

修士論文

不安定な量子系の非exponential decayの メカニズムと素粒子物理学への応用

平成 17 年度修了

埼玉大学大学院 理工学研究科 博士前期課程 物理学専攻

学籍番号：04SP006

実藤俊史

概要

不安定な量子系が指数関数的に崩壊することはよく知られている。しかしこれは厳密なものではなく、崩壊の初期（量子 Zeno 効果）や十分に時間が経過した後（べき崩壊）では崩壊は指数関数からずれることも知られている。この論文では、これらとは異なった現れ方をする指数関数からのずれを見る。このずれは、1) 小さな Q -value を持った、2) s-wave, での崩壊 (SQS decay) が起こったときに現れ、全時間領域で指数関数からずれるという大きな特徴がある。この論文の前半では、まず不安定な量子系の崩壊を一般的に考え、その考察をもとに指数関数がどのような状況で消えるのかを調べて、上記の条件を定量的に導く。さらに具体的な例を通して SQS decay がどのような崩壊なのかを見る。

ある物理系の崩壊で上記の 2 つの SQS decay の条件が満たされると、その崩壊は非指数関数的なものになる。したがってそのような物理系の研究では、そのことを意識した取り扱いが必要になる。そこで後半では素粒子物理学で SQS decay が現れ、観測される可能性を調べる。具体的には、minimal supersymmetric standard model (MSSM) で next lightest supersymmetric particle (NLSP) の lightest supersymmetric particle (LSP) への崩壊が SQS decay となっている可能性を調べる。なおこの論文では、NLSP として τ レプトンの superpartner である stau を、LSP として Bino-like neutralino を考える。ただし Bino は B ボソンの superpartner である。このプロセスに注目した理由は、宇宙論的な背景からこれらの粒子の質量は数%まで縮退している可能性があるので、SQS decay の条件を満たす可能性が高いからである。

後半のはじめではこの崩壊の decay rate の計算をする。得られた decay rate はいくつかのパラメータに依存するので、次にその依存性を考慮しつつ SQS decay の条件が満たされる可能性を調べる。その結果、このプロセスではナイーブには SQS decay は起こらないことがわかる。しかし外部の環境との相互作用がある場合には、ナイーブには SQS decay の条件を満たさなくても崩壊が指数関数則からずれる可能性がある。NLSP 観測での現実的な外部環境としては、高エネルギーの加速器で生成された NLSP を集めるストッパーが考えられる。これらをもとに今後の研究の課題や将来の展望をまとめる。

目次

第 1 章 序論	3
第 2 章 不安定状態の一般論	6
第 3 章 非 exponential decay の条件	9
3.1 非常に短い時間	9
3.2 非常に遅い時間	9
3.3 SQS-decay	10
第 4 章 SQS decay の具体例	13
第 5 章 SQS decay のまとめと素粒子物理学	18
第 6 章 stau の崩壊プロセス	20
第 7 章 stau decay rate のパラメーター依存性	23
7.1 $m_{\tilde{\chi}^0}$	23
7.2 γ_τ	23
7.3 θ_τ	24
7.4 δm	25
第 8 章 stau decay rate の評価	29
第 9 章 stau 崩壊のまとめと展望	33
第 10 章 まとめ	35
謝辞	36
付 録 A 箱型ポテンシャルでの spectral function の導出	37
付 録 B 台形型ポテンシャルでの spectral function の導出	38
付 録 C MSSM ラグランジアン	40
C.1 Notation	40
C.2 superfield とその積	42
C.3 MSSM の粒子一覧	42

C.4	MSSM の全ラグランジアン	43
C.5	相互作用ラグランジアン の導出	44
付 録 D	stau の decay rate 計算	46
D.1	2 体崩壊	46
D.2	3 体崩壊	47
D.3	4 体崩壊	48
	参考文献	50

第1章 序論

不安定な量子系がどのような崩壊をするかは, Dirac[1] や Weisskopf, Wigner[2] の時代から続いている問題である. よく知られているのは指数関数則である. これは survival probability $P(t)$ が時間 t に対して指数関数的に減衰する: $P(t) = e^{-\Gamma t}$ というものである. その一方で指数関数則は厳密なものではないことも知られている [3]. まず崩壊の初期で崩壊は指数関数則からずれる. これは量子 Zeno 効果と呼ばれるもので, 時間 t の二乗の Gaussian 型になる. また十分に時間が経過した後も崩壊は指数関数からずれる. ここでは崩壊は時間のべきに従う. 指数関数則が成り立つのはこの間の領域である. このように崩壊が3つの段階を踏むことをあらわしたものが図 1.1 である.

非 exponential decay への理解を深めるために, 指数関数則からのずれが生じたときに系の崩壊で何が起こるのかを見てみる. ここでは図 1.2(a) のように, はじめはゆるやかに崩壊していたがある時刻で急に崩壊が早まるという系を考える. すなわち survival probability がある時刻で折れ曲がるという極端な例を考える. この折れ曲がる時刻を a とすると, $t = 4a$ ではじめて系を観測した場合には, survival probability は図 1.2(b) 中の印で示された点に値をもつ. しかし観測する時間, 回数を変えると事情が変わってくる. 系は崩壊していない限り, 観測されるたびに始状態に収束する. 始状態に収束した系の崩壊は再びゆるやかな崩壊からはじまる. したがって毎 a ごとに系を観測すると図 1.2(b) 中の○印で示された点に値をもつことになる. また観測の間隔を $t = 2a$ とした場合を考えてみる. この場合でも a 毎に観測したときと同じように波動関数の収束が起こるが, survival probability は a 毎の時とは異なり $\times$ 印の点に値を持つことになる. こうして非 exponential decay が起こっている場合には, 観測の仕方が崩壊プロセスに影響を与えることがわかる.

量子 Zeno 効果は崩壊の非常に初期でしか起こらないため, 実験での観測は困難であった. しかし近年の実験技術は量子 Zeno 効果を観測できるところまで進歩してきた [4]-[6]. とはいえその観測例はま

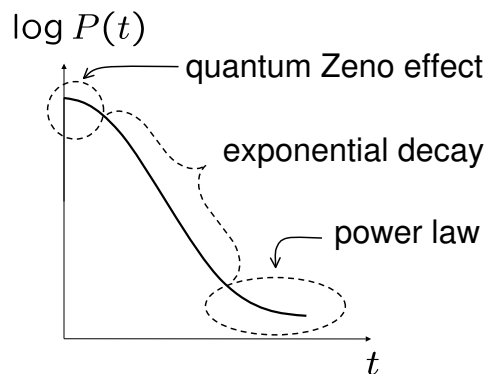


図 1.1: 一般的な survival probability. 非常に短い時間と十分に時間が経過した後では指数関数則からずれる.

だ1つだけで [7], なお難しい問題であることは変わっていない. このような技術上の背景があるので, これまでに知られているもの以上に指数関数則からずれる系を見つけることができれば, より容易に非 exponential decay が観測できるはずである. この論文では, そのような系を探す中で見つけれられた small Q -value s-wave (SQS) decay という崩壊 [8] を中心に議論していく. SQS decay は, 系が小さな Q -value を持ち s-wave で崩壊するとき起こり, 全時間領域で指数関数則からずれるという特徴を持つ. ただし Q -value とは, 系の初期状態の持つエネルギー E_0 と崩壊後のエネルギー連続状態がとりえる最低エネルギー E_{th} の差¹ である. この論文の前半ではこの SQS decay が起こるメカニズムを調べ, SQS decay が起こる条件を定量的に導く.

さて, SQS decay の条件は小さな Q -value と s-wave での崩壊というシンプルなもののなので, 物理学のさまざまな分野で起こる可能性がある. 上で述べたように, 非 exponential decay が起きている場合には観測が崩壊プロセスに影響を与えるので, そのような系を調べるときにはそのことに注意した取り扱いが必要である. そこでこの論文の後半では素粒子物理学で SQS decay が起きている可能性がある場合を調べる [9]. 具体的には minimal supersymmetric standard model (MSSM) での next lightest supersymmetric particle (NLSP) の lightest supersymmetric particle (LSP) への崩壊を調べる. この崩壊が SQS decay となる可能性があることは宇宙論的な理由から与えられる. 現在のダークマター残存量を説明する方法として coannihilation というプロセスがある [10]. coannihilation プロセスは NLSP と LSP の質量差が小さい (これらの質量の数%程度がそれ以下) ときに起こる. 質量差はナイーブには Q -value に対応するので, このプロセスは SQS decay の条件: 小さい Q -value, を満たしているように見える. この論文では NLSP が stau, LSP が neutralino である場合を考える. ここで stau は τ レプトンの superpartner であり, neutralino は, U(1), SU(2) のゲージボソンの sperpartner (Bino, Wino) および Higgs ボソンの superpartner (Higgsino) の線形結合である.

この論文の構成は以下のとおりである. 第2章で不安定状態の崩壊を一般的に取り扱い, その結果をもとに第3章で崩壊が指数関数則からずれる条件を導く. さらに第4章で具体例を通して SQS decay がどのような崩壊なのかを見る. 第5章では SQS decay についての議論をまとめ, さらに素粒子物理

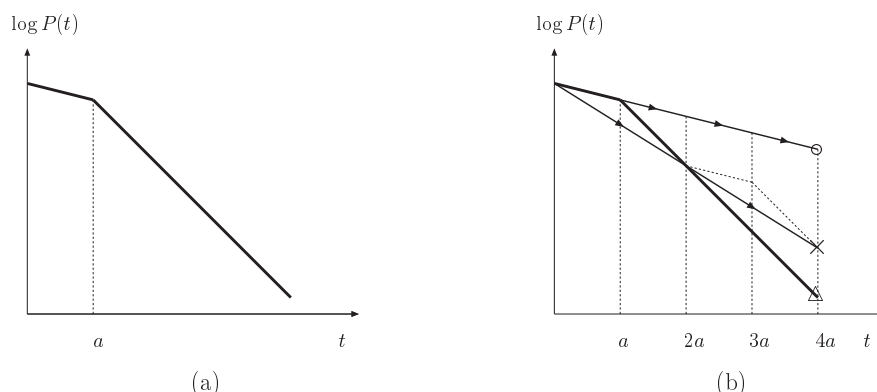


図 1.2: 非 exponential decay が起こる系での崩壊が survival probability に与える影響. (b) 中の $\circ$ 印と $\times$ 印はそれぞれ観測を毎 a におこなった場合, $t = 2a$ でのみおこなった場合の survival probability のとる値.

¹正確には Q -value は $E_0 - E_{th}$ ではなく, これに崩壊相互作用による量子補正が加わった量である. しかし直観的また近似的には $E_0 - E_{th}$ で与えられる.

学への応用の可能性について考える。第 6 章で NLSP が LSP に崩壊するプロセスの decay rate を計算する。この decay rate はいくつかのパラメーターに依存するので、第 7 章で decay rate のパラメーター依存性を調べる。続く第 8 章で NLSP 崩壊プロセスで非 exponential decay の条件が満たされるかを調べる。またこの章では lepton flavor violation があった場合に NLSP 崩壊プロセスがどのように変わるかも調べる。第 9 章で、NLSP 崩壊についての結果をまとめる。この章ではさらに外部環境との相互作用が非 exponential decay の条件を変える可能性に触れ、実際の実験で外部環境となりうる実験装置について考える。最後に第 10 章で全体の結果をまとめ、この分野での今後の研究課題について考える。

第2章 不安定状態の一般論

この章では不安定状態の崩壊を一般的に考える。はじめに、この先の計算のために崩壊を記述するのに使う量をいくつか定義する。まず初期状態を $|0\rangle$ 、エネルギー固有状態を $|E\rangle$ とする。このとき、decay rate $\Gamma(t)$, survival probability $P(t)$, non-decay amplitude $a(t)$, spectral function $\rho(E)$ はそれぞれ、

$$\Gamma(t) = -\frac{d}{dt} \log P(t) , \quad (2.1)$$

$$P(t) = |a(t)|^2 , \quad (2.2)$$

$$a(t) \equiv \langle 0 | e^{-iHt} | 0 \rangle = \int_0^\infty dE \rho(E) e^{-iEt} , \quad (2.3)$$

$$\rho(E) = |\langle E | 0 \rangle|^2 , \quad (2.4)$$

で与えられるものとする。

次に Peres が用いた方法を使って、不安定状態の時間発展を考える [11]。まず系のハミルトニアンを以下のように分ける。ここで初期状態への射影演算子を $P \equiv |0\rangle\langle 0|$ とし、また考える系のハミルトニアンを H とする。このとき H は P を使うことで、

$$H = H_0 + V , \quad (2.5)$$

$$H_0 \equiv PHP + (1 - P)H(1 - P), \quad V \equiv H - H_0 ,$$

のようにエネルギー固有状態 $|E_a\rangle$ を作る部分 H_0 と、崩壊を引き起こす部分 V に分けることができる。

$$H_0 |E_a\rangle = E_a |E_a\rangle , \quad (2.6)$$

$$\langle 0 | V | 0 \rangle = \langle E_n | V | E_m \rangle = 0, \quad \langle 0 | V | E_n \rangle \neq 0, \quad \langle E_n | V | 0 \rangle \neq 0 .$$

ただし $|E_n\rangle, |E_m\rangle$ はエネルギー固有状態を表している。

次に系の時間発展について考えていく。ある時刻 t での相互作用表示での状態を、 H_0 の固有状態で展開する。

$$|\psi\rangle_I = e^{iH_0 t} |\psi\rangle = \sum_a c_a(t) |E_a\rangle . \quad (2.7)$$

Schrödinger 方程式を使うと

$$i\dot{c}_0 = \sum_n \langle 0 | V | E_n \rangle e^{-i(E_n - E_0)t} c_n, \quad i\dot{c}_m = \langle E_m | V | 0 \rangle e^{i(E_m - E_0)t} c_0 . \quad (2.8)$$

ここで E_0 は系の初期状態のエネルギー、すなわち $E_0 = \langle 0 | H | 0 \rangle$ である。 $c_0(t)$ は $\langle 0 | e^{-iHt} | 0 \rangle = e^{-iE_0 t} c_0(t)$ で与えられる量であるので、まさしく nondecay amplitude である。そこで $a(t) \equiv c_0(t)$ と

書き直すと, (2.8) 式を使うことによって

$$\dot{a}(t) = - \int_0^t dt' \beta(t-t') a(t') , \quad (2.9)$$

$$\beta(t-t') = \langle 0|V_I(t)V_I(t')|0\rangle = \int_{E_{th}}^{\infty} dE \sigma(E) e^{-i(E-E_0)(t-t')} , \quad (2.10)$$

$$\sigma(E) = \sum_m \delta(E-E_m) |\langle 0|V|E_m\rangle|^2 . \quad (2.11)$$

ここで $V_I(t) = e^{iH_0 t} V e^{-iH_0 t}$ は相互作用表示で書かれた崩壊を引き起こす相互作用で, $\sigma(E)$ は $|0\rangle$ と $|E_m\rangle$ の間の相互作用を特徴付ける量である. また E_{th} は, 崩壊後のエネルギー固有状態がとるエネルギーの中で最低のエネルギーの値である. なおこれらの式の導出にあたって, 初期条件 $c_m(0) = 0$ を用いている. Laplace 変換を用いると (2.9) 式を解くことができ, その結果は以下ようになる.

$$a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE}{2\pi i} F(E+i0^+) e^{-i(E-E_0)t} , \quad (2.12)$$

$$F(z) \equiv \frac{1}{-z+E_0-G(z)} , \quad G(z) = \int_{E_{th}}^{\infty} dE \frac{\sigma(E)}{E-z} . \quad (2.13)$$

この式の導出にあたって初期条件 $a(0) = 1$ を用いた.

nondecay amplitude の振舞いを知るためには, $F(z)$ の解析性を知らなければならない. 図 2.1 のように $F(z)$ には E_{th} から実軸の正の方向に伸びるブランチカットと, カットを挟んだ 2 枚目の Riemann 面上のポールがある. ここでポールの座標は,

$$z_p - E_0 + G_{II}(z_p) = z_p - E_0 + \int_{E_{th}}^{\infty} dE \frac{\sigma(E)}{E-z_p} + 2\pi i \sigma(z_p) = 0 , \quad (2.14)$$

与えられ, 崩壊の相互作用が小さいとき (すなわち σ が小さいとき) には実軸の下かつ実軸のすぐ近くになる. この論文では崩壊の相互作用があまり強くない準安定状態を考えている. 準安定状態においては, 系の持つおおよそのエネルギー $E_{sys} \sim E_0$ について, $\sigma \ll E_{sys}$ となる. このときポールの座標はコーシーの主値を用いて,

$$z_p \simeq E_0 - \Pi(E_0) - i\pi\sigma(E_0) , \quad \Pi(E) = \text{p.v.} \int_{E_{th}}^{\infty} dE' \frac{\sigma(E')}{E'-E} , \quad (2.15)$$

と近似できる. ただし p.v. は積分の主値を表している. また $G(z)$ および $F(z)$ は $G_{II}(E-i0^+) = G_I(E+i0^+)$ によって 2 枚目の Riemann 面につながられ, 実軸上の $E > E_{th}$ で定義されていた関数 $\sigma(E)$ は解析接続によって複素平面での関数 $\sigma(z)$ に拡張される. 注意すべき点として, $F(z)$ には問題とする系によってはこれ以外の singularity が存在する, ということがある. しかしこれらの singularity は上で述べた singularity に比べて高振動数の寄与となるため, 崩壊の初期を除いて無視することができる [12]. なお, この寄与が無視できなくなるときについては 3.1 節で議論している.

カットを挟んだ時の $F_I(z)$ の不連続性から, 次の関係式が導かれる.

$$F_I(E+i0^+) - F_I(E-i0^+) = 2\pi i \sigma(E) |F_I(E+i0^+)|^2 . \quad (2.16)$$

このような $F(z)$ の解析性から, (2.12) 式の積分経路を図 2.1 のように変形する. こうして nondecay amplitude はポールを一周する積分 C_p と, もう一つの経路 C_{th} の 2 つの経路からの寄与の和によって

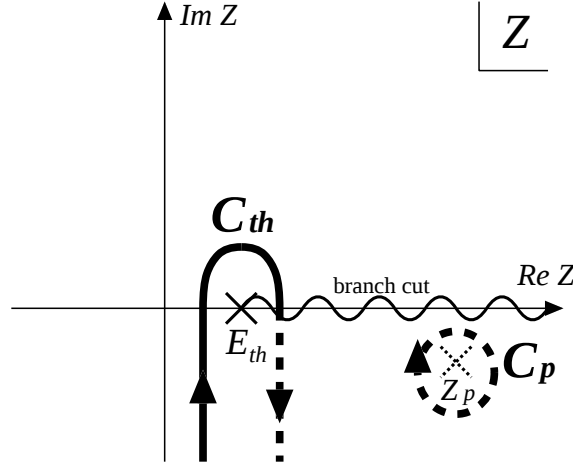


図 2.1: $F(z)$ の z 平面状での解析性と 2 つの積分経路. ここで点線は 2 枚目の Riemann 面上にあることを示している.

決まることがわかる.

$$a(t) = \left(\int_{C_p} + \int_{C_{th}} \right) \frac{dz}{2\pi i} F(z) e^{-i(z-E_0)t} . \quad (2.17)$$

(2.17) 式の C_p 積分は留数定理によって求めることができ, (2.15) 式の近似を使うと,

$$\int_{C_p} \frac{dz}{2\pi i} F(z) e^{-i(z-E_0)t} \simeq e^{i\Pi(E_0)t} e^{-\pi\sigma(E_0)t} , \quad (2.18)$$

となる. 一方, 十分大きな t に対して C_{th} 積分は,

$$\begin{aligned} \int_{C_{th}} \frac{dz}{2\pi i} F(z) e^{-i(z-E_0)t} &= -ie^{i(E_0-E_{th})t} \int_0^\infty dy \sigma(E_{th}-iy) |F(E_{th}-iy)|^2 e^{-yt} \\ &\simeq -ie^{i(E_0-E_{th})t} |F(E_{th})|^2 \int_0^\infty dy \sigma(E_{th}-iy) e^{-yt} , \end{aligned} \quad (2.19)$$

となる.

ここで 2 つの積分からの寄与を見ると, C_p からの寄与は $\mathcal{O}(1)$ であるのに対し, $|F(E_{th})|^2 \sim (E_0 - E_{th})^{-2}$ であるために C_{th} の方は $\mathcal{O}(\sigma/E_0)$ と非常に小さくなる. このように C_p が優勢な状況では, 系の崩壊は (2.18) 式で記述され,

$$P(t) = |a(t)|^2 \simeq \exp(-\Gamma_p t) , \quad \Gamma_p = 2\pi\sigma(E_0) , \quad (2.20)$$

というよく知られた指数関数則が得られる. 次の第 3 章では, 2 つの積分経路 C_p , C_{th} からの寄与を比較し, 指数関数則が成立しなくなる状況を考える.

第3章 非 exponential decay の条件

この章ではよく知られている exponential decay が成り立たなくなる状況について調べ、特に SQS decay が起こる条件を定量的に求める。

先の章の終わりでの議論から、(2.17) 式の中で C_p 積分が exponential decay を引き起こすことがわかった。これは同時に非 exponential decay は C_{th} 積分によって引き起こされるということを意味する。したがって C_{th} 積分からの寄与が、少なくとも C_p 積分からの寄与と同程度になった時に exponential decay は崩れる。これは以下に述べる 3 つの場合に起こることがわかる。

3.1 非常に短い時間

第 1 章でも述べたように、不安定な量子系の崩壊は崩壊の初期で指数関数則からずれる。これは量子 Zeno 効果として知られている。このずれは以下に述べる理由から起こる。 $F(z)$ の解析性のところで述べたように、 $F(z)$ は図 2.1 にある singularity の他に、より高振動数の寄与をする singularity をもつ。非常に短い時間ではこれらの singularity からの寄与が無視できなくなる。nondecay amplitude はこれら高振動数の寄与も含めたものになるので、exponential decay は消える [13]。

また短時間での exponential decay の消失は、non-decay amplitude の定義からも与えられる。指数関数則にしたがう survival probability を $t \rightarrow 0$ で展開すると、

$$\begin{aligned} P(t) &= e^{-\Gamma t} \\ &= 1 - \Gamma t + \frac{1}{2}\Gamma^2 t^2 + \mathcal{O}(t^3), \end{aligned} \quad (3.1)$$

となる。これに対し non-decay amplitude の定義 (2.3) から $P(t)$ を計算すると、

$$\begin{aligned} P(t) &= \left| \langle 0 | e^{-iHt} | 0 \rangle \right|^2 \\ &= \left| 1 - it \langle 0 | H | 0 \rangle - \frac{1}{2} t^2 \langle 0 | H^2 | 0 \rangle + \mathcal{O}(t^3) \right|^2 \\ &= 1 - t^2 (\langle 0 | H^2 | 0 \rangle - \langle 0 | H | 0 \rangle^2) + \mathcal{O}(t^3), \end{aligned} \quad (3.2)$$

となり、 t については 2 次の項から始まり、1 次の項は現れない。したがって $t \rightarrow 0$ の極限においては指数関数則が成り立たないことは、このナイーブな議論からも示することができる。

3.2 非常に遅い時間

第 1 章で述べた、非常に遅い時間で起こるべき則について見てみる。はじめに十分に時間が経過した時の C_{th} 積分からの寄与について考える。 $t \rightarrow \infty$ では (2.19) 式の y 積分の中で $y = 0$ 付近のみが寄与

し, E_{th} 近傍での $\sigma(E)$ の振る舞いが重要になる. E_{th} 近傍では $\sigma(E) = c(E - E_{th})^\alpha$ と書けることから, C_{th} 積分は,

$$\int_{C_{th}} \frac{dz}{2\pi i} F(z) e^{-i(z-E_0)t} \simeq -ie^{i(E_0-E_{th})t} |F(E_{th})|^2 \frac{c \Gamma(\alpha+1) e^{-i\pi\alpha/2}}{t^{\alpha+1}}, \quad (3.3)$$

となり, 時間のべきで減衰する. ここで $\Gamma(z)$ は Euler のガンマ関数である. ただし c, α はある定数で, 系によって決まる量である.

他方 C_p からの寄与は指数関数的に減衰するため, 十分に時間が経過した時には非常に小さくなる. こうして崩壊は C_{th} からの寄与で決定されることになる. したがって exponential decay は十分に長い時間が経過した時には消え, 崩壊はべきになることがわかる.

3.3 SQS-decay

最後に Q -value が非常に小さく, なおかつ崩壊が s-wave で起こる場合に指数関数則が崩れることを見る [8]. また指数関数則が崩れる条件を定量的に導く. このケースがこの論文で特に注目しているものであり, 論文の後半ではここで求めた条件が素粒子物理学において満たされる可能性を議論する.

まずは Q -value が小さいという条件を考える [8, 12, 14]. C_{th} 積分について考えると,

$$\sigma(E)|F(E)|^2 = \frac{\sigma(E)}{Q^2 + (\pi\sigma(E))^2}, \quad (3.4)$$

より, Q -value が $\mathcal{O}(\sigma)$ よりも小さいときに C_{th} 積分からの寄与は大きくなる. もともと C_{th} からの寄与が小さい理由は $\sigma(E)|F(E)|^2$ が小さいことによっていた. したがって今の Q -value が小さい場合には, $\sigma(E)|F(E)|^2$ が大きいので exponential decay を崩す. ここで注意すべき点は, この議論では時間についての制限を一切付けていないことである. こうして Q -value が小さい場合の指数関数則の崩れは時間に関係なく起こる.

σ は図 2.1 に描かれているボールの座標の虚部である ($\sigma \sim \Im z_p$). 従って Q -value が小さいという条件は次のように書くことができる.

$$\frac{|\Im z_p|}{Q} \geq 1, \quad Q = \Re z_p - E_{th}. \quad (3.5)$$

これが非 exponential decay の条件式である. ただし右辺の 1 はあくまで目安の量である. 正確な値は実験を行うことによって決められるであろう.

(3.5) 式の条件はボールの座標の虚部という量を用いているので, 実用には向かないともいえる. そこで次のような近似的な式を導いておくと便利である. (3.5) 式は decay rate が σ で与えられる ($\Gamma_p \sim \sigma$) ことと, Q -value が近似的に $E_0 - E_{th}$ で与えられることを用いると,

$$\frac{\Gamma_p}{E_0 - E_{th}} \geq 1. \quad (3.6)$$

実際, この論文の後半で議論する素粒子物理学への応用ではこの近似式を用いる.

次に SQS-decay のもう一つの条件である, s-wave decay の必要性について見る [8]. 重要なことは $\Im z_p$ も Q -value に依存するということである. そこで $\Im z_p$ すなわち σ の Q -value 依存性を調べる. Q -value が非常に小さいときには, σ の振る舞いは次式のように Q のべきで与えられる.

$$\sigma(E) \sim Q^\alpha. \quad (3.7)$$

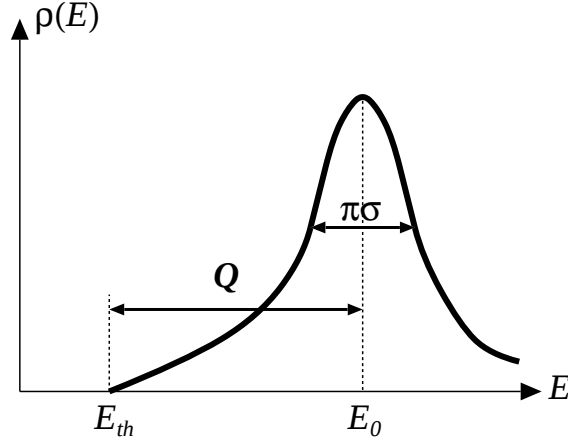


図 3.1: 典型的な spectral function $\rho(E)$. ピークの位置と閾値の差が Q -value に, ピークの幅が σ (decay rate Γ) になる.

ここで α はある定数で, 系によって決まる. この式の両辺を Q で割ることによって,

$$\frac{|\Im z_p|}{Q} \sim Q^{\alpha-1}. \quad (3.8)$$

ところで spectral function の Q -value 依存性は, 角運動量 l を用いて次のように書けることが知られている [15].

$$\rho(E) \sim Q^{l+1/2}. \quad (3.9)$$

さらに (3.4) 式より, Q -value が小さいときには σ と ρ の Q 依存性は等しくなる. したがって (3.8) 式と (3.9) 式を組み合わせることによって,

$$\frac{|\Im z_p|}{Q} \sim Q^{l-1/2} \quad (3.10)$$

という条件式が得られる.

今は小さい Q -value を考えているので, $l = 0$ の場合には $|\Im z_p|/Q$ は大きくなり, 非 exponential decay の条件 (3.5) を満たす. しかし $l \geq 1$ の場合には $|\Im z_p|/Q$ は小さくなるので, 非 exponential decay の条件 (3.5) は満たされなくなる. こうして s-wave での崩壊が必要であることが示された.

この節で求めた条件, (3.5) 式と (3.10) 式は, spectral function の Breit-Wigner 型からのズレとして, より直観的にとらえることができる. 典型的な spectral function を図 3.1 に示す. $Q \rightarrow \infty$ の極限では, この spectral function は図 3.2(a) のように完全に Breit-Wigner 型になる. よく知られているように, Breit-Wigner 型の spectral function は exponential decay を引き起こす. したがって $Q \rightarrow \infty$ の極限では exponential decay が起こる. それに対して $Q \rightarrow \text{small}$ の極限では, spectral function はもはや Breit-Wigner 型ではなくなっている (図 3.2(b)). すなわちこの場合には exponential decay は引き起こされない. このことは言い換えれば, 非 exponential decay が引き起こされるということである.

s-wave decay の必要性についても, この Breit-Wigner 型からのズレという基準で調べてみる. 図 3.3 に $l = 0$, $l \geq 1$ のそれぞれの場合について, Q -value が大きいときと小さいときの spectral function

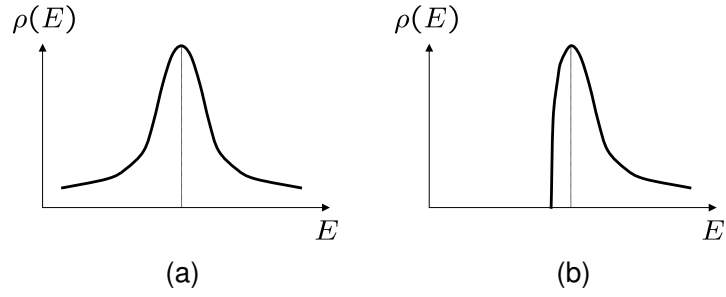


図 3.2: Q -value が大きい極限 (a) と $Q < \sigma$ (b) での spectral function.

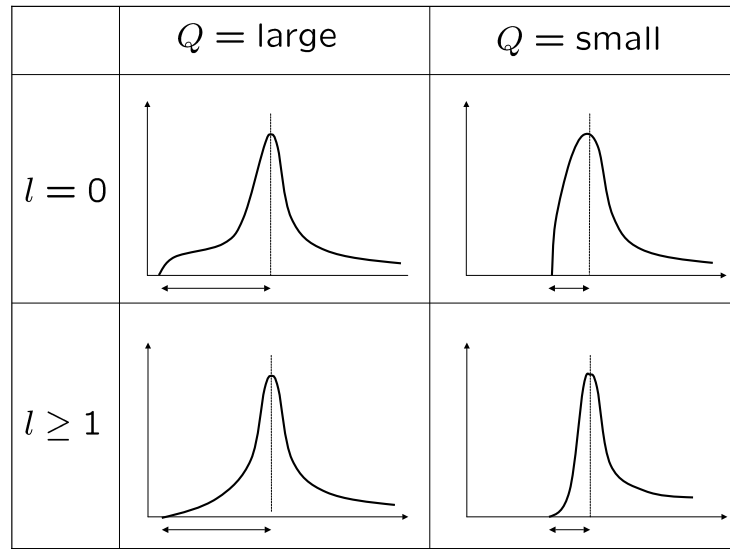


図 3.3: $l = 0, l \geq 1$ のそれぞれの場合での, Q -value が大きいときと小さいときの spectral function.

が描かれている。図 3.3 から分かるように, $l \geq 1$ の場合には, Q -value が小さくなくても立ち上がりの振る舞いから σ も小さくなり, Breit-Wigner 型はなお残っている。しかし $l = 0$ の場合には小さい Q -value に対しては Breit-Wigner 型は明らかに消えていることがわかる。このように spectral function の Breit-Wigner 型からのずれという直観的な方法からも SQS decay の条件は理解できる。

第4章 SQS decay の具体例

この章では具体的な例を通して, SQS decay がどのようなものかを見る. さらにその結果から先の章で求めた条件式 (3.5) の有効性を検討する.

1 次元での箱型のポテンシャル,

$$V = \begin{cases} \infty & x < -a, \\ -U_0 & -a \leq x \leq 0, \\ U/b & 0 < x < b, \\ 0 & b \leq x, \end{cases} \quad (4.1)$$

を持った系を考える (図 4.1). この系で, $-a < x < 0$ の井戸に閉じ込められた質量 m の粒子がポテンシャルの外にトンネルしていくプロセスを計算する. 始状態として, 次式のように井戸の中に閉じ込められた状態を選ぶ.

$$\psi_i(x) \equiv \langle x|0 \rangle = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \theta(x+a) \theta(-x). \quad (4.2)$$

ただし $\theta(x)$ は階段関数である. この始状態が持つエネルギーの期待値 E_0 は,

$$E_0 = \frac{\pi^2}{2ma^2} - U_0, \quad (4.3)$$

である. Q-value は (2.15) 式からわかるように, $E_0 - E_{th}$ にポテンシャルによる量子補正を加えた量である. Schrödinger 方程式を使うことで, この系の spectral function は厳密に計算でき, (詳細な計算は付録 A を参照)

$$\rho(E) = \frac{1}{2ma^2\alpha(E)} \frac{2\pi q \sin^2 r}{(r^2 - \pi^2)^2}, \quad (4.4)$$

となる. ここで $\alpha(E)$ は, $E \leq U/b$ の場合には,

$$\alpha(E) = q^2 + G_0 \cos^2 r - \frac{G}{u} \sin^2 r + \frac{G}{u} \left(\frac{r}{s} \cos r \cdot \sinh(su) + \sin r \cdot \cosh(su) \right)^2, \quad (4.5)$$

で, $E \geq U/b$ の場合には,

$$\alpha(E) = q^2 + G_0 \cos^2 r - \frac{G}{u} \sin^2 r + \frac{G}{u} \left(\frac{r}{\tilde{s}} \cos r \cdot \sin(\tilde{s}u) + \sin r \cdot \cos(\tilde{s}u) \right)^2, \quad (4.6)$$

でそれぞれ与えられる量である. またこれらの式に現れる $q, r, s, \tilde{s}, G, G_0, u$ はそれぞれ次のように

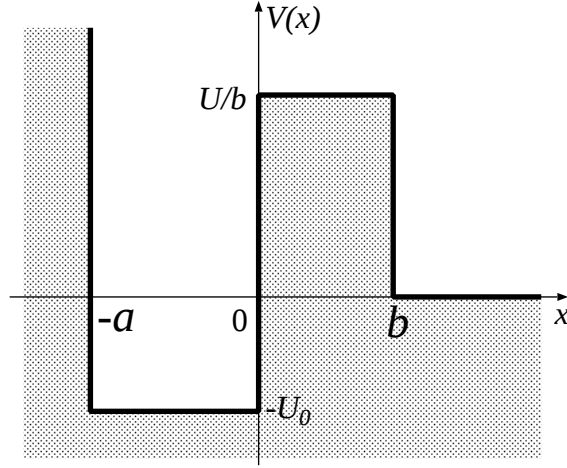


図 4.1: 箱型のポテンシャルを持った 1 次元系.

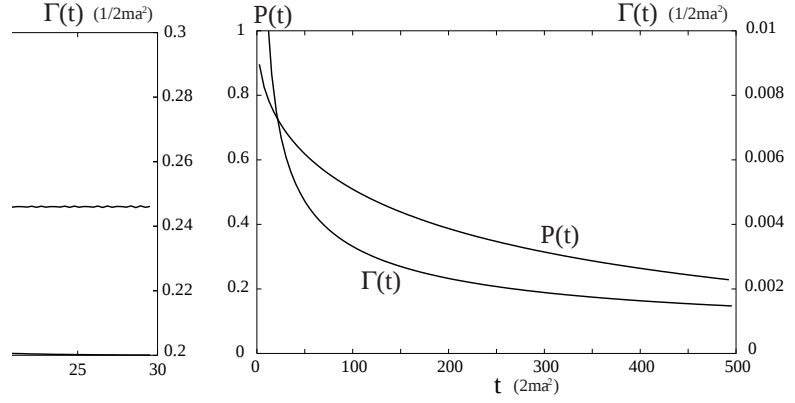


図 4.2: 崩壊の例. 左の図は $G = 20, G_0 = 0$ (すなわち $Q = 8.97365(2ma^2)^{-1}$), $u = 10^{-4}$ の場合について描かれており, 右の図は $G = 20, G_0 = 8.957335$ (すなわち $Q = 6.55445 \times 10^{-4}(2ma^2)^{-1}$), $u = 10^{-4}$ の場合について描かれている.

定義されている.

$$q = \sqrt{2mE}a, \quad (4.7)$$

$$r = \sqrt{2m(E + U_0)}a, \quad (4.8)$$

$$s = \sqrt{2m(U/b - E)}a, \quad (4.9)$$

$$\tilde{s} = \sqrt{2m(E - U/b)}a, \quad (4.10)$$

$$G = 2maU, \quad (4.11)$$

$$G_0 = 2ma^2U_0, \quad (4.12)$$

$$u = b/a. \quad (4.13)$$

得られた spectral function から survival probability と decay rate を数値的に計算した結果が図 4.2 で

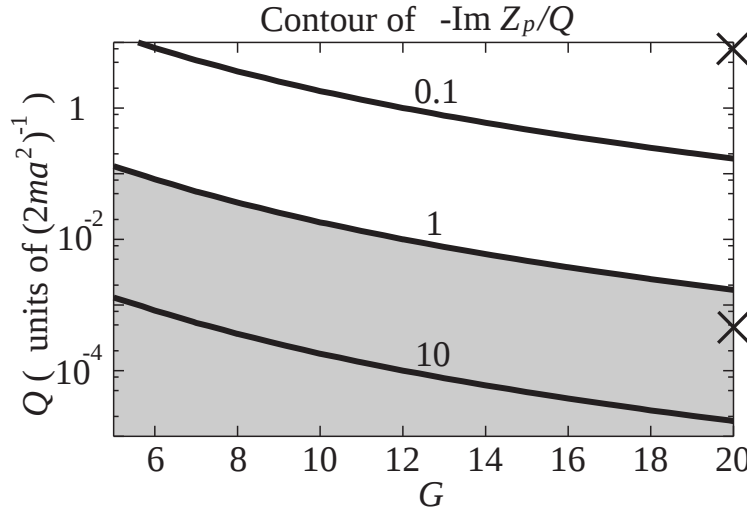


図 4.3: (G, Q) 平面で $\Im z_P/Q = 0.1, 1, 10$ となる点をプロットしたもの. 条件式を満たす領域は影をつけてあらわしてある. また図 4.2 で描かれた崩壊に対応する点は $\times$ 印で示してある.

ある. 左右両方のグラフにおいて, $G = 20, u = 10^{-4}$ であるが, G_0 は左のグラフでは $G_0 = 0$ (すなわち $Q = 8.97365(2ma^2)^{-1}$) に, 右のグラフでは $G_0 = 8.957335$ (すなわち $Q = 6.55445 \times 10^{-4}(2ma^2)^{-1}$) にとっている.

これらのグラフが指数関数則からずれているかどうかを知るには, decay rate を見るとわかりやすい. これは decay rate の定義式 (2.1) より, decay rate $\Gamma(t)$ は exponential decay が起こっている領域では定数となるためである. 実際に両方のグラフの decay rate の変化を見てみると, Q -value があまり小さい左のグラフでは decay rate がほぼ一定となっていることがわかる (ここで述べる Q -value の大小は非 exponential decay の条件式 (3.5) から判断されるものである. これについては次のパラグラフで議論する.). 左のグラフでも崩壊の初期において decay rate にぐらつきが見られるが, これは量子 Zeno 効果によるものだと考えられる. 一方 Q -value が小さい右のグラフを見てみると, 広い範囲で decay rate は明らかに一定値を取っていない. この指数関数則からのズレは $P(t)$ が e^{-1} となる時刻でもなお続いている. しかもその時の t の値は, 左の図で崩壊がほぼ終了している時刻の 10 倍以上である $t \sim 500(2ma^2)$ である. これは実験で観測しやすいということである.

また非 exponential decay の条件式 (3.5) から, 図 4.2 の崩壊を評価する. 今考えている箱型の系で, 条件式 (3.5) が満たされる領域を (G, Q) 平面でプロットしたものが図 4.3 である. G は (4.11) 式で定義されており, ポテンシャルの山の面積で決まり, 崩壊プロセスを特徴づける量である. u は $u = 10^{-4}$ で固定されている. 図 4.3 で条件を満たす領域 ($\Im z_P/Q \geq 1$) は影をつけて表している. また図 4.2 に対応する点は $\times$ 印で示されている. この印の位置から, 非 exponential decay の条件式が満たされていない崩壊は指数関数的になるが, 条件式が満たされている場合には非指数関数的になることがわかる. このことは同時に, 条件式 (3.5) の有効性を保証している.

SQS decay が起こるためには s-wave での崩壊も必要であった. これは spectral function の閾値近傍での振る舞いが, 非 exponential decay の条件を満たす上で重要であったためである. (4.4) 式から,

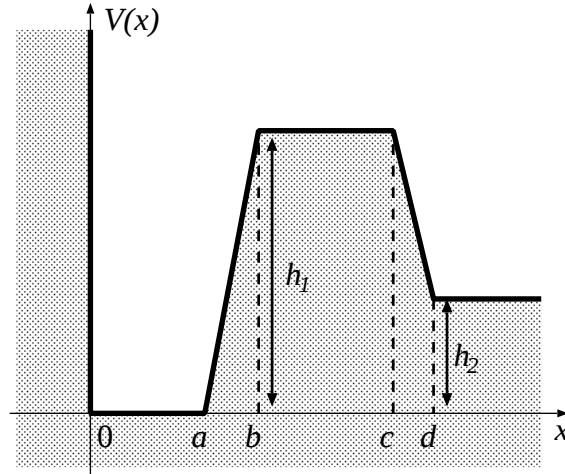


図 4.4: 台形型のポテンシャルを持った 1 次元系 . .

箱型ポテンシャルの場合での閾値近傍の振る舞いを調べると,

$$\rho(E_0) = \frac{Q^{1/2}}{4\pi m a^2 \alpha(0)}, \quad Q = E_0 - E_{th}, \quad (4.14)$$

となり, s-wave での崩壊の場合の振る舞い ($\rho \sim Q^{1/2}$) に一致している. これは系が小さな Q -value に対して SQS decay を起こす要因となっている.

ところで spectral function の閾値近傍での振る舞いがこのように得られるのは, 箱型ポテンシャルの場合の特殊な事例であるかもしれない. すなわち, 箱型ポテンシャルは, ポテンシャルが無限の傾きで立ち上がるという特異性を持つので, この特異性が spectral function に影響を与えている可能性がある. この振る舞いが箱型の特殊性によるものでないことを確認するために, より一般的な台形型のポテンシャルの場合で spectral function を計算する.

$$V = \begin{cases} \infty & x < 0, \\ 0 & 0 \leq x \leq a, \\ \frac{h_1(x-a)}{b-a} & a < x \leq b, \\ h_1 & b < x \leq c, \\ -\frac{(h_1-h_2)x-dh_1+ch_2}{d-c} & c < x \leq d, \\ h_2 & d < x. \end{cases} \quad (4.15)$$

このポテンシャルを描いたものが図 4.4 である. この系では箱型の場合とは違い, 有限な傾きでポテンシャルの山が作られている. したがって箱型の場合に問題となった特異性は無い. 箱型の時と同じように, ポテンシャルに閉じ込められた初期状態を用意する.

$$\psi_i(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \theta(-x+a) \theta(x). \quad (4.16)$$

付録 B で計算されているように, 台形型ポテンシャルの場合でも spectral function の閾値近傍での振る舞いは,

$$\rho(E) \propto Q^{1/2}, \quad Q = E - h_2, \quad (4.17)$$

となり, s-wave の場合のそれと一致する. したがって図 4.2 に描かれたような SCS decay は, 箱型ポテンシャルの特別な事例ではないことがわかる.

このようにポテンシャルの形を変えても同じ Q -value 依存性が得られることは, 次のように理解できる. まず 3 次元での球対称な崩壊を考える. これは s-wave での崩壊ということを意味する. よく知られているように, 3 次元での球対称な系での崩壊は必ず 1 次元での問題に書き直される. こうして 1 次元での崩壊プロセスは, s-wave でのプロセスと結び付けられ, 同じ Q -value 依存性を持つことになる.

第5章 SQS decay のまとめと素粒子物理学

この章では SQS decay の条件をまとめ、どのような系が SQS decay の観測に適しているかを考察する。これまで見てきたように、SQS decay の条件は

1. Q -value が十分に小さい
2. s-wave での崩壊

の2つである。ただし条件1の十分に小さいとは(3.5)式を満たすくらいに小さいという意味である。また条件2は、第4章の例のように spectral function の立ち上がり方が s-wave の場合と同じであれば良い。これらの条件を満たす場合にはその崩壊は非 exponential decay になる。

条件2を満たすプロセスとしては、不安定粒子の崩壊、放射性崩壊、それに第4章で扱ったトンネリング現象などがある。このように条件2を満たす状況は、そう珍しいものではない。したがって SQS decay を実際に観測しようとした場合には、条件1が問題となる。上に並べた s-wave のプロセスで Q -value が調整できるかを考えると、不安定粒子の崩壊や、放射性崩壊では Q -value の調整は不可能である。これは粒子崩壊では Q -value は自然によって決まっているためである。実際にこれまで SQS decay のような崩壊をする粒子は見つかっていない。それに対してトンネリング現象では、ポテンシャルを上手に作ることで Q -value の調節ができる。したがって SQS decay の観測ではトンネリング現象を使った実験が有望であると考えられる。

とはいえ不安定粒子の崩壊や放射性崩壊では SQS decay が起こらないというわけではない。もし条件1を満たすような小さい Q -value を持った崩壊をする粒子が存在するならば、その粒子の崩壊は非 exponential decay になる可能性がある。したがってそのような粒子の性質を研究する上では、第1章で述べたような非 exponential decay による効果に対しての考慮が必要となるであろう。

素粒子物理学で小さい Q -value が実現している可能性のあるプロセスに、MSSM での NLSP の LSP への崩壊がある [9]。なぜこのプロセスで小さな Q -value が実現している可能性があるかを、以下に説明する。よく知られているように、R パリティが保存されているならば LSP は安定な粒子となる。これは LSP が自分自身より軽い超対称粒子を持たないためである。このとき LSP は宇宙論から存在が指摘されているダークマターの有力な候補となる [16, 17]。現在の宇宙のダークマター残存量をうまく説明する方法に coannihilation というものがあるが [10]、coannihilation が起こるためには、NLSP と LSP の質量は数%かそれ以下まで縮退していなければならない。NLSP が LSP に崩壊する過程では、これらの粒子の質量差が Q -value となる。したがって coannihilation を仮定すると、NLSP の LSP への崩壊は小さな Q -value を実現する可能性がある。

この論文では NLSP として stau $\tilde{\tau}$ を、LSP として neutralino $\tilde{\chi}^0$ を考える。ここで stau は τ レプトンの superpartner であり、neutralino は、 $U(1)$, $SU(2)$ のゲージボソンの superpartner (Bino, Wino) および Higgs ボソンの superpartner (Higgsino) の線形結合である。また LSP neutralino として、特に

Bino-like な neutralino を考え, 計算では neutralino を Bino としておこなう.

LSP が gravitino であるシナリオもまた多くの研究がなされている [18, 19, 20]. しかし gravitino はスピン $3/2$ であるので, その崩壊は s-wave ではなく p-wave となる. したがって LSP が gravitino であった場合には SQS decay は起こらない.

stau ではなく top クォークの superpartner である stop が NLSP であるシナリオも多くの研究がなされている. stop はカラーを持つため単体では存在できず, 必ず 1 つもしくは複数のクォークを伴って meson-like フェルミオン もしくは baryon-like ボソンを作る. これらの質量を計算するのはほぼ不可能である.

これらの理由から, この論文では NLSP stau, LSP neutralino の場合にしばって考える. この先の章で, NLSP の LSP への崩壊の decay rate を計算し, この崩壊が SQS decay を起こす可能性について考えていく.

第6章 stau の崩壊プロセス

この章では NLSP stau の LSP neutralino への崩壊の decay rate を計算する。NLSP としての stau は質量の固有状態である。これは2つの相互作用の固有状態, すなわち右巻き tau: τ_R の superpartner である $\tilde{\tau}_R$ と, 左巻き tau : τ_L の superpartner である $\tilde{\tau}_L$, の線形結合である。

$$\tilde{\tau} = \cos \theta_\tau \tilde{\tau}_L + \sin \theta_\tau e^{-i\gamma_\tau} \tilde{\tau}_R. \quad (6.1)$$

ここで θ_τ は $\tilde{\tau}_L$ と $\tilde{\tau}_R$ の間の混合角で, γ_τ は CP violating phase である。

どのような崩壊モードが許されるかは, NLSP と LSP の質量差 $\delta m \equiv m_{\text{NLSP}} - m_{\text{LSP}}$ によって決まる。この論文では図 6.1 に示される4つの崩壊モードを考えるが, 実際にはこれらの他にもさまざまな崩壊モードが起こりうる。しかし図 6.1 のモードに比べて, それ以外のモードからの寄与は小さいために無視できる [21]。例えば $\delta m > 1.86 \text{ GeV}$ のときには D 中間子が生成されるプロセスも現れる (図 6.2(a))。しかし δm がこの領域にあるときには $\tilde{\tau} \rightarrow \tilde{\chi}^0 \tau$ も許されている。 $\tilde{\tau} \rightarrow \tilde{\chi}^0 \tau$ は D 中間子生成プロセスに比べて, D 中間子を生成するカップリングと, τ プロパゲーターの分だけ優勢である。したがって D 中間子生成のプロセスは無視できる。また3体崩壊 $\tilde{\tau} \rightarrow \tilde{\chi}^0 \nu_\tau \pi$ と4体崩壊 $\tilde{\tau} \rightarrow \tilde{\chi}^0 \mu \nu_\tau \nu_\mu$, $\tilde{\tau} \rightarrow \tilde{\chi}^0 e \nu_\tau \nu_e$ では, 終状態が同じでも中間状態に chargino $\tilde{\chi}^\pm$ が入るプロセス (図 6.2(b), (c)) がある。しかしこれらのプロセスも chargino プロパゲーターによって寄与が抑えられるので, 無視することができる。

いまは質量差が小さい場合 ($\delta m \ll m_W$) に興味があるので, W ボソンのプロパゲーターに現れる運動量は無視できる。こうして, 相互作用ラグランジアンは次式で与えられる。

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \tilde{\tau}^* \tilde{\chi}^0 (g_L P_L + g_R P_R) \tau + \frac{G_F}{\sqrt{2}} \nu_\tau \gamma_\mu P_L \tau J^\mu + \frac{4G_F}{\sqrt{2}} (\bar{l} \gamma^\mu P_L \nu_l) (\bar{\nu}_\tau \gamma_\mu P_L \tau) + h.c. . \quad (6.2)$$

(6.2) の第1項は stau が tau と neutralino に崩壊する相互作用を記述する。ここで P_L と P_R は射影演算子で, g_L と g_R は結合定数である。今は neutralino が Bino-like である場合を考えているので, これ

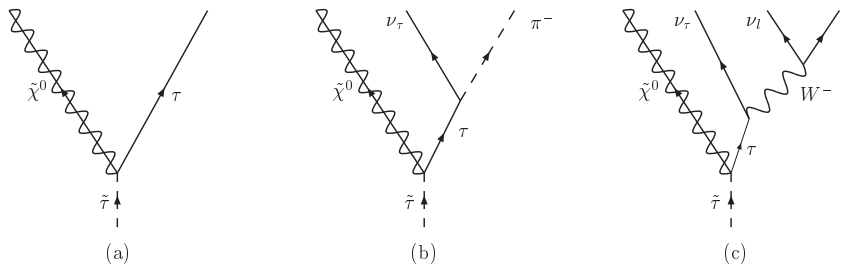


図 6.1: stau decay で実際に計算するダイアグラム. : (a) 2 体崩壊プロセス $\tilde{\tau} \rightarrow \tilde{\chi}^0 \tau$, (b) 3 体崩壊プロセス $\tilde{\tau} \rightarrow \tilde{\chi}^0 \nu_\tau \pi$, (c) 4 体崩壊プロセス $\tilde{\tau} \rightarrow \tilde{\chi}^0 l \nu_\tau \nu_l$. ただし 4 体崩壊プロセス中の l は e と μ をとる。

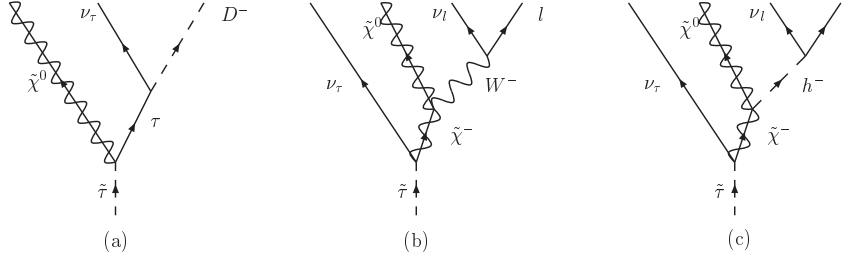


図 6.2: 起こりえるが無視できるダイアグラム: (a) D 中間子生成ダイアグラム, (b), (c) chargino $\tilde{\chi}^-$ が含まれるダイアグラム.

らの結合定数は次式で与えられる (付録 C).

$$g_L = \frac{g}{\sqrt{2} \cos \theta_w} \sin \theta_w \cos \theta_\tau, \quad g_R = \frac{\sqrt{2}g}{\cos \theta_w} \sin \theta_w \sin \theta_\tau e^{i\gamma_\tau}. \quad (6.3)$$

ただし g は weak coupling constant で θ_w は Weinberg angle である. (6.2) の第 2 項は tau の π 中間子と ν_τ への崩壊を, 第 3 項は tau の ν_τ, ν_l, l への崩壊をそれぞれ記述する. これらの項に現れる G_F は Fermi constant である.

次に (6.2) 式のラグランジアンを用いて図 6.1 に描かれている 3 つの崩壊プロセスの decay rate を計算する. この章では decay rate の近似的な結果のみを見る. decay rate の振る舞いを調べるには近似的な式の方が直観的な理解がしやすく便利である. 厳密な decay rate やその導出は付録 D に書いてある. ただしこの先におこなう数値計算ではすべて厳密な decay rate を使っている.

1. 2 体崩壊

$\delta m > m_\tau$ では図 6.1(a) の 2 体崩壊 $\tilde{\tau} \rightarrow \tilde{\chi}^0 \tau$ が運動学的に許される. 次の第 7 章でも見るように, この δm の領域では 2 体崩壊のプロセスが支配的になる. このプロセスの decay rate の近似式は

$$\Gamma_{2\text{-body}} = \frac{1}{4\pi m_{\tilde{\chi}^0}} \sqrt{(\delta m)^2 - m_\tau^2} \left((g_L^2 + |g_R|^2) \delta m - 2\text{Re}[g_L g_R] m_\tau \right). \quad (6.4)$$

ここで $m_{\tilde{\chi}^0}, m_\tau$ はそれぞれ $\tilde{\chi}^0, \tau$ の質量である.

2. 3 体崩壊

$\delta m > m_\pi$ では 3 体崩壊 $\tilde{\tau} \rightarrow \tilde{\chi}^0 \nu_\tau \pi$ (図 6.1(b)) が起こる. このプロセスは $m_\tau > \delta m > m_\pi$ の領域で支配的になる. 近似的な decay rate は

$$\Gamma_{3\text{-body}} = \frac{G_F^2 f_\pi^2 \cos^2 \theta_c}{210(2\pi)^3 m_{\tilde{\chi}^0} m_\tau^4} \left((\delta m)^2 - m_\pi^2 \right)^{5/2} \times \left[g_L^2 \delta m (4(\delta m)^2 + 3m_\pi^2) - 2\text{Re}[g_L g_R] m_\tau (4(\delta m)^2 + 3m_\pi^2) + 7|g_R|^2 m_\tau^2 \delta m \right]. \quad (6.5)$$

ここで f_π は π 中間子の崩壊定数で, θ_c は Cabbibo angle, m_π は π 中間子の質量である.

3. 4 体崩壊

$\delta m < m_\pi$ では, π 中間子も作れなくなるので, 運動学的に許されるものは図 6.1(c) の 4 体崩壊 $\tilde{\tau} \rightarrow \tilde{\chi}^0 l \nu_\tau \nu_l$ のみである. ここで l は μ と e をとる. 4 体崩壊の decay rate の近似式は次のようになる.

$$\begin{aligned} \Gamma_{4\text{-body}} = & \frac{G_F^2}{945(2\pi)^5 m_{\tilde{\chi}^0} m_\tau^4} ((\delta m)^2 - m_l^2)^{5/2} \\ & \times \left[2g_L^2 (\delta m)^3 (2(\delta m)^2 - 19m_l^2) - 4\text{Re}[g_L g_R] m_\tau (\delta m)^2 (2(\delta m)^2 - 19m_l^2) \right. \\ & \left. + 3|g_R|^2 m_\tau^2 \delta m (2(\delta m)^2 - 23m_l^2) \right]. \end{aligned} \quad (6.6)$$

また m_l は e もしくは μ の質量である.

第7章 stau decay rateのパラメーター依存性

先の章で求めた decay rate は δm , θ_τ , $m_{\tilde{\chi}^0}$, γ_τ に依存する。これは (6.4), (6.5), (6.6) 式からもわかる。そこでこの章では、これらのパラメーターを変えた時に decay rate がどのような値をとるかを、数値計算をとおして見てみる。ただしここで用いる decay rate は近似式ではなく、付録 D で計算されている厳密な decay rate である。

7.1 $m_{\tilde{\chi}^0}$

LSP:neutralino の質量は宇宙論によって制限される。coannihilation process が起こっているとしたとき、宇宙論的に許される LSP:neutralino の質量の範囲は、

$$200 \text{ GeV} \leq m_{\tilde{\chi}^0} \leq 600 \text{ GeV} \quad (7.1)$$

となる [22]。この範囲の $m_{\tilde{\chi}^0}$ について、decay rate の $m_{\tilde{\chi}^0}$ 依存性を描いたグラフが図 7.1 である。図 7.1(a), (b), (c) はそれぞれ $\delta m = 0.01\text{GeV}$, $\delta m = 0.5\text{GeV}$, $\delta m = 2.0\text{GeV}$ の場合で、いずれの図でも θ_τ , γ_τ はそれぞれ $\theta_\tau = \pi/3$, $\gamma_\tau = 0$ にとっている。ここで δm が 0.01GeV , 0.5GeV , 2.0GeV の場合で計算した理由は、それぞれ 2 体崩壊, 3 体崩壊, 4 体崩壊が支配的になる質量差であるからである。

これらのグラフはどれも $m_{\tilde{\chi}^0}$ にほぼ反比例している。これは decay rate の近似式 (6.4), (6.5), (6.6) からも明らかである。宇宙論から許される $m_{\tilde{\chi}^0}$ の範囲が 3 倍の違いまでなので、 $m_{\tilde{\chi}^0}$ を変えても decay rate のオーダーを変えるような寄与はしない。したがって以後の議論では $m_{\tilde{\chi}^0} = 300\text{GeV}$ で統一する。

7.2 γ_τ

decay rate は CP violating phase γ_τ にも依存する。この γ_τ への依存性を見るために、 $\delta m = 0.01\text{GeV}$, $\delta m = 0.5\text{GeV}$, $\delta m = 2.0\text{GeV}$ の 3 つの場合について decay rate の γ_τ 依存性を描いたものが図 7.2 である。ただしいずれの δm の場合でも、 $m_{\tilde{\chi}^0} = 300\text{GeV}$, $\theta_\tau = \pi/3$ でとっている。図 7.2 から、いずれの δm に対しても、decay rate は γ_τ には強く依存しないことがわかる。最も強く依存するのは $\delta m = 2.0\text{GeV}$ の場合であるが、それでも 3 倍程度であり、オーダーを変える寄与はしていない。

このことは (6.4), (6.5), (6.6) 式の形からも理解することができる。これらの式を見ると、 γ_τ は $\text{Re}[g_L g_R]$ の項にしか現れていないことがわかる。(6.5) 式, (6.6) 式においては、 $\text{Re}[g_L g_R]$ の項の係数は、 $|g_R|^2$ の項の係数を $\delta m/m_\tau$ 倍したくらいの量である。これら 3 体, 4 体崩壊の式からの寄与が支配的になる領域では $\delta m < m_\tau$ なので、 $|g_R|^2$ の項からの寄与が支配的になり、 $\text{Re}[g_L g_R]$ の項からの寄与はあまり効かない。したがって γ_τ への依存性は小さいものになる。一方 (6.4) 式では、 $\text{Re}[g_L g_R]$ の項の係数は g_L^2 , $|g_R|^2$ の項の係数を $m_\tau/\delta m$ 倍したくらいの大きさである。2 体崩壊が起こる領域では

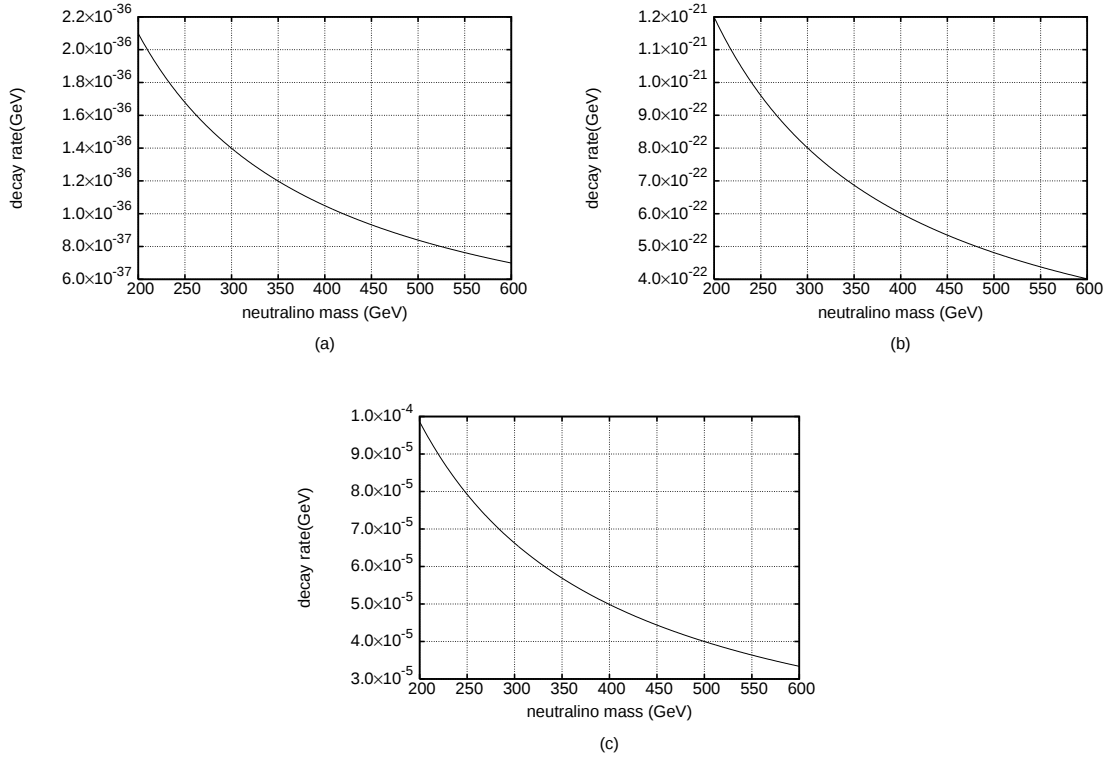


図 7.1: decay rate の neutralino 質量依存性. (a), (b), (c) はそれぞれ $\delta m = 0.01\text{GeV}$, $\delta m = 0.5\text{GeV}$, $\delta m = 2.0\text{GeV}$ の場合について描かれている. ただし $\theta_\tau = \pi/3$, $\gamma_\tau = 0$.

$\delta m > m_\tau$ なので, 3 体, 4 体と同じく 2 体の場合にも $Re[g_L g_R]$ の項からの寄与はあまり効かない. こうして式の形からも decay rate が γ_τ には強く依存しないことがわかる. 以後の議論では $\gamma_\tau = 0$ で統一する.

7.3 θ_τ

次に decay rate の θ_τ 依存性を見てみる. 図 7.3 に $\delta m = 0.01\text{GeV}$, $\delta m = 0.5\text{GeV}$, $\delta m = 2.0\text{GeV}$ の 3 つの場合について decay rate の θ_τ 依存性を描いている. ただしいずれのグラフでも $m_{\tilde{\chi}^0} = 300\text{GeV}$, $\gamma_\tau = 0$ としてある. これらのグラフから, decay rate は θ_τ に強く依存し, 特に δm が小さくなるとその依存性が強くなることがわかる. また図 7.3(a), (b) から, 3 体崩壊が 4 体崩壊が支配的なときには $\tilde{\tau}_R$ が $\tilde{\tau}_L$ よりもはるかに早く崩壊するということが読み取れる.

この理由は次のように理解できる. まず, τ_L のみが ν_τ を生成できるということがある. したがって ν_τ を生成する相互作用点で τ_L となっていないなければ崩壊プロセスに寄与できない. 相互作用点で τ_L となるには, $\tilde{\tau}_R$ からはじまったプロセスでは τ のプロパゲーターの中で質量部分 m_τ を拾うことになる. 他方 $\tilde{\tau}_L$ からはじまったプロセスでは τ のプロパゲーターの中で運動量部分 $\not{p}_\tau$ を拾う. $\not{p}_\tau$ はだいたい δm くらいの大きさの量 ($p_\tau \sim \delta m$) であるので, δm が小さい領域では $\tilde{\tau}_R$ からの寄与は $\tilde{\tau}_L$ よりも

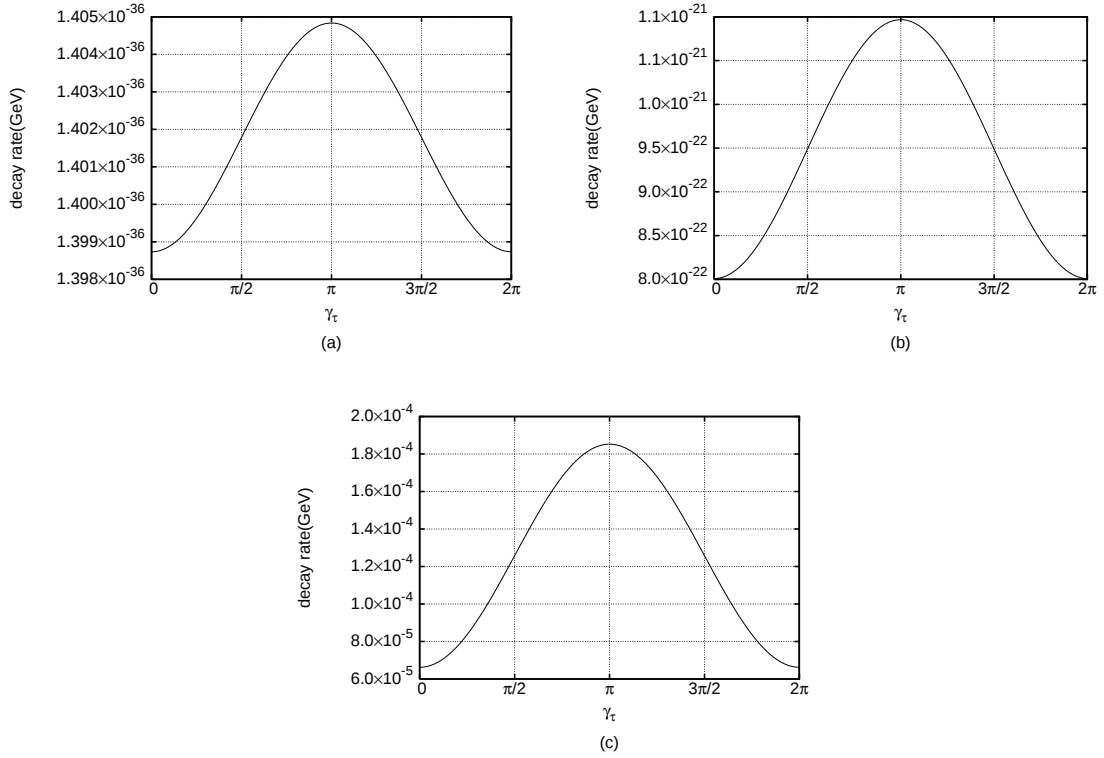


図 7.2: decay rate の CP violating factor 依存性. δm は (a), (b), (c) でそれぞれ 0.01 GeV, 0.5 GeV, 2.0 GeV で, $m_{\tilde{\chi}^0} = 300 \text{ GeV}$, $\theta_\tau = \pi/3$.

大きくなる. この差は δm が小さいほど大きい. こうして decay rate は θ_τ に強く依存することになる.

しかし δm が大きくなってくると, decay rate のピークは $\theta_\tau = \pi/2$ からずれてくる. これは $\tilde{\tau}_L$ から始まるプロセスと $\tilde{\tau}_R$ から始まるプロセスが重なり合うためである. 言い換えると $Re[g_L g_R]$ の項が現れるためである. このためピークのずれは, $Re[g_L g_R]$ の項の係数と $|g_R|^2$ の項の係数の大きさが近いほど大きくなる. 2 つの係数は $\delta m/m_\tau$ くらい違うので, δm が m_τ に近づくほど 2 つの係数の大きさは近くなる. こうして δm と共にピークのずれも大きくなることが説明できる.

7.4 δm

最後に decay rate の δm 依存性について考えてみる. coannihilation が起きるとするなら $\delta m/m_{\tilde{\chi}^0}$ は数%かそれよりも小さいはずである [10]. 先に述べたように $m_{\tilde{\chi}^0}$ は数 100 GeV なので, δm は数 GeV がそれより小さくなる. この δm の領域での, total decay rate と各プロセスごとの decay rate の δm 依存性を図 7.4 に描いた. ここでは $m_{\tilde{\chi}^0} = 300 \text{ GeV}$, $\theta_\tau = \pi/3$, $\gamma_\tau = 0$ にそれぞれとっている.

この図 7.4 からどの崩壊モードが支配的かが読み取れる. δm が m_τ よりも小さくなると decay rate は急激に小さくなる. これは $\delta m < m_\tau$ では 2 体崩壊が運動学的に禁止されるためである. したがって支配的なプロセスも, $\delta m > m_\tau$ では 2 体崩壊だったものが, $\delta m < m_\tau$ では π 中間子が生成される 3 体

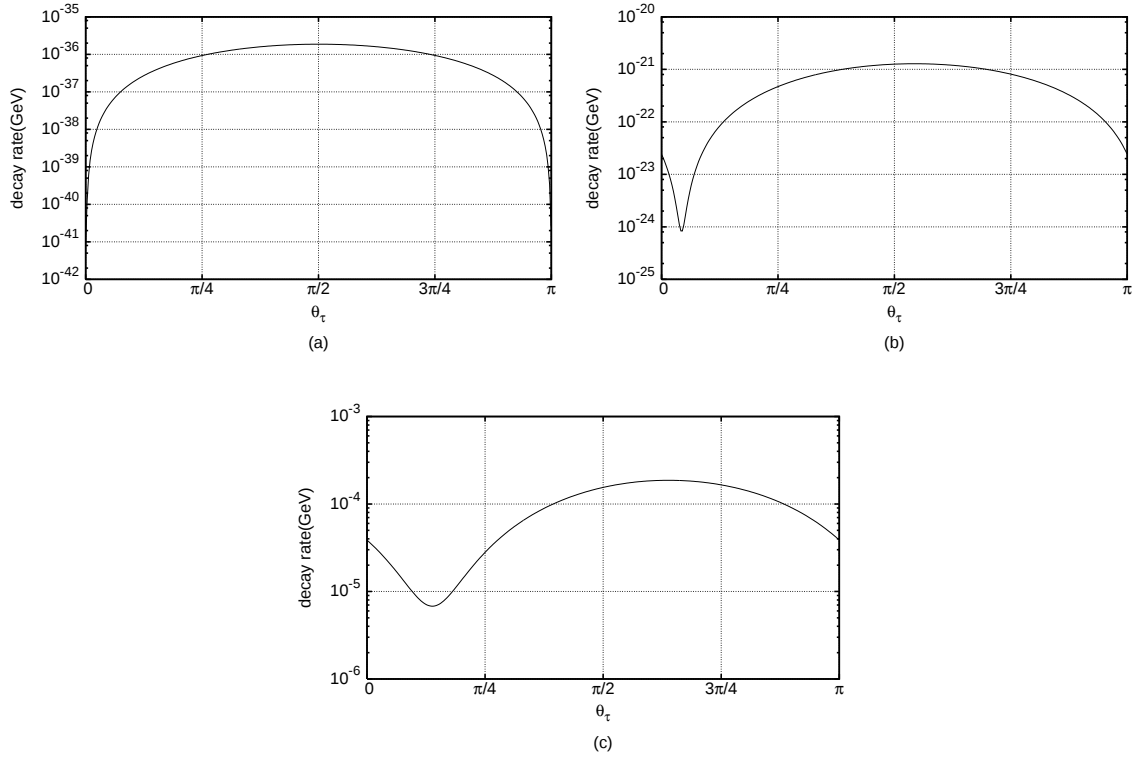


図 7.3: decay rate の stau の混合角依存性. (a), (b), (c) はそれぞれ $\delta m = 0.01\text{GeV}$, $\delta m = 0.5\text{GeV}$, $\delta m = 2.0\text{GeV}$ の場合について描かれている. ただし $m_{\tilde{\chi}^0} = 300\text{GeV}$, $\gamma_\tau = 0$.

崩壊になる. 同じように δm が m_π よりも小さくなると decay rate が小さくなる. これは π 中間子生成が運動学的に禁止されたために, 支配的なプロセスが 3 体崩壊から 4 体崩壊に移ったからである. しかし δm が m_μ よりも小さくなったときには, decay rate はほとんど変化しない. これは π 中間子と μ の質量が近いため, π 中間子が作られなくなった時にはすでに μ 生成からの寄与も減衰しているためである.

次に, decay rate の δm に対する振る舞いをより直観的, 定量的に理解するために, また非 exponential decay の条件式 (3.5) を評価するために, decay rate が δm の何乗になるかを調べてみる. ここでは一般的に, stau が neutralino と $n - 1$ 個の massless の粒子に崩壊したと考える. このときの δm の次数は, 位相空間と, 振幅の二乗の 2 つの要素から決定される [21].

始めに位相空間が δm の次数をどのように与えるかを見る. 2 体崩壊の場合には, 位相空間は次のように与えられる.

$$d\phi^{(2)} = \frac{d\Omega}{32\pi^2} \left(1 - \left(\frac{m_{\tilde{\chi}^0}}{m_{\tilde{\chi}^0} + \delta m} \right)^2 \right) \propto \delta m. \quad (7.2)$$

$d\phi^{(n)}$ と $d\phi^{(n-1)}$ の間の関係が,

$$d\phi^{(n)} \propto d\phi^{(n-1)} \times \int^{\delta m} d\mu(d\phi^{(2)}), \quad (7.3)$$

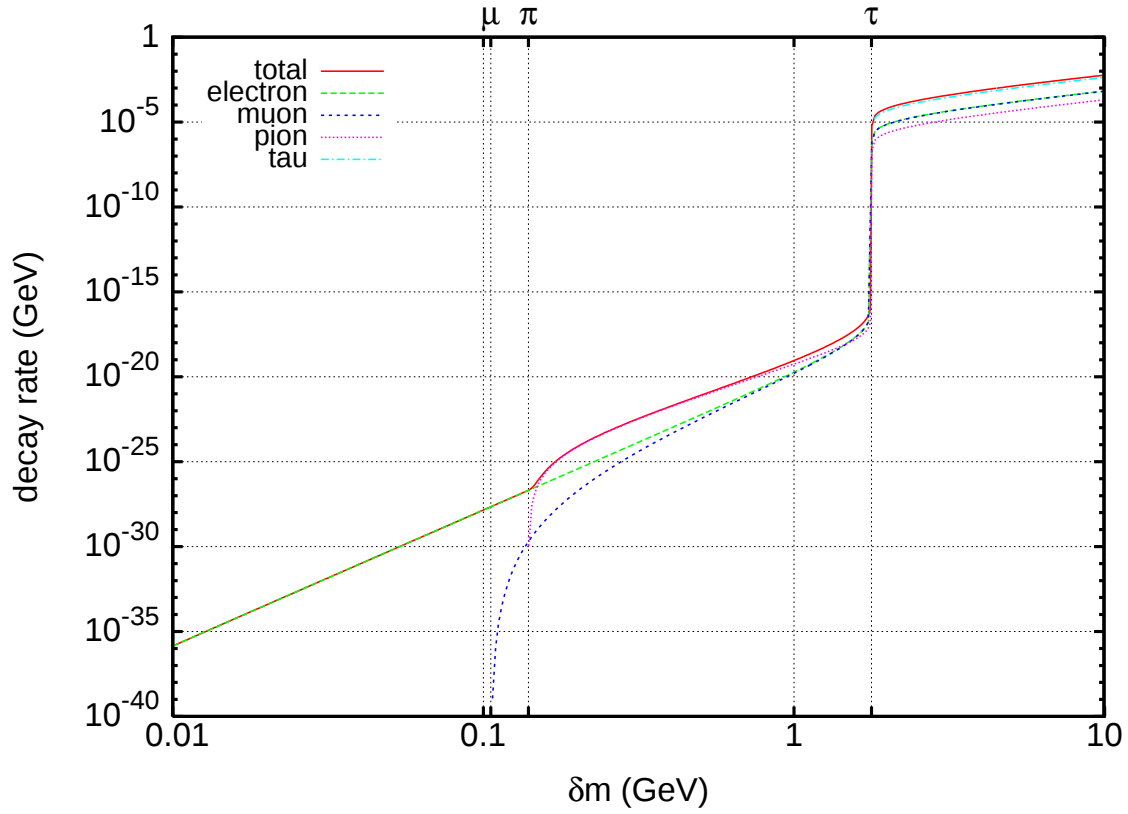


図 7.4: total decay rate と 各崩壊モードごとの decay rate の δm 依存性. electron, muon, pion, tau と名づけられた線はそれぞれ $\tilde{\tau} \rightarrow \tilde{\chi}^0 e \nu_\tau \nu_e$, $\tilde{\tau} \rightarrow \tilde{\chi}^0 \mu \nu_\tau \nu_\mu$, $\tilde{\tau} \rightarrow \tilde{\chi}^0 \nu_\tau \pi$, $\tilde{\tau} \rightarrow \tilde{\chi}^0 \tau$ のプロセスに対応する. ただし $m_{\tilde{\chi}^0} = 300$ GeV, $\theta_\tau = \pi/3$, $\gamma_\tau = 0$ にとられている

で与えられるので, これを繰り返し代入していくことによって, n 体崩壊の位相空間は,

$$d\phi^{(n)} \propto (\delta m)^{2(n-2)+1}, \quad (7.4)$$

で与えられる.

次に振幅の二乗が δm の次数をどのように与えるかを見る. もし $n-1$ 個の粒子が全てフェルミオンならば, 振幅の二乗は massless フェルミオンの運動量に比例するため, 次のような δm 依存性を持つ.

$$\mathcal{M}^{(n)} \propto (\delta m)^{n-1}. \quad (7.5)$$

こうして全ての終状態粒子がフェルミオンの時には, decay rate の δm 依存性は次のようになることがわかる.

$$\Gamma^{(n)} \propto \mathcal{M}^{(n)} \times d\phi^{(n)} \propto (\delta m)^{3n-4}. \quad (7.6)$$

他方, もし終状態粒子のうちの 1 つが π 中間子 (NG-boson) ならば, 振幅の二乗の δm 依存性は次のように書き換えられる.

$$\mathcal{M}^{(n)} \propto (\delta m)^n. \quad (7.7)$$

これは π 中間子生成の振幅が π 中間子の運動量の 1 次比例するためである. これはすなわち, π 中間子生成の振幅の二乗は, π 中間子の運動量の二乗に比例するというのである. こうして, 終状態に

1 つの π 中間子が含まれる場合の decay rate の δm 依存性は次のように与えられる.

$$\Gamma^{(n)} \propto (\delta m)^{3(n-1)} . \quad (7.8)$$

(6.4), (6.5), (6.6) 式で計算している結果について終状態粒子が massless の極限を考えると, それぞれの場合の δm 依存性は,

$$\begin{aligned} \Gamma_{2\text{-body}} &\propto (\delta m)^2 , \\ \Gamma_{3\text{-body}} &\propto (\delta m)^6 , \\ \Gamma_{4\text{-body}} &\propto (\delta m)^8 , \end{aligned} \quad (7.9)$$

となり, これは (7.6) 式, (7.8) 式の結果に一致している.

終状態粒子の質量を無視しない場合には, それぞれの場合での decay rate の δm 依存性は次のように与えられる.

$$\begin{aligned} \Gamma_{2\text{-body}} &\propto (\delta m) \left((\delta m)^2 - m_\tau^2 \right)^{1/2} , \\ \Gamma_{3\text{-body}} &\propto (\delta m) \left((\delta m)^2 - m_\pi^2 \right)^{5/2} , \\ \Gamma_{4\text{-body}} &\propto (\delta m)^3 \left((\delta m)^2 - m_l^2 \right)^{5/2} . \end{aligned} \quad (7.10)$$

これらの式は stau の decayrate の δm 依存性をよく記述している.

第8章 stau decay rateの評価

この章では、第6, 7章に導いた stau 崩壊の decay rate を元に、stau 崩壊で SQS decay が現れる可能性を調べる。stau 崩壊の場合 Q -value はほぼ δm に等しいため、非 exponential decay の条件式 (3.6) は次式となる。

$$\frac{\Gamma}{\delta m} \geq 1. \quad (8.1)$$

stau 崩壊の decay rate がこの条件式を満たすかを考えていく。

求めた decay rate から $\Gamma/\delta m$ を求め、 δm についてプロットしたものが図 8.1 である。図 8.1 では混合角 θ_τ について、 $\theta_\tau = 0$ (点線)、 $\theta_\tau = \pi/3$ (実線)、 $\theta_\tau = \pi/2$ (破線) の3つの場合について描かれており、すべての場合で $m_{\tilde{\chi}^0} = 300\text{GeV}$, $\gamma_\tau = 0$ である。ここで $\theta_\tau = \pi/3$ は第7章で描いた図で使われていた値であり、 $\theta_\tau = 0$, $\theta_\tau = \pi/2$ は δm が小さいときに decay rate をそれぞれ最小、最大にする値である。このグラフから、 δm が小さくなると $\Gamma/\delta m$ も小さくなることがわかる。またその傾きは4体崩壊が支配的になっている領域では大きく、2体崩壊が支配的になっている領域では小さい。

これは (7.10) 式から理解できる。7.4 節で見たように、終状態粒子の数が増えると、位相空間、振幅の二乗の両方で δm のべきが大きくなる。したがって $\Gamma/\delta m$ は2体、3体、4体のそれぞれの decay rate に対して

$$(\Gamma/\delta m)_{2\text{-body}} \propto ((\delta m)^2 - m_\tau^2)^{1/2}, \quad (8.2)$$

$$(\Gamma/\delta m)_{3\text{-body}} \propto ((\delta m)^2 - m_\pi^2)^{5/2}, \quad (8.3)$$

$$(\Gamma/\delta m)_{4\text{-body}} \propto (\delta m)^2 ((\delta m)^2 - m_t^2)^{5/2}, \quad (8.4)$$

となり、図 8.1 の振る舞いが説明される。

7.3 節で見たように、 θ_τ が $\pi/2$ 付近になると小さい δm に対して decay rate は最大になる。このことは図 8.1 にも現れている。しかしこの場合でも $\Gamma/\delta m$ はなお δm の全領域にわたって1よりもはるかに小さく、非 exponential decay の条件 (8.1) を満たしていない。こうして stau 崩壊はナープには非 exponential decay の条件を満たさないことがわかった。

lepton flavor violation (LFV) が起こっていた場合には状況が少し変わってくる。LFV は NLSP が純粋な stau ではなく、slepton の線形結合であった場合に起こる。もし $\tau \rightarrow e\gamma$ の LFV プロセスが観測されたなら、NLSP は次のような selectron $\tilde{e}$ との線形結合であるはずである。

$$\phi_{\text{NLSP}} = N_1 \tilde{e} + \sqrt{1 - N_1^2} \tilde{\tau}. \quad (8.5)$$

$\tau \rightarrow e\gamma$ の branching ratio はだいたい N_1^2 に比例する。現在、この branching ratio の上限値は $< \mathcal{O}(10^{-7})$ なので、少なくとも $N_1 < 0.1$ である。 $N_1 \neq 0$ であるかぎり、

$$\phi_{\text{NLSP}} \rightarrow \tilde{\chi}^0 + e \quad (8.6)$$

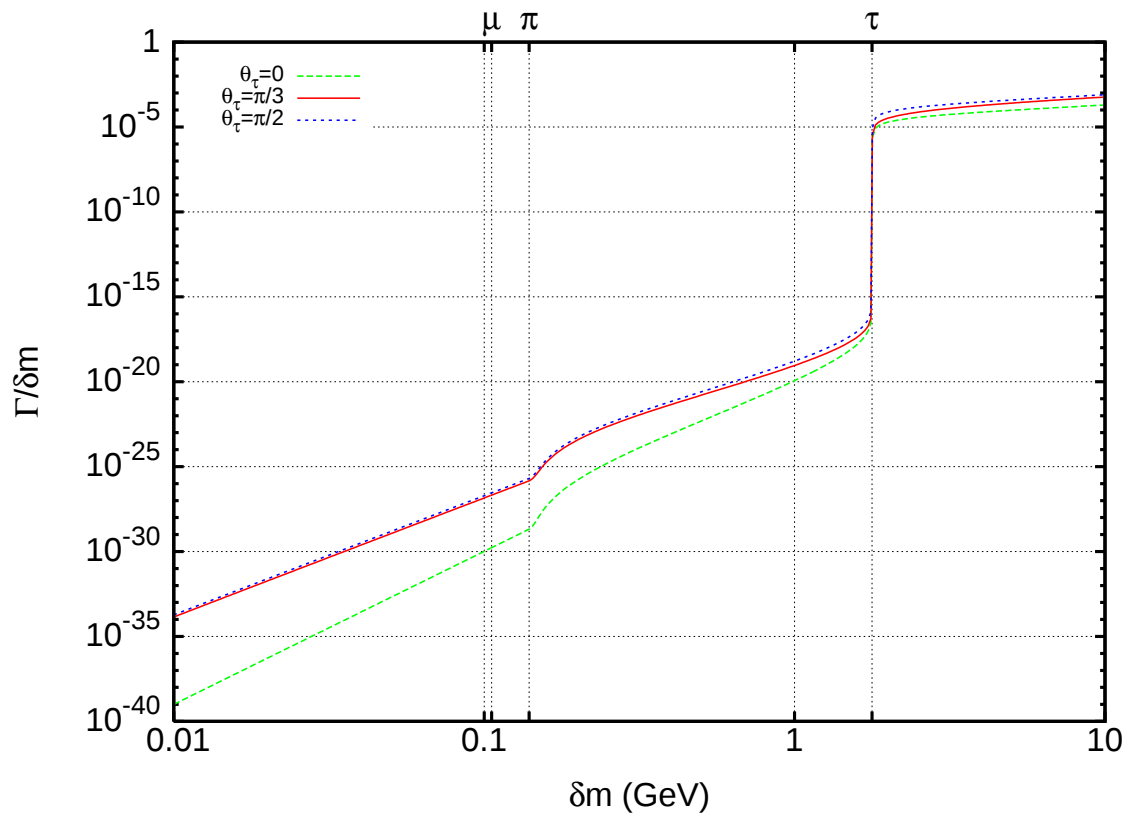


図 8.1: $\Gamma/\delta m$ の δm 依存性. 点線は $\theta_\tau = 0$ の場合, 実線は $\theta_\tau = \pi/3$ の場合, 破線は $\theta_\tau = \pi/2$ の場合である. ただしいずれの場合でも $m_{\tilde{\chi}^0} = 300\text{GeV}$, $\gamma_\tau = 0$.

というプロセスが起こりうる。このプロセスの decay rate を計算すると、

$$\Gamma_{\text{LFV}} = \frac{1}{16\pi m_{\tilde{\tau}}^3} (m_{\tilde{\tau}}^4 + m_{\tilde{\chi}^0}^4 + m_e^4 - 2m_{\tilde{\tau}}^2 m_{\tilde{\chi}^0}^2 - 2m_{\tilde{\tau}}^2 m_e^2 - 2m_{\tilde{\chi}^0}^2 m_e^2)^{\frac{1}{2}} \times \left\{ (g_L^2 + |g_R|^2)(m_{\tilde{\tau}}^2 - m_{\tilde{\chi}^0}^2 - m_e^2) - 4\text{Re}[g_L g_R] m_e m_{\tilde{\chi}^0} \right\} N_1^2 \quad (8.7)$$

となる。第 6 章の decay rate を導くのに付録 D で使った近似 ($\delta m/m_{\tilde{\chi}}$ の最低次以外を無視する) をすると

$$\Gamma_{\text{LFV}} = \frac{1}{4\pi m_{\tilde{\chi}^0}} \sqrt{(\delta m)^2 - m_e^2} ((g_L^2 + |g_R|^2)\delta m - 2\text{Re}[g_L g_R] m_e) N_1^2. \quad (8.8)$$

LFV があった場合での $\Gamma/\delta m$ の δm 依存性を描いたグラフが図 8.2 である。この図では total decay rate, $\phi_{\text{NLSP}} \rightarrow \tilde{\chi}^0 e$ の decay rate (8.7), および図 6.1 に描かれた 4 つのプロセスの decay rate の合計が描かれており、それぞれ total, LFV process, other processes と名づけられた線で示されている。ここで図 (a), (b), (c) はそれぞれ $\theta_\tau = 0, \pi/3, \pi/2$ の場合に対応しており、また他のパラメーターはそれぞれ $m_{\tilde{\chi}^0} = 300\text{GeV}$, $\gamma_\tau = 0$, $N_1 = 0.1$ としてある。

これらのグラフを見ると、LFV があった場合でも $\delta m > m_\tau$ の領域では LFV が無い場合と同じ δm 依存性を持つことがわかる。これは $\delta m > m_\tau$ では $\phi_{\text{NLSP}} \rightarrow \tilde{\chi}^0 \tau$ が、 N_1^2 で抑えられている $\phi_{\text{NLSP}} \rightarrow \tilde{\chi}^0 e$ よりも優勢となるためである。しかし $\delta m < m_\tau$ では、decay rate は LFV が無い場合よりもはるかに大きくなる。これは θ_τ には関係なく起こっている。とはいえ $\Gamma/\delta m$ の大きさはなお $< 10^{-3}$ であり、非 exponential decay の条件式 (8.1) を満たすものではない。

これはグラフが $\delta m \sim m_\tau$ 付近を除いて $(\Gamma/\delta m) \propto \delta m$ となっていることによる。そこで LFV があった場合の decay rate の δm 依存性がこのようになる理由を考えてみる。 $\phi_{\text{NLSP}} \rightarrow \tilde{\chi}^0 e$ の decay rate は (8.7), (8.8) 式に与えられているが、これは終状態レプトンの質量の違いを除いて $\tilde{\tau} \rightarrow \tilde{\chi}^0 \tau$ の decay rate ((D.4), (6.4) 式) と同じである。したがって両方の decay rate の δm 依存性も同じである。また崩壊で支配的なモードは $\delta m < m_\tau$ では $\tilde{\tau} \rightarrow \tilde{\chi}^0 \tau$ であり、 $\delta m < m_\tau$ では LFV があった場合には $\tilde{\tau} \rightarrow \tilde{\chi}^0 e$ である。したがって全ての δm の領域で、decay rate の δm 依存性は $\Gamma \propto (\delta m)^2$ となり、 $(\Gamma/\delta m) \propto \delta m$ となる。

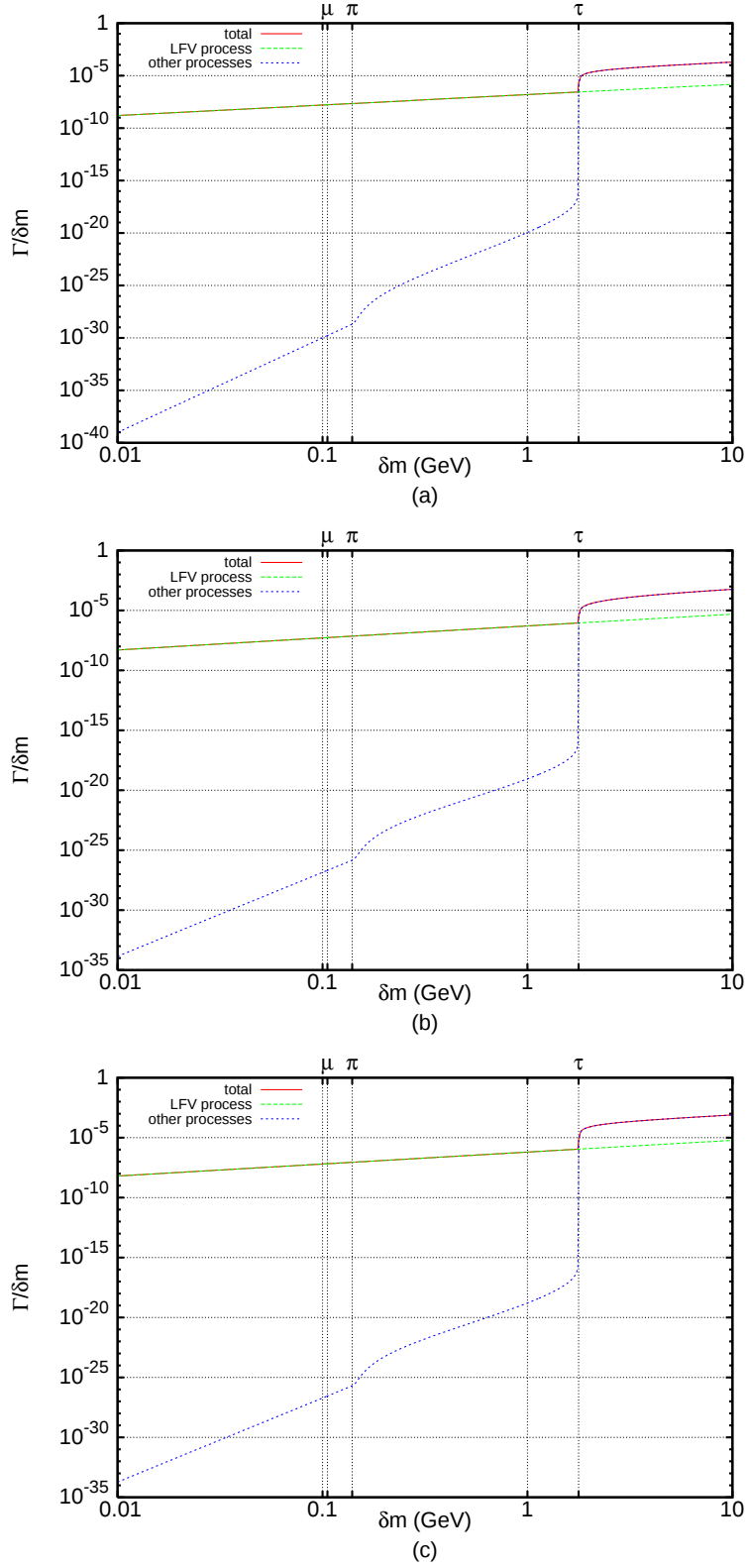


図 8.2: LFV があった場合の $\Gamma/\delta m$ の δm 依存性を, total decay rate (total), $\tilde{\tau} \rightarrow \tilde{\chi}^0 e$ の decay rate (LFV process), 図 6.1 に描かれた 4 つのプロセスの decay rate の合計 (other processes) のそれぞれについて描いたグラフ . (a), (b), (c) はそれぞれ $\theta_\tau = 0, \pi/3, \pi/2$ の場合に対応し, いずれの図でも $m_{\tilde{\chi}^0} = 300\text{GeV}$, $\gamma_\tau = 0$, $N_1 = 0.1$.

第9章 stau崩壊のまとめと展望

これまでの議論で, stau が neutralino に崩壊するプロセスでは非 exponential decay の条件式 (3.5) はタイプには満たされないことがわかった. しかしこれで stau decay での SQS decay の観測が不可能となったわけではない. これまで見てきた計算はすべて系が外界との相互作用を持たないことを前提にしていた. 実際の実験では stau は neutralino に崩壊する前に外界と相互作用をするはずである. このように外界と相互作用がある場合には, 相互作用により始状態が複雑になるために decay rate が大きくなることもある. こうして相互作用がない場合には満たされなかった非 exponential decay の条件 (3.5) が, 外界との相互作用を考慮することによって満たされる可能性がある. この効果を使って decay rate を大きくし非 exponential decay を観測する実験が Rothe らによっておこなわれている [23]. この実験については現在投稿準備中とのことなのでここに詳しく書くことはできないが, ある物理系を外部との相互作用がある環境におくことで非 exponential decay を観測している. この論文の最後に, この先の研究の展望として, stau 崩壊を観測する実験で実際に起こりうる外部環境について触れておく. そのような外部環境の中で stau がどのような相互作用をするかを調べることは, 将来の課題である.

stau は Large Hadron Collider (LHC) や Linear Collider (LC) などの高エネルギーの加速器で生成される. このような実験装置から生成された stau は大きな運動エネルギーを持つと考えられる. そのため崩壊を観測するには, 何らかの方法で stau を止めなければならない. ここで stau は電荷を持つので, 物質を通過するときに周囲をイオン化させてエネルギーを失う. したがって大質量の物質 (ストッパー) を加速器のディテクター付近に用意すれば stau を止め, さらに集めることができる [19, 20]. これらのことから, 実際の実験で使われる可能性の高い外部環境は大質量のストッパーである. ここでは浜口氏らによって提案されているストッパーを紹介する [19].

浜口氏らの提案しているストッパーは Soudan2 という, 陽子崩壊探索にすでに使われている実験装置である (図 9.1) [24]. この装置は $2.7\text{m} \times 1\text{m} \times 1\text{m}$ のモジュールが 224 個集まって構成されている. 各モジュールは 15,120 個のドリフトチューブからなり, これらのチューブの間にはスチールが入っている. このスチールは陽子崩壊探索では陽子のソースとなるが, いま考えている実験では stau を止めるストッパーとして使える. 1つのモジュールの重量はおよそ 4.3ton で, 全体でおよそ 0.96kton となる. このように大きな質量を持つため, Soudan2 を使って stau を集められる可能性がある. またこの装置は $0.18\text{cm} \times 0.18\text{cm} \times 1\text{cm}$ という軌跡分解能を持つ. これは生成された stau の止まった場所を区別するには十分な精度であり, この装置の大きな特徴である.

この軌跡分解能は SQS decay 観測には大きな武器となる. これは以下の理由による. この軌跡分解能から stau の止まった場所がわかるが, このとき同時に止まった時刻もわかる. ところで stau が崩壊して出てくる粒子には必ず荷電粒子が含まれている. したがって stau の止まった点から荷電粒子が飛び出してくるプロセスを観測すれば, 個々の stau についての崩壊した時刻がわかる. これは個々の stau に対して寿命が測定できるということである. この精度の良い寿命測定は SQS decay を見つける



図 9.1: Soudan2 を構成するモジュールの 1 つ.

上で良い道具となるだろう. なお stau を集める装置については Feng らによって提案されている, 水のタンクを使ったものもある [20]. 水を使った実験にはストッパーの形状を自由に変えられるというメリットはあるが, 個々の stau の寿命は測定できないので SQS decay には向かないだろう.

第10章 まとめ

この論文では、まず前半で不安定な量子系を一般的に調べることで、SQS decay が起こる条件を定量的に導いた。その条件は、1), 非常に小さな Q -value を持つこと、2), 崩壊が s-wave で起こること、の2つであった。ただし条件1は、具体的には非 exponential decay の条件式 (3.5) で与えられる。さらに SQS decay の全時間領域で指数関数則からずれるという特徴を、具体的な例を調べることによって確かめた。

SQS decay の条件はシンプルなもののなので、さまざまな物理系で起こる可能性がある。そこで後半では、素粒子物理学の中でこれらの条件を満たす可能性のある、 stau の崩壊プロセスを調べた。この崩壊が上記の条件1を満たす可能性を、decay rate のパラメーター依存性を考慮しつつ調べた結果、 stau の崩壊ではナイープには条件は満たされることがわかった。さらに lepton flavor violation が起こっている場合についても調べたが、この場合でも SQS decay の条件はナイープには満たされることがわかった。

しかしナイープには条件を満たさない崩壊でも、系が外界と相互作用をしている場合には満たされるようになる可能性がある。これは、外部環境との相互作用が崩壊の decay rate を大きくすることがあるためである。そこでこの論文の終わりで、実際に実験で使われる可能性のある外部環境として Soudan2 を紹介した。この装置は十分な質量があるため stau を大量に集められる可能性があり、さらに軌跡分解能の高さから SQS decay の観測にも適当なものである。

今後の研究では、このような実際のな外部環境の中で stau の decay rate がどのような変化を受けるかを調べる必要がある。その結果から、より SQS decay 観測に適した装置を考えなければならない。また実際に SQS decay が観測されれば、その結果をもとにオーダーでしか決まっていなかった非 exponential decay の条件をより定量的なものにすることも必要である。

謝辞

まず本論分を作成するにあたり、非常に親切かつ熱心なご指導をいただいた指導教官の佐藤丈先生に深く感謝いたします。

埼玉大学の白藤孟志先生、谷井義彰先生には講義や輪講などで大変お世話になりました。KEKの松本重貴氏、東京工業大学の竹田晃人氏、埼玉大学の下村崇氏、佐藤快生氏、山中真人氏には、本研究を進める中で共同研究者として様々な議論やアドバイスをしていただきました。またイギリス Durham 大学の Rothe 氏には、本研究に関して非常に興味深い情報を教えていただきました。さらに埼玉大学素粒子論研究室の皆様、家族、友人たちには、日々の研究生活を様々な面から支えていただきました。これらの方たちの助けがあったからこそ、本論分を完成できたのだと思います。この場を借りてお礼申し上げます。

付 録 A 箱型ポテンシャルでの spectral function の導出

この付録では、第 4 章であつた箱型ポテンシャル (図 4.1) での spectral function を計算する。この系のエネルギー固有状態 $|E\rangle$ は簡単に計算でき、 $E < U/b$ に対しては

$$\phi_E(x) = \begin{cases} A \sin r(x/a + 1) & \text{for } (-a \leq x \leq 0), \\ B \sinh(sx/a) + C \cosh(sx/a) & \text{for } (0 < x < b), \\ D \sin(qx/a) + E \cos(qx/a) & \text{for } (b \leq x), \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

となり、 $E \geq U/b$ に対しては

$$\phi_E(x) = \begin{cases} A \sin r(x/a + 1) & \text{for } (-a \leq x \leq 0), \\ B \sin(\tilde{s}x/a) + C \cos(\tilde{s}x/a) & \text{for } (0 < x < b), \\ D \sin(qx/a) + E \cos(qx/a) & \text{for } (b \leq x), \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

となる。ここで $q, r, s, \tilde{s}$ は (4.7), (4.8), (4.9), (4.10) で与えられている。また係数 A, B, C, D, E は、 $x = -a, 0, b$ での波動関数の連続性と、波動関数の規格化条件 $\langle E|E'\rangle = \delta(E - E')$ からきまる。例えば、 A は次式となる。

$$|A|^2 = \frac{q}{2ma^3\pi\alpha(E)}, \quad (\text{A.3})$$

ただし $\alpha(E)$ は (4.5) 式もしくは (4.6) 式で定義された量である。

以上の結果と初期条件 (4.2) 式から、spectral function が計算できる。spectral function は (2.4) 式で定義されており、今の場合には

$$\begin{aligned} \rho(E) = |\langle E|0\rangle|^2 &= \left| \int dx \phi_E(x)^* \psi_i(x) \right|^2 \\ &= \left| \int_{-a}^0 dx A^* \sin r(x/a + 1) \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \right|^2 \\ &= |A|^2 \frac{2a\pi^2 \sin^2 r}{(r^2 - \pi^2)^2} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

$$= \frac{1}{2ma^2\alpha(E)} \frac{2\pi q \sin^2 r}{(r^2 - \pi^2)^2}. \quad (\text{A.5})$$

non-decay amplitude や decay rate は (2.3) 式, (2.1) 式をつかって計算できる。

付 録 B 台形型ポテンシャルでの spectral function の導出

この付録では、第 3 章で議論された台形型のポテンシャル（図 4.4）の spectral function を計算し、さらに崩壊が起こる閾値付近での spectral function の振る舞いについて調べる。エネルギー固有状態は、 x の各領域でそれぞれ次のようになる。

$$\phi_E(x) = \begin{cases} A \sin k_1 x & 0 \leq x \leq a , \\ B_1 H_{-1/3}(x') + B_2 H_{1/3}(x') & a < x \leq b , \\ C_1 e^{k_2(x-b)} + C_2 e^{-k_2(x-b)} & b < x \leq c , \\ D_1 H_{-1/3}(x'') + D_2 H_{1/3}(x'') & c < x \leq d , \\ E_1 e^{ik_3(x-d)} + E_2 e^{-ik_3(x-d)} & d < x . \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

$H_{\pm 1/3}(x)$ は Airy 関数として知られている。Airy 関数は Bessel 関数を用いて、

$$H_{\pm 1/3}(z) \equiv \frac{\sqrt{-\pi z}}{3} J_{\pm 1/3} \left(\frac{2}{3}(-z)^{3/2} \right) , \quad (\text{B.2})$$

で与えられ、また x' , x'' は、

$$x' \equiv L^{1/3}(x/a - 1) + z_a , \quad (\text{B.3})$$

$$x'' \equiv -R^{1/3}(x/a - c/a) - z_c , \quad (\text{B.4})$$

で与えられる。さらに $k_1 = \sqrt{2mE}$, $k_2 = \sqrt{2m(h_1 - E)}$, $k_3 = \sqrt{2m(E - h_2)}$ である。 L , R はそれぞれポテンシャルの傾きをあらわす量で、

$$L = 2ma^3 \left(\frac{h_1}{b-a} \right) , \quad (\text{B.5})$$

$$R = 2ma^3 \left(\frac{h_1 - h_2}{d-c} \right) . \quad (\text{B.6})$$

また座標 a , b , c , d をスケーリングした量である z_a , z_b , z_c , z_d は、

$$z_a = -\frac{L^{1/3}(b-a)E}{ah_1} , \quad (\text{B.7})$$

$$z_b = \frac{L^{1/3}(b-a)(h_1 - E)}{ah_1} , \quad (\text{B.8})$$

$$z_c = \frac{R^{1/3}(d-c)(h_1 - E)}{a(h_1 - h_2)} , \quad (\text{B.9})$$

$$z_d = \frac{R^{1/3}(d-c)(h_2 - E)}{a(h_1 - h_2)} , \quad (\text{B.10})$$

である.

初期状態は箱型の場合と同じように選ばれているので, spectral function は (A.4) 式と $|A|^2$ の中身を除いて同じである. したがって $|A|^2$ を求めれば spectral function も求まる. 波動関数の規格化条件から, 今の台形型の場合には $|A|^2$ は次で与えられる.

$$|A|^2 = \frac{k_1}{\pi k_3 (|\epsilon_1|^2 + |\epsilon_2|^2)} \quad (\text{B.11})$$

ただし ϵ_1, ϵ_2 は次で与えられる.

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{pmatrix} = F^{-1}(k_3) \cdot T_R(z_d) \cdot T_R^{-1}(z_c) \cdot Ph \cdot F^{-1}(-ik_2) \cdot T_L(z_b) \cdot T_L^{-1}(z_a) \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.12})$$

$$F(k) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ ika & -ika \end{pmatrix}, \quad T_t(z) \equiv \begin{pmatrix} H_{1/3}(z) & H_{-1/3}(z) \\ t^{1/3} H'_{1/3}(z) & t^{1/3} H'_{-1/3}(z) \end{pmatrix},$$

$$Ph \equiv \begin{pmatrix} e^{k_2(c-b)} & e^{-k_2(c-b)} \\ k_2 a e^{k_2(c-b)} & k_2 a e^{-k_2(c-b)} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.13})$$

ここで δ_1, δ_2 は波動関数とその微分の原点での値で,

$$\delta_1 = \sin(k_1 a), \quad \delta_2 = k_1 a \cos(k_1 a). \quad (\text{B.14})$$

したがって spectral function は,

$$\rho(E) = \frac{1}{2ma^3 k_3 (|\epsilon_1|^2 + |\epsilon_2|^2)} \frac{\pi \sin^2(k_1 a)}{(k_1^2 a^2 - \pi^2)^2}, \quad (\text{B.15})$$

となる.

さらに崩壊が起こる閾値近傍での spectral function の Q -value 依存性を調べる. 今の台形型の系では Q -value は $Q = E - h_2$ で与えられる. Q -value が小さいところでの spectral function の振る舞いを知りたいので, spectral function を $E - h_2$ で展開する. $T_R(z_d), T_R^{-1}(z_c), Ph, F^{-1}(-ik_2), T_L(z_b), T_L^{-1}(z_a)$ の各成分および δ_1, δ_2 は, 主要次で定数か $E - h_2$ の正のべきである. 一方 $F^{-1}(-ik_3)$ は

$$F^{-1}(k_3) \simeq \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & +ik_3^{-1} \\ 1 & -ik_3^{-1} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.16})$$

となり, $k_3 \sim \sqrt{E - h_2}$ から $E - h_2$ の負のべきを持つ. したがって spectral function の Q -value 依存性は

$$\rho(E) \propto k_3 = (E - h_2)^{1/2}, \quad (\text{B.17})$$

となる. これは s-wave での崩壊の場合と同じである.

付 録 C MSSM ラグランジアン

この付録では第 6 章で使った, $\tilde{\chi}^0$ - τ - $\tilde{\tau}$ の相互作用ラグランジアンを求める. はじめに notation と superfield の積を見て, 次に MSSM の全ラグランジアンから目的の相互作用項を導き出す. なおここで用いている notation は Lykken によって使われているものと同じである [25].

C.1 Notation

- 時空の計量

$$g_{mn} = g^{mn} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.1})$$

- 2 階完全反対称テンソル

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon^{\alpha\beta} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.2})$$

2 成分スピノルの足は 2 階完全反対称テンソルで上げ下げされる.

$$\begin{aligned} \xi^\alpha &= \epsilon^{\alpha\beta} \xi_\beta, & \bar{\eta}_{\dot{\alpha}} &= \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\eta}^{\dot{\beta}}, \\ \xi_\alpha &= \epsilon_{\alpha\beta} \xi^\beta, & \bar{\eta}^{\dot{\alpha}} &= \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\eta}_{\dot{\beta}}. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Grassmann 変数の微分について, 2 成分スピノルの足の上げ下げは次のようにおこなう.

$$\epsilon^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \theta^\beta} = - \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha}, \quad (\text{C.4})$$

$$\epsilon_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \theta_\beta} = \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha}, \quad (\text{C.5})$$

$$\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\beta}}} = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}}, \quad (\text{C.6})$$

$$\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_{\dot{\beta}}} = - \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}. \quad (\text{C.7})$$

ただし 2 成分スピノルの足の上げ下げは常に左側からおこなわれる.

- 4 階完全反対称テンソル

$$\epsilon_{0123} = -1, \quad \epsilon^{0123} = 1. \quad (\text{C.8})$$

- γ 行列

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.9})$$

$$\sigma^\mu = (1, \vec{\sigma}), \quad \bar{\sigma}^\mu = (1, -\vec{\sigma}), \quad (\text{C.10})$$

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.11})$$

- 射影演算子

$$P_L = \frac{1 - \gamma^5}{2}, \quad P_R = \frac{1 + \gamma^5}{2}. \quad (\text{C.12})$$

- 4 成分スピノル

4 成分 Dirac スピノル Ψ_D を 2 成分スピノルで書くと,

$$\Psi_D = \begin{pmatrix} \Psi_L \\ \Psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \bar{\eta}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.13})$$

また $\bar{\Psi}_D$ や, Ψ_D の荷電共役 Ψ_D^c は

$$\bar{\Psi}_D = \Psi^\dagger \gamma^0 = \left(\eta^\alpha \quad \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \right), \quad (\text{C.14})$$

$$\Psi_D^c = -i\gamma^2 \Psi^* = \begin{pmatrix} \eta_\beta \\ \bar{\xi}^{\dot{\beta}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\Psi^c)_L \\ (\Psi^c)_R \end{pmatrix}. \quad (\text{C.15})$$

となる.

gaugino, higgsino は Majorana 粒子である. 4 成分 Majorana スピノル Ψ_M は 2 成分スピノルを用いて次のように表される.

$$\Psi_M = \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad \bar{\Psi}_M = \left(\xi^\alpha \quad \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \right). \quad (\text{C.16})$$

これらから, 2 成分スピノル $\psi_L, (\psi^c)_L$, λ の積は 4 成分スピノルで以下のように表せることがわかる. ただし ψ, ψ^c は標準理論にあらわれるフェルミオンとその荷電共役を, λ は標準理論にあらわれるボソンの superpartner をそれぞれ表している.

$$\psi_L (\psi^c)_L = \bar{\Psi}_\psi P_L \Psi_\psi, \quad (\text{C.17})$$

$$\lambda \psi_L = \bar{\Psi}_\lambda P_L \Psi_\psi, \quad (\text{C.18})$$

$$\lambda (\psi^c)_L = \bar{\Psi}_\psi P_L \Psi_\lambda. \quad (\text{C.19})$$

C.2 superfield とその積

- chiral superfield

$$\Phi(x) = A(x) + i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m A(x) - \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\square A(x) + \sqrt{2}\theta\psi(x) - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\partial_m\psi\sigma^m\bar{\theta} + \theta\theta F(x) . \quad (\text{C.20})$$

したがって $\Phi_i\Phi_j, \Phi_i\Phi_j\Phi_k$ の $\theta\theta$ 成分は

$$\Phi_i\Phi_j|_{\theta\theta} = A_iF_j + A_jF_i - \psi_i\psi_j , \quad (\text{C.21})$$

$$\Phi_i\Phi_j\Phi_k|_{\theta\theta} = A_iA_jF_k + A_jA_kF_i + A_kA_iF_j - A_i\psi_j\psi_k - A_j\psi_k\psi_i - A_k\psi_i\psi_j . \quad (\text{C.22})$$

また $\Phi^\dagger\Phi$ の $\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$ 成分は

$$\Phi^\dagger\Phi|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} = -A^*\square A - i\psi\sigma^m\partial_m\bar{\psi} + F^*F . \quad (\text{C.23})$$

- vector superfield

$$V(x) = -\theta\sigma^m\bar{\theta}v_m(x) + (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + (\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\lambda(x) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D(x) , \quad (\text{C.24})$$

$$V_i(x)V_j(x) = \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}v_{im}(x)v_j^m(x) . \quad (\text{C.25})$$

ただしここでは Wess-Zumino ゲージをとっている. また chiral superfield との積について

$$\begin{aligned} \Phi_i^\dagger V\Phi_j|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} &= \frac{1}{2}A_i^*A_jD - \frac{i}{2}A_i^*\partial_m A_jv^m + \frac{i}{2}\partial_m A_i^*A_jv^m \\ &\quad - \frac{1}{2}\psi_j\sigma^m\bar{\psi}_iv_m - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\psi}_i\bar{\lambda}A_j - \frac{1}{\sqrt{2}}A_i^*\lambda\psi_j \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

$$\Phi_i^\dagger V_a V_b\Phi_j|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} = \frac{1}{2}A_i^*A_jv_{am}v_b^m \quad (\text{C.27})$$

- supersymmetric field strength

$$W^\alpha W_\alpha|_{\theta\theta} = -\frac{1}{2}v^{mn}v_{mn} - \frac{i}{4}v^{mn}v^{lk}\epsilon_{mnlk} - 2i\lambda\sigma^m\partial_m\bar{\lambda} + D^2 . \quad (\text{C.28})$$

ここで

$$v_{mn} = \partial_m v_n - \partial_n v_m - ig[v_m, v_n] . \quad (\text{C.29})$$

C.3 MSSM の粒子一覧

MSSM で記述される粒子は表 C.1 のとおりである.

superfield	boson	fermion	color	T	T_3	Y
Q	$\tilde{q} = \begin{pmatrix} \tilde{u}_L \\ \tilde{d}_L \end{pmatrix}$	$q = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	3	$\frac{1}{2}$	$\begin{matrix} +\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{matrix}$	$+\frac{1}{3}$
U	$(\tilde{u}^c)_L$	$(u^c)_L$	3^*	0	0	$-\frac{4}{3}$
D	$(\tilde{d}^c)_L$	$(d^c)_L$	3^*	0	0	$+\frac{2}{3}$
L	$\tilde{l} = \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_L \\ \tilde{e}_L \end{pmatrix}$	$q = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$	1	$\frac{1}{2}$	$\begin{matrix} +\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{matrix}$	-1
E	$(\tilde{e}^c)_L$	$(e^c)_L$	1	0	0	+2
H_d	$h_d = \begin{pmatrix} h_d^0 \\ h_d^- \end{pmatrix}$	$\tilde{h}_d = \begin{pmatrix} \tilde{h}_d^0 \\ \tilde{h}_d^- \end{pmatrix}$	1	$\frac{1}{2}$	$\begin{matrix} +\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{matrix}$	-1
H_u	$h_u = \begin{pmatrix} h_u^+ \\ h_u^0 \end{pmatrix}$	$\tilde{h}_u = \begin{pmatrix} \tilde{h}_u^+ \\ \tilde{h}_u^0 \end{pmatrix}$	3	$\frac{1}{2}$	$\begin{matrix} +\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{matrix}$	+1
V	B	$\tilde{B}$	1	0	0	0
V^a	W^a	$\tilde{W}^a$	1	1	$\begin{matrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(V^1 - iV^2) = +1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(V^1 + iV^2) = -1 \\ V^3 = 0 \end{matrix}$	0
V_s^α	g_s^α	$\tilde{g}_s^\alpha$	8	0	0	0

表 C.1: MSSM で記述される粒子の superfield とその成分および量子数.

Higgs 場が真空期待値をとった時, Higgs 場は揺らぎを含めて次のようになる.

$$h_d = \begin{pmatrix} (v_d + \phi_d^0 - i\chi_d^0)/\sqrt{2} \\ -\phi_d^- \end{pmatrix}, \quad h_u = \begin{pmatrix} \phi_u^+ \\ (v_u + \phi_u^0 + i\chi_u^0)/\sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.30})$$

また真空期待値 v_u, v_d の比を以下のように書く.

$$\tan \beta = \frac{v_u}{v_d}. \quad (\text{C.31})$$

C.4 MSSM の全ラグランジアン

MSSM のラグランジアンは次で与えられる.

$$\mathcal{L}_{\text{MSSM}} = \mathcal{L}_{\text{kinetic}} + \mathcal{L}_{\text{potential}} + \mathcal{L}_{\text{soft}}, \quad (\text{C.32})$$

$$\mathcal{L}_{\text{kinetic}} = \int d^2\theta \frac{1}{4} [2\text{Tr}(\mathbf{W}^a \mathbf{W}^a) + \mathbf{W}\mathbf{W} + 2\text{Tr}(\mathbf{W}_s{}^\alpha \mathbf{W}_s{}^\alpha)] + h.c. \quad (\text{C.33})$$

$$+ \int d^2\theta d^2\bar{\theta} L^\dagger \exp \left[2 \left(g \frac{\tau^a}{2} V^a + g' \frac{Y_l}{2} V \right) \right] L + h.c. \quad (\text{C.34})$$

$$+ \int d^2\theta d^2\bar{\theta} E^\dagger \exp [(g' Y_e V)] E + h.c. \quad (\text{C.35})$$

$$+ \int d^2\theta d^2\bar{\theta} Q^\dagger \exp \left[2 \left(g \frac{\tau^a}{2} V^a + g' \frac{Y_q}{2} V + g_s \frac{\lambda^\alpha}{2} V_s{}^\alpha \right) \right] Q + h.c. \quad (\text{C.36})$$

$$+ \int d^2\theta d^2\bar{\theta} U^\dagger \exp [(g' Y_u V - g_s \lambda^{\alpha*} V_s{}^\alpha)] U + h.c. \quad (\text{C.37})$$

$$+ \int d^2\theta d^2\bar{\theta} D^\dagger \exp [(g' Y_d V - g_s \lambda^{\alpha*} V_s{}^\alpha)] D + h.c. \quad (\text{C.38})$$

$$+ \int d^2\theta d^2\bar{\theta} H_d^\dagger \exp \left[2 \left(g \frac{\tau^a}{2} V^a + g' \frac{Y_{h_d}}{2} V \right) \right] H_d + h.c. \quad (\text{C.39})$$

$$+ \int d^2\theta d^2\bar{\theta} H_u^\dagger \exp \left[2 \left(g \frac{\tau^a}{2} V^a + g' \frac{Y_{h_u}}{2} V \right) \right] H_u + h.c. , \quad (\text{C.40})$$

$$\mathcal{L}_{\text{potential}} = \mu H_u H_d + (y_u)_{ij} H_u Q_i U_j^c + (y_d)_{ij} H_d Q_i D_j^c + (y_e)_{ij} H_d L_i E_j^c + h.c. , \quad (\text{C.41})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{soft}} = & -M_1 \tilde{B} \tilde{B} - M_2 \tilde{W}^a \tilde{W}^a - M_3 g_s^\alpha \tilde{g}_s^\alpha + h.c. \\ & - \sum_i \tilde{m}_i^2 A_i^* A_i - B \mu h_u h_d - A_{ij}^u h_u \tilde{q}_i \tilde{u}_j^c - A_{ij}^d h_d \tilde{q}_i \tilde{d}_j^c - A_{ij}^e h_d \tilde{l}_i \tilde{e}_j^c . \end{aligned} \quad (\text{C.42})$$

C.5 相互作用ラグランジアン の導出

ここで第6章で使った $\tilde{\chi}^{0-\tau-\tilde{\tau}}$ の相互作用ラグランジアンを導出する. neutralino は $\tilde{B}$, $\tilde{W}^3$, h_d^0 , h_u^0 の線形結合なので, 成分ごとに相互作用項を導く. $\tilde{B}-\tau-\tilde{\tau}$ の相互作用項は (C.34), (C.35) 式から得られる. この相互作用項は vector superfield について1次の部分からあらわれる.

$$\begin{aligned} & (g' Y L^\dagger V L + g' Y E^\dagger V E) |_{\tilde{B}-\tau-\tau} \\ &= \frac{g'}{\sqrt{2}} \tilde{\tau}_L^* \tilde{B} \tau_L + \frac{g'}{\sqrt{2}} \tilde{\tau}_L \tilde{\tau}_L \tilde{\tilde{B}} - \frac{2g'}{\sqrt{2}} (\tilde{\tau}^c)_L^* \tilde{B} (\tau^c)_L - \frac{2g'}{\sqrt{2}} (\tilde{\tau}^c)_L (\tilde{\tau}^c)_L \tilde{\tilde{B}} . \\ &= