa(r) + (E-m+e\phi_0) g_\kappa(r) \simeq 0 \quad (3.46)$$

したがって $\tilde{E} = E + e\phi_0$, $\tilde{p} = \sqrt{\tilde{E}^2 - m^2}$, N を定数とすれば、原点付近における解は

$$\begin{aligned} g_\kappa(r) &= N\sqrt{\tilde{E} + m} j_{l_\kappa}(\tilde{p}r) \\ f_\kappa(r) &= N\sqrt{\tilde{E} - m} \text{sign}(\kappa) j_{l_{-\kappa}}(\tilde{p}r) \end{aligned} \quad (3.47)$$

となる。そこで、十分小さな $r = r_{\text{ini}}$ における (3.47) 式の値を初期値として、Runge-Kutta 法により微分方程式を内側から外側に向かって解くことができる。

ただし、解は遠方での境界条件を満たしている必要があり、漸近形 (3.38) 式と滑らかに繋がるように係数 N 及び δ_κ が決まる。十分遠方の点 $r = r_{\text{con}}$ において Wronskian

$$W_g(\delta_\kappa) = \frac{g'_\kappa(r_{\text{con}})}{g_\kappa(r_{\text{con}})} - \frac{\{\cos \delta_\kappa g_\kappa^{\text{reg}}(r_{\text{con}}) - \sin \delta_\kappa g_\kappa^{\text{irr}}(r_{\text{con}})\}'}{\cos \delta_\kappa g_\kappa^{\text{reg}}(r_{\text{con}}) - \sin \delta_\kappa g_\kappa^{\text{irr}}(r_{\text{con}})} \quad (3.48)$$

を定義すれば、 $W(\delta_\kappa) = 0$ を満たすように δ_κ を定めることができ、

$$\tan \delta_\kappa = \frac{g^{\text{reg}}(r_{\text{con}})g'(r_{\text{con}}) - g^{\text{reg}'}(r_{\text{con}})g(r_{\text{con}})}{g^{\text{irr}}(r_{\text{con}})g'(r_{\text{con}}) - g^{\text{irr}'}(r_{\text{con}})g(r_{\text{con}})} \quad (3.49)$$

を得る。最後に $r = r_{\text{con}}$ で解が漸近形と連続になるように係数 N を求めれば、散乱状態の部分波を得ることができる。境界条件を課す点 r_{con} は Coulomb ポテンシャルが点電荷のものとみなせる点を選べばよく、特に原子核が半径 R の一様電荷分布の場合ならば $r_{\text{con}} = R$ とすればよい。

4 DIO 崩壊率

ミューオン原子中のミューオンが弱い相互作用により電子とニュートリノに崩壊して放出される過程

$$\text{ミューオン原子} \rightarrow \text{イオン}^{*1+} + e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$$

について崩壊率の定式化を行う。

4.1 定式化

始状態のミューオン原子及び終状態のイオンにおけるレプトン状態を独立粒子模型で近似すると、ミューオン原子の崩壊に対する遷移行列要素は

$$\langle \text{イオン}^{*1+}; e^-(\mathbf{q}_e), \bar{\nu}_e, \nu_\mu | \mathcal{L}_I | \text{ミューオン原子} \rangle = \langle e^-(\mathbf{q}_e), \bar{\nu}_e, \nu_\mu | \mathcal{L}_I | \mu_{n_\mu, \kappa_\mu}^- \rangle \quad (4.1)$$

で与えられる。ここで $\{n_\mu, \kappa_\mu\}$ は束縛ミューオンの状態を表す量子数である。原子核の Coulomb 場に束縛されたミューオンは速やかに 1S 状態へ遷移するため、 $\{n_\mu, \kappa_\mu\} = \{1, -1\}$ にあるとする。

V-A 理論の枠組みでミューオン原子中の $1S_{1/2}$ にあるミューオンの崩壊を考えると、 $\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$ に対する電荷交換型のラグランジアン密度は

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_e \gamma_\lambda (1 - \gamma^5) \psi_{\nu_e} \bar{\psi}_{\nu_\mu} \gamma^\lambda (1 - \gamma^5) \psi_\mu + \text{h.c.} \quad (4.2)$$

ここで G_F はフェルミ結合定数、 ψ_a は粒子 a ($a = \mu, e, \nu_\mu, \nu_e$) の場の演算子を表す。さらに、Fierz 変換によりラグランジアン密度は

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_e \gamma_\lambda (1 - \gamma^5) \psi_\mu \bar{\psi}_{\nu_\mu} \gamma^\lambda (1 - \gamma^5) \psi_{\nu_e} + \text{h.c.} \quad (4.3)$$

と書き換えることができる。以下ではニュートリノ及び反ニュートリノの質量をゼロとし、原子核がミューオンに比べて十分重いことから、原子核の反跳エネルギーも一旦無視することとする。

フェルミの黄金律より、崩壊確率は

$$PdEd\Omega_e = \left(\frac{1}{2} \sum_{s_\mu, s_e} \frac{d^3 \mathbf{q}_e}{(2\pi)^3 2E} \right) \left(\sum_{s_{\nu_\mu}, s_{\nu_e}} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_{\nu_\mu} d^3 \mathbf{p}_{\nu_e}}{(2\pi)^6 2p_{\nu_\mu}^0 2p_{\nu_e}^0} \right) |\mathcal{M}|^2 (2\pi) \delta(E_f - E_i) \quad (4.4)$$

と表される。遷移振幅 $\mathcal{M}$ は時間順序積を表す記号 T を使って

$$i\mathcal{M}(2\pi)\delta(E_f - E_i) = \left\langle e, \nu_\mu \left| T \left[\exp \left(i \int d^4 x \mathcal{L}(x) \right) \right] \right| \mu, \nu_e \right\rangle \quad (4.5)$$

で与えられ、1 次の摂動論を適用すれば

$$\mathcal{M}(2\pi)\delta(E_f - E_i) = \int d^4 x \langle e, \nu_\mu | \mathcal{L}(x) | \mu, \nu_e \rangle \quad (4.6)$$

となる。

Dirac スピノール $u(\mathbf{p}, s), v(\mathbf{p}, s)$ を用いてニュートリノの波動関数を

$$\psi_\nu(\mathbf{x}) = u(\mathbf{p}_\nu, s_\nu) e^{-i\mathbf{p}_\nu \cdot \mathbf{x}}, \quad \psi_{\bar{\nu}}(\mathbf{x}) = v(\mathbf{p}_{\bar{\nu}}, s_{\bar{\nu}}) e^{i\mathbf{p}_{\bar{\nu}} \cdot \mathbf{x}} \quad (4.7)$$

と書くと、遷移振幅 $\mathcal{M}$ とその絶対値の二乗は

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \int d^3 x \bar{\psi}_e(\mathbf{x}) \gamma_\lambda (1 - \gamma^5) \psi_\mu(\mathbf{x}) \bar{\psi}_{\nu_\mu}(\mathbf{x}) \gamma^\lambda (1 - \gamma^5) \psi_{\nu_e}(\mathbf{x}) \\ &= -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \int d^3 x e^{i(\mathbf{p}_{\nu_\mu} + \mathbf{p}_{\bar{\nu}_e}) \cdot \mathbf{x}} \bar{\psi}_e(\mathbf{x}) \gamma_\lambda (1 - \gamma^5) \psi_\mu(\mathbf{x}) \bar{u}(\mathbf{p}_{\nu_\mu}, s_{\nu_\mu}) \gamma^\lambda (1 - \gamma^5) v(\mathbf{p}_{\nu_e}, s_{\nu_e}) \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{G_F^2}{2} \int d^3 x \int d^3 y e^{i(\mathbf{p}_{\nu_\mu} + \mathbf{p}_{\bar{\nu}_e}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \bar{\psi}_e(\mathbf{x}) \gamma_\lambda (1 - \gamma^5) \psi_\mu(\mathbf{x}) \bar{\psi}_\mu(\mathbf{y}) \gamma_\rho (1 - \gamma^5) \psi_e(\mathbf{y}) \\ &\quad \times \bar{u}(\mathbf{p}_{\nu_\mu}, s_{\nu_\mu}) \gamma^\lambda (1 - \gamma^5) v(\mathbf{p}_{\nu_e}, s_{\nu_e}) \bar{v}(\mathbf{p}_{\nu_e}, s_{\nu_e}) \gamma^\rho (1 - \gamma^5) u(\mathbf{p}_{\nu_\mu}, s_{\nu_\mu}) \end{aligned} \quad (4.9)$$

で計算される。ニュートリノの部分についてスピンの和をとると、

$$\begin{aligned} &\sum_{s_{\nu_\mu}, s_{\nu_e}} \bar{u}(\mathbf{p}_{\nu_\mu}, s_{\nu_\mu}) \gamma^\lambda (1 - \gamma^5) v(\mathbf{p}_{\nu_e}, s_{\nu_e}) \bar{v}(\mathbf{p}_{\nu_e}, s_{\nu_e}) \gamma^\rho (1 - \gamma^5) u(\mathbf{p}_{\nu_\mu}, s_{\nu_\mu}) \\ &= \text{Tr} \left[\not{p}_{\nu_\mu} \gamma^\lambda (1 - \gamma^5) \not{p}_{\nu_e} \gamma^\rho (1 - \gamma^5) \right] \\ &= 8(p_{\nu_\mu})_\sigma (p_{\nu_e})_\tau (g^{\sigma\lambda} g^{\tau\rho} + g^{\sigma\rho} g^{\tau\lambda} - g^{\sigma\tau} g^{\lambda\rho} + i\varepsilon^{\sigma\lambda\tau\rho}) \end{aligned} \quad (4.10)$$

となる。

これらを用いると、崩壊確率は

$$PdE d\Omega_e = \frac{2G_F^2}{(2\pi)^8} \sum_{s_\mu, s_e} \frac{d^3 \mathbf{q}_e}{2E} \int d^4 p_{\nu_\mu} d^4 p_{\nu_e} \delta(p_{\nu_\mu}^2) \delta(p_{\nu_e}^2) \delta(p_\mu^0 - p_{\nu_\mu}^0 - p_{\nu_e}^0 - E) \\ \times (p_{\nu_\mu}^\lambda p_{\nu_e}^\rho + p_{\nu_\mu}^\rho p_{\nu_e}^\lambda - p_{\nu_\mu} \cdot p_{\nu_e} g^{\lambda\rho}) J_\lambda(\mathbf{p}_{\nu_\mu} + \mathbf{p}_{\nu_e}) J_\rho^\dagger(\mathbf{p}_{\nu_\mu} + \mathbf{p}_{\nu_e}) \quad (4.11)$$

となる。ただし、放出電子のエネルギーを E とし、レプトンカレント

$$J_\lambda(\mathbf{p}) = \int d^3 \mathbf{x} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \bar{\psi}_e(\mathbf{x}) \gamma_\lambda (1 - \gamma^5) \psi_\mu(\mathbf{x}) \quad (4.12)$$

を使って表した。

さらに、変数変換

$$k = p_{\nu_\mu} + p_{\nu_e}, \quad k' = p_{\nu_\mu} - p_{\nu_e} \quad (4.13)$$

を行えば、

$$PdE d\Omega_e = \frac{G_F^2}{8(2\pi)^8} \sum_{s_\mu, s_e} \frac{d^3 \mathbf{q}_e}{2E} \int d^4 k d^4 k' \delta(k^2 + k'^2) \delta(k \cdot k') \delta(p_\mu^0 - k^0 - E) \\ \times \left\{ 2k^\lambda k'^\rho - 2k'^\lambda k'^\rho - (k^2 - k'^2) g^{\lambda\rho} \right\} J_\lambda(\mathbf{k}) J_\rho^\dagger(\mathbf{k}) \quad (4.14)$$

と表せる。

ニュートリノの運動量に関する積分のうち、 k' の積分を抜き出して

$$I^{\lambda\rho}(k) = \int d^4 k' \delta(k^2 + k'^2) \delta(k \cdot k') \left\{ 2k^\lambda k'^\rho - 2k'^\lambda k'^\rho - (k^2 - k'^2) g^{\lambda\rho} \right\} \quad (4.15)$$

