

Neutralino Dark Matter Annihilation **による**  
cosmic ray spectrum

平成 23 年度修了  
物理機能系専攻 物理学コース  
10MP115 森田 真伍

2012 年 2 月 3 日

# 目次

1	Introduction	3
2	Dark Matter	4
2.1	標準宇宙論とパラメータ	4
2.1.1	Friedmann 方程式	4
2.1.2	状態方程式	5
2.1.3	宇宙論パラメータとその決定法	7
2.2	Dark Matter の存在証拠	9
2.2.1	銀河スケールにおける存在証拠	9
2.2.2	銀河団スケールにおける存在証拠	10
2.2.3	より大きいスケールにおける存在証拠	11
2.2.4	CMB(宇宙マイクロ波背景放射)	12
2.3	Dark Matter の候補	13
2.3.1	WIMP Dark Matter	13
2.3.2	Universal Extra Dimension model(UED)	14
2.3.3	SuperSymmetric model(SUSY)	16
2.3.4	Little Higgs model(LH)	17
2.3.5	その他の Dark Matter 候補	17
3	宇宙論における未解決問題	18
3.1	高エネルギー宇宙線の超過	18
3.2	${}^7\text{Li}$ 問題	19
4	Sommerfeld Enhancement	21
4.1	Sommerfeld factor	21
4.2	クーロン型ポテンシャルの場合	22
4.3	湯川型ポテンシャルの場合	22
5	Neutralino Dark Matter Annihilation	26
5.1	mass spectrum	26
5.2	Wino-,Higgsino-like な neutralino の場合	27
5.2.1	非相対論的な 2 体の有効作用	27
6	まとめ	29
A	Sommerfeld factor の導出	30
A.1	定義	30
A.2	(4.21) 式の導出	31
B	neutralino mass matrix の対角化	32

C	2体の有効作用の導出	35
C.1	(5.18) 式の導出 . . . . .	35

# 1 Introduction

現在、宇宙論における問題の 1 つに高エネルギー側での宇宙線超過がある。これは電子・陽電子の宇宙線フラックス比が高エネルギー側で理論値とずれている問題であり、PAMELA(Payload for Antimatter Matter Exploration and Light-nuclei Astrophysics) や Fermi LAT(Large Area Telescope) によって観測されている。この問題に対する研究は、天体物理学・素粒子物理学の両観点からなされている。本研究は後者の観点から問題解決を図るものであり、高エネルギー側での乖離が Dark Matter 対消滅によって引き起こされると考える。

Dark Matter とは、通常の物質とほとんど相互作用しない物質であり、その存在は WAMP(Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) 等の観測から確実なものとされている。しかし、その正体は依然として解明されておらず、Dark Matter を特定するための研究が盛んに行われている。素粒子標準模型内の粒子は、観測事実との整合性によりどれも Dark Matter の候補とは成りえない事が示される。そのため、Dark Matter を特定するためには、素粒子標準模型を越えた物理を考える必要となる。

本研究では Dark Matter を『安定で中性な重い粒子』とする WIMP(Weakly Interacting Massive Particle) 仮説を考える。そして素粒子標準模型を越えた具体的な模型として、標準模型に超対称性を課した超対称標準模型を考える。この模型において、Dark Matter の性質を満たす Neutralino を WIMP Dark Matter と仮定する。WIMP Dark Matter の残存量はボルツマン方程式を解くことで得られ、対消滅断面積が観測結果を再現するように決定される。しかし、この対消滅断面積は、上記の宇宙線フラックスを説明するための対消滅断面積に比べ、 $10^{-4} \sim 10^{-3}$  小さすぎる結果になる。そのため、対消滅断面積を増大させる機構が必要となる。断面積の計算において、非摂動的な影響を取り入れると、粒子速度が小さい場合に断面積が飛躍的に増大する。一般に、この機構は Sommerfeld Enhancement と呼ばれるものである。この機構を考慮することで、対消滅断面積の増大が誘導されると予想される。なぜなら、銀河中心における Dark Matter の典型的な速度は、およそ  $10^{-3}c$  と小さいからである。

まず 2 章では、標準宇宙論と Dark Matter について概説していく。次に、3 章では本研究と関連する宇宙論が抱える問題点について概説する。そして、4 章では断面積の増大を引き起こす Sommerfeld Enhancement の性質をまとめる。最後に、5 章では具体的な模型に対する数値解析を行い、Sommerfeld Enhancement によって増大される対消滅断面積を評価する。そして、宇宙線超過の問題を Dark Matter 対消滅によって説明可能かどうかを議論する。

## 2 Dark Matter

この節では dark matter の存在証拠やその候補についての概要を見ていく。ただ、定量的な議論を行うには適切なパラメータを導入する必要がある。そこで、まず標準ビッグバン模型と宇宙論パラメータについての概説をした上で、本章の主題に移ることにする。

### 2.1 標準宇宙論とパラメータ

#### 2.1.1 Friedmann 方程式

現在の宇宙論において標準とされる模型は標準ビッグバン模型である。このモデルは、宇宙の初期に高温高密度であった状態が、現在の冷たく希薄な状態へと膨張し、今なお膨張し続けているというものである。この標準ビッグバン模型における最も基本的な仮定に、“宇宙原理”がある。この宇宙原理とは、宇宙が一樣かつ等方であるというものであり、この仮定は後で述べる観測衛星からほぼ一樣等方であると確認されている。この原理の下で、空間のスケールが時間に依存する計量は以下のロバートソン・ウォーカー計量によって記述される。(簡単のため自然単位系  $c = \hbar = 1$  を用いる)

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (2.1)$$

ここで、 $a(t)$  は宇宙の大きさがどのように変化していくかを記述するもので、スケールファクタと呼ばれる。 $a(t)$  は時間に関して無次元の関数であり現在のスケールを  $a(t_0) = 1$  として規格化している。また、空間変数  $(r, \theta, \phi)$  は共動座標であり、 $k$  は曲率を表し  $(-1, 0, +1)$  の3つの値を取る。特に、 $k = 0$  では空間が平坦になり、ユークリッド空間の計量と一致する。上式の計量から宇宙定数  $\Lambda$  を含めた Einstein-Hilbert 作用

$$S = \int \left[ \frac{1}{2k} (\mathcal{R} + 2\Lambda) + \mathcal{L}_{Matter} \right] \sqrt{-g} dx^4 \quad (2.2)$$

を求め、最小作用の原理から次の Einstein 方程式が導出される。

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \mathcal{R} g_{\mu\nu} = 8\pi G_N T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \quad (2.3)$$

ここで導入した宇宙定数とは、宇宙の膨張や収縮とは無関係にエネルギー密度が変化しないものであり、“真空のエネルギー”であると考えられている。また、 $G_N$ ,  $T_{\mu\nu}$  はニュートンの重力定数、エネルギー運動量テンソルであり、他の定義は以下である。

$$\begin{aligned} g &\equiv \det g_{\mu\nu} \\ \text{Ricci スカラー} \cdots \cdots \mathcal{R} &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \\ \text{Ricci テンソル} \cdots \cdots R_{\mu\nu} &= R^\lambda_{\mu\lambda\nu} \\ \text{Riemann テンソル} \cdots \cdots R^\kappa_{\mu\lambda\nu} &= \partial_\lambda \Gamma^\kappa_{\nu\mu} - \partial_\nu \Gamma^\kappa_{\lambda\mu} + \Gamma^\eta_{\nu\mu} \Gamma^\kappa_{\lambda\eta} - \Gamma^\eta_{\lambda\mu} \Gamma^\kappa_{\nu\eta} \end{aligned}$$

(2.3) の Einstein 方程式は 00 成分と  $ij$  成分の2つの独立な方程式に分けられ、以下のようになる。

$$\left( \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 + \frac{k}{a(t)^2} = \frac{8\pi G_N}{3} \rho(t) + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.4)$$

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4\pi G_N}{3} (\rho(t) + 3p(t)) + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.5)$$

(2.4) 式を見ると分かるように、左辺は曲率  $k$  とスケールファクタ  $a(t)$  で書かれており、宇宙の幾何学的構造を表わすものになっている。一方、右辺は宇宙全体のエネルギーを与えている。つまりこの式は、宇宙のエネルギー密度が空間の曲率や膨張の力学を決める事を表わしている。(2.4) 式は一般に Friedmann 方程式と呼ばれ、宇宙論で重要とされる方程式の 1 つである。

今、宇宙定数  $\Lambda = 0$  の場合を考え、宇宙が空間的に平坦 ( $k = 0$ ) となる場合のエネルギー密度について (2.4) を解くと

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G_N} \quad (2.6)$$

$$H \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = 100h \text{ km} \cdot \text{sec}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1} \quad (2.7)$$

となる。ここで  $H$  は宇宙の膨張率を表わすパラメータで Hubble パラメータと呼ばれ、 $\rho_c$  は臨界密度と呼ばれものである。ちなみに、現在の  $h$  の値はおよそ 0.73 であり、 $\rho_{c,0}$  は  $5.74 \text{ GeV/m}^3$  である [1]。

宇宙における曲率を議論する際、絶対的なエネルギー密度  $\rho$  を用いるよりも臨界密度  $\rho_c$  との比を用いる方が便利である。そこで、無次元パラメータである密度パラメータ  $\Omega_i$  を次のように定義する。

$$\begin{aligned} \Omega_i(t) &\equiv \frac{\rho_i(t)}{\rho_c(t)} \\ \Omega(t) &\equiv \sum_i \Omega_i(t) \end{aligned} \quad (2.8)$$

ここで、我々の宇宙に存在するエネルギーには物質・輻射・真空エネルギーの 3 種類が存在し、それぞれを  $i$  で区別し、順に  $\Omega_m, \Omega_r, \Omega_\Lambda$  と置いている。

この密度パラメータ  $\Omega$  と Hubble パラメータ  $H$  を用いることで (2.4) 式の Friedmann 方程式は

$$\Omega - 1 = \frac{k}{a^2 H^2} \quad (2.9)$$

と書き直せる。

### 2.1.2 状態方程式

次に、各エネルギーに対するエネルギー密度  $\rho_i$  がスケールファクタ  $a(t)$  にどのように依存しているのかを見ていく。これはつまり、 $\Omega_i$  が  $a(t)$  を用いてどのように書けるかを意味する。

エネルギー運動量の保存則は

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (2.10)$$

と書ける。ここで  $T^{\mu\nu}$  の成分は、エネルギー密度  $\rho$ 、圧力  $p$  を持つ完全流体だとすると、0 でない成分は

$$T^{00} = \rho \quad \text{and} \quad T^{ij} = -p\delta_{ij}$$

である。また、 $\nabla$  は共変微分であり (2,0) 型テンソルには

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} + \Gamma^\mu_{\rho\mu} T^{\rho\nu} + \Gamma^\nu_{\rho\mu} T^{\mu\rho}$$

として作用する。(2.10) 式において、空間成分 ( $\nu = i$ ) の運動量保存則は宇宙の一様等方性により自動的に満たされる。従って、時間成分 ( $\mu = 0$ ) のエネルギー保存則を計算すると

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \quad (2.11)$$

となり、これは連続の方程式と呼ばれる。上式を変形したものと、熱力学の第一法則を比べると

$$\begin{aligned} d(\rho a^3) + p d(a^3) &= 0 \\ dU + PdV &= TdS \end{aligned} \quad (2.12)$$

となる。これより

$$dS = 0$$

となっていることが分かる。これは物質が熱平衡状態にあれば、宇宙は断熱膨張であることを意味している。一方で、宇宙膨張の過程においてエントロピーの増加を伴う非断熱的な現象を起こすには、必ず熱平衡状態から脱しなくてはいけないことを意味している。

ここまでの議論において出てきた未知関数は  $a(t)$ ,  $\rho(t)$ ,  $p(t)$  の3つである。これらは、Einstein 方程式から導出された (2.4),(2.5) 式と連続の方程式 (2.11) の3つの方程式から解くことが出来そうだが、実は (2.5) 式は (2.4) 式と (2.11) 式を用いることで導出される。従って、もう一つ独立な方程式が必要となるが、それに当たるのが状態方程式

$$p(t) = f(\rho(t))$$

である。この状態方程式は、圧力  $p(t)$  とエネルギー密度  $\rho(t)$  とを関係付け、宇宙論における  $f(\rho(t))$  の関数形は

$$p(t) = \omega\rho(t) \quad (2.13)$$

と無次元パラメータ  $\omega$  を用いて線形に取られる。この状態方程式を用いて連続の方程式 (2.11) を解けば

$$\rho_i(t) \propto a(t)^{-3(1+\omega_i)} \quad (2.14)$$

となる。

次に物質 (非相対論的物質)・輻射 (相対論的物質)・真空エネルギーに対する  $\omega_i$  の値を求める必要がある。

非相対論的な場合、物質の圧力はそのエネルギー密度と比較した際、非常に小さいと考えることができるため  $p_m = 0$  ( $\omega_m = 0$ ) と近似される。従って  $\rho_m$  は次のようになる。

$$\rho_m(t) \propto a(t)^{-3} \quad (2.15)$$

次に、相対論的な場合は、その輻射圧は  $p_r = \rho_r/3$  ( $\omega_r = 1/3$ ) という状態方程式で与えられるため、 $\rho_r$  は

$$\rho_r(t) \propto a(t)^{-4} \quad (2.16)$$

である。ここで、 $\rho_m$ ,  $\rho_r$  の意味を (2.5) 式の下で考えてみる。

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4\pi G_N}{3}(\rho_{m,r}(t) + 3p_{m,r}(t)) \quad (2.5)$$

(2.5) 式は加速度方程式とも呼ばれ、宇宙の膨張が速まるか、遅くなるかを表わしている。式から分かるように右辺の  $\rho(t) + 3p(t)$  の符号によってどちらに寄与するのかが決まる。今求めた  $\rho_m, \rho_r$  の場合、共に右辺は負の値になるため、宇宙を収縮させる方に寄与する。

次に宇宙定数  $\Lambda$  の寄与を見るわけだが、今でこそ宇宙は膨張していると分かっているのに対し、 $\Lambda$  を導入した Einstein の時代には宇宙が膨張または収縮しているかは定かでなかった。最終的に彼は静的な宇宙モデルを考え、先の寄与を相殺させるために、宇宙定数  $\Lambda$  を導入するに至った。その後、宇宙膨張が確認され宇宙定数  $\Lambda$  の本来の意味合いは否定されたが、現代の宇宙論では真空のエネルギーとして再解釈され、ダークエネルギーと呼ばれている。そして、宇宙の構成においてこのダークエネルギーが約 7 割も占めていることが WMAP(Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) の観測から明らかになった。

さて最後に、真空エネルギーに対する  $\omega_\Lambda$  の値を求めていく。先の 2 つの寄与が宇宙を収縮させる寄与を与えていることから、 $\Lambda$  が宇宙膨張に寄与するものだという事が予想される。Friedmann 方程式 (2.4) を

$$\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 = \frac{8\pi G_N}{3}(\rho_m(t) + \rho_r(t) + \rho_\Lambda(t)) - \frac{k}{a(t)^2} \quad (2.17)$$

と書きかえれば、 $\rho_\Lambda$  は

$$\rho_\Lambda \equiv \frac{1}{8\pi G_N} \Lambda$$

となる。従って  $\Lambda$  が時間に依存しないとすると、 $\rho_\Lambda$  も時間に依存しない。そのため、連続の方程式 (2.11) から  $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$  ( $\omega_\Lambda = -1$ ) となる。(2.5) 式の右辺は正になることから、確かに膨張に寄与していることが確かめられ、 $\rho_\Lambda$  は

$$\rho_\Lambda \propto \text{const} \quad (2.18)$$

となる。

各エネルギー密度の係数を  $\rho_{m,0}, \rho_{r,0}, \rho_{\Lambda,0}$  とし、現在における各密度パラメータを  $\Omega_{i,0} \equiv \rho_{i,0}/\rho_{c,0}$  と定義すれば (2.17) 式は

$$H(a) = H_0 \sqrt{\frac{\Omega_{m,0}}{a(t)^3} + \frac{\Omega_{r,0}}{a(t)^4} + \Omega_{\Lambda,0} + \frac{(1 - \Omega_0)}{a(t)^2}} \quad (2.19)$$

となる。曲率から来る密度パラメータを

$$\Omega_{K,0} \equiv \Omega_0 - 1 = \sum_i \Omega_{i,0} - 1$$

と定義し、距離  $l$  の天体の赤方偏移を表わすファクター  $z = H_0 l$  を用いて書きなおすと

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{\Lambda,0} - \Omega_{K,0}(1+z)^2} \quad (2.20)$$

となる。これにより、 $\Omega_{i,0}$  が既知であれば上式の Friedmann 方程式を数値的に解くことで、スケールファクタ  $a(t)$  や赤方偏移  $z$  が計算される。

### 2.1.3 宇宙論パラメータとその決定法

今までの議論から、宇宙の構造を特徴付ける独立な方程式は Friedmann 方程式・連続の方程式・状態方程式であった。従って、境界条件が与えられれば原理的に未知関数のスケールファクタ

$a(t)$ ・エネルギー密度  $\rho(t)$ ・圧力  $p(t)$  を求めることが出来る。しかし、実際の宇宙においては、 $a(t)$  の関数形を見出すのは難しい。従って、密度パラメータ  $\Omega_i$  を観測することで、Friedmann 方程式からスケールファクタ  $a(t)$  を求めることになる。この  $\Omega_i$  にハッブル定数  $H_0$  を加えると、“主な”宇宙論パラメータとその観測方法は次のようになる。

記号	意味	観測的決定法
$H_0$	膨張率	標準光源を用いた光度距離測定
$\Omega_b$	宇宙のバリオン密度	$BBN$ 理論の予言値と軽元素存在量との比較
$\Omega_m$	質量密度パラメータ	渦巻き銀河の回転曲線、銀河団のピリアル質量測定
$\Omega_\Lambda$	宇宙定数	遠方の $Ia$ 型超新星観測によるハッブル図
$\Omega_K$	宇宙の曲率	$CMB$ 温度ゆらぎの角度スペクトル

宇宙のモデルを特徴付けるパラメータの取り方には多くの可能性があり、観測との比較からこれらのパラメータを選んだに過ぎない。また、各パラメータの決定法についても、一例に過ぎない事を注意として述べておく。実際、多くの宇宙論パラメータが存在し、WMAP の観測による様々なパラメータ値を図 1 に示しておく。

WMAP Cosmological Parameters			
Model: $\Lambda$ cdm+sz+lens			
Data: wmap7			
$10^2\Omega_b h^2$	$2.258^{+0.057}_{-0.056}$	$1 - n_s$	$0.037 \pm 0.014$
$1 - n_s$	$0.0079 < 1 - n_s < 0.0642$ (95% CL)	$A_{\text{BAO}}(z = 0.35)$	$0.463^{+0.021}_{-0.020}$
$C_{220}$	$5763^{+38}_{-40}$	$d_A(z_{\text{eq}})$	$14281^{+158}_{-161}$ Mpc
$d_A(z_*)$	$14116^{+160}_{-163}$ Mpc	$\Delta_{\mathcal{R}}^2$	$(2.43 \pm 0.11) \times 10^{-9}$
$h$	$0.710 \pm 0.025$	$H_0$	$71.0 \pm 2.5$ km/s/Mpc
$k_{\text{eq}}$	$0.00974^{+0.00041}_{-0.00040}$	$\ell_{\text{eq}}$	$137.5 \pm 4.3$
$\ell_*$	$302.44 \pm 0.80$	$n_s$	$0.963 \pm 0.014$
$\Omega_b$	$0.0449 \pm 0.0028$	$\Omega_b h^2$	$0.02258^{+0.00057}_{-0.00056}$
$\Omega_c$	$0.222 \pm 0.026$	$\Omega_c h^2$	$0.1109 \pm 0.0056$
$\Omega_\Lambda$	$0.734 \pm 0.029$	$\Omega_m$	$0.266 \pm 0.029$
$\Omega_m h^2$	$0.1334^{+0.0056}_{-0.0055}$	$r_{\text{hor}}(z_{\text{dec}})$	$285.5 \pm 3.0$ Mpc
$r_s(z_d)$	$153.2 \pm 1.7$ Mpc	$r_s(z_d)/D_v(z = 0.2)$	$0.1922^{+0.0072}_{-0.0073}$
$r_s(z_d)/D_v(z = 0.35)$	$0.1153^{+0.0038}_{-0.0039}$	$r_s(z_*)$	$146.6^{+1.5}_{-1.6}$ Mpc
$R$	$1.719 \pm 0.019$	$\sigma_8$	$0.801 \pm 0.030$
$A_{\text{SZ}}$	$0.97^{+0.68}_{-0.97}$	$t_0$	$13.75 \pm 0.13$ Gyr
$\tau$	$0.088 \pm 0.015$	$\theta_*$	$0.010388 \pm 0.000027$
$\theta_*$	$0.5952 \pm 0.0016$ °	$t_*$	$379164^{+5187}_{-5243}$ yr
$z_{\text{dec}}$	$1088.2 \pm 1.2$	$z_d$	$1020.3 \pm 1.4$
$z_{\text{eq}}$	$3196^{+134}_{-133}$	$z_{\text{reion}}$	$10.5 \pm 1.2$
$z_*$	$1090.79^{+0.94}_{-0.92}$		

図 1 WMAP による各宇宙論パラメータの観測値 ([2] より引用)

## 2.2 Dark Matter の存在証拠

この節では、宇宙の各スケールにおいて Dark Matter の存在証拠がそれぞれ独立に確認されていることを見ていく。また、観測結果から満たされる Dark Matter の性質についても見ていく。

### 2.2.1 銀河スケールにおける存在証拠

銀河スケールにおいて、Dark Matter が存在するとされる最も強い根拠は銀河の回転曲線である。これは軌道平面上の星やガスに対し、回転速度と軌道半径の相関を調べるものである。1970年代、Rubin & Ford や Roberts & Whitehurst により M31 の観測がなされ、Dark Matter の存在が確認された。観測からの結果は Newton 力学から容易に理解できる。

回転速度は、軌道上の星やガスに存在する水素原子から発せられる  $\lambda = 21\text{cm}$  の輝線の赤方偏移を測定することで求められる。ただし、対象とする銀河が我々の銀河から遠く速度（後退速度）を引く必要がある。銀河中心からの距離を  $r$ 、後退速度を  $V_0$ 、輝線の赤方偏移から求まる速度を  $V(r)$  とすると、銀河中心と共に動く慣性系から見た回転速度  $v(r)$  は

$$v(r) \equiv |V_0 - V(r)|$$

である。ここで回転速度は距離  $r$  にのみ依存すると仮定しているため、直径対点の速度は等しいとしている。回転速度  $v(r)$  は重力と遠心力との釣り合いから

$$\frac{mv(r)^2}{r} = G_N \frac{mM(r)}{r^2}$$

$$M(r) \equiv 4\pi \int_0^r dr' r'^2 \rho(r') \quad (2.21)$$

$\rho(r)$  は距離  $r$  での質量密度を意味し、 $M(r)$  は半径  $r$  以内の銀河質量を意味する。(2.21) 式より、回転速度  $v(r)$  は距離  $r$  の関数として

$$v(r) = \sqrt{\frac{G_N M(r)}{r}} \quad (2.22)$$

と書ける。

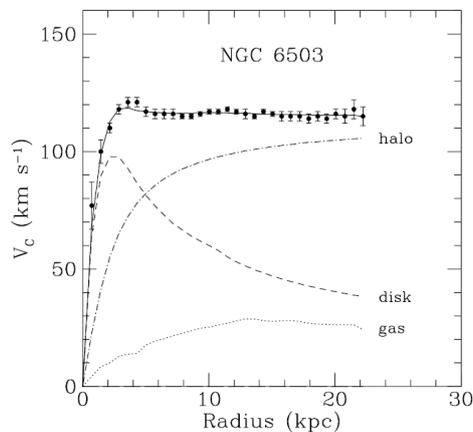


図 2 銀河 NGC6503 の回転曲線 ([3] より引用)

(2.22) 式から銀河の質量のほとんどを星が担っていると考えると、暗く遠い部分から回転速度は  $\propto r^{-1/2}$  で減少していくはずである。しかし、図 2 で示したように、遠方でも回転速度は一定のままになっている。これはつまり、 $M(r) \propto r$ 、 $\rho(r) \propto r^{-2}$  となる目には見えない物質分布 (Dark Matter halo) が存在していることを示している。これらの質量は、高速の星や、ガスを銀河に留めておく役割を担う。

## 2.2.2 銀河団スケールにおける存在証拠

銀河団とは数 Mpc のスケールに数十から数千個の銀河が集まったものを呼ぶ。1933 年、Zwicky は“かみのけ座銀河団”の観測において、銀河団中に銀河を留めておくには、星やガスでは十分な重力を作り出すことが出来ないことに気づいた。そのため、銀河団中には大量の Dark Matter が存在しなくてはならないと主張し、Dark Matter という言葉を広く一般的なものにした。この場合においても、Dark Matter の存在がニュートン力学から示される。ある系のポテンシャルエネルギーと運動エネルギーを関係付けるビリアル定理を用いると、銀河団の約 8~9 割が Dark Matter で構成されていると評価される。

このスケールにおける他の観測事実に弾丸銀河団がある。弾丸銀河団とは、2つの銀河団の衝突により、高温のガス雲が衝突面に広がっているものを言う。弾丸銀河団という名前は図 3 の右を見れば分かるように、片方の銀河団がもう一方の銀河団を弾丸のように貫いて見えることに由来する。図中の赤い部分はチャンドラ衛星による X 線観測 (高温のガス) を示している。一方、青色の部分は、背後に存在する天体を観測することで、弱い重力レンズの影響から推定される質量分布を示している。

図を見ると、星やガスといった星間物質 (バリオン) は衝突により加熱圧縮され、中央に分布 (赤い部分) していることが分かる。しかし、各銀河団の質量分布 (青い部分) は衝突による影響は受けず、通り過ぎていることが見てとれる。従って、銀河団の質量を構成して大部分の物質 (Dark Matter) は、重力相互作用をし、非バリオン的であるという性質が分かる。この結果は、先の力学法則からの帰結とは異なり、Dark Matter の直接的な存在証拠を示すものとなっている。



図 3 衝突銀河団 左: MACS J0025.4-1222, 右: 1E0657-56 ([4] より引用)

### 2.2.3 より大きいスケールにおける存在証拠

今まで見てきた2つのスケールよりも大きいものに、宇宙の大規模構造が挙げられる。大規模構造とは銀河が数個～数千個集まった、銀河群以上の天体群を総称して呼ばれるものである。この大規模構造の存在は1930年代頃には認識されていた。しかし、その全容が明らかになるのは CCD が登場する1980年代になってからであり、CfA サーベイ観測によって初めて宇宙の大規模構造が明らかになった。その後 SDSS 観測などの精密観測によって、宇宙には図4のような銀河団がフィラメント状に連なった構造(グレートウォール)と銀河がほとんど存在しない領域(ボイド)があることが示された。

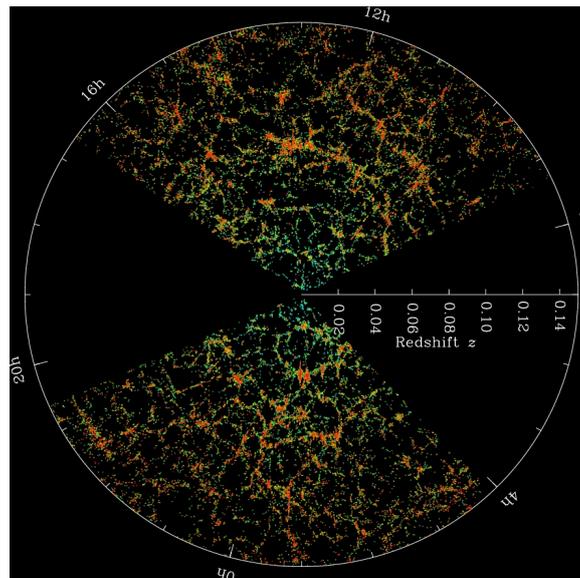


図4 SDSS による  $z \leq 0.16$  までの銀河地図 ([5] より引用)

上図は遠方 ( $z$  が大きい) ほど宇宙の初期を表わしており、どのような進化の過程を歩んできたかを示している。このような大規模構造を作り上げるには、宇宙初期において密度(重力)が非一様である必要がある。なぜなら、わずかな密度のゆらぎでも、重力の影響により密度のより大きい空間へと物質が集まっていき、結果的に非一様性を拡大させるからである。また、このような性質は重力不安定性と呼ばれる。

ここで重要となってくるのは、実際に初期宇宙において非一様性が存在したのかという点である。密度のゆらぎは温度のゆらぎとなって現れるはずであり、宇宙の背景放射を観測することで確かめることができる。1992年、人工衛星 COBE によって初期宇宙の非一様性が初めて確認されたが、宇宙の構造を説明するにはゆらぎが小さすぎた。しかし、バリオンだけでなく、Dark Matter も同時に考えることで現在の大規模構造を説明できることがわかった。そのため、宇宙の構造形成は Dark Matter の重力不安定性によるものであることが分かってきた。

次に重要な点は、Dark Matter が熱平衡状態から離脱した際、その振る舞いが相対論的 (Hot)、非相対論的 (Cold) のどちらかという点だ。これら2つの状況を仮定した N 体シミュレーションの結果は

Cold Dark Matter  $\implies$  bottom-up シナリオ

Hot Dark Matter  $\implies$  top-down シナリオ

となる。ここで、bottom-up シナリオは、小さなゆらぎがそのまま成長していくもので、最初に銀河ができ、次に銀河団が作られる過程を取るものである。一方、top-down シナリオは、相対論的な運動により密度ゆらぎが消されてしまうため、最初に大きな構造しか形成することができない。従って、SDSS などの銀河分布の観測結果を上手く再現しているのは Cold Dark Matter であることが N 体シミュレーションによって示されている。

#### 2.2.4 CMB(宇宙マイクロ波背景放射)

最後に図 1 で示したように、多くのパラメータに対する制限を与える CMB(Cosmic Microwave Background) について見ていく。先に述べた COBE 衛星は、CMB 観測により 2.7K の黒体輻射からのずれが 1000 分の 1 以下であることを示した。そして、温度ゆらぎが全天にわたって  $30\mu\text{K}$  しかないことを明らかにした。その後、WMAP 衛星の打ち上げにより、高精度の観測が行われた。

COBE や WMAP によって観測された温度ゆらぎは、全天の電波の強度分布の差として観測的に求められる。ここで、これらは 2 次元平面のデータであり、奥行き方向に関する情報は積分されたものとして捉えている。ゆらぎの性質として、ランダムかつガウス分布だと仮定すると、ゆらぎの統計的性質は図 7 のような 2 次元角度パワースペクトルとして表わされる。

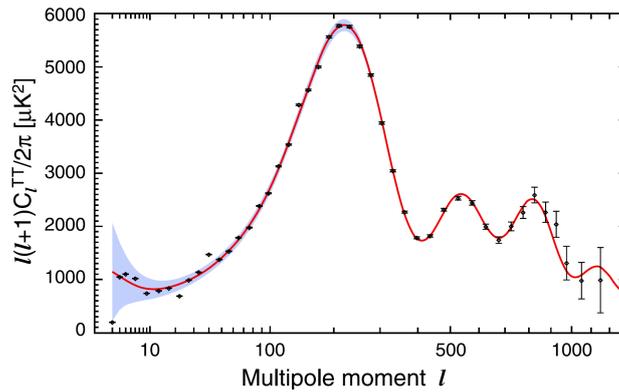


図 5 パワースペクトル WMAP 7-years data([6] より引用)

温度ゆらぎの他に、偏光や重力レンズに対するパワースペクトルが観測され、これらの観測データを再現するように各宇宙論パラメータが決められる。ここで、バリオン密度  $\Omega_b h^2$  と物質密度  $\Omega_m h^2$  は WMAP によって

$$\begin{aligned}\Omega_b h^2(CMB) &= 0.02258^{+0.00057}_{-0.00056} \\ \Omega_m h^2(CMB) &= 0.1334^{+0.0056}_{-0.0055}\end{aligned}\quad (2.23)$$

と決められる。これは SBBN(Standard Big Bang nucleosynthesis) から予想される値 [7]

$$\Omega_b h^2(SBBN) = 0.0218^{+0.0011}_{-0.0012}\quad (2.24)$$

と一致していることがわかる。また、(2.23),(2.24) 式から宇宙の構成要素の多くが非バリオンの物質であると読みとれる。

## 2.3 Dark Matter の候補

前節で Dark Matter の存在証拠について見たが、以下のような Dark Matter の性質が見て取れた。

- ・非バリオンの物質・・・WMAP による  $\Omega_b$  と  $\Omega_m$  から
- ・非相対論的 (Cold)・・・宇宙の大規模構造形成から

前者の性質から Standard Model(SM) のニュートリノが候補に挙がるが、ニュートリノは熱平衡状態から脱した際、相対論的物質として振舞う。従って、後者の性質から Dark Matter の候補からは除外される。そのため、素粒子標準模型内には Dark Matter の候補となる粒子はない。

そこで、Dark Matter を理論的に説明するためには、標準模型を越えた物理を考える必要があるが、Dark Matter 候補は模型の詳細による。ここで、具体的な模型を考える前に Dark Matter の性質が観測事実と無矛盾な範囲で以下の仮説を立てる。

“ Dark Matter は 安定 で 中性 な 重い 粒子とする ”

この仮説を満たす粒子は WIMP(Weakly Interacting Massive Particle) と呼ばれる。WIMP が初期宇宙でどのように振舞い、熱的残存量がどう表わされるかを見ることで、この仮説が Dark Matter の観測事実を自然に説明できることが示される。そこでまず、WIMP Dark Matter の数密度の時間発展を記述する Boltzmann 方程式を見ていく。その後、具体的な模型として、

- ・ Universal Extra Dimension model(UED)
- ・ SuperSymmetric model(SUSY)
- ・ Little Higgs model(LH)

を考え、各 model における Dark Matter の候補を概説する。

### 2.3.1 WIMP Dark Matter

WIMP は通常物質とわずかにしか相互作用せず、安定であると考えられる。WIMP の粒子分布が熱平衡状態にあるかどうかは

対消滅の反応率  $\Gamma$  vs 宇宙膨張率  $H$

で決まる。そのため、脱結合時 ( $\Gamma < H$ ) 付近を適切に扱うには、WIMP 数密度の発展方程式

$$\dot{n}_{DM} + 3Hn_{DM} = -\langle\sigma_{Av}\rangle \left[ n_{DM}^2 - \left( n_{DM}^{(eq)} \right)^2 \right] \quad (2.25)$$

を解く必要があり、上式は Boltzmann 方程式と呼ばれる。ここで  $\langle\sigma_{Av}\rangle$  は Dark Matter 対消滅の全断面積を表わし、 $n_{DM}^{(eq)}$  は  $n_{DM}$  の熱平衡値

$$n_{DM}^{(eq)} = \left( \frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m}{T}\right) \quad (2.26)$$

である。(2.25) 式の左辺第二項は宇宙膨張による希薄効果を表し、右辺は WIMP Dark Matter の対消滅・対生成を表わしている。(2.25) 式をエントロピー密度  $s$  を用いて、共動体積当たりの粒子数  $Y \equiv n_{DM}/s$  で書きかえると

$$\frac{dY}{dx} = \frac{-x\langle\sigma_{Av}\rangle s}{H(m)} [Y^2 - Y_{eq}^2] \quad (2.27)$$

となる。ここで、 $x \equiv m/T$ 、 $H(m) = 1.67g_*^{1/2}m^2/m_{pl}^2$  である。Boltzmann 方程式 (2.27) の数値計算の結果は図 6 に示される。

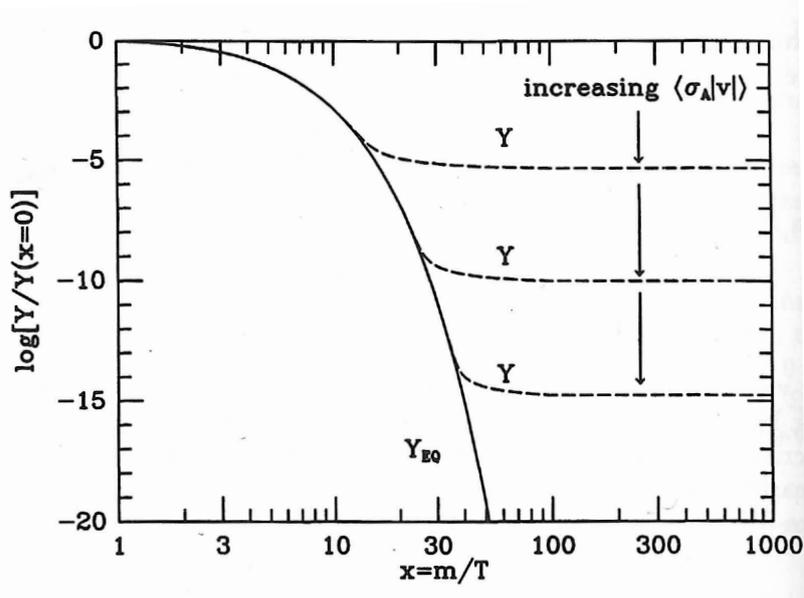


図 6 共動体積当たりの粒子数 ([8] より引用)

図の横軸は温度の逆数で輻射優勢時では  $1/T \sim t^{1/2}$ 、物質優勢時では  $1/T \sim t^{2/3}$  である。そのため、横軸は宇宙の時間発展を表わしている。図より、宇宙初期では熱平衡状態に沿っているが、宇宙の温度が WIMP mass の数十分の一になると脱結合することが分かる。これは、脱結合時に WIMP が非相対論的であることを意味し、大規模構造形成から要請される Cold Dark Matter の性質を満たしている。また、 $\langle\sigma_A v\rangle$  が増加するにつれて、粒子数が減少していくことが見て取れる。

脱結合時の温度を評価することで、現在の WIMP Dark Matter の密度パラメータを計算することができ、 $\Omega_{DM}h^2 \sim \mathcal{O}(0.01 - 0.1)$  となる。これは (2.23) 式の結果を説明できるものになっている。従って、WIMP の自然なパラメータ領域で Dark Matter の密度パラメータを説明できるものとなっていることが分かる。次に、具体的なモデルを挙げ、各枠組みにおける Dark Matter の候補について概説する。

### 2.3.2 Universal Extra Dimension model(UED)

extra dimension(余剰次元) の概念は、Kaluza により重力と電磁気力を統一するために導入された。extra dimension model において、我々の 4 次元時空は *brane* と呼ばれ、この *brane* が *bulk* と呼ばれる  $(4 + \delta)$  時空に埋め込まれていると考える。理論の一般的な特徴として、余剰次元がコンパクト化されているサイズを  $R$  とすると、*bulk* における全ての場は  $p^2 \sim 1/R^2$  を単位に量子化された運動量を持つ。多くのシナリオにおいて、重力のみが *bulk* を伝播し、標準模型の場は *brane* 上に制限されているとする。一方で、全ての場が *bulk* 中を伝播できるモデルは、一般に Universal Extra Dimension(UED) model と呼ばれる。

この量子化により、各 *bulk* 場に対して、Kaluza-Klein(KK) states と呼ばれるフーリエ展開された様々な mode の組が現れる。これらの KK states は質量  $m_n = n/R$  をもつ状態として現れる。ここで  $n$  は KK number と呼ばれ、 $n$ th KK mode を表わす ( $n = 0 \Leftrightarrow SM$  particle)。余剰

次元方向の運動量保存則を考えると KK number の保存則が導かれる。しかし、0 mode( $n = 0$ ) で SM の chiral fermions を導くためには、orbifold によるコンパクト化が必要である。その結果、KK number の保存則は破れてしまう。最終的に残る保存則は KK parity と呼ばれるもので

$$P_{KK} = (-1)^n \quad (2.28)$$

と書き表わされる。この KK parity は以下で見るように Dark Matter を議論する上で重要な役割を果たす。今、KK 粒子 ( $n = 1$ ) の 2 体崩壊や対消滅・対生成を考えると許される反応は KK parity によって

$$KK \rightarrow SM + KK \quad (a)$$

$$KK + KK \rightarrow KK + KK \quad (b)$$

$$KK + KK \rightarrow SM + SM \quad (c)$$

の 3 つのみである。Lightest Kaluza-Klein Particle(LKP) は、自身より軽い粒子が存在しないため、他粒子へ崩壊することが出来ず安定となる。そのため、LKP が UED model における Dark Matter の候補となる。

具体的に、最もシンプルな MUED(Minimal UED) モデルを考える。これは 5 次元目の時空が  $S^1/Z_2$  にコンパクト化されたモデルである。tree level では KK mass はほとんど縮退しており、1-loop 補正を計算することで 1st KK photon  $\gamma^{(1)}$  が LKP であることが示される。LKP の残存量計算において、second KK particle による second KK resonance の影響が重要であると指摘されている [9]。この影響を含めた、WMAP の結果と一致するパラメータ領域が図 7 である。

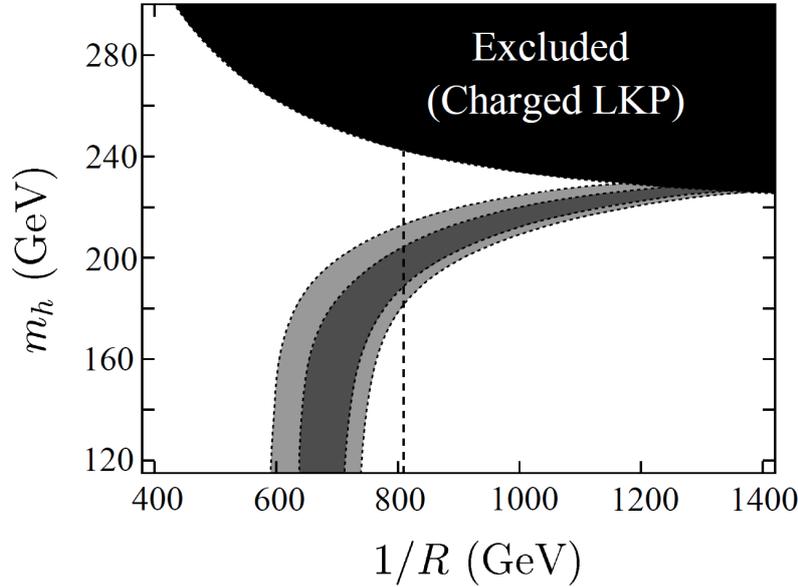


図 7 WMAP の結果と一致する LKP のパラメータ領域 ([9] より引用)

横軸は LKP の mass、縦軸は Higgs mass を表わしている。図中の濃い (薄い) 黒の領域は  $1\sigma$  ( $2\sigma$ ) を表わしている。これより、Dark Matter の mass はおよそ

$$600\text{GeV} \lesssim m_{DM} \lesssim 1400\text{GeV} \quad (2.29)$$

であると考えられる。800GeV に点線が引かれているのは、 $1/R \lesssim 800\text{GeV}$  では KK graviton が LKP の可能性があるからである [9]。

### 2.3.3 SuperSymmetric model(SUSY)

次に、超対称性理論について見ていく。超対称性とは、fermion と boson に対し超対称パートナーの存在を仮定し、それらを結びつける変換

$$\begin{aligned} Q |\text{fermion}\rangle &= |\text{boson}\rangle \\ Q |\text{boson}\rangle &= |\text{fermion}\rangle \end{aligned} \quad (2.30)$$

における対称性である。ここで  $Q$  は SUSY 変換の生成子である。この理論の利点の 1 つに階層性問題が挙げられる。

階層性問題とは、標準模型のエネルギースケール  $\mathcal{O}(100\text{GeV})$  とプランクスケール  $\mathcal{O}(10^{19}\text{GeV})$  とがなぜここまで離れているのかという問題である。一方でこれは、標準模型の適応限界という問題に読みかえることが可能である。例えば、ヒッグス質量への輻射補正は、ヒッグス・ゲージボソン・フェルミオンの 1-loop 補正を計算することで

$$m_h^2 = m_0^2 \pm \delta m_h^2 \quad (2.31)$$

$$\delta m_h^2 \sim 0.01\Lambda^2 \quad (2.32)$$

と与えられる。 $\Lambda$  は標準模型の適応限界 (cutoff) である。今、 $\Lambda_{SM} \sim \mathcal{O}(1\text{TeV})$  を考えてみると、輻射補正  $\delta m_h^2$  が標準模型のエネルギースケールに一致する。ここで、摂動論的に輻射補正  $\delta m_h^2$  が 0 次の補正  $m_0^2$  より大きくなることは考えにくい。そのため、標準模型の適応限界は

$$\Lambda_{SM} \lesssim 1\text{TeV}$$

と考えられる。

超対称性理論で導入した超対称パートナーは、標準模型粒子と同じ量子数を持ち、統計のみが異なる粒子である。従って、超対称パートナーの loop 補正により、摂動の全オーダーで補正が相殺される。注意すべき点として、この相殺は超対称パートナーが同じ量子数 (質量) を持つ場合に限り、実際にこのような超対称粒子は観測されていない。そのため、対称性が soft に破れている必要がある。soft に破れた超対称性理論での輻射補正は

$$\delta m_h^2 \sim \frac{m_{soft}^2}{16\pi^2} \log\left(\frac{\Lambda}{m_{soft}}\right) \quad (2.33)$$

と与えられる。ここで、 $m_{soft}$  は SUSY が soft に破れる典型的なエネルギースケールを表わしており、輻射補正が対数で与えられた事が重要である。なぜなら、 $m_{soft}$  が 1TeV 以下であれば、 $\Lambda$  をプランクスケールまで持っていくことができ、階層性問題が解決されるからである。超対称性理論の他の利点には、大統一理論 (Grand Unified Theory;GUT) スケールでゲージ結合定数が統一される事などが挙げられる。

今、標準模型を最小限に拡張した超対称性標準模型 (Minimal Supersymmetric Standard Model;MSSM) を考える。MSSM における WIMP Dark Matter の候補は、中性という性質から neutralino( $\tilde{\chi}^0$ ) が挙げられる。これは

$$\tilde{\chi}_i^0 = Z_{i1}\tilde{B} + Z_{i2}\tilde{W}^0 + Z_{i3}\tilde{H}_1^0 + Z_{i4}\tilde{H}_2^0 \quad (2.34)$$

と bino, wino and higgsino(B ボソン、W ボソン、ヒッグスボソンの超対称パートナー) の線形結

合で表わされる。ここで  $Z_{ij}$  は neutralino の mass matrix

$$M_{\tilde{\chi}^0} = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & -m_Z s_W c_\beta & m_Z s_W s_\beta \\ 0 & M_2 & m_Z c_W c_\beta & -m_Z s_W s_\beta \\ -m_Z s_W c_\beta & m_Z c_W c_\beta & 0 & -\mu \\ m_Z s_W s_\beta & -m_Z s_W s_\beta & -\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

を対角化することで与えられる。  $M_1, M_2, \mu, m_Z$  は、それぞれ bino, wino, higgsino, Z ボソンの質量である。また、各三角関数は  $s_\beta \equiv \sin \beta, c_\beta \equiv \cos \beta, s_W \equiv \sin \theta_W, c_W \equiv \cos \theta_W$  と定義されており、  $\tan \beta$  はヒッグス場の真空期待値、  $\theta_W$  はワインバーグ角を表わしている。

ここで、陽子崩壊を防ぐために離散的対称性の R-parity

$$P = (-1)^{3(B-L)+2S} \quad (2.36)$$

を課す。R-parity の存在は UED における KK-parity と同様の働きをし、この対称性の存在下では Lightest SUSY Particle(LSP) が最も安定となる。従って、対角化された

$$\text{diag}(m_{\tilde{\chi}_1^0}, m_{\tilde{\chi}_2^0}, m_{\tilde{\chi}_3^0}, m_{\tilde{\chi}_4^0})$$

のなかで、最も軽い neutralino(LSP) が SUSY における Dark Matter の候補となる。

### 2.3.4 Little Higgs model(LH)

最後に、WIMP Dark Matter を説明し得るモデルに Little Higgs model が挙げられる。このモデルでは、高エネルギーに大域的対称性の存在を仮定し、ヒッグスは pseudo-Goldstone boson と考える。ここで、ヒッグスの 2 次発散は “Little Higgs 機構” により 1-loop level では相殺されるように調整され、輻射補正は 2-loop level から現れる。従って、cutoff( $\Lambda$ ) は 10TeV にまで引き上げられ、このエネルギースケールまでは階層性問題が生じない。また、大域的対称性の存在により、標準模型の粒子に対応するリトルヒッグスパートナーが現れる。

電弱相互作用の観測との整合性を保つために、理論に T-parity と呼ばれる離散的対称性を課す。これにより、KK-parity や R-parity と同様に、この対称性の存在下では Lightest T-odd Particle(LTP) が最も安定となる。model の mass spectrum を解析することで、フォトンのリトルヒッグスパートナー  $\gamma_H$  が LTP になりやすい事が知られている [10]。今、大域的対称性 SU(5) が SO(5) に破れる場合を考えると、大域的対称性が破れるエネルギースケール  $f$  と LTP Dark Matter の mass は

$$\begin{aligned} 600\text{GeV} &\lesssim f \lesssim 2\text{TeV} \\ 100\text{GeV} &\lesssim m_{LTP} \lesssim 300\text{GeV} \end{aligned} \quad (2.37)$$

と与えられる事が示される [11]。

### 2.3.5 その他の Dark Matter 候補

上記の WIMP Dark Matter 候補以外に関しても多くの研究がなされている。例えば

- sterile neutrinos … 弱い相互作用をしない仮想的なニュートリノ
- axion … CP の破れの問題を解決するために導入された粒子
- gravitinos … graviton の超対称パートナー。BBN に対する gravitino 問題が存在する
- axinos … axion の超対称パートナー。inflation 後の再加熱温度が低いと CDM になりえる

などが、[12] より挙げられる。

### 3 宇宙論における未解決問題

前章で、CMBの観測結果としてCOBEとWMAP、2つの人工衛星を挙げた。ここで、COBEの角度分解能は約 $7^\circ$ であるのに対し、WMAPは約 $0.2^\circ$ と約30倍の角度分解能を持っている。このように近年では、観測装置の発達によって高精度の観測が行われるようになってきた。観測精度の向上は観測的宇宙論の発展に寄与し、いくつかの理論値と観測値との不一致が指摘される始めた。そこで、本章では研究の動機付けでもあるPAMELAアノマリーと ${}^7\text{Li}$ 問題について見ていく。

#### 3.1 高エネルギー宇宙線の超過

人工衛星PAMELA(Payload for Antimatter Matter Exploration and Light-nuclei Astrophysics)やFermi-LAT(Large Area Telescope)により電子・陽電子( $e^\pm$ )や陽子・反陽子( $p^\pm$ )の宇宙線fluxが観測された。その結果、図8のpositron fractionが示された。

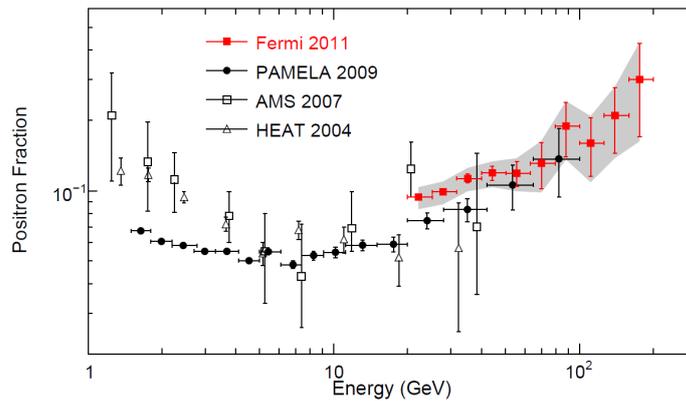


図8 4つの観測実験による Positron fraction([12]より引用)

ここで縦軸は $e^\pm$ と $e^+$ のflux( $\phi$ )の比を表わしている。陽電子は超新星残骸で加速された陽子と、星間物質との相互作用により2次的に生成されると考えられる。一方、高エネルギーになるにつれ、陽子は磁場による影響を受けにくくなり、銀河系外に脱しやすくなる。そのため、陽電子のfluxは高エネルギー側で下がることが予想される。しかし図から明らかなように、高エネルギー側で陽電子の超過が観測されている。この陽電子超過に対する天体物理学的な捉え方は

- ・パルサー … パルサー周辺のプラズマ内で $e^\pm$  pair cascade が起こる
- ・超新星残骸 … 衝撃波面の往復によって粒子が加速される
- ・ガンマ線バースト … 高エネルギー $e^\pm$ が逆コンプトン散乱により冷却される

などの陽電子生成モデルが考えられている。

一方、素粒子論的なアプローチではDark Matter対消滅による研究が盛んに行われている。Boltzmann方程式からDark Matterの残存量が計算されるが、Dark Matterの質量を $\mathcal{O}(100)\text{GeV} \sim \mathcal{O}(1)\text{TeV}$ とした場合、観測値を再現する断面積は

$$\langle\sigma v\rangle \simeq 3 \times 10^{-26} \text{cm}^3/\text{s}$$

である。しかし、PAMELA や Fermi などによって観測された宇宙線 flux を再現するには

$$\langle\sigma v\rangle \simeq 10^{-23} \sim 10^{-22} \text{ cm}^3/\text{s}$$

でなければいけない [13]。従ってこの超過を説明するには断面積  $\langle\sigma v\rangle$  を  $\mathcal{O}(10^3 \sim 10^4)$  ほど増幅させる機構が必要となる。そこで、次章ではこのような機構の 1 つである “Sommerfeld Enhancement” について見ていく。

### 3.2 ${}^7\text{Li}$ 問題

現在、我々の身の回りには多くの種類の元素が存在する。しかし、その種の大半は星の進化の過程により合成されたものであり、それらの起源をたどると初期宇宙で合成された陽子と中性子に行きつく。そして宇宙が膨張しその温度が冷えると、まず始めに重陽子が合成され、それを基に  ${}^4\text{He}$ ,  ${}^6\text{Li}$ ,  ${}^7\text{Li}$  などの元素が合成されていく。このようにして初期宇宙に合成された元素を基に、現在の我々の宇宙は構成されている。そのため、元素合成の仕組みを知ることは非常に重要であり、今までに多くの研究がなされてきた。初期宇宙で合成された軽元素の存在量に関し、観測結果をうまく説明可能なものとしてビッグバン元素合成理論がある。

観測から初期宇宙において合成されたと予想される軽元素の合成量を評価するには、遠方天体の水素や重水素の吸収線等の観測が必要である。また、理論からこれらの量を良化する際には、宇宙膨張に独立なパラメータ  $\eta_b (= n_b/n_\gamma)$  を用いる。ここで、 $n_b$  と  $n_\gamma$  はそれぞれバリオン数密度と光子数密度である。各軽元素と水素との存在比を  $\eta_b$  の関数として表わしたものが図 9 である。

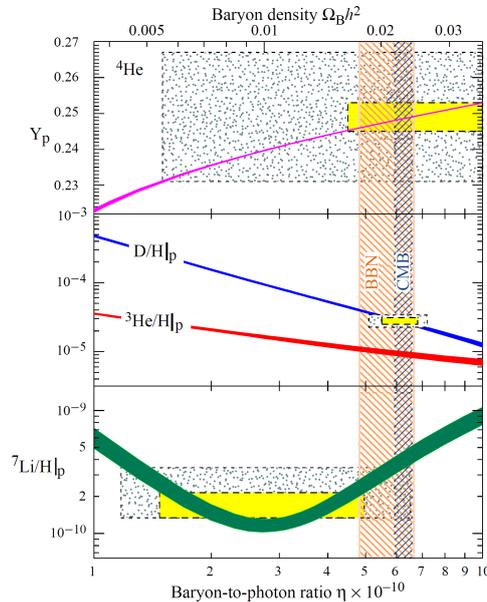


図 9 軽元素存在比の理論値と観測値の比較 ([14] より引用)

図中の長方形で囲まれた領域は、観測された軽元素量に対応するパラメータ領域を示している。また、黄色領域が  $\pm 2\sigma$  の統計誤差を表わしており、白色領域が  $\pm 2\sigma$  の統計誤差と系統誤差を表わしている。

この図から分かるように、WMAP によって観測された  $\eta_b$  に対する軽元素比は、 ${}^7\text{Li}$  を除いた軽元素では理論値と観測値が一致している。しかし、 ${}^7\text{Li}$  に関しては理論値と観測値に矛盾が生じて

おり、BBN からの予言量は観測の 3 倍も大きい結果になっている。この不一致は  ${}^7\text{Li}$  問題と呼ばれ、現在も未解決な問題である。そのため、理論と観測を整合させるような未確認の減少作用が存在していると考えられる。

この問題に対する天体物理学的な解決策としては、

- ・ 初期宇宙に超高効率で進化する星を仮定し、星内燃焼によって  ${}^7\text{Li}$  を減らすシナリオ [15]
- ・ Metal Poor Stars 表面における対流・拡散による減少を考慮するシナリオ [16]

などが挙げられる。

一方、素粒子論的な解決策としては、

- ・ MSSM の枠組みにおいて、長寿命荷電粒子と  ${}^7\text{Li}$  との束縛状態を考え、 ${}^7\text{Li}$  を別の原子核へ崩壊させるシナリオ [17]

などが考えられている。

## 4 Sommerfeld Enhancement

前章で宇宙線超過を素粒子論的に解決するには、断面積  $\langle\sigma v\rangle$  を増大させる必要があると述べた。この章では、断面積  $\langle\sigma v\rangle$  の増大を導く機構の1つである Sommerfeld Enhancement について Ref[18],[19],[20] に基づき述べていく。

### 4.1 Sommerfeld factor

Sommerfeld Enhancement とは、非摂動的な影響を考慮する際、Dark Matter の速度  $v$  が小さいと断面積  $\langle\sigma v\rangle$  が飛躍的に増大する機構である。この非相対論的な量子効果は、Dark Matter が force mediator( $\phi$ ) を通して相互作用をする際に、波動関数がポテンシャルの影響により歪められることから生じる。場の理論的には、以下の ladder diagram の寄与として考えられる。

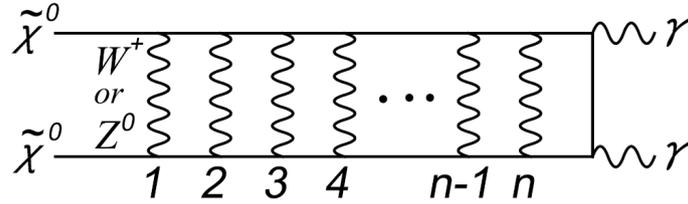


図 10  $\tilde{\chi}^0\tilde{\chi}^0 \rightarrow \gamma\gamma$  対消滅の Ladder diagram ([20] より引用)

今、force mediator として SU(2) ゲージボソンを考え、SU(2),U(1) ゲージ結合定数をそれぞれ  $\alpha_2, \alpha$  とすると図 10 の振幅  $\mathcal{A}_n$  は

$$\mathcal{A}_n \simeq \alpha \left( \frac{\alpha_2 m_{DM}}{m_W} \right)^n \quad (4.1)$$

と与えられる。ここで  $\alpha_2 m_{DM} > m_W$  の場合、高次の寄与のほうが 0 次よりも大きくなるため摂動論は適用できなくなる。そのため、断面積  $\langle\sigma v\rangle$  に対し、非摂動的寄与を考える必要がある。

実際、非摂動的寄与を含んだ断面積  $\langle\sigma v\rangle$  は

$$\sigma v = S(v) (\sigma v)_0 \quad (4.2)$$

と表わされる。ここで  $(\sigma v)_0$  は tree level、もしくは摂動論が適用できる範囲での高次の寄与を含む断面積を意味している。そして、 $S(v)$  は Sommerfeld factor と呼ばれ、Sommerfeld Enhancement による非摂動的寄与を表わしている。

$S(v)$  が波動関数を用いてどのように表わされるかを次に見ていく。Dark Matter の 2 体状態を表わす動径波動関数を  $\Psi(\equiv \psi/r)$  とすると、s-wave 対消滅 ( $l=0$ ) の場合の Schrodinger 方程式は

$$-\frac{1}{m} \frac{d^2}{dr^2} \psi + V(r) \psi = \frac{k^2}{m} \psi \quad (4.3)$$

と与えられる。ここで、 $m$  と  $v$  はそれぞれ Dark Matter の質量と速度を表わす。波動関数  $\psi(r)$  に対し、

$$\begin{aligned} \psi(r) &\rightarrow \sin(kr + \delta) & (r \rightarrow \infty) \\ \psi(r) &\rightarrow r \frac{d}{dr} \psi(0) & (r \rightarrow 0) \end{aligned} \quad (4.4)$$

と境界条件を課すと、Sommerfeld factor  $S(v)$  は

$$S(v) = \left| \frac{\frac{d}{dr}\psi(0)}{k} \right|^2 \quad (4.5)$$

で与えられる（導出は付録を参照）

次に、具体的なポテンシャルとしてクーロン型・湯川型を考え、各ポテンシャルにおける Sommerfeld factor  $S(v)$  がどう与えられるかを見ていく。

## 4.2 クーロン型ポテンシャルの場合

クーロン型ポテンシャルとして

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} \quad (4.6)$$

を考えると、ボーア半径  $1/\alpha m$  で規格化した無次元変数  $x(r = x/\alpha m)$  を用いて Schrodinger 方程式を書きなおすと

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + \frac{1}{x}\psi(x) = -\epsilon_v^2\psi(x) \quad (4.7)$$

$$\epsilon_v \equiv \frac{v}{\alpha} \quad (4.8)$$

となる。(4.7) の Schrodinger 方程式は合流型超幾何関数を用いることで

$$S(v) = \left| \frac{\pi/\epsilon_v}{1 - e^{-(\pi/\epsilon_v)}} \right| \quad (4.9)$$

と解析的に導かれる。ここで、 $\epsilon_v \rightarrow \infty$  を考えると  $S(v) \rightarrow 1$  となり、増大が起こらない予想に一致する。一方、 $\epsilon_v \ll 1$  の場合を考えると

$$S(v) \simeq \frac{\pi\alpha}{v} \quad (4.10)$$

となり、 $1/v$  で断面積が増大することが分かる。

## 4.3 湯川型ポテンシャルの場合

湯川型ポテンシャルとして

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} e^{-m_\phi r} \quad (4.11)$$

を考える。ここで  $m_\phi$  は mediator mass である。 $m_\phi r$  が小さいとして (4.11) を展開すると、Schrodinger 方程式は

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + \frac{1}{x}\psi(x) = (\epsilon_\phi - \epsilon_v^2)\psi(x) \quad (4.12)$$

$$\epsilon_\phi \equiv \left( \frac{m_\phi}{\alpha m} \right) \quad (4.13)$$

と与えられる。一般に、(4.12) 式を解析的に解くことはできないため、数値解析が行われる。ただし、以下に見ていく近似下において、湯川型ポテンシャルに対する Sommerfeld factor の性質が見えてくる。そこでまず、(4.12) 式の右辺において  $\epsilon_\phi^{1/2} \ll \epsilon_v$  の場合を考えると、これはクーロン型の方程式 (4.7) に一致することが分かる。従って  $\epsilon_\phi^{1/2} \ll \epsilon_v \ll 1$  で  $S(v) \propto 1/v$  として増大する。

次に、 $\epsilon_v \ll \epsilon_\phi^{1/2}$  の場合を考えると、Schrodinger 方程式は

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + \frac{1}{x}\psi(x) = \epsilon_\phi\psi(x) \quad (4.14)$$

となる。ここで、 $0 < \epsilon_\phi$  より右辺は常に正である。これは束縛状態が存在することを意味している。なぜなら、(4.14) 式は水素原子型の Schrodinger 方程式

$$\frac{d^2}{dr^2}\Psi + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}\Psi + m\left(E - V(r) - \frac{l(l+1)}{mr^2}\right)\Psi = 0 \quad (4.15)$$

において、 $l = 0$  ,  $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$  とした

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + \frac{1}{x}\psi(x) = -\frac{E}{m\alpha^2}\psi(x) \quad (4.16)$$

と同じ形をとるからである。(4.16) 式において、束縛状態は

$$E = -\frac{m\alpha^2}{4n^2} \quad (4.17)$$

を満たす時に現れる。そのため、 $E = -m_\phi\alpha$  より Dark Matter の質量が

$$m = \frac{4m_\phi}{\alpha}n^2 \quad (4.18)$$

の時に束縛状態を形成し、断面積が共鳴的な振る舞いを示す。(4.18) 式から、Sommerfeld factor は  $m = \frac{4m_\phi}{\alpha}$  を基準に  $1 : 4 : 9 : \dots$  の質量でピークが現れると予想される。

そこで次に、ピーク付近における Sommerfeld factor の  $v$  依存性を見ていく。今、球対称な井戸型ポテンシャル

$$V(r) = -\alpha m_\phi \theta(R - r) \quad (4.19)$$

を用いて、湯川ポテンシャル (4.11) を近似する。ここで  $R$  は mediator のコンプトン波長  $R = m_\phi^{-1}$  であり、 $r = R$  で湯川ポテンシャルをナイーブに再現するように規格化されている。(4.19) のポテンシャルにおける各領域での Schrodinger 方程式は

$$\begin{aligned} (r < R) \quad & \frac{d^2\psi}{dr^2} = -(m^2v^2 + mm_\phi\alpha)\psi \\ (r > R) \quad & \frac{d^2\psi}{dr^2} = -m^2v^2\psi \end{aligned} \quad (4.20)$$

で与えられる。ここで、 $k_{in} \equiv (m^2v^2 + mm_\phi\alpha)^{1/2}$  ,  $k_{out} \equiv mv$  とすると  $r = R$  における波動関数の連続性から Sommerfeld factor が

$$S(v) = \left[ \cos^2 k_{in}R + \frac{k_{out}^2}{k_{in}^2} \sin^2 k_{in}R \right]^{-1} \quad (4.21)$$

と与えられる事が示される (付録参照)。従って、ピークは  $\cos k_{in}R = 0$  の時に現れ、すなわち

$$\begin{aligned} (m^2v^2 + mm_\phi\alpha)^{1/2} R &= (2l + 1)\pi/2 \\ (mm_\phi\alpha)^{1/2} m_\phi^{-1} &\simeq (2l + 1)\pi/2 \\ \sqrt{\alpha m/m_\phi} &= (2l + 1)\pi/2 \end{aligned} \quad (4.22)$$

の条件を満たす時である。2行目への近似は、 $\epsilon_v \ll \epsilon_\phi^{1/2}$  の場合を考えているため、 $m^2 v^2 \ll m m_\phi \alpha$  となるからである。(4.22) を満たす時、 $\sin k_{in} R = 1$  より Sommerfeld factor は

$$\begin{aligned} S(v) &\simeq \frac{k_{in}^2}{k_{out}^2} \\ &= \frac{(m^2 v^2 + m m_\phi \alpha)}{m^2 v^2} \simeq \frac{\epsilon_\phi}{\epsilon_v^2} \end{aligned} \quad (4.23)$$

となる。クーロン型ポテンシャルの場合、Sommerfeld factor は  $S(v) \propto 1/v$  として振舞っていたのに対し、湯川型のピーク周辺では  $S(v) \propto 1/v^2$  として振舞う事が (4.23) より分かる。そのため、 $v \ll 1$  では非常に大きな増大を断面積にもたらす。

以上の定性的な議論から、 $\epsilon_v (= v/\alpha)$  の値に対する Sommerfeld factor  $S(v)$  の振舞いを以下にまとめる。

- 1)  $1 \ll \epsilon_v$  の時  
Sommerfeld Enhancement は起こらず  $S(v) \simeq 1$
- 2)  $\epsilon_\phi^{1/2} \ll \epsilon_v \ll 1$  の時  
Dark Matter の質量によらず  $S(v) \simeq \pi/\epsilon_v$
- 3)  $\epsilon_v \ll \epsilon_\phi^{1/2} \ll 1$  の時  
束縛状態の存在により、Dark Matter 質量に依存したピークが見れる  $S(v) \simeq \frac{\epsilon_\phi}{\epsilon_v^2}$

具体的に湯川型ポテンシャルの (4.12) 式を数値解析し、変数  $\epsilon_v, \epsilon_\phi$  に対する Sommerfeld factor  $S(v)$  をプロットしたものが図 11 である。

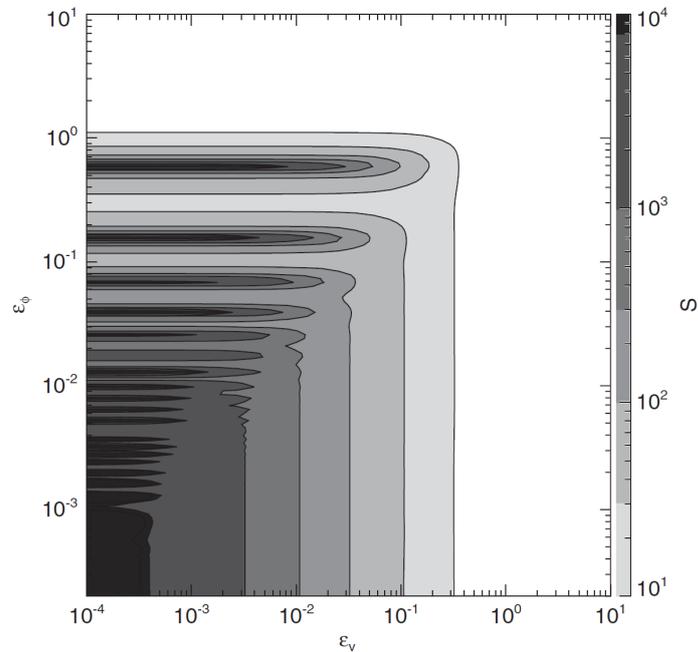


図 11 変数  $\epsilon_v, \epsilon_\phi$  に対する Sommerfeld factor  $S(v)$  ([18] より引用)

$\epsilon_v$  が増加していくにつれ  $S(v)$  が小さくなっており、1) の性質に一致していることが確認できる。また、 $\epsilon_\phi \ll \epsilon_v$  ではピークは存在しないが、速度にのみ依存した振舞いを示している事が同様に確

認できる。最後に、 $\epsilon_v \ll \epsilon_\phi$  では、共鳴の存在を表わす縞模様が見られる。これは Dark Matter の質量が (4.18) や (4.22) の関係を満たす時に対応しており、3) の性質通り  $\propto 1/v^2$  の非常に大きな増大が確認できる。

より具体的に、 $m_\phi = 90(\text{GeV})$  ,  $\alpha_2 \simeq 1/30$  とした時の Dark Matter 質量と Sommerfeld factor の関係を示したものが図 12 である。ここで、図中の数字は速度  $v/c$  を表わしている。

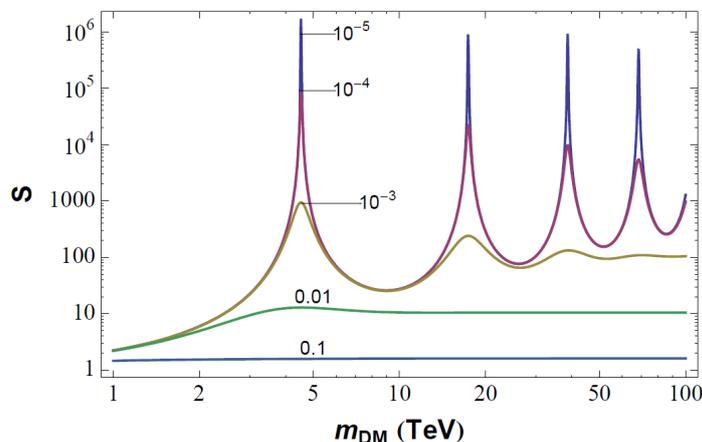


図 12 Dark Matter の質量を変数とした Sommerfeld factor  $S(v)$  ([19] より引用)

図より、 $v$  が小さいほどピークが鋭くなっており、 $S(v) \propto 1/v^2$  の性質が確認できる。また、最初のピークにおける Dark Matter 質量はおよそ 4.5TeV であり、その後質量の 4 倍,9 倍,16 倍の周辺でピークが現れている。これは、(4.18) からの性質であり、今までの定性的な議論に一致している事が数値解析から分かる。

この章では、Sommerfeld Enhancement の一般的な性質を述べた。次章では、neutralino が Dark Matter であると仮定し、模型から導かれる具体的なポテンシャル下において断面積の数値計算を行っていく。

## 5 Neutralino Dark Matter Annihilation

前章では、Sommerfeld Enhancement に関する定性的な議論を行った。本章では具体的に、素粒子標準模型を越える物理として MSSM を考える。2.3.3 節でも述べたが、MSSM における Dark Matter の候補は最も軽い neutralino(LSP) であり、これらが対消滅する際の Sommerfeld Enhancement の影響を調べていく。

### 5.1 mass spectrum

2章でも述べたが、陽子崩壊を防ぐために MSSM に R-parity を課すことで LSP が Dark Matter 候補となる。ラグランジアン  $\mathcal{L}$  における neutralino の質量項は  $\psi^0 = (\tilde{B}, \tilde{W}^0, \tilde{H}_1^0, \tilde{H}_2^0)$  を基底として

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\psi^0)^T M_{\tilde{\chi}^0} \psi^0 + \text{h.c.} \quad (5.1)$$

と書ける。ここで質量行列  $M_{\tilde{\chi}^0}$  は

$$M_{\tilde{\chi}^0} = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & -m_Z s_W c_\beta & m_Z s_W s_\beta \\ 0 & M_2 & m_Z c_W c_\beta & -m_Z s_W s_\beta \\ -m_Z s_W c_\beta & m_Z c_W c_\beta & 0 & -\mu \\ m_Z s_W s_\beta & -m_Z s_W s_\beta & -\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

で与えられ、各記号の定義は (2.35) 式下の通りである。ここで、直交行列  $N$  によって  $M_{\tilde{\chi}^0}$  を対角化すれば、質量  $m_{\tilde{\chi}_i^0}$  をもつ質量固有状態  $\tilde{\chi}_i^0$  は

$$N M_{\tilde{\chi}^0} N^T = \text{diag}(m_{\tilde{\chi}_1^0}, m_{\tilde{\chi}_2^0}, m_{\tilde{\chi}_3^0}, m_{\tilde{\chi}_4^0}) \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_i^0 &= N_{ij} \psi_j^0 \\ &= N_{i1} \tilde{B} + N_{i2} \tilde{W}^0 + N_{i3} \tilde{H}_1^0 + N_{i4} \tilde{H}_2^0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

となり、Bino( $\tilde{B}$ ), Wino( $\tilde{W}$ ), Higgsino( $\tilde{H}$ ) の線形結合で書かれる。

(5.2) 式において、 $m_Z$  を含む非対角項は電弱対称性の破れによって現れものであり、各成分間の混合を引き起こす。この混合による影響 (非対角要素) は  $m_Z \ll M_1, M_2, \mu$  であれば摂動的に扱う事ができる。実際これらの寄与を摂動として扱い、(5.2) 式を対角化した結果は

$$m_{\tilde{\chi}_1^0} = M_1 - \frac{m_Z^2 s_W^2 (M_1 + \mu \sin 2\beta)}{\mu^2 - M_1^2} + \dots \quad (5.5)$$

$$m_{\tilde{\chi}_2^0} = M_2 - \frac{m_Z^2 (M_2 + \mu \sin 2\beta)}{\mu^2 - M_2^2} + \dots \quad (5.6)$$

$$m_{\tilde{\chi}_3^0}, m_{\tilde{\chi}_4^0} = |\mu| + \frac{m_Z^2 (1 - \sin 2\beta) (\mu + M_1 c_W^2 + M_2 s_W^2)}{2(\mu + M_1)(\mu + M_2)} + \dots \quad (5.7)$$

$$|\mu| + \frac{m_Z^2 (1 + \sin 2\beta) (\mu - M_1 c_W^2 - M_2 s_W^2)}{2(\mu - M_1)(\mu - M_2)} + \dots \quad (5.8)$$

で与えられる (付録参照)。この結果から、 $M_1 \ll |\mu|, M_2$  であれば最も軽い neutralino は Bino-like となる。以下同様に、 $M_2 \ll |\mu|, M_1$  であれば Wino-like、 $|\mu| \ll M_1, M_2$  であれば Higgsino-like が最も軽い neutralino となる。

neutralino は中性 Higgsino と中性 Gaugino の混合として現れたが、荷電成分についても同様の事が生じる。電弱対称性の破れによって  $W^\pm$  ボソンの超対称パートナーである荷電 Wino( $\tilde{W}^\pm$ ) と荷電 Higgsino( $\tilde{H}^\pm$ ) が混合し、Chargino と呼ばれる電荷  $\pm 1$  をもつ質量固有状態が現れる。ここで、Chargino の質量項は

$$\mathcal{L} = - \begin{pmatrix} \tilde{W}^- & \tilde{H}_2^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_2 & \sqrt{2}m_W s_\beta \\ \sqrt{2}m_W c_\beta & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{W}^+ \\ \tilde{H}_1^+ \end{pmatrix} + \text{h.c.} \quad (5.9)$$

で与えられる。これを neutralino の時と同様に対角化すれば、Chargino の質量は

$$m_{\tilde{C}_1} = M_2 - \frac{m_W^2(M_2 - \mu \sin 2\beta)}{\mu^2 - M_2^2} + \dots \quad (5.10)$$

$$m_{\tilde{C}_2} = |\mu| + \frac{m_W^2(\mu + M_2 \sin 2\beta)}{\mu^2 - M_2^2} + \dots \quad (5.11)$$

で与えられる。

本論文で興味とするのは、coannihilation と呼ばれる対消滅過程であり、neutralino LSP と Next LSP(NLSP) との質量差  $\delta m$  が小さい場合である。今、 $\tilde{\chi}^0 \tilde{\chi}^0 \rightarrow \gamma\gamma$  対消滅を loop-level で考えると、中間状態に NLSP の粒子対が仮想的に生成される。しかし、NLSP の崩壊モードは  $\delta m$  が小さいことでかなり限定されてしまい、粒子対はほとんど on-shell 状態となる。これは、図 10 の ladder diagram として表現され、前章で見たように非相対論的な場合では Sommerfeld Enhancement を引き起こす。そして、特に重要なのは、束縛状態の束縛エネルギーと質量差が (4.18) 式のような特定の条件を満たすと、対消滅断面積が飛躍的に増大する事である。

次節で、各 neutralino の場合における非摂動効果を評価していく。その際、非相対論的な 2 体状態を考えるのに便利な 2 体の有効作用を用いて議論を進める。

## 5.2 Wino-,Higgsino-like な neutralino の場合

Wino-,Higgsino-like な neutralino は  $SU(2)_L$  nonsinglet ため、 $W, Z$  ボソンと相互作用する。特に、Wino( $\tilde{W}^0$ ) は  $SU(2)_L$  triplet の中性成分であり、Higgsino( $\tilde{H}_1^0, \tilde{H}_2^0$ ) は 2 つの  $SU(2)_L$  doublet の中性成分である。本節では、各 neutralino についての対消滅断面積を評価していく。そこでまず、非相対論的な 2 体状態を考える際に便利である、2 体状態の有効作用を与える。その後、解くべき Schrodinger 方程式と Sommerfeld factor について見ていく事にする。

### 5.2.1 非相対論的な 2 体の有効作用

各 neutralino と  $SU(2)_L$  パートナーとのゲージ相互作用は

$$\mathcal{L}_{int}^{wino} = - \frac{e}{s_W} (\tilde{\chi}^0 \mathcal{W}^\dagger \tilde{\chi}^- + \text{h.c.}) + e \frac{c_W}{s_W} \tilde{\chi}^- \mathcal{Z} \tilde{\chi}^- + e \tilde{\chi}^- A \tilde{\chi}^- \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int}^{higgsino} = & - \frac{e}{2s_W} (\tilde{\chi}^0 \mathcal{W}^\dagger \tilde{\chi}^- - \tilde{\chi}_N^0 \mathcal{W}^\dagger \tilde{\chi}^- + \text{h.c.}) - \frac{e}{s_W c_W} \left( \frac{1}{2} - c_W^2 \right) \tilde{\chi}^- \mathcal{Z} \tilde{\chi}^- \\ & + e \tilde{\chi}^- A \tilde{\chi}^- + \frac{e}{2s_W c_W} \tilde{\chi}^0 \mathcal{Z} \tilde{\chi}_N^0 \end{aligned} \quad (5.13)$$

Higgsino の場合、ハイパーチャージ  $\pm 1/2$  に応じて 2 つの中性成分が存在し、電弱対称性が破れた後は 2 つの質量固有状態が存在する。そのため、質量  $m$  を固有値にもつ状態を  $\tilde{\chi}^0$  とし、 $m_N$  を固

有値を持つ状態を  $\tilde{\chi}_N^0$  と表わしている。各  $SU(2)_L$  多重項の有効作用は、ゲージ場に関して積分を行えば

$$S_{eff}^{wino} = \int dx^4 \left[ \frac{1}{2} \bar{\tilde{\chi}}^0 (i\cancel{\partial} - m) \tilde{\chi}^0 + \bar{\tilde{\chi}}^- (i\cancel{\partial} - m_c) \tilde{\chi}^- \right] + S_{int}[\tilde{\chi}^0, \tilde{\chi}^-] \quad (5.14)$$

$$S_{eff}^{higgsino} = \int dx^4 \left[ \frac{1}{2} \bar{\tilde{\chi}}^0 (i\cancel{\partial} - m) \tilde{\chi}^0 + \frac{1}{2} \bar{\tilde{\chi}}_N^0 (i\cancel{\partial} - m_N) \tilde{\chi}_N^0 + \bar{\tilde{\chi}}^- (i\cancel{\partial} - m_c) \tilde{\chi}^- \right] + S_{int}[\tilde{\chi}^0, \tilde{\chi}_N^0, \tilde{\chi}^-] \quad (5.15)$$

となる。尚、以下では  $SU(2)_L$  triplet の中性成分である Wino( $\tilde{W}^0$ ) の場合について具体的に見ていくことにする。

次に、非相対論的な運動を記述する有効作用  $S_{NR}$  を導出していく。そのために、 $S_{eff}$  における各粒子をフーリエ変換し、非相対論的な部分と相対論的な部分とに積分区間を分ける。

$$\tilde{\chi}^0(x) = \left( \int_{NR} + \int_R \right) \frac{dp^4}{(2\pi)^4} \phi^0(p) e^{-ipx} = \tilde{\chi}_{NR}^0(x) + \delta\tilde{\chi}^0(x) \quad (5.16)$$

$$NR = \left( (p^0, \vec{p}) \mid p^0 = \pm m + \mathcal{O}(m|\vec{v}|^2), \vec{p} = \mathcal{O}(m\vec{v}^2), |\vec{v}| \ll 1 \right)$$

ここで、位相空間  $R$  は  $NR$  以外の位相空間を指す。(5.16) の分割によって非相対論的な有効作用は

$$S_{NR} = \int dx^4 \left[ \frac{1}{2} \bar{\tilde{\chi}}_{NR}^0 (i\cancel{\partial} - m) \tilde{\chi}_{NR}^0 + \bar{\tilde{\chi}}_{NR}^- (i\cancel{\partial} - m_c) \tilde{\chi}_{NR}^- \right] + S_{int}[\tilde{\chi}_{NR}^0, \tilde{\chi}_{NR}^-] + \delta S[\tilde{\chi}_{NR}^0, \tilde{\chi}_{NR}^-] \quad (5.17)$$

となる。ここで、相対論的領域による  $\delta\tilde{\chi}^0, \delta\tilde{\chi}^-$  の寄与はすべて  $\delta S$  に含まれている。

次に、(5.17) 式を速度で展開するために、 $\tilde{\chi}^0, \tilde{\chi}^-$  をスピノール場  $\zeta, \eta, \xi$  を用いて

$$\tilde{\chi}_{NR}^0 = \begin{pmatrix} e^{-imt} \zeta + ie^{imt} \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}}{2m} \zeta^c \\ e^{imt} \zeta^c - ie^{-imt} \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}}{2m} \zeta \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

$$\tilde{\chi}_{NR}^- = \begin{pmatrix} e^{-imt} \eta + ie^{imt} \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}}{2m} \xi \\ e^{imt} \xi - ie^{-imt} \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}}{2m} \eta \end{pmatrix}$$

と表わす。ここで、 $\zeta^c$  は  $\zeta$  の荷電共役 ( $\zeta^c = -i\sigma^2 \zeta^*$ ) である。また、各スピノールの物理的な意味は、 $\zeta, \eta$  はそれぞれ  $\tilde{\chi}^0, \tilde{\chi}^-$  を消滅させ、 $\xi$  は  $\tilde{\chi}^+$  を生成するものである。

## 6 まとめ

## A Sommerfeld factor の導出

まず、ref[18],[21] に従い Sommerfeld factor の定義を述べていく。その後、(4.19) のポテンシャルにおける Sommerfeld factor  $S(v)$  を導出していく。

### A.1 定義

今、Dark Matter の対消滅が、短距離力の下で起こる状況を考える。この時、ポテンシャルは近似的に  $V_0\delta(r)$  と考える事ができる。z 軸方向に運動している Dark Matter を考えると、その波動関数は

$$\Psi^{(0)}(r) = e^{ikz} \quad (\text{A.1})$$

で与えられ、原点における対消滅断面積  $\sigma_0$  は、Dark Matter 密度  $|\Psi^{(0)}(0)|^2$  に比例する。従って、短距離型の相互作用による対消滅断面積  $\sigma_0$  は通常の散乱理論の計算から導くことができる。

次に、短距離力に加え、クーロン型のような長距離力が存在する場合を考える。この時、Dark Matter の波動関数は、長距離力の存在により原点で対消滅する前に歪められてしまう。そのため、対消滅断面積  $\sigma$  は  $|\Psi(0)|^2$  に比例する事になる。ここで、 $\Psi(0)$  は歪められた波動関数を表わす。そして、ポテンシャルの影響によってどの程度波動関数が歪められたかを表わす因子は

$$S \equiv \frac{|\Psi(0)|^2}{|\Psi^{(0)}(0)|^2} = |\Psi(0)|^2 \quad (\text{A.2})$$

で定義され、これを Sommerfeld factor と呼ぶ。また、各対消滅断面積とは

$$\sigma = \sigma_0 S \quad (\text{A.3})$$

で関係付けられる。

次に、量子力学における散乱理論で Sommerfeld factor がどのように表わされるかを見ていく。(A.2) の定義から、Sommerfeld factor は、2 体の Schrodinger 方程式

$$-\frac{1}{m}\nabla^2\Psi(\mathbf{r}) + V(r)\Psi(\mathbf{r}) = \frac{k^2}{m}\Psi(\mathbf{r}) \quad (\text{A.4})$$

を解くことで与えられる。一般に散乱理論では、z 軸の負の方向から平面波が入射してくる状況に対応する境界条件として

$$\Psi(\mathbf{r}) \rightarrow e^{ikz} + f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r} \quad (r \rightarrow \infty) \quad (\text{A.5})$$

が課される。ここで、 $f(\theta)$  は散乱振幅である。波動関数  $\Psi(r)$  を部分波展開すれば

$$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{k} \sum_l i^l (2l+1) e^{i\delta_l} P_l(\cos\theta) R_l(r) \quad (\text{A.6})$$

で与えられる [22]。ここで  $l$  は軌道角運動量量子数、 $P_l(\cos\theta)$  はルジャンドル多項式、 $\delta_l$  は  $l$ -波の位相のずれを表わしている。また、 $R_l(r)$  は

$$R_l(r) \sim \frac{\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l\right)}{r} = \frac{\chi_l(r)}{r} \quad (\text{A.7})$$

で与えられ、動径波動関数を表わしている。原点で 0 でないのは  $R_{l=0}(0)$  の時のみなので、 $S$  は

$$S = |\Psi(0)|^2 = \left| \frac{R_{l=0}(0)}{k} \right|^2 \quad (\text{A.8})$$

となる。この式を更に、 $\chi_{l=0}(r)$  について書き換えることで、(4.5) 式が導かれる。

(A.4) の Schrodinger 方程式を  $\chi(r)$  についての式に書き換えると

$$-\frac{1}{m} \frac{d^2}{dr^2} \chi(r) + V(r)\chi(r) = \frac{k^2}{m} \chi(r) \quad (\text{A.9})$$

となり、1次元の Schrodinger 方程式として表わされる。ここで、境界条件として (4.4) 式を課せば

$$S = \left| \frac{R_{l=0}(0)}{k} \right|^2 = \left| \frac{\frac{d}{dr} \chi(0)}{k} \right|^2 \quad (\text{A.10})$$

となり、(4.5) 式が導かれる。(4.4) 式では原点における境界条件を課していたが、 $r \rightarrow \infty$  で  $\chi \propto e^{ikr}$  とする境界条件を課すと、Sommerfeld factor は

$$S = \frac{|\chi(\infty)|^2}{|\chi(0)|^2} \quad (\text{A.11})$$

で与えられる。ここで、(A.10) と (A.11) は共に等価である [18]。

## A.2 (4.21) 式の導出

(4.19) のポテンシャルが与えられた際、各領域における Schrodinger 方程式は

$$\begin{aligned} (r < R) \quad & \frac{d^2 \psi}{dr^2} = -(m^2 v^2 + m m_\phi \alpha) \psi \\ (r > R) \quad & \frac{d^2 \psi}{dr^2} = -m^2 v^2 \psi \end{aligned} \quad (\text{4.20})$$

であるが、それぞれにおける一般解は原点で正則という条件から

$$\begin{aligned} (r < R) \quad & \psi(r) = A \sin(k_{in} r) \\ (r > R) \quad & \psi(r) = \sin[k_{out}(r - R) + \delta] \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

と与えられる。従って、 $r = R$  での波動関数の連続性から

$$A \sin(k_{in} R) = \sin \delta, \quad k_{in} A \cos(k_{in} R) = k_{out} \cos \delta \quad (\text{A.13})$$

の関係式が導かれる。ここで、 $\sin^2 \delta + \cos^2 \delta = 1$  より

$$A^2 = \frac{1}{\sin^2 k_{in} R + \frac{k_{in}^2}{k_{out}^2} \cos^2 k_{in} R} \quad (\text{A.14})$$

となる。Sommerfeld factor の定義 (A.10) に従えば

$$S = \frac{A^2 k_{in}^2}{k_{out}^2} = \frac{1}{\cos^2 k_{in} R + \frac{k_{out}^2}{k_{in}^2} \sin^2 k_{in} R} \quad (\text{A.15})$$

となり (4.20) 式が導出される。

## B neutralino mass matrix の対角化

neutralino mass matrix は (5) 式で与えられており

$$M_{\tilde{\chi}^0} = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & -m_{ZSW}c_\beta & m_{ZSW}s_\beta \\ 0 & M_2 & m_{ZCW}c_\beta & -m_{ZSW}s_\beta \\ -m_{ZSW}c_\beta & m_{ZCW}c_\beta & 0 & -\mu \\ m_{ZSW}s_\beta & -m_{ZSW}s_\beta & -\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

ラグランジアンにおける mass term は

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\psi^0)^T M_{\tilde{\chi}^0} \psi^0 + \text{h.c.} \quad (5.1)$$

$$\psi^0 = \left( \tilde{B}, \tilde{W}^0, \tilde{H}_1^0, \tilde{H}_2^0 \right)^T$$

この mass matrix を対角化することで neutralino の mass が評価できるが、厳密に解くのは難しいので摂動論をもちいて解いていく。そこでまず (5) 式を対角項のみを持つ項  $M_{\tilde{\chi}^0}^{(0)}$  と非対角項のみを持つ項  $V$  とに分ける。そこで、以下の行列  $P$  を用いて基底を回転させてやることでこの分解を行う。

$$P = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (B.1)$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(P^{-1}\psi^0)^T (P^{-1}M_{\tilde{\chi}^0}P) (P^{-1}\psi^0)$$

この変換によって mass matrix と基底がどのように変わるかという

$$P^{-1}M_{\tilde{\chi}^0}P = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 & 0 & -m_{ZSW}c_\beta & m_{ZSW}s_\beta \\ 0 & M_2 & m_{ZCW}c_\beta & -m_{ZSW}s_\beta \\ -m_{ZSW}c_\beta & m_{ZCW}c_\beta & 0 & -\mu \\ m_{ZSW}s_\beta & -m_{ZSW}s_\beta & -\mu & 0 \end{pmatrix} \\ \times \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} M_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -m_{ZSW}(s_\beta + c_\beta) & m_{ZSW}(s_\beta - c_\beta) \\ 0 & 0 & m_{ZCW}(s_\beta + c_\beta) & -m_{ZCW}(s_\beta - c_\beta) \\ -m_{ZSW}(s_\beta + c_\beta) & m_{ZCW}(s_\beta + c_\beta) & 0 & 0 \\ m_{ZSW}(s_\beta - c_\beta) & -m_{ZCW}(s_\beta - c_\beta) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\equiv M_{\tilde{\chi}^0}^{(0)} + V$$

$$P^{-1}\psi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{B} \\ \tilde{W}^0 \\ \tilde{H}_1^0 \\ \tilde{H}_2^0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \tilde{B} \\ \tilde{W} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{H}_1^0 - \tilde{H}_2^0) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{H}_1^0 + \tilde{H}_2^0) \end{pmatrix} \quad (B.2)$$

上記の mass matrix を用いて摂動論的に neutralino の mass を評価していく。2 次までの摂動論は

$$\begin{aligned} 0 \text{ 次} \cdots M_{\tilde{\chi}_0}^{(0)} \\ 1 \text{ 次} \cdots M_i^{(1)} &= V_{11} \text{ より } 0 \\ 2 \text{ 次} \cdots M_i^{(2)} &= \sum_{i \neq j} \frac{V_{ij} V_{ji}}{M_i^{(0)} - M_j^{(0)}} \end{aligned}$$

で与えられる。

(1)  $m_{\tilde{\chi}_1}(i=1)$  の 2 次の補正

$$\begin{aligned} j=2 \cdots V_{12} &= 0 \text{ より } 0 \\ j=3 \cdots M_1^{(2)} &= \frac{m_Z^2 s_W^2 (s_\beta + c_\beta)^2}{2(M_1 - \mu)} \\ j=4 \cdots M_1^{(2)} &= \frac{m_Z^2 s_W^2 (s_\beta - c_\beta)^2}{2(M_1 + \mu)} \end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned} m_{\tilde{\chi}_1} &= M_1^{(0)} + M_1^{(1)} + M_1^{(2)} \\ &= M_1 + \frac{m_Z^2 s_W^2 (s_\beta + c_\beta)^2}{2(M_1 - \mu)} + \frac{m_Z^2 s_W^2 (s_\beta - c_\beta)^2}{2(M_1 + \mu)} \\ &= M_1 - \frac{m_Z^2 s_W^2 (M_1 + \mu \sin 2\beta)}{\mu^2 - M_1^2} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

(2)  $m_{\tilde{\chi}_2}(i=2)$  の 2 次の補正

$$\begin{aligned} j=1 \cdots V_{21} &= 0 \text{ より } 0 \\ j=3 \cdots M_2^{(2)} &= \frac{m_Z^2 c_W^2 (s_\beta + c_\beta)^2}{2(M_2 - \mu)} \\ j=4 \cdots M_2^{(2)} &= \frac{m_Z^2 c_W^2 (s_\beta - c_\beta)^2}{2(M_2 + \mu)} \end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned} m_{\tilde{\chi}_2} &= M_2^{(0)} + M_2^{(1)} + M_2^{(2)} \\ &= M_2 + \frac{m_Z^2 c_W^2 (s_\beta + c_\beta)^2}{2(M_2 - \mu)} + \frac{m_Z^2 c_W^2 (s_\beta - c_\beta)^2}{2(M_2 + \mu)} \\ &= M_2 - \frac{m_W^2 (M_2 + \mu \sin 2\beta)}{\mu^2 - M_2^2} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

(3)  $m_{\tilde{\chi}_3}(i=3)$  の 2 次の補正

$$\begin{aligned} j=1 \cdots M_3^{(2)} &= \frac{m_Z^2 s_W^2 (s_\beta + c_\beta)^2}{2(\mu - M_1)} \\ j=2 \cdots M_3^{(2)} &= \frac{m_Z^2 c_W^2 (s_\beta + c_\beta)^2}{2(\mu - M_1)} \\ j=4 \cdots V_{34} &= 0 \text{ より } 0 \end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned} m_{\tilde{\chi}_3} &= M_3^{(0)} + M_3^{(1)} + M_3^{(2)} \\ &= |\mu| + \frac{m_Z^2 s_W^2 (s_\beta + c_\beta)^2}{2(\mu - M_1)} + \frac{m_Z^2 c_W^2 (s_\beta + c_\beta)^2}{2(\mu - M_1)} \\ &= |\mu| + \frac{m_Z^2 (1 + \sin 2\beta)(\mu - M_1 c_W^2 - M_2 s_W^2)}{2(\mu - M_1)(\mu - M_2)} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

(4)  $m_{\bar{\chi}_4}(i=4)$  の 2 次の補正

$$\begin{aligned} j = 1 \cdots M_4^{(2)} &= \frac{m_Z^2 s_W^2 (s_\beta - c_\beta)^2}{2(-\mu - M_1)} \\ j = 2 \cdots M_4^{(2)} &= \frac{m_Z^2 c_W^2 (s_\beta - c_\beta)^2}{2(-\mu - M_1)} \\ j = 3 \cdots V_{43} &= 0 \text{ より } 0 \end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned} m_{\bar{\chi}_4} &= M_4^{(0)} + M_4^{(1)} + M_4^{(2)} \\ &= \left| -\mu - \frac{m_Z^2 s_W^2 (s_\beta - c_\beta)^2}{2(\mu + M_1)} - \frac{m_Z^2 c_W^2 (s_\beta - c_\beta)^2}{2(\mu + M_1)} \right| \\ &= |\mu| + \frac{m_Z^2 (1 - \sin 2\beta)(\mu + M_1 c_W^2 + M_2 s_W^2)}{2(\mu + M_1)(\mu + M_2)} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

以上の結果から、(5.5)~(5.8) の結果が示された。

### 3 次補正の導出

摂動展開した際、摂動変数  $\lambda$  の 3 次の係数を比較すると

$$(M_i^{(0)} - \hat{M}_{\bar{\chi}^0}) |\chi_i^{(3)}\rangle = (\hat{V} - M_i^{(1)}) |\chi_i^{(2)}\rangle - M_i^{(2)} |\chi_i^{(1)}\rangle - M_i^{(3)} |\chi_i^{(0)}\rangle$$

であるが、左から  $\langle \chi_j^{(0)} |$  をかければ

$$(M_i^{(0)} - M_j^{(0)}) |\chi_i^{(3)}\rangle = \langle \chi_j^{(0)} | \hat{V} - M_i^{(1)} |\chi_i^{(2)}\rangle - M_i^{(2)} \langle \chi_j^{(0)} | |\chi_i^{(1)}\rangle - M_i^{(3)} \delta_{ij}$$

となる。ここで、 $i = j$  とすれば

$$M_i^{(3)} = \langle \chi_i^{(0)} | \hat{V} - M_i^{(1)} |\chi_i^{(2)}\rangle - M_i^{(2)} \langle \chi_i^{(0)} | \chi_i^{(1)}\rangle \quad (\text{B.7})$$

となる。従って、(B.7) 右辺の 2 つの項を具体的に評価することで 3 次補正を与える式が導出される。

$$\begin{aligned} \text{右辺第 1 項} &= \langle \chi_i^{(0)} | \hat{V} - M_i^{(1)} \left( \sum_{i \neq j} |\chi_j^{(0)}\rangle \left\{ \sum_{i \neq k} \frac{\langle \chi_j^{(0)} | \hat{V} | \chi_k^{(0)}\rangle \langle \chi_k^{(0)} | \hat{V} | \chi_i^{(0)}\rangle}{(M_i^{(0)} - M_j^{(0)})(M_i^{(0)} - M_k^{(0)})} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\langle \chi_j^{(0)} | \hat{V} | \chi_i^{(0)}\rangle \langle \chi_i^{(0)} | \hat{V} | \chi_i^{(0)}\rangle}{(M_i^{(0)} - M_j^{(0)})^2} + c_i^{(1)} \frac{\langle \chi_j^{(0)} | \hat{V} | \chi_i^{(0)}\rangle}{M_i^{(0)} - M_j^{(0)}} \right\} + c_i^{(2)} |\chi_i^{(0)}\rangle \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i \neq j \neq k} \left[ \frac{V_{ij} V_{jk} V_{ki}}{(M_i^{(0)} - M_j^{(0)})(M_i^{(0)} - M_k^{(0)})} + \frac{c_i^{(1)} V_{ij} V_{ji}}{M_i^{(0)} - M_j^{(0)}} \right] + c_i^{(2)} \langle \chi_i^{(0)} | \hat{V} - M_i^{(1)} |\chi_i^{(0)}\rangle \\ &= \sum_{i \neq j \neq k} \frac{V_{ij} V_{jk} V_{ki}}{(M_i^{(0)} - M_j^{(0)})(M_i^{(0)} - M_k^{(0)})} + c_i^{(1)} M_i^{(2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{右辺第 2 項} &= -M_i^{(2)} \langle \chi_i^{(0)} | \left[ \sum_{i \neq j} |\chi_j^{(0)}\rangle \frac{V_{ji}}{(M_i^{(0)} - M_j^{(0)})(M_i^{(0)} - M_k^{(0)})} + c_i^{(1)} |\chi_i^{(0)}\rangle \right] \\ &= -c_i^{(1)} M_i^{(2)} \end{aligned}$$

ここで、 $c_i^{(1)}, c_i^{(2)}$  は任意定数である。以上の結果を (B.7) に代入すれば

$$M_i^{(3)} = \sum_{i \neq j \neq k} \frac{V_{ij} V_{jk} V_{ki}}{(M_i^{(0)} - M_j^{(0)})(M_i^{(0)} - M_k^{(0)})} \quad (\text{B.8})$$

となる。 $V$  の具体的な成分を見れば分かる通り、3 次の補正を与えるような  $(i, j, k)$  の組は存在しない。そのため、 $m_{\bar{\chi}_i}(i=1 \sim 4)$  への 3 次補正は全て 0 となる。

## C 2体の有効作用の導出

### C.1 (5.18) 式の導出

$\tilde{\chi}_{NR}^0$  と  $\tilde{\chi}_{NR}^-$  の spinor field は (5.17) 式で与えられており、

$$\begin{aligned}\tilde{\chi}_{NR}^0 &= \begin{pmatrix} e^{-imt}\zeta + ie^{imt}\frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma}}{2m}\zeta^c \\ e^{imt}\zeta^c - ie^{-imt}\frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma}}{2m}\zeta \end{pmatrix} \\ \tilde{\chi}_{NR}^- &= \begin{pmatrix} e^{-imt}\eta + ie^{imt}\frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma}}{2m}\xi \\ e^{imt}\xi - ie^{-imt}\frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma}}{2m}\eta \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (5.18)$$

これを (5.17) 式に直接代入することで (5.19) 式が得られるが、簡単のためまず (5.17) 式第 2 項を考える。

$$\begin{aligned}\bar{\chi}_{NR}^-(i\cancel{\partial} - m_c)\tilde{\chi}_{NR}^- &= \bar{\chi}_{NR}^- \begin{pmatrix} i\partial_t - m_c & i\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma} \\ -i\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma} & -(i\partial_t + m_c) \end{pmatrix} \tilde{\chi}_{NR}^- \\ &= \bar{\chi}_{NR}^- \begin{pmatrix} me^{-imt}\eta + e^{-imt}(i\partial_t - m_c)\eta - ime^{imt}\frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma}}{2m}\xi + ie^{imt}(i\partial_t - m_c)\frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma}}{2m}\xi \\ +ie^{imt}\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma}\xi + e^{-imt}\frac{\nabla^2}{2m}\eta \\ -ie^{-imt}(\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma})\eta + e^{imt}\frac{\nabla^2}{2m}\xi + me^{imt}\xi - e^{imt}(i\partial_t + m_c)\xi \\ +ime^{-imt}\frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma}}{2m}\eta + ie^{-imt}(i\partial_t + m_c)\frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma}}{2m}\eta \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ここで  $\delta_m \equiv m_c - m$  より

$$\begin{aligned}\bar{\chi}_{NR}^-(i\cancel{\partial} - m_c)\tilde{\chi}_{NR}^- &= \bar{\chi}_{NR}^- \begin{pmatrix} e^{-imt}(i\partial_t - \delta_m + \frac{\nabla^2}{2m})\eta - e^{imt}\left\{\frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma}}{2m} + \frac{i}{2}\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma}\left(\frac{\delta m}{m} + 1\right) - \frac{i}{2}\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma}\right\}\xi \\ e^{imt}(i\partial_t + \delta_m - \frac{\nabla^2}{2m})\xi - e^{-imt}\left\{\frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma}}{2m} - \frac{i}{2}\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma}\left(\frac{\delta m}{m} + 1\right) + \frac{i}{2}\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma}\right\}\eta \end{pmatrix} \\ &= (e^{imt}\eta^\dagger - ie^{-imt}\xi^\dagger\frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma}}{2m})\left\{e^{-imt}(i\partial_t - \delta_m + \frac{\nabla^2}{2m})\eta - e^{imt}\left(\frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma}}{2m} + \frac{i}{2}\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma}\frac{\delta m}{m}\right)\xi\right\} \\ &\quad + (e^{-imt}\xi^\dagger + ie^{imt}\eta^\dagger\frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma}}{2m})\left\{e^{imt}(i\partial_t + \delta_m - \frac{\nabla^2}{2m})\xi - e^{-imt}\left(\frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma}}{2m} + \frac{i}{2}\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma}\frac{\delta m}{m}\right)\eta\right\} \\ &= \eta^\dagger(i\partial_t - \delta_m + \frac{\nabla^2}{2m})\eta + \xi^\dagger(i\partial_t + \delta_m - \frac{\nabla^2}{2m})\xi \\ &\quad - e^{2imt}\eta^\dagger\left(\frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma}}{2m}\partial_t + \frac{i}{2m}\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma}\delta m - \frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma}}{2m}\partial_t + \frac{i}{2m}\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma}\delta m\right)\xi \\ &\quad + e^{-2imt}\xi^\dagger\left(\frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma}}{2m}\partial_t - \frac{i}{2m}\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma}\delta m - \frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma}}{2m}\partial_t - \frac{i}{2m}\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma}\delta m\right)\eta + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m^2}\right) \\ &= \eta^\dagger(i\partial_t - \delta_m + \frac{\nabla^2}{2m})\eta + \xi^\dagger(i\partial_t + \delta_m - \frac{\nabla^2}{2m})\xi \\ &\quad - i\frac{\delta m}{m}e^{2imt}\eta^\dagger\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma}\xi \\ &\quad - i\frac{\delta m}{m}e^{-2imt}\xi^\dagger\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma}\eta + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m^2}\right) \\ &\simeq \eta^\dagger(i\partial_t - \delta_m + \frac{\nabla^2}{2m})\eta + \xi^\dagger(i\partial_t + \delta_m - \frac{\nabla^2}{2m})\xi\end{aligned}\quad (C.1)$$

ここで Dark Matter の mass は大きいとして  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{m^2}\right)$  と  $\frac{\delta m}{m}$  を無視した。(5.17) 式第 1 項は  $\delta m = 0$  とし、 $\eta, \xi$  をそれぞれ  $\zeta, \zeta^c$  に置き換えたものに対応するので、(C.1) の結果を利用すれば

$$\frac{1}{2}\bar{\chi}_{NR}^0(i\cancel{\partial} - m)\tilde{\chi}_{NR}^0 = \frac{1}{2}\left[\zeta^\dagger(i\partial_t + \frac{\nabla^2}{2m})\zeta + \zeta^{c\dagger}(i\partial_t - \frac{\nabla^2}{2m})\zeta^{c\dagger}\right]$$

で与えられる。ここで、第2項を展開していくと

$$\begin{aligned}
\zeta^{c\dagger}(i\partial_t - \frac{\nabla^2}{2m})\zeta^{c\dagger} &= (-i\sigma^2\zeta^*)^\dagger(i\partial_t - \frac{\nabla^2}{2m})(-i\sigma^2\zeta^*) \\
&= i\zeta^T\sigma^2(i\partial_t - \frac{\nabla^2}{2m})(-i\sigma^2\zeta^*) \\
&= -\zeta^\dagger(i\overleftarrow{\partial}_t - \frac{\overleftarrow{\nabla^2}}{2m})\zeta \\
&\simeq \zeta^\dagger(i\partial_t + \frac{\nabla^2}{2m})\zeta
\end{aligned}$$

となる。ここで、2行目から3行目へは足の入れ替える際に、グラスマン数の性質から overall に符号が出てくる。また、最後の式変形では表面項を落としている。

以上、(C.1)(C.2)の結果をまとめれば

$$\begin{aligned}
S_{NR}|_{kinetic\ terms} &= \int d^4x \left[ \zeta^\dagger(i\partial_t + \frac{\nabla^2}{2m})\zeta \right. \\
&\quad \left. + \eta^\dagger(i\partial_t - \delta m + \frac{\nabla^2}{2m})\eta + \xi^\dagger(i\partial_t + \delta m - \frac{\nabla^2}{2m})\xi \right] \tag{5.19}
\end{aligned}$$

が導出される。

## 参考文献

- [1] <http://hubblesite.org/newscenter/archive/releases/2011/08/full/>
- [2] <http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/map/dr4/parameters.cfm>
- [3] G.Bertone, D.Hooper and J.Silk. Phys.Rept.405:279-390(2005) arXiv:hep-ph/0404175v2
- [4] <http://chandra.harvard.edu/photo/>
- [5] <http://www.sdss.org/>
- [6] D.Larson et al. ApJS, 192, 16(2011) arXiv:1001.4635
- [7] Gary Steigman arXiv:0807.3004
- [8] E.W.Kolb and M.S.Turner. *The Early Universe*. Westview press (1990)
- [9] M.Kakizaki, S.Matsumoto and M.Senami Phys.Rev.D74 (2006) 023504 arXiv:hep-ph/0605280v1
- [10] J.Hubisz and P.Meade, arXiv:hep-ph/0411264, v3.
- [11] A.Birkedal, A.Noble, M.Perelstein and A.Spray. arXiv:hep-ph/0603077,v2.
- [12] M.Ackermann et al. Nature 458:607-609(2009), arXiv:1109.0521v1
- [13] J.hisano et al. Phys.Rev.D83:123511(2011), arXiv:1102.4658
- [14] C.Amsler et al. Review of particle physics. Phys. Lett B667:1(2008)
- [15] L.Pial et al. Astrophys.J.653:300-315(2006), arXiv:astro-ph/0603553
- [16] A.J.Korn et al. Nature 442(2006) 657-659, arXiv:astro-ph/0608201
- [17] T.Jittoh et al. Phys.Rev.D84:035008(2011), arXiv:1105.1431
- [18] N.Arkani-Hamed et al. Phys.Rev.D79:015014(2009), arXiv:0810.0713
- [19] M.Lattanzi and J.Silk, Phys.Rev.D79:083523(2009), arXiv:0812.0360v2
- [20] J.Hisano et al. Phys.Rev.D71:063528(2005), arXiv:hep-ph/0412403v2
- [21] Xiao-Gang He Mod.Phys.Lett.A24:2139-2160(2009), arXiv:0908.2908v2
- [22] 猪木慶治. 川合光. 量子力学 I・II. 講談社, (1994)