とおくと、ローレンツ共変性より $I^{\lambda\rho}(k)$ は 2 階テンソル

$$I^{\lambda\rho}(k) = A g^{\lambda\rho} + B k^\lambda k^\rho \quad (4.16)$$

の形で表すことができる。さらに、 $\mathbf{k} = 0$ となるような系で計算を行えば

$$g_{\lambda\rho} I^{\lambda\rho}(k) = 4A + B k^2 \\ = \int d^4 k' \delta(k^2 + k'^2) \delta(k \cdot k') \left\{ -2(k^2 - k'^2) \right\} \\ = \int d^4 k'_0 d^3 \mathbf{k}' \delta(k_0^2 + k_0'^2 - \mathbf{k}'^2) \delta(k_0 k'_0) \left\{ -2(k_0^2 - k_0'^2 + \mathbf{k}'^2) \right\} \\ = -4\pi \cdot 2k_0^2 \\ = -8\pi k^2 \quad (4.17)$$

$$k_\lambda k_\rho I^{\lambda\rho}(k) = A k^2 + B (k^2)^2 \\ = \int d^4 k' \delta(k^2 + k'^2) \delta(k \cdot k') \left\{ k^2 (k^2 + k'^2) - 2(k \cdot k')^2 \right\} \\ = 0 \quad (4.18)$$

(4.17), (4.18) 式から

$$A = -\frac{8\pi}{3}k^2, \quad B = \frac{8\pi}{3} \quad (4.19)$$

よって

$$I^{\lambda\rho}(k) = \frac{8\pi}{3}(k^\lambda k^\rho - k^2 g^{\lambda\rho}) \quad (4.20)$$

を得る。以上より、崩壊確率は

$$PdE d\Omega_e = \frac{G_F^2}{12(2\pi)^7} \sum_{s_\mu, s_e} \frac{d^3 \mathbf{q}_e}{E} \int d^4 k \delta(p_\mu^0 - k^0 - E) J_\lambda(\mathbf{k}) J_\rho^\dagger(\mathbf{k}) (k^\lambda k^\rho - k^2 g^{\lambda\rho}) \quad (4.21)$$

$$= \frac{G_F^2}{12(2\pi)^7} \sum_{s_\mu, s_e} \frac{d^3 \mathbf{q}_e}{E} \int d^3 \mathbf{k} J_\lambda(\mathbf{k}) J_\rho^\dagger(\mathbf{k}) (k^\lambda k^\rho - k^2 g^{\lambda\rho}) \Big|_{k^0=p_\mu^0-E} \quad (4.22)$$

の形で表すことができる。以下では $k^0 = p_\mu^0 - E = W - E$ を満たすものとして、省略して記述する。

4.2 平面波近似を用いた表式

具体的な波動関数を使ってレプトンカレント $J_\lambda(\mathbf{k})$ ($= J_0(\mathbf{k}), \mathbf{J}(\mathbf{k})$) を求める。ここでは始状態のミューオンに対して非相対論的近似を適用し、終状態の電子の波動関数に平面波近似を用いる。この場合は崩壊率の解析的な式を得ることができ、次節で求める部分波展開を用いた表式を数値的に確認する際に有用となる。

始状態においては、1S 状態にあるミューオンの波動関数を Coulomb ポテンシャル中の Schrödinger 方程式の解として表す。ただし、原子核を点電荷とみなしたときのポテンシャルを用いる。使用する波動関数は

$$\psi_\mu^{\mathbf{p}_\mu, s_\mu}(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{(m_\mu Z\alpha)^3}{\pi}} e^{-m_\mu Z\alpha x} \begin{pmatrix} \chi_{-1}^{s_\mu} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

であり、束縛エネルギーは

$$B_\mu = \frac{m_\mu (Z\alpha)^2}{2} \quad (4.24)$$

となる。 χ_κ^s はスピン s を持つ粒子の 2 成分スピノールである。

終状態においては、電子と原子核との Coulomb 相互作用を無視して自由 Dirac 方程式の平面波解

$$\psi_e^{\mathbf{q}_e, s_e}(\mathbf{x}) = u_e^{s_e}(\mathbf{q}_e) e^{i\mathbf{q}_e \cdot \mathbf{x}} \quad (4.25)$$

を用いる。Dirac スピノール $u_e^{s_e}(\mathbf{q}_e)$ は、スピン和に対して次の関係式を満たすものとする。

$$\sum_s u_e^s(\mathbf{q}) \bar{u}_e^s(\mathbf{q}) = \not{\mathbf{q}} + m_e \quad (4.26)$$

これらの波動関数を使ってレプトンカレント $J_\lambda(\mathbf{k})$ を求めると、

$$\begin{aligned}
J_\lambda(\mathbf{k}) &= \int d^3\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \bar{\psi}_e(\mathbf{x}) \gamma_\lambda (1 - \gamma^5) \psi_\mu(\mathbf{x}) \\
&= \sqrt{\frac{(m_\mu Z\alpha)^3}{\pi}} \int d^3\mathbf{x} e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{q}_e)\cdot\mathbf{x}} e^{-m_\mu Z\alpha x} \bar{u}_e^{s_e}(\mathbf{q}_e) \gamma_\lambda (1 - \gamma^5) \begin{pmatrix} \chi_{-1}^{s_\mu} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \sqrt{\frac{(m_\mu Z\alpha)^3}{\pi}} \frac{2\pi i}{|\mathbf{k} + \mathbf{q}_e|} \int_0^\infty dx \left(\frac{e^{-i|\mathbf{k}+\mathbf{q}_e|x}}{m_\mu Z\alpha + i|\mathbf{k} + \mathbf{q}_e|} - \frac{e^{i|\mathbf{k}+\mathbf{q}_e|x}}{m_\mu Z\alpha - i|\mathbf{k} + \mathbf{q}_e|} \right) \\
&\quad \times e^{-m_\mu Z\alpha x} \bar{u}_e^{s_e}(\mathbf{q}_e) \gamma_\lambda (1 - \gamma^5) \begin{pmatrix} \chi_{-1}^{s_\mu} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \sqrt{\frac{(m_\mu Z\alpha)^3}{\pi}} \frac{8\pi m_\mu Z\alpha}{\{(m_\mu Z\alpha)^2 + |\mathbf{k} + \mathbf{q}_e|^2\}^2} \bar{u}_e^{s_e}(\mathbf{q}_e) \gamma_\lambda (1 - \gamma^5) \begin{pmatrix} \chi_{-1}^{s_\mu} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.27)
\end{aligned}$$

を得る。これより DIO の崩壊率を計算すると

$$\begin{aligned}
4\pi P(E) dE &= \frac{G_F^2 q_e dE}{12(2\pi)^7} \sum_{s_\mu, s_e} \int d\Omega_e \int d^3\mathbf{k} J_\lambda(\mathbf{k}) J_\rho^\dagger(\mathbf{k}) (k^\lambda k^\rho - k^2 g^{\lambda\rho}) \\
&= \frac{G_F^2 q_e dE}{12(2\pi)^7} \frac{(m_\mu Z\alpha)^3}{\pi} (8\pi m_\mu Z\alpha)^2 \sum_{s_\mu, s_e} \int d\Omega_e \int d^3\mathbf{k} \frac{1}{\{(m_\mu Z\alpha)^2 + |\mathbf{k} + \mathbf{q}_e|^2\}^4} \\
&\quad \times \sum_{s_\mu, s_e} \bar{u}_e^{s_e}(\mathbf{q}_e) \gamma_\lambda (1 - \gamma^5) \begin{pmatrix} \chi_{-1}^{s_\mu} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_{-1}^{s_\mu\dagger} & 0 \end{pmatrix} (1 - \gamma^5) \gamma_\rho^\dagger \gamma_0 u_e^{s_e}(\mathbf{q}_e) \\
&\quad \times (k^\lambda k^\rho - k^2 g^{\lambda\rho}) \\
&= \frac{8G_F^2}{3(2\pi)^6} (m_\mu Z\alpha)^5 q_e dE \int d\Omega_e \int d^3\mathbf{k} \frac{1}{\{(m_\mu Z\alpha)^2 + |\mathbf{k} + \mathbf{q}_e|^2\}^4} \\
&\quad \times \text{Tr} \left[(\not{\mathbf{q}}_e + m_e) \gamma_\lambda (1 - \gamma^5) \frac{1 + \gamma^0}{2} \gamma_\rho (1 - \gamma^5) \right] (k^\lambda k^\rho - k^2 g^{\lambda\rho})
\end{aligned}$$

トレースの部分で残るのは

$$\begin{aligned}
\text{Tr} \left[(\not{\mathbf{q}}_e + m_e) \gamma_\lambda (1 - \gamma^5) \frac{1 + \gamma^0}{2} \gamma_\rho (1 - \gamma^5) \right] &= \text{Tr} \left[\not{\mathbf{q}}_e \gamma_\lambda (1 - \gamma^5) \frac{\gamma^0}{2} \gamma_\rho (1 - \gamma^5) \right] \\
&= 4q_e^\nu (g_{\nu\lambda} g_{0\rho} + g_{\nu\rho} g_{\lambda 0} - g_{\nu 0} g_{\lambda\rho} - i\varepsilon_{\nu\lambda 0\rho})
\end{aligned}$$

であることを用いれば、

$$\begin{aligned}
4\pi P(E) dE &= \frac{32G_F^2}{3(2\pi)^6} (m_\mu Z\alpha)^5 q_e dE \int d\Omega_e \int d^3\mathbf{k} \frac{2k^0 q_e \cdot \mathbf{k} - q_e^0 k^2 + 2k^2 q_e^0}{\{(m_\mu Z\alpha)^2 + |\mathbf{k} + \mathbf{q}_e|^2\}^4} \\
&= \frac{32G_F^2 \cdot 8\pi^2}{3(2\pi)^6} (m_\mu Z\alpha)^5 q_e dE \int_0^{W-E} k^2 dk \int_{-1}^1 dx \frac{q_e^0 (3k_0^2 - \mathbf{k}^2) - 2k_0 k q_e x}{\{(m_\mu Z\alpha)^2 + k^2 + \mathbf{q}_e^2 + 2k q_e x\}^4}
\end{aligned}$$

ここで x の積分は解析的に実行することができ、

$$\int_{-1}^1 dx \frac{A - Bx}{(C + Dx)^4} = \frac{2}{3} \frac{A(3C^2 + D^2) + 4BCD}{(C^2 - D^2)^3} \quad (4.28)$$

$$A = q_e^0(3k_0^2 - \mathbf{k}^2)$$

$$B = 2k_0 k q_e$$

$$C = (m_\mu Z\alpha)^2 + k^2 + \mathbf{q}_e^2$$

$$D = 2k q_e$$

が成り立つ。

最後に自由ミューオンの崩壊率 $\Lambda_{\text{free}} = G_F^2 m_\mu^5 / 192\pi^3$ で規格化すると、DIO のエネルギースペクトル $N(E) = 4\pi P(E)$ は

$$N(E) = \frac{512}{3\pi} (Z\alpha)^5 q_e \int_0^{W-E} k^2 dk \frac{A(k)\{3C^2(k) + D^2(k)\} + 4B(k)C(k)D(k)}{(C^2(k) - D^2(k))^3} \quad (4.29)$$

となる。ただし $A(k) \sim D(k)$ は (4.28) 式で定義される k の関数である。

4.3 部分波展開を用いた表式

崩壊率をより現実的に評価するためには、始状態と終状態の波動関数に原子核との Coulomb 相互作用の影響を取り入れる必要がある。ポテンシャルが球対称な場合には角運動量が良い量子数となるので、その固有状態で展開する、部分波展開による解析が有用である。ここでは原子核の電荷分布が球対称であると仮定して、電子の散乱波を部分波展開した形を使って DIO の崩壊率の定式化を行う。

始状態の 1S ミューオンと終状態の散乱電子の波動関数は、それぞれ

$$\psi_e^{\mathbf{q}_e, s_e}(\mathbf{x}) = \sum_{\kappa, \nu} a_{\kappa, \nu, s_e}(\hat{q}_e) \psi_{q_e}^{\kappa, \nu}(\mathbf{x}) \quad (4.30)$$

$$a_{\kappa, \nu, s_e}(\hat{q}_e) = 4\pi i^{l_\kappa} (l_\kappa, \nu - s_e, 1/2, s_e | j_\kappa, \nu) Y_{l_\kappa}^{\nu - s_e*}(\hat{q}_e) e^{-i\delta_\kappa}$$

$$\psi_\mu^{\mathbf{p}_\mu, s_\mu}(\mathbf{x}) = a_{s_\mu} \psi_{p_\mu}^{-1, s_\mu}(\mathbf{x}) \quad (4.31)$$

$$a_{s_\mu} = e^{-i\delta_1}$$

と表せる。ここで δ_κ は点電荷のクーロンポテンシャルの場合の解からのずれに対応する位相であり、 $\psi_q^{\kappa, \nu}(\mathbf{x})$ は部分波 κ の 2 成分波動関数

$$\psi_q^{\kappa, \nu}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} g_q^\kappa(x) \chi_\kappa^\nu(\hat{x}) \\ i f_q^\kappa(x) \chi_{-\kappa}^\nu(\hat{x}) \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

である。また、平面波の部分波展開は

$$e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} = 4\pi \sum_{L, M} i^L j_L(kx) Y_L^{M*}(\hat{k}) Y_L^M(\hat{x}) \quad (4.33)$$

となる。これらを用いてレプトンカレント $J_\lambda(\mathbf{k})$ を求めると、ベクトル成分については

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{k}) &= \int d^3\mathbf{x} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \bar{\psi}_e(\mathbf{x}) \boldsymbol{\gamma} (1 - \gamma^5) \psi_\mu(\mathbf{x}) \\ &= 4\pi \sum_{\kappa, \nu} a_{\kappa, \nu, s_e}^* a_{s_\mu} \int d^3\mathbf{x} \sum_{LM} i^L j_L(kx) \bar{\psi}_{q_e}^{\kappa, \nu}(\mathbf{x}) Y_L^{M*}(\hat{k}) \boldsymbol{\gamma} (1 - \gamma^5) Y_L^M(\hat{x}) \psi_{p_\mu}^{-1, s_\mu}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

ここで、ベクトル球面調和関数 $\mathbf{Y}_{JM}^L$ に関する式

$$\begin{aligned} & \left. \sum_{J, M} \mathbf{Y}_{JM}^L(\hat{k}) \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{Y}_{JM}^L(\hat{x}) \right|_\sigma \\ &= \sum_{JM} \sum_{mm'} \sum_{\sigma'} (L, m, 1, \sigma | J, M) Y_L^{m*}(\hat{k}) (\boldsymbol{\gamma})_{\sigma'} (L, m', 1, \sigma' | J, M) Y_L^{m'}(\hat{x}) \\ &= \sum_m Y_L^{m*}(\hat{k}) (\boldsymbol{\gamma})_\sigma Y_L^m(\hat{x}) \end{aligned} \quad (4.34)$$

が成り立つことから

$$\mathbf{J}(\mathbf{k}) = 4\pi \sum_{\kappa, \nu} a_{\kappa, \nu, s_e}^* a_{s_\mu} \int d^3\mathbf{x} \sum_L \sum_{JM} i^L j_L(kx) \bar{\psi}_{q_e}^{\kappa, \nu}(\mathbf{x}) \mathbf{Y}_{JM}^L(\hat{k}) \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{Y}_{JM}^L(\hat{x}) (1 - \gamma^5) \psi_{p_\mu}^{-1, s_\mu}(\mathbf{x})$$

となる。

まず、角度積分

$$X_{JM}^L = \int d\Omega \bar{\psi}_{q_e}^{\kappa, \nu}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{Y}_{JM}^L(\hat{x}) (1 - \gamma^5) \psi_{p_\mu}^{-1, s_\mu}(\mathbf{x}) \quad (4.35)$$

について考える。次の記法

$$\langle \kappa, \nu | O | \kappa', \nu' \rangle = \int d\Omega \chi_\kappa^{\nu\dagger}(\hat{x}) \hat{O}(\hat{x}) \chi_{\kappa'}^{\nu'}(\hat{x}) \quad (4.36)$$

を用いると、この積分は

$$\begin{aligned} X_{JM}^L &= -g_e^\kappa g_\mu^{-1} \langle \kappa, \nu | \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Y}_{JM}^L | -1, s_\mu \rangle - f_e^\kappa f_\mu^{-1} \langle -\kappa, \nu | \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Y}_{JM}^L | 1, s_\mu \rangle \\ &\quad + i \{ g_e^\kappa f_\mu^{-1} \langle \kappa, \nu | \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Y}_{JM}^L | 1, s_\mu \rangle - f_e^\kappa g_\mu^{-1} \langle -\kappa, \nu | \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Y}_{JM}^L | -1, s_\mu \rangle \} \end{aligned}$$

と表すことができ、Wigner-Eckart 定理

$$\langle \kappa, \nu | \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Y}_{JM}^L | \kappa', \nu' \rangle = \frac{1}{[j_\kappa]} (j_{\kappa'}, \nu', J, M | j_\kappa, \nu) \langle \kappa || \mathbf{Y}_J^L || \kappa' \rangle \quad (4.37)$$

及び換算行列要素

$$\langle \kappa || \mathbf{Y}_J^L || \kappa' \rangle = \sqrt{\frac{[k_\kappa \cdot j_{\kappa'}]}{4\pi}} (-1)^{L+1+\kappa} (j_\kappa, 1/2, j_{\kappa'}, -1/2 | J, 0) V_J^{LS}(\kappa, \kappa') \frac{1 + (-1)^{l_\kappa + l_{\kappa'} + L}}{2} \quad (4.38)$$

$$V_J^{LS}(\kappa, \kappa') \equiv \begin{cases} \delta_J^L & (S = 0) \\ (J - \kappa - \kappa') / \sqrt{J(2J+1)} & (S = 1, J = L+1) \\ (-\kappa + \kappa') / \sqrt{J(J+1)} & (S = 1, J = L) \\ -(J+1+\kappa+\kappa') / \sqrt{(J+1)(2J+1)} & (S = 1, J = L-1) \end{cases} \quad (4.39)$$

を用いれば、

$$\begin{aligned}
X_{JM}^L &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (j_\kappa, 1/2, 1/2, -1/2 | J, 0) (1/2, s_\mu, J, M | j_\kappa, \nu) (-1)^{L+1+\kappa} \\
&\quad \times \left[\frac{1 + (-1)^{l_\kappa+L}}{2} \{ -g_e^\kappa g_\mu^{-1} V_J^{L1}(\kappa, -1) - f_e^\kappa f_\mu^{-1} V_J^{L1}(-\kappa, +1) \} \right. \\
&\quad \left. + i \frac{1 + (-1)^{l_\kappa+L+1}}{2} \{ g_e^\kappa f_\mu^{-1} V_J^{L1}(\kappa, +1) - f_e^\kappa g_\mu^{-1} V_J^{L1}(-\kappa, -1) \} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} (1/2, s_\mu, J, M | j_\kappa, \nu) (-1)^{L+j_\kappa+1/2} \\
&\quad \times \left[\frac{1 + (-1)^{l_\kappa+L}}{2} \{ g_e^\kappa g_\mu^{-1} V_J^{L1}(\kappa, -1) + f_e^\kappa f_\mu^{-1} V_J^{L1}(-\kappa, +1) \} \right. \\
&\quad \left. - i \frac{1 + (-1)^{l_\kappa+L+1}}{2} \{ g_e^\kappa f_\mu^{-1} V_J^{L1}(\kappa, +1) - f_e^\kappa g_\mu^{-1} V_J^{L1}(-\kappa, -1) \} \right] \quad (4.40)
\end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}(\mathbf{k}) &= \sqrt{4\pi} \sum_{\kappa, \nu} a_{\kappa, \nu, s_e}^* a_{s_\mu} \int x^2 dx \sum_L \sum_{JM} i^L j_L(kx) (-1)^{L+j_\kappa+1/2} \mathbf{Y}_{JM}^L(\hat{k}) \\
&\quad \times (1/2, s_\mu, J, M | j_\kappa, \nu) \\
&\quad \times \left[\frac{1 + (-1)^{l_\kappa+L}}{2} \{ g_e^\kappa g_\mu^{-1} V_J^{L1}(\kappa, -1) + f_e^\kappa f_\mu^{-1} V_J^{L1}(-\kappa, +1) \} \right. \\
&\quad \left. - i \frac{1 + (-1)^{l_\kappa+L+1}}{2} \{ g_e^\kappa f_\mu^{-1} V_J^{L1}(\kappa, +1) - f_e^\kappa g_\mu^{-1} V_J^{L1}(-\kappa, -1) \} \right] \quad (4.41)
\end{aligned}$$

を得る。角運動量 L の取りうる値は $J, J+1, J-1$ であることを考慮して、

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}(\mathbf{k}) &= \sqrt{4\pi} \sum_{\kappa, \nu} a_{\kappa, \nu, s_e}^* a_{s_\mu} \sum_{JM} (-1)^{J+j_\kappa-1/2} (1/2, s_\mu, J, M | j_\kappa, \nu) \\
&\quad \times \left[-i^J \mathbf{Y}_{JM}^J(\hat{k}) S_{j_\kappa}^0 / \sqrt{J(J+1)} \right. \\
&\quad + i^{J+1} \mathbf{Y}_{JM}^{J+1*}(\hat{k}) S_{j_\kappa}^{+1} / \sqrt{(J+1)(2J+1)} \\
&\quad \left. + i^{J-1} \mathbf{Y}_{JM}^{J-1*}(\hat{k}) S_{j_\kappa}^{-1} / \sqrt{J(2J+1)} \right] \quad (4.42)
\end{aligned}$$

となる。同様にしてレプトンカレントの第0成分は

$$\begin{aligned}
J_0(\mathbf{k}) &= 4\pi \sum_{\kappa, \nu} a_{\kappa, \nu, s_e}^* a_{s_\mu} \int d^3\mathbf{x} \sum_{LM} i^L j_L(kx) \bar{\psi}_{q_e}^{\kappa, \nu}(\mathbf{x}) Y_L^{M*}(\hat{k}) \gamma_0 (1 - \gamma^5) Y_L^M(\hat{x}) \psi_{p_\mu}^{-1, s_\mu}(\mathbf{x}) \\
&= 4\pi \sum_{\kappa, \nu} a_{\kappa, \nu, s_e}^* a_{s_\mu} \int x^2 dx \sum_{LM} i^L j_L(kx) Y_L^{M*}(\hat{k}) \frac{1}{\sqrt{4\pi}} (1/2, s_\mu, L, M | j_\kappa, \nu) (-1)^{L+1+\kappa} \\
&\quad \times \left[\frac{1 + (-1)^{l_\kappa+L}}{2} (g_e^\kappa g_\mu^{-1} + f_e^\kappa f_\mu^{-1}) - i \frac{1 + (-1)^{l_\kappa+1+L}}{2} (g_e^\kappa f_\mu^{-1} - f_e^\kappa g_\mu^{-1}) \right] \\
&= \sqrt{4\pi} \sum_{\kappa, \nu} a_{\kappa, \nu, s_e}^* a_{s_\mu} \sum_{JM} (-1)^{J+j_\kappa-1/2} (1/2, s_\mu, J, M | j_\kappa, \nu) i^J Y_J^{M*}(\hat{k}) S_{j_\kappa} \quad (4.43)
\end{aligned}$$

となる。これらの結果は次の $S_{j_\kappa}^{+1}, S_{j_\kappa}^0, S_{j_\kappa}^{-1}, S_{j_\kappa}$ を使って表した。

$$\begin{aligned}
S_{j_\kappa}^{+1} &= \frac{1}{2} \int x^2 dx j_{J+1}(kx) \left[\{1 + (-1)^{l_\kappa+J+1}\} \{(\kappa + J)g_e^\kappa(x)g_\mu^{-1}(x) - (\kappa - 2 - J)f_e^\kappa(x)f_\mu^{-1}(x)\} \right. \\
&\quad \left. - i\{1 + (-1)^{l_\kappa+J}\} \{(\kappa + 2 + J)g_e^\kappa(x)f_\mu^{-1}(x) + (\kappa - J)f_e^\kappa(x)g_\mu^{-1}(x)\} \right] \\
S_{j_\kappa}^0 &= \frac{1}{2} \int x^2 dx j_J(kx) \left[\{1 + (-1)^{l_\kappa+J}\} (\kappa + 1) \{g_e^\kappa(x)g_\mu^{-1}(x) - f_e^\kappa(x)f_\mu^{-1}(x)\} \right. \\
&\quad \left. - i\{1 + (-1)^{l_\kappa+J+1}\} (\kappa - 1) \{g_e^\kappa(x)f_\mu^{-1}(x) + f_e^\kappa(x)g_\mu^{-1}(x)\} \right] \\
S_{j_\kappa}^{-1} &= \frac{1}{2} \int x^2 dx j_{J-1}(kx) \left[\{1 + (-1)^{l_\kappa+J+1}\} \{(\kappa - 1 - J)g_e^\kappa(x)g_\mu^{-1}(x) - (\kappa - 1 + J)f_e^\kappa(x)f_\mu^{-1}(x)\} \right. \\
&\quad \left. - i\{1 + (-1)^{l_\kappa+J}\} \{(\kappa + 1 - J)g_e^\kappa(x)f_\mu^{-1}(x) + (\kappa + 1 + J)f_e^\kappa(x)g_\mu^{-1}(x)\} \right] \\
S_{j_\kappa} &= \frac{1}{2} \int x^2 dx j_L(kx) \left[\{1 + (-1)^{l_\kappa+J}\} \{g_e^\kappa(x)g_\mu^{-1}(x) + f_e^\kappa(x)f_\mu^{-1}(x)\} \right. \\
&\quad \left. - i\{1 + (-1)^{l_\kappa+J+1}\} \{g_e^\kappa(x)f_\mu^{-1}(x) - f_e^\kappa(x)g_\mu^{-1}(x)\} \right]
\end{aligned} \tag{4.44}$$

以上で求めたレプトンカレント $J_\lambda(\mathbf{k})$ を用いて、DIO の崩壊率

$$PdEd\Omega_e = \frac{G_F^2}{12(2\pi)^7} \frac{d^3\mathbf{q}_e}{E} \sum_{s_\mu, s_e} \int_0^{W-E} d^3\mathbf{k} J_\lambda(\mathbf{k}) J_\rho^*(\mathbf{k}) (k^\lambda k^\rho - k^2 g^{\lambda\rho}) \tag{4.45}$$

を得ることができる。ただし $k^0 = p_\mu^0 - E = W - E$ である。

さらに、エネルギースペクトル $N(E) = 4\pi P(E)$ の表式を得るため (4.45) 式から次の運動量 $\mathbf{q}_e, \mathbf{k}$ に関する角度積分を実行する。

$$\begin{aligned}
&\sum_{s_\mu, s_e} \int d\Omega_{\mathbf{q}_e} \int d\Omega_{\mathbf{k}} (|\mathbf{J} \cdot \mathbf{k}|^2 - k^2 |\mathbf{J}|^2) \\
&= \sum_{s_\mu, s_e} \int d\Omega_{\mathbf{q}_e} \int d\Omega_{\mathbf{k}} [-k_0(J_0 \mathbf{J}^* + J_0^* \mathbf{J}) \cdot \mathbf{k} + |\mathbf{J} \cdot \mathbf{k}|^2 + |J_0|^2 \mathbf{k}^2 + (k_0^2 - \mathbf{k}^2) |\mathbf{J}|^2]
\end{aligned} \tag{4.46}$$

まず、 $\Omega_{\mathbf{q}_e}$ の積分を含む部分は

$$\begin{aligned}
\sum_{s_e} \int d\Omega_{\mathbf{q}_e} a_{\kappa, \nu, s_e}^*(\hat{q}_e) a_{\kappa', \nu', s_e}(\hat{q}_e) &= (4\pi)^2 \sum_{s_e} \int d\Omega_{\mathbf{q}_e} (-i)^{l_\kappa} i^{l_{\kappa'}} \\
&\quad \times (l_\kappa, \nu - s_e, 1/2, s_e | j_\kappa, \nu) (l_{\kappa'}, \nu' - s_e, 1/2, s_e | j_{\kappa'}, \nu') \\
&\quad \times Y_{l_\kappa}^{\nu-s_e}(\hat{q}_e) Y_{l_{\kappa'}}^{\nu'-s_e*}(\hat{q}_e) e^{i(\delta_\kappa - \delta_{\kappa'})} \\
&= (4\pi)^2 \delta_{\kappa\kappa'} \delta_{\nu\nu'}
\end{aligned} \tag{4.47}$$

となる。また、球面調和関数を含んだ $\Omega_{\mathbf{k}}$ の積分は

$$\begin{aligned} \int d\Omega_{\mathbf{k}} Y_{J'}^{M'*}(\hat{k}) \mathbf{Y}_{JM}^L(\hat{k}) \cdot \hat{k} &= \int d\Omega_{\mathbf{k}} \sum_{m,\sigma} Y_{J'}^{M'*}(\hat{k})(L, m, 1, \sigma | J, M) Y_L^M(\hat{k}) \delta_{\sigma 0} \\ &= (L, M', 1, 0 | J, M) \delta_{LJ'} \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$\int d\Omega_{\mathbf{k}} \mathbf{Y}_{J'M'}^{L'*}(\hat{k}) \cdot \hat{k} \mathbf{Y}_{JM}^L(\hat{k}) \cdot \hat{k} = \sum_m (L, m, 1, 0 | J', M') (L, m, 1, 0 | J, M) \delta_{LL'} \delta_{MM'} \quad (4.49)$$

$$\int d\Omega_{\mathbf{k}} \mathbf{Y}_{J'M'}^{L'*}(\hat{k}) \cdot \mathbf{Y}_{JM}^L(\hat{k}) = \delta_{LL'} \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \quad (4.50)$$

これらを用いると、(4.46) 式の積分は

$$\begin{aligned} &\sum_{s_\mu s_e} \int d\Omega_{q_e} \int d\Omega_{\mathbf{k}} (|J \cdot k|^2 - k^2 |J|^2) \\ &= (4\pi)^2 \sum_{\kappa, J} (2j_\kappa + 1) \left[-\frac{k_0 k}{2J+1} \left\{ S_{j_\kappa}(iS_{j_\kappa}^{+1*} + iS_{j_\kappa}^{-1*}) + c.c. \right\} + k^2 \left\{ |S_{j_\kappa}|^2 + \frac{|S_{j_\kappa}^{+1} + S_{j_\kappa}^{-1}|^2}{(2J+1)^2} \right\} \right. \\ &\quad \left. + (k_0^2 - k^2) \left\{ \frac{|S_{j_\kappa}^0|^2}{J(J+1)} + \frac{|S_{j_\kappa}^{+1}|^2}{(J+1)(2J+1)} + \frac{|S_{j_\kappa}^{-1}|^2}{J(2J+1)} \right\} \right] \end{aligned} \quad (4.51)$$

となる。以上より DIO の崩壊率 $P(E)$ を求めることができ、最後に自由ミューオンの崩壊率 $\Lambda_{\text{free}} = (G_F^2 m_\mu^5)/(192\pi^3)$ で規格化することで、部分波展開を用いた場合のエネルギースペクトルの表式を得る。

$$\begin{aligned} N(E) &= \frac{8q_e}{\pi m_\mu^5} \int_0^{W-E} k^2 dk \sum_{J,\kappa} (2j_\kappa + 1) \\ &\quad \times \left[-\frac{(W-E)k}{2J+1} \left\{ S_{j_\kappa}(k) \left(iS_{j_\kappa}^{+1*}(k) + iS_{j_\kappa}^{-1*}(k) \right) + c.c. \right\} \right. \\ &\quad \left. + k^2 \left\{ |S_{j_\kappa}(k)|^2 + \frac{|S_{j_\kappa}^{+1}(k) + S_{j_\kappa}^{-1}(k)|^2}{(2J+1)^2} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \{(W-E)^2 - k^2\} \left\{ \frac{|S_{j_\kappa}^0(k)|^2}{J(J+1)} + \frac{|S_{j_\kappa}^{+1}(k)|^2}{(J+1)(2J+1)} + \frac{|S_{j_\kappa}^{-1}(k)|^2}{J(2J+1)} \right\} \right] \end{aligned} \quad (4.52)$$

最後に、原子核の反跳による影響を考える。このとき、電子のエネルギースペクトルにおける end point W が影響を受ける。運動量保存則から、原子核の反跳エネルギー E_{rec} は電子とニュートリノの運動量を用いて表されるが、高エネルギー側においては

$$\begin{aligned} E_{\text{rec}} &= \frac{\mathbf{p}_N^2}{2m_N} = \frac{(\mathbf{q}_e + \mathbf{p}_{\bar{\nu}_e} + \mathbf{p}_{\nu_\mu})^2}{2m_N} \\ &\simeq \frac{\mathbf{q}_e^2}{2m_N} \\ &= \frac{E^2}{2m_N} \end{aligned} \quad (4.53)$$

のように近似できる。したがって (4.52) 式においてニュートリノの運動量 k の上限が変更を受け、

$$E_\mu - E \rightarrow E_\mu - \frac{E^2}{2m_N} - E \quad (4.54)$$

となる。スペクトルの end point は、

$$W = E_\mu - \frac{E_\mu^2}{2m_N} = m_\mu - B_\mu - \frac{E_\mu^2}{2m_N} \quad (4.55)$$

で与えられる。

4.4 放射補正：真空偏極

ここで、放射補正の一つである真空偏極による影響を考える。ミューオンと電子は原子核との Coulomb 相互作用によってポテンシャル中を運動するが、真空偏極の影響でこのポテンシャルは補正を受ける。



図 4: 原子核 N と電子 e^- の Coulomb 相互作用。真空偏極による第二項の寄与がある。

$$V(r) = \frac{Z\alpha}{r} + \delta V(r) \quad (4.56)$$

オーダー α の補正は Uehling term として知られるもので、原子核を点電荷と仮定した場合には次のように表すことができる [21]。

$$\delta V(r) = \frac{Z\alpha}{r} \left(\frac{2\alpha}{3\pi} \int_1^\infty dt e^{-2m_e r t} \frac{2t^2 + 1}{2t^4} \sqrt{t^2 - 1} \right) \quad (4.57)$$

これを一般の球対称電荷分布 $\rho(r)$ に対して拡張すると、

$$V(r) = V_{\text{LO}}(r) + \delta V(r) \quad (4.58)$$

$$\begin{aligned} \delta V(r) &= \frac{2\alpha^2}{3} \int_0^\infty dr' r' \rho(r') \int_1^\infty dt \sqrt{t^2 - 1} \left(\frac{1}{t^3} + \frac{1}{2t^5} \right) (e^{-2m_e t|r-r'|} - e^{2m_e t(r+r')}) \\ &= \frac{2\alpha^2}{3} \int_1^\infty dt \sqrt{t^2 - 1} \left(\frac{1}{t^3} + \frac{1}{2t^5} \right) F(r, t) \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$F(r, t) = \int_0^\infty dr' r' \rho(r') (e^{-2m_e t|r-r'|} - e^{2m_e t(r+r')}) \quad (4.60)$$

となる [22][23]。半径 R の一様電荷分布の場合は、

$$V_{\text{LO}}(r) = \begin{cases} \frac{Z\alpha}{r} & (r > R) \\ \frac{Z\alpha}{R} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) & (r < R) \end{cases} \quad (4.61)$$

$$F(r, t) = \begin{cases} \frac{3Z}{a^3} e^{-2m_e t r} \left[\frac{a}{2m_e t} (e^{2m_e t a} + e^{-2m_e t a}) - \frac{1}{(2m_e t)^2} (e^{2m_e t a} - e^{-2m_e t a}) \right] & (r > a) \\ \frac{3Z}{a^3} \left[\frac{r}{m_e t} + \left(\frac{a}{2m_e t} + \frac{1}{(2m_e t)^2} \right) (e^{-2m_e t r} - e^{2m_e t r}) e^{-2m_e t a} \right] & (r < a) \end{cases} \quad (4.62)$$

を得る。

5 結果・考察

ここまでの定式化と計算手法に基づいて得られた結果を示す。原子核の Coulomb ポテンシャルについては、一様電荷分布と Woods-Saxon 分布でそれぞれ次のパラメーターを用いた。

- 一様分布の場合

$$\rho(r) = \frac{3Z\alpha}{eR^3} \theta(r - R) \quad R = 1.2A^{1/3} \text{fm} \quad (5.1)$$

- Woods-Saxon 分布の場合

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + \exp[(r - c)/a]} \quad (5.2)$$

	27Al	208Pb
a [fm]	0.569	0.549
c [fm]	2.845	6.624

5.1 波動関数

はじめに、3 節で導出した束縛状態のミューオン及び散乱状態の電子の波動関数の結果を示す。まず、ミューオンについては表 2 の設定の下で計算を行った。Nr-P と Rel-P の場合はそれぞれ Schrödinger 方程式と Dirac 方程式の解析解を用い、Rel-U と Rel-WS については Dirac 方程式の数値解を用いる。

表 2: ミューオン波動関数の設定

	微分方程式	原子核の電荷分布
Nr-P	非相対論的	点電荷
Rel-P	相対論的	点電荷
Rel-U	相対論的	一様球
Rel-WS	相対論的	Woods-Saxon

$Z = 82$ の場合について 4 種類の波動関数を比較したものを図 5 に示す。点電荷の場合に比べて他の電荷分布では波動関数が外側に広がっていることが分かる。また、相対論的效果を取り入れることで波動関数は内側に引き寄せられている。Rel-U と Rel-WS の結果はほとんど重なっており、一様電荷分布の仮定は良い近似になっていると言える。

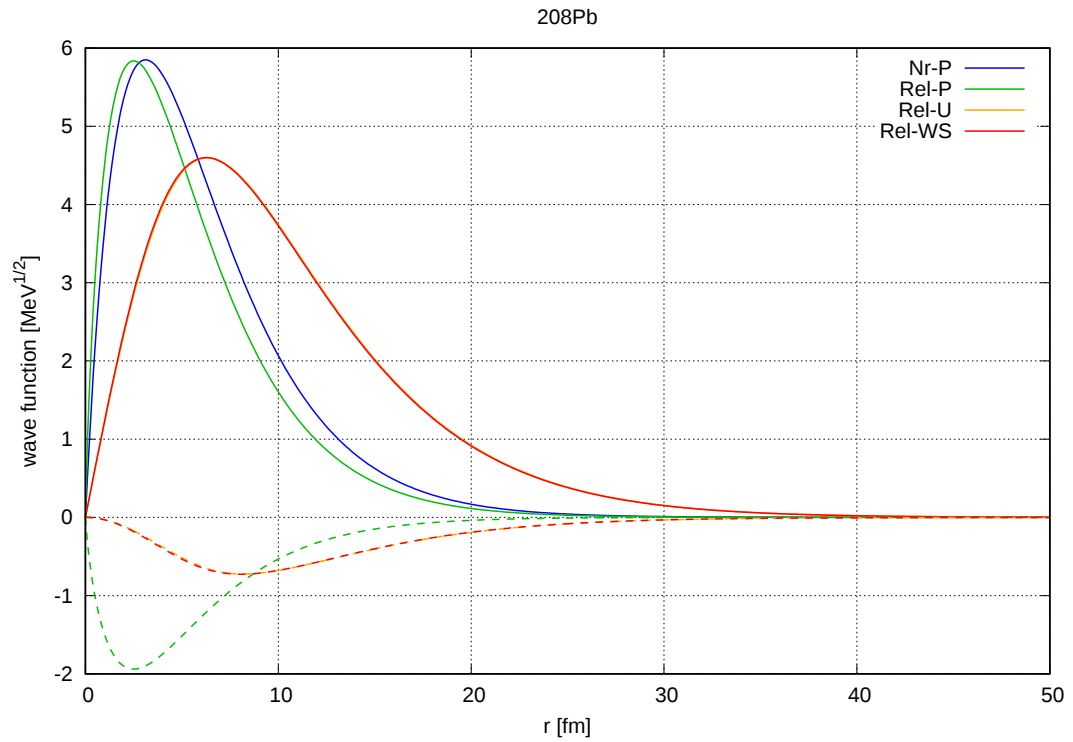


図 5: ^{208}Pb に対する束縛ミューオンの波動関数。実線が $G(r)$, 破線が $F(r)$ を表す。

同様に、 $Z = 13$ の原子核に対して波動関数を計算したものを図 6 に示す。 $Z = 82$ の場合と比べると、Coulomb ポテンシャルの寄与が小さいため波動関数が外側に広がっている。また、ここでも相対論的效果によって波動関数はやや内側に引き寄せられることが分かる。

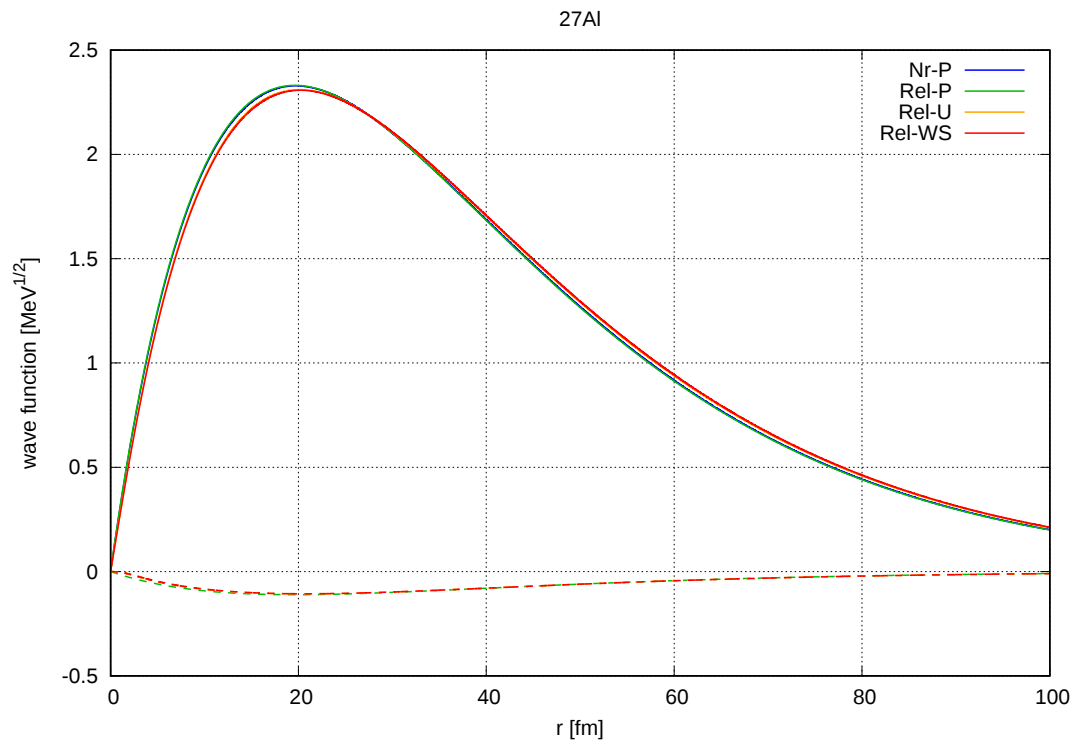


図 6: ^{27}Al に対する束縛ミューオンの波動関数。実線が $G(r)$, 破線が $F(r)$ を表す。

さらに、それぞれの設定におけるミューオンの束縛エネルギーは表 3 のように得られた。

表 3: 1S ミューオンの束縛エネルギー [MeV]

	$Z = 82(\text{Pb})$	$Z = 13(\text{Al})$
Nr-P	18.86	0.4178
Rel-P	21.00	0.4763
Rel-U	10.47	0.4662
Rel-WS	10.51	0.4646

次に、電子の散乱波について表 4 の設定の下で計算した結果を示す。全て相対論的な Dirac 方程式に対する解を考え、PLW と DW-P については解析解、DW-U と DW-WS については数値解を用いる。

表 4: 電子波動関数の設定

	原子核の電荷分布
PLW	なし
DW-P	点電荷
DW-U	一様球
DW-WS	Woods-Saxon

$Z = 82$ 及び $Z = 13$ に対する結果を図 7, 8 に示す。束縛状態と同様に $Z = 13$ の場合の方が外側に波動関数が広がっており、DW-U と DW-WS はほとんど重なっている。平面波と比較して、Coulomb ポテンシャルの寄与を含む場合は波動関数がより内側に引き寄せられていることが分かる。また、Pb 原子核の場合に比べて Al 原子核では点電荷分布による近似がより適合している。

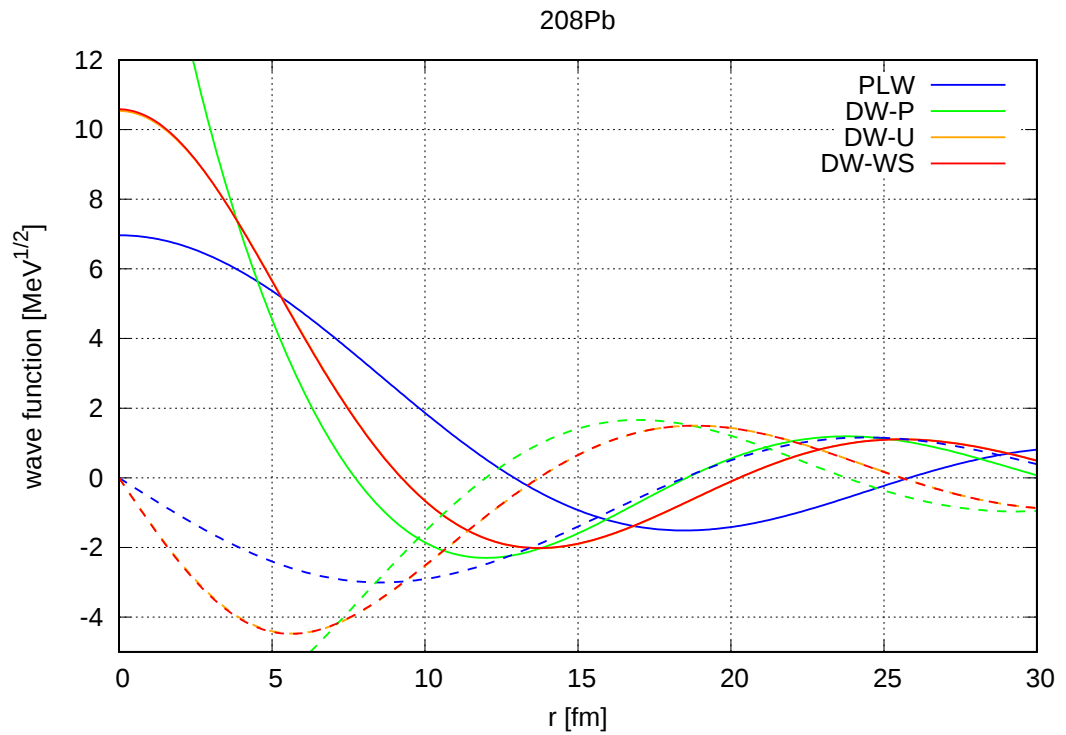


図 7: ^{208}Pb に対する散乱電子の波動関数。実線が $g(r)$, 破線が $f(r)$ を表す。

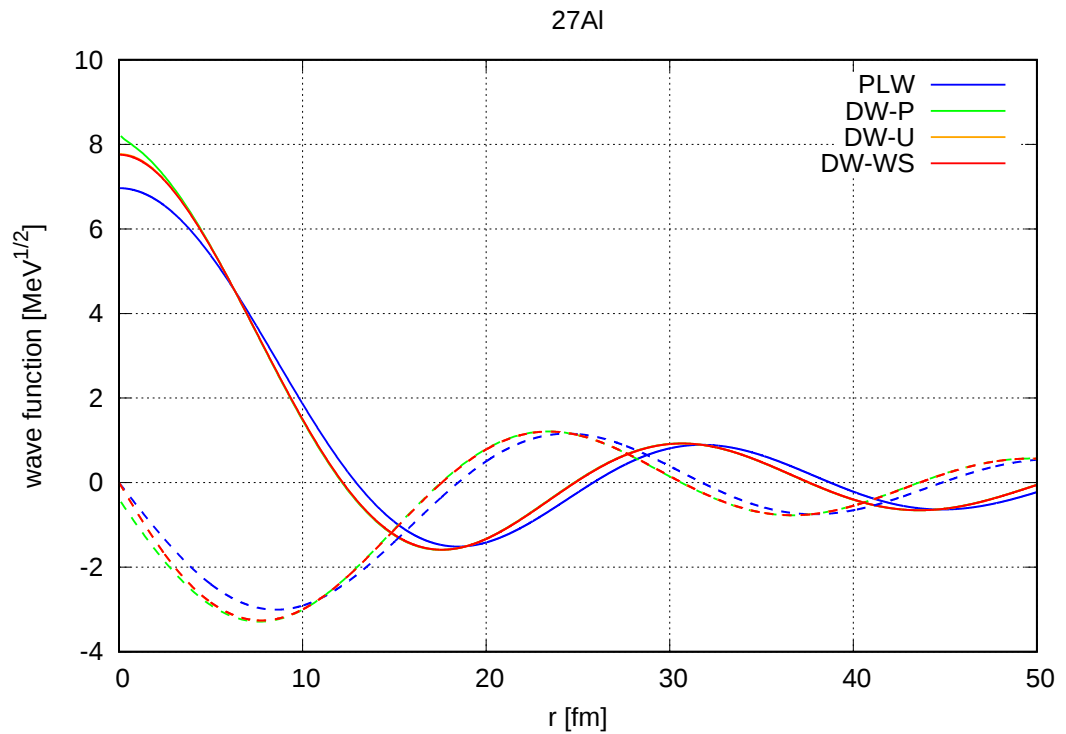


図 8: ^{27}Al に対する散乱電子の波動関数。実線が $g(r)$, 破線が $f(r)$ を表す。

5.2 エネルギースペクトル

5.1 節で求めた、束縛ミューオンに対する Rel-WS の波動関数と散乱電子に対する DW-WS の波動関数を用いて、DIO で放出される電子のエネルギースペクトルを計算した結果を示す。 $Z = 82$ 及び $Z = 13$ の原子核に対する結果が図 9 である。 Z が小さくなるにつれて、エネルギースペクトルは自由ミューオンの崩壊に近づいていく。

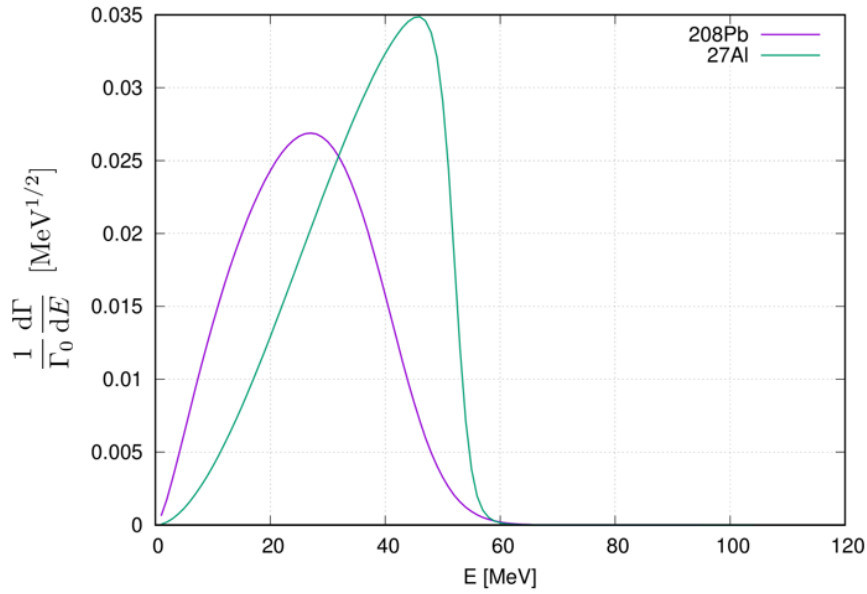


図 9: DIO による電子のエネルギースペクトル 27Al, 208Pb

次に、原子核の質量による影響を比較する。 $Z = 82$ 及び $Z = 13$ に対して、ミューオンの質量として自由粒子の質量を用いた場合と換算質量を用いた場合、そして原子核の反跳を考慮しない場合を図 10, 11 に示す。Pb 原子核は質量が大きいため 3 つの結果が重なっており、レプトンに対して原子核はほとんど止まっているように見えることが分かる。一方 Al 原子核の場合はこれらの違いが表れており、スペクトルを正しく評価するには原子核の質量を考慮することが必要となる。これらの違いがより定量的に見えるように、ずれを表したグラフが図 12 である。特に Al 原子核の場合で換算質量による計算が重要になっている。補正を取り入れたことによりスペクトルの end point がずれるため、高エネルギー側では差が大きくなっている。

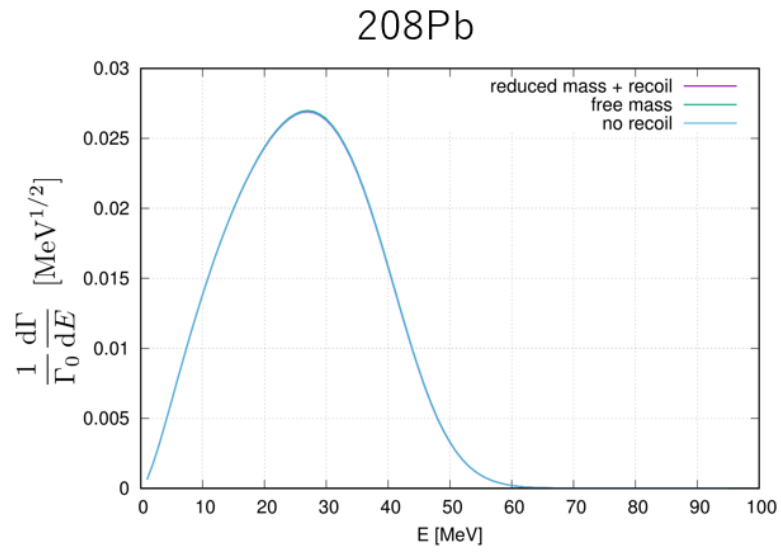


図 10: $Z=82$ に対する電子のエネルギースペクトル

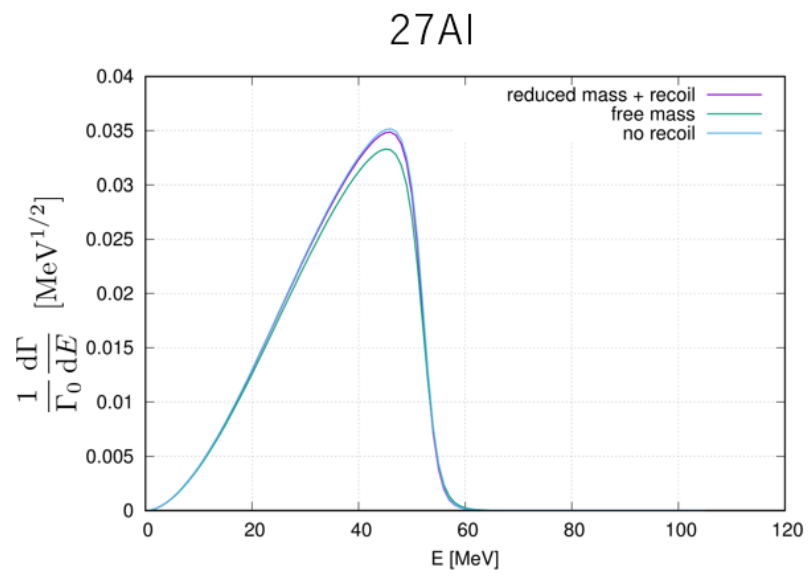


図 11: $Z=13$ に対する電子のエネルギースペクトル

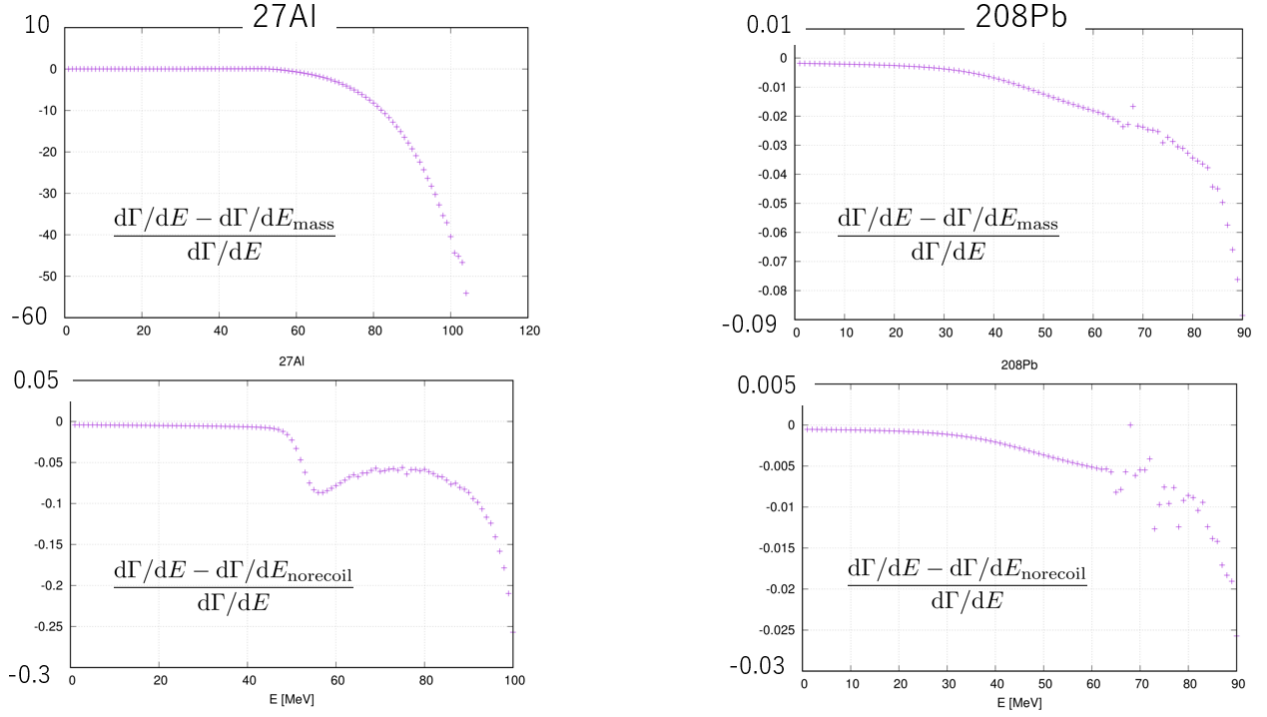


図 12: 原子核の有限質量による影響。上：換算質量を用いた場合と通常 (自由粒子のとき) の質量を用いた場合のスペクトル差。下：原子核の反跳エネルギーを取り入れた場合と取り入れていない場合のスペクトル差

最後に、真空偏極を取り入れた場合の DIO スペクトルのずれを示す。図 13 は Pb 原子核に対する結果で、真空偏極によって高エネルギー側を除いてスペクトルが 2% 程度大きくなることが分かる。質量による補正と同様に、スペクトルの end point がずれることから高エネルギー側では差が広がっている。

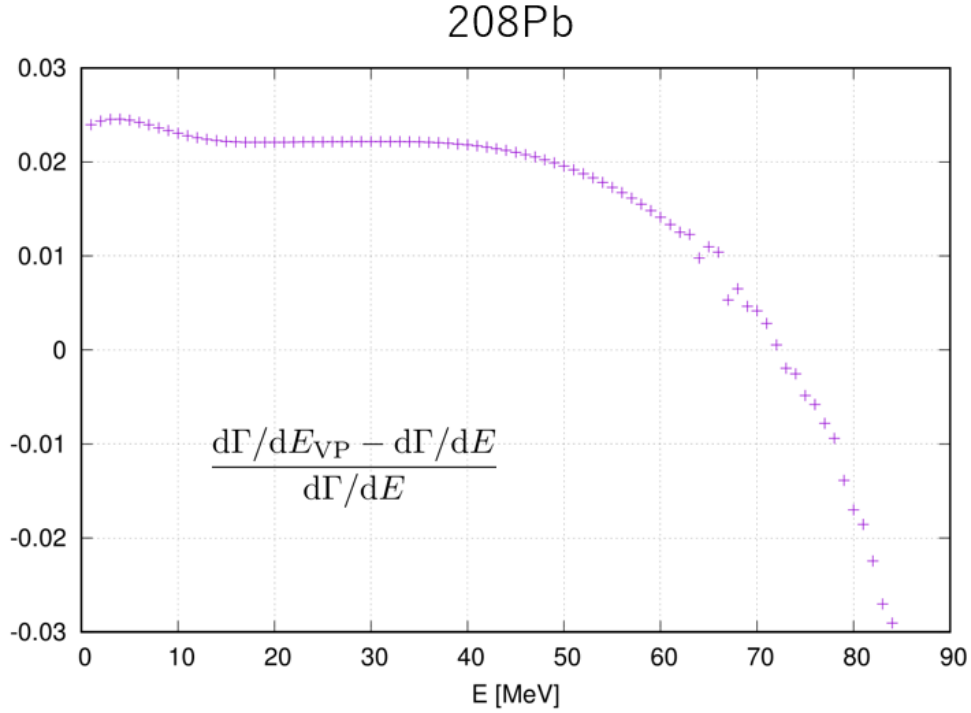


図 13: 真空偏極を取り入れた場合のスペクトル差

6 まとめ・今後の展望

ミューオン原子を用いた CLFV 探索実験において背景事象となる、ミュー粒子の原子軌道上での崩壊に対してスペクトルの精密計算を行った。 $Z = 13$ と $Z = 82$ の原子核について計算を行った結果、放出電子のスペクトルは、原子核の原子番号が大きいほどピークの位置と高さが小さく、原子番号が小さいほど自由ミューオンの崩壊スペクトルに近づいていった。原子核の有限な質量による影響は Al 原子核の場合に顕著に表れ、特にミュー粒子の質量として換算質量を用いることが重要であることが分かった。また、放射補正として真空偏極を取り入れた結果、Pb 原子核では高エネルギー側を除いて 2% 程度スペクトルの上昇が得られた。

今後の課題として、Al 原子核に対して真空偏極を取り入れた計算を行うために数値計算の高速化を行う必要がある。Pb 原子核の場合に比べてレプトン波動関数の広がりが大きく、動径方向の積分に時間を要するためである。他には、原子核の電荷分布に関してより現実的なモデルである Woods-Saxon 分布を用いて放射補正を取り入れた計算を行うこと、そして真空偏極と同程度の寄与が想定される colinear photon による補正を取り入れて計算することが挙げられる。

さらに、実際に行われている実験の設定や装置の分解能をもとに、CLFV が観測されるための条件を定量的に検証する。

付録 A 記法

- 単位系

本論文では自然単位系を用いる。

$$c = \varepsilon_0 = 0 \quad (\text{A.1})$$

- 計量

相対論における計量は次のようにとる。

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

- Dirac 行列

4 元スピノールを考えるとときには Dirac 表示を用いる。

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

ここで I は 2×2 の単位行列、 σ_i はパウリ行列である。また、行列 α, β は次のように定義される。

$$\alpha_i = \gamma^0 \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

- 波動関数の規格化

始状態のミューオン波動関数 $\psi_\mu^{p,s}(x)$ 及び終状態の電子波動関数 $\psi_e^{p,s}(x)$ は次のように規格化する。

$$\int d^3x \psi_\mu^{p,s\dagger}(x) \psi_\mu^{p',s'}(x) = \delta_{pp'} \delta_{ss'} \quad (\text{A.5})$$

$$\int d^3x \psi_e^{p,s\dagger}(x) \psi_e^{p',s'}(x) = 2p^0 (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{ss'} \quad (\text{A.6})$$

また、それぞれに対応する生成・消滅演算子は反交換関係

$$\{a_\mu^s(\mathbf{p}), a_\mu^{s'}(\mathbf{p}')\} = \delta_{pp'} \delta_{ss'} \quad (\text{A.7})$$

$$\{a_e^s(\mathbf{p}), a_e^{s'}(\mathbf{p}')\} = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{ss'} \quad (\text{A.8})$$

を満たすものとする。

付録 B 点電荷 Coulomb ポテンシャルを含む Dirac 方程式の解

点電荷による Coulomb ポテンシャル $\phi(r) = Z\alpha/er$ を含む Dirac 方程式の解を求める。
(3.20), (3.21) 式より動径波動関数に対する微分方程式は

$$\frac{dg_\kappa(r)}{dr} + \frac{1+\kappa}{r}g_\kappa(r) - \left(E + m + \frac{Z\alpha}{r}\right)f_\kappa(r) = 0 \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{df_\kappa(r)}{dr} + \frac{1-\kappa}{r}f_\kappa(r) + \left(E - m + \frac{Z\alpha}{r}\right)g_\kappa(r) = 0 \quad (\text{B.2})$$

となる。また、新たに定義した波動関数

$$G_\kappa(r) \equiv rg_\kappa(r), \quad F_\kappa(r) \equiv rf_\kappa(r)$$

に対しては、(3.24), (3.25) 式より

$$\frac{dG_\kappa(r)}{dr} + \frac{\kappa}{r}G_\kappa(r) - \left(E + m + \frac{Z\alpha}{r}\right)F_\kappa(r) = 0 \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{dF_\kappa(r)}{dr} - \frac{\kappa}{r}F_\kappa(r) + \left(E - m + \frac{Z\alpha}{r}\right)G_\kappa(r) = 0 \quad (\text{B.4})$$

となる。この Dirac 方程式の解には、エネルギーが離散的な値をとる束縛状態と、連続的な値をとる連続状態があり、以下でそれらの導出を行う。

付録 B.1 束縛状態

まず、Dirac 方程式 (B.3), (B.4) 式の原点付近での振る舞いを考えると、方程式は

$$\frac{dG_\kappa(r)}{dr} + \frac{\kappa}{r}G_\kappa(r) - \frac{Z\alpha}{r}F_\kappa(r) = 0 \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{dF_\kappa(r)}{dr} - \frac{\kappa}{r}F_\kappa(r) + \frac{Z\alpha}{r}G_\kappa(r) = 0 \quad (\text{B.6})$$

とみなすことができる。このとき、 $G_\kappa(r)$, $F_\kappa(r)$ が r について冪級数展開できるとすれば、 r の次数が最も小さいものが主要項となるため、その次数を γ 、定数を a, b として $G_\kappa(r) \sim ar^\gamma$, $F_\kappa(r) \sim br^\gamma$ のように振る舞うことが分かる。これを (B.5), (B.6) 式に代入すると

$$\begin{cases} (a\gamma + a\kappa - Z\alpha b)r^{\gamma-1} = 0 \\ (b\gamma - b\kappa + Z\alpha a)r^{\gamma-1} = 0 \end{cases}$$

となり、 a, b についての連立方程式を行列表示にすれば

$$\begin{pmatrix} \gamma + \kappa & -Z\alpha \\ Z\alpha & \gamma - \kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{B.7})$$

となる。したがって a, b が 0 でない解を持つための条件として

$$\begin{vmatrix} \gamma + \kappa & -Z\alpha \\ Z\alpha & \gamma - \kappa \end{vmatrix} = \gamma^2 - \kappa^2 + (Z\alpha)^2 = 0$$

$$\gamma = \pm \sqrt{\kappa^2 - (Z\alpha)^2} \quad (\text{B.8})$$

を得る。 $Z\alpha \simeq \frac{Z}{137} < 1$ において、 $|\kappa| = |j_\kappa + 1/2| > 1$ より γ は実数である。また、原点で正則な解を得るために以降では $\gamma > 0$ の符号を選んで用いる。

次に、波動関数の遠方での振る舞いを考える。便宜上の新たな変数

$$\rho \equiv 2\lambda r, \quad \lambda \equiv \sqrt{m^2 - E^2} \quad (\text{B.9})$$

を導入すれば、(B.3), (B.4) 式は

$$\frac{dG_\kappa(\rho)}{d\rho} + \frac{\kappa}{\rho} G_\kappa(\rho) - \left(\frac{E+m}{2\lambda} + \frac{Z\alpha}{\rho} \right) F_\kappa(\rho) = 0 \quad (\text{B.10})$$

$$\frac{dF_\kappa(\rho)}{d\rho} - \frac{\kappa}{\rho} F_\kappa(\rho) + \left(\frac{E-m}{2\lambda} + \frac{Z\alpha}{\rho} \right) G_\kappa(\rho) = 0 \quad (\text{B.11})$$

と書き換えることができる。無限遠での振る舞いを考えるため、 $1/\rho$ の項を無視すれば

$$\frac{dG_\kappa(\rho)}{d\rho} - \frac{E+m}{2\lambda} F_\kappa(\rho) = 0 \quad (\text{B.12})$$

$$\frac{dF_\kappa(\rho)}{d\rho} + \frac{E-m}{2\lambda} G_\kappa(\rho) = 0 \quad (\text{B.13})$$

さらに、

$$\frac{dG_\kappa(\rho)}{d\rho} = -\frac{E^2 - m^2}{4\lambda^2} G_\kappa(\rho) = \frac{1}{4} G_\kappa(\rho), \quad \frac{dF_\kappa(\rho)}{d\rho} = \frac{1}{4} F_\kappa(\rho) \quad (\text{B.14})$$

となる。よって無限遠では $G_\kappa(\rho), F_\kappa(\rho) \sim e^{\pm\rho/2}$ と振る舞うことが分かるが、以降の計算では波動関数の発散を防ぐため $G_\kappa(\rho), F_\kappa(\rho) \sim e^{-\rho/2}$ を選ぶ。したがって、適当な関数 $\phi_1(\rho), \phi_2(\rho)$ を用いて波動関数を

$$G_\kappa(\rho) = \sqrt{m+E} e^{-\rho/2} \{\phi_1(\rho) + \phi_2(\rho)\} \quad (\text{B.15})$$

$$F_\kappa(\rho) = \sqrt{m-E} e^{-\rho/2} \{\phi_1(\rho) - \phi_2(\rho)\} \quad (\text{B.16})$$

と表す。これを (B.10), (B.11) 式に代入して整理すれば

$$\frac{d\phi_1(\rho)}{d\rho} = \left(1 - \frac{Z\alpha E}{\lambda\rho} \right) \phi_1(\rho) - \left(\frac{\kappa}{\rho} + \frac{Z\alpha m}{\lambda\rho} \right) \phi_2(\rho) \quad (\text{B.17})$$

$$\frac{d\phi_2(\rho)}{d\rho} = \left(-\frac{\kappa}{\rho} + \frac{Z\alpha m}{\lambda\rho} \right) \phi_1(\rho) + \frac{Z\alpha E}{\lambda\rho} \phi_2(\rho) \quad (\text{B.18})$$

となる。 $\phi_1(\rho), \phi_2(\rho)$ は冪級数展開できるとすれば、最低次数の γ を用いて

$$\phi_1(\rho) = \rho^\gamma \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \rho^i, \quad \phi_2(\rho) = \rho^\gamma \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i \rho^i \quad (\text{B.19})$$

と表すことができる。これを (B.17), (B.18) 式に代入して、 ρ の係数で比較すれば

$$(i+\gamma)\alpha_i = \alpha_{i-1} - \frac{Z\alpha E}{\lambda} \alpha_i - \left(\kappa + \frac{Z\alpha m}{\lambda} \right) \beta_i \quad (\text{B.20})$$

$$(i+\gamma)\beta_i = \left(-\kappa + \frac{Z\alpha m}{\lambda} \right) \alpha_i + \frac{Z\alpha E}{\lambda} \beta_i \quad (\text{B.21})$$

を得る。これを α_i, β_i について解くと

$$\alpha_i = \frac{(1-n')(2-n')\cdots(i-n')}{i!(2\gamma+1)(2\gamma+2)\cdots(2\gamma+i)}\alpha_0 \quad (\text{B.22})$$

$$\beta_i = (-1)^{i+1} \frac{n'(n'-1)\cdots(n'-i+1)}{i!(2\gamma+1)(2\gamma+2)\cdots(2\gamma+i)}\beta_0 \quad (\text{B.23})$$

となる。ここで n' は次のように定義される数である。

$$n' = \frac{Z\alpha E}{\lambda} - \gamma \quad (\text{B.24})$$

α_i, β_i の形が求まったので、(B.19) 式から ϕ_1, ϕ_2 を決めることができる。合流型超幾何関数の冪級数展開

$${}_1F_1(a, b; z) = 1 + \frac{a}{b}z + \frac{a(a+1)}{b(b+1)}\frac{z^2}{2!} + \cdots \quad (\text{B.25})$$

を用いれば、

$$\phi_1(\rho) = \alpha_0 \rho_1^\gamma F_1(1-n', 2\gamma+1; \rho) \quad (\text{B.26})$$

$$\begin{aligned} \rho_2(\rho) &= \beta_0 \rho_1^\gamma F_1(-n', 2\gamma+1; \rho) \\ &= \left(\frac{\kappa - Z\alpha m/\lambda}{n'} \right) \alpha_{01} F_1(-n', 2\gamma+1; \rho) \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

と表される。ただし、波動関数の規格化のため、 ϕ_1, ϕ_2 は有限次数の多項式になっていなければならない、 n' には非負の整数であるという制限が付く。そこで主量子数を次のように定義する。

$$n \equiv n' + |\kappa|, \quad n = 1, 2, 3, \cdots \quad (\text{B.28})$$

(B.24) 式及び (B.8), (B.9) 式からエネルギー固有値 E を求めると、

$$E = m \left[1 + \left(\frac{Z\alpha}{n - |\kappa| + \sqrt{\kappa^2 - (Z\alpha)^2}} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (\text{B.29})$$

という結果を得る。

最後に、規格化条件

$$\int_0^\infty dr \, r^2 (g_\kappa^2(r) + f_\kappa^2(r)) = 1 \quad (\text{B.30})$$

を適用して波動関数を書き下せば、

$$\begin{pmatrix} g_\kappa(r) \\ f_\kappa(r) \end{pmatrix} = \frac{\pm 1}{\Gamma(2\gamma+1)} \sqrt{\frac{2\lambda^5(m \pm E)\Gamma(2\gamma+n'+1)}{m^2 Z\alpha(mZ\alpha - \lambda\kappa)n'!}} (2\lambda r)^{\gamma-1} e^{-\lambda r} \quad (\text{B.31})$$

$$\times \left[\left(\frac{mZ\alpha}{\lambda} - \kappa \right)_1 F_1(-n', 2\gamma+1; 2\lambda r) \mp n'_1 F_1(1-n', 2\gamma+2; 2\lambda r) \right] \quad (\text{B.32})$$

付録 B.2 連続状態

$E > m$ における (B.3), (B.4) 式の一般解を求める。 $p = \sqrt{E^2 + m^2}$ に対し、便宜上の変数 $x = 2ipr$ を導入すると、方程式は

$$\frac{dG_\kappa(x)}{dx} = -\frac{\kappa}{x}G_\kappa(x) + \left(\frac{E+m}{2ip} + \frac{Z\alpha}{x}\right)F_\kappa(x) \quad (\text{B.33})$$

$$\frac{dF_\kappa(x)}{dx} = \frac{\kappa}{x}F_\kappa(x) - \left(\frac{E-m}{2ip} + \frac{Z\alpha}{x}\right)G_\kappa(x) \quad (\text{B.34})$$

と書き直すことができる。この方程式の解を

$$G_\kappa(x) = \sqrt{E+m}(\phi_1(x) + \phi_2(x)), \quad F_\kappa(x) = i\sqrt{E-m}(\phi_1(x) - \phi_2(x)) \quad (\text{B.35})$$

と表すと、 $\phi_1(x)$ と $\phi_2(x)$ に関する方程式

$$\frac{d\phi_1(x)}{dx} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{Z\alpha E}{px}\right)\phi_1(x) - \left(\frac{\kappa}{x} - i\frac{Z\alpha m}{px}\right)\phi_2(x) \quad (\text{B.36})$$

$$\frac{d\phi_2(x)}{dx} = -\left(\frac{\kappa}{x} + i\frac{Z\alpha m}{px}\right)\phi_1(x) - \left(\frac{1}{2} + i\frac{Z\alpha E}{px}\right)\phi_2(x) \quad (\text{B.37})$$

を得る。ここで、 ϕ_1^*, ϕ_2^* に関する微分方程式を考えると、

$$\phi_1 = \phi_2^*, \quad \phi_2 = \phi_1^* \quad (\text{B.38})$$

となっており、 G_κ, F_κ が実数であるという条件を満たしていることが分かる。これを用いて (B.33), (B.34) 式を整理すると、 ϕ_1 に関する二階微分方程式

$$\frac{d^2\phi_1}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d\phi_1}{dx} - \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} + \frac{iZ\alpha E}{p}\right)\frac{1}{x} + \frac{\gamma^2}{x^2}\right]\phi_1 = 0 \quad (\text{B.39})$$

を得る。ここで $W = x^{1/2}\phi_1$ と置くと、解くべき方程式は

$$\frac{d^2W}{dx^2} - \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} + \frac{iZ\alpha E}{p}\right)\frac{1}{x} + \frac{\gamma^2 - 1/4}{x^2}\right]W = 0 \quad (\text{B.40})$$

となる。これは Whittaker の微分方程式として知られ、原点で有限の値を持つ解

$$W = x^{\gamma+1/2}e_1^{-x/2}F_1(\gamma+1+iy, 2\gamma+1; x) \quad (\text{B.41})$$

と、原点で発散する解

$$W = x^{-\gamma+1/2}e_1^{-x/2}F_1(-\gamma+1+iy, -2\gamma+1; x) \quad (\text{B.42})$$

の二つの独立解が存在することが知られている。ここで y は

$$y = \frac{Z\alpha E}{p} \quad (\text{B.43})$$

である。後者の原点で非正則な解は点電荷を想定する場合には棄却されるが、有限な広がりを持った電荷を考える場合は考慮する必要がある。一旦、原点で正則な解のみに着目すると、 ϕ_1 は

$$\phi_1(r) = N (\gamma + iy) e^{i\eta} (2p)^\gamma \phi(r) \quad (\text{B.44})$$

と表すことができる。ここで N は規格化定数であり、解の r 依存性をまとめて

$$\phi(r) = r^\gamma e^{-ipr} {}_1F_1(\gamma + 1 + iy, 2\gamma + 1; 2ipr) \quad (\text{B.45})$$

と書いた。また、(B.38) 式を満たすように位相 η を導入した。ここで (B.36) 式を r についての微分方程式に直し、(B.38) 式及び (B.44) 式を用いると、 $\phi(r)$ に関する方程式

$$\begin{aligned} (\gamma + iy) e^{i\eta} (2p)^\gamma \frac{d\phi(r)}{dr} = & i \left(p + \frac{Z\alpha E}{pr} \right) (\gamma + iy) e^{i\eta} (2p)^\gamma \phi(r) \\ & + \left(-\frac{\kappa}{r} + i \frac{Z\alpha m}{pr} \right) (\gamma - iy) e^{-i\eta} (2p)^\gamma \phi^*(r) \end{aligned} \quad (\text{B.46})$$

が得られる。これを整理すると、 η に関する条件式は

$$e^{-2i\eta} = -\frac{\gamma + iy}{\gamma - iy} \frac{r}{\kappa - iym/E} \left[\frac{d\phi(r)}{dr} - ip \left(1 + \frac{y}{pr} \right) \phi(r) \right] \frac{1}{\phi^*} \quad (\text{B.47})$$

となる。さらに、合流型超幾何関数の性質から

$$\frac{d\phi(r)}{dr} - ip \left(1 + \frac{y}{pr} \right) \phi(r) = \frac{(\gamma - iy)\phi^*(r)}{r} \quad (\text{B.48})$$

であるため、位相 η の満たすべき条件式は

$$e^{2i\eta} = -\frac{\kappa - iym/E}{\gamma + iy} \quad (\text{B.49})$$

となる。

以上のことから、Dirac 方程式の解 G, F は

$$G_\kappa(r) = 2N\sqrt{E+m}(2pr)^\gamma \text{Re}\Phi(r) \quad (\text{B.50})$$

$$F_\kappa(r) = -2N\sqrt{E-m}(2pr)^\gamma \text{Im}\Phi(r) \quad (\text{B.51})$$

ただし

$$\Phi(r) = (\gamma + iy) e^{i(-pr+\eta)} {}_1F_1(\gamma + 1 + iy, 2\gamma + 1; 2ipr) \quad (\text{B.52})$$

と表される。便宜上、規格化定数を

$$N = \frac{|\Gamma(\gamma + iy)| e^{\pi y/2}}{2p\Gamma(2\gamma + 1)} \quad (\text{B.53})$$

と定めると

$$g_\kappa(r) = 2\sqrt{E+m}(2pr)^{\gamma-1} \frac{|\Gamma(\gamma + iy)| e^{\pi y/2}}{\Gamma(2\gamma + 1)} \text{Re}\Phi(r) \quad (\text{B.54})$$

$$f_\kappa(r) = -2\sqrt{E-m}(2pr)^{\gamma-1} \frac{|\Gamma(\gamma + iy)| e^{\pi y/2}}{\Gamma(2\gamma + 1)} \text{Im}\Phi(r) \quad (\text{B.55})$$

となり、この解の $r \rightarrow \infty$ における漸近形は

$$g_\kappa(r) \rightarrow \sqrt{E+m} \frac{\cos(pr - \frac{l_\kappa+1}{2}\pi + \delta_C)}{pr} \quad (\text{B.56})$$

$$f_\kappa(r) \rightarrow -\sqrt{E-m} \frac{\sin(pr - \frac{l_\kappa+1}{2}\pi + \delta_C)}{pr} \quad (\text{B.57})$$

$$(\text{B.58})$$

となる。ここで δ_C は Coulomb ポテンシャルによる自由場からの位相のずれに対応しており、

$$\delta_C = y \ln(2pr) - \arg \Gamma(\gamma + iy) + \frac{\pi}{2}(l_\kappa + 1 - \gamma) + \eta \quad (\text{B.59})$$

で表される。

有限な広がりを持った電荷分布による Coulomb ポテンシャルを想定する場合は、原点で正則でない解も必要となる。このとき途中で棄却した (B.42) 式を用いてもう一つの解を構築するが、正則な解と同様の議論から $\gamma \rightarrow -\gamma$ の置き換えをすればよいことが分かる。したがってこの場合の解は、

$$\tilde{g}_\kappa(r) = 2\sqrt{E+m}(2pr)^{-\gamma-1} \frac{|\Gamma(-\gamma+iy)|e^{\pi y/2}}{\Gamma(-2\gamma+1)} \text{Re}\tilde{\Phi}(r) \quad (\text{B.60})$$

$$\tilde{f}_\kappa(r) = -2\sqrt{E-m}(2pr)^{-\gamma-1} \frac{|\Gamma(-\gamma+iy)|e^{\pi y/2}}{\Gamma(-2\gamma+1)} \text{Im}\tilde{\Phi}(r) \quad (\text{B.61})$$

ただし

$$\tilde{\Phi}(r) = (-\gamma + iy)e^{i(-pr+\tilde{\eta})} {}_1F_1(-\gamma+1+iy, -2\gamma+1; 2ipr) \quad (\text{B.62})$$

であり、 $\tilde{\eta}$ は

$$e^{2i\tilde{\eta}} = -\frac{\kappa - iym/E}{-\gamma + iy} \quad (\text{B.63})$$

を満たす位相である。 $r \rightarrow \infty$ における漸近形も同様に、 δ_C を次の $\tilde{\delta}_C$ で置き換えることにより得られる。

$$\tilde{\delta}_C = y \ln(2pr) - \arg \Gamma(-\gamma + iy) + \frac{\pi}{2}(l_\kappa + 1 + \gamma) + \tilde{\eta} \quad (\text{B.64})$$

本文の計算では、

$$\Delta \equiv \tilde{\delta}_C - \delta_C \quad (\text{B.65})$$

$$= \arg \left(\sqrt{\frac{-\gamma - iy}{\gamma - iy}} \frac{\Gamma(\gamma + iy)}{\Gamma(-\gamma + iy)} \right) + \pi\gamma \quad (\text{B.66})$$

を用いて

$$g'_\kappa(r) = \frac{\cos \Delta}{\sin \Delta} g_\kappa(r) - \frac{1}{\sin \Delta} \tilde{g}_\kappa(r) \quad (\text{B.67})$$

$$f'_\kappa(r) = \frac{\cos \Delta}{\sin \Delta} f_\kappa(r) - \frac{1}{\sin \Delta} \tilde{f}_\kappa(r) \quad (\text{B.68})$$

と定義した解を用いる。このように定義した $g'_\kappa(r), f'_\kappa(r)$ の $r \rightarrow \infty$ での漸近形は、

$$g'_\kappa(r) \rightarrow \sqrt{E+m} \frac{\sin\left(pr - \frac{l_\kappa+1}{2}\pi + \delta_C\right)}{pr} \quad (\text{B.69})$$

$$f'_\kappa(r) \rightarrow \sqrt{E-m} \frac{\cos\left(pr - \frac{l_\kappa+1}{2}\pi + \delta_C\right)}{pr} \quad (\text{B.70})$$

$$(\text{B.71})$$

となる。

謝辞

埼玉大学素粒子論研究室の皆様をはじめ、多くの方々のご協力の下にこの修士論文を書き上げることができました。谷井義彰教授には研究室の輪講や授業でお世話になり、指導教員の佐藤丈准教授には、日々のゼミや修論作成、発表練習などの多くの場面においてご指導を賜りました。また、本研究のためのゼミを共に行ってくださった上坂優一氏には、研究内容だけでなく数値計算に関する知識も教わりました。この場を借りてお礼を申し上げます。

参考文献

- [1] S.H.Neddermeyer and C.D.Anderson, Phys. Rev. **51**, 884 (1937).
- [2] E.P.Hincks and B.Pontecorvo, Phys. Rev. **73**, 257 (1948).
- [3] R.P.Feynman and Gell-Mann, Phys. Rev. **109**, 193 (1958).
- [4] G.Feinberg, Phys. Rev. **109**, 1482 (1958).
- [5] K.Nishijima, Phys. Rev. **108**, 907 (1957).
- [6] J.Schwinger, Ann. Phys. **2**, 407 (1957).
- [7] S.L.Glashow, Nucl. Phys. **22**, 579 (1961).
- [8] Y.Kuno and Y.Okada, Rev. Mod. Phys. **73**, 151 (2001).
- [9] Y.Okada, K.Okumura, and Y.Shimizu, Phys. Rev. D **61**, 094001 (2000).
- [10] R.Watanabe, M.Fukui, H.Ohtsubo, and M.Morita, Prog. Theor. Phys. **78**, 114 (1987).
- [11] O.Shanker, Phys. Rev. D **25**, 1847 (1982).
- [12] O.Shanker, Phys. Rev. D **55**, 7307 (1997).
- [13] R.Watanabe, At. Data Nucl. Data Tables **54**, 165(1993).
- [14] R.Szafron and A. Czarnecki, Phys. Rev. D **94** 051301(R) (2016).
- [15] J.A.Wheeler, Rev. Mod. Phys. **21**, 133 (1949).
- [16] K.W.Ford and J. G. Wills, Nucl. Phys. **35**, 295 (1962).
- [17] R.W.Huff, Ann. Phys. **16**, 288 (1961).
- [18] A.Czarnecki, G. P. Lepage, and W. J. Marciano, Phys. Rev. D **61**, 073001 (2000).
- [19] H.Primakoff, Rev. Mod. Phys. **31**, 802 (1959).
- [20] T.Suzuki, D.F.Measday, and J.Roalsvig, Phys. Rev. C **35**, 2212 (1987).
- [21] E.A.Uehling, Phys. Rev. **48** 55 (1935).
- [22] E.H.Wichmann and N.H.Kroll, Phys. Rev. **101**, 843 (1956).
- [23] L.W.Fullerton and G.A.Rinker, Jr. Phys. Rev. A **13**, 1283 (1976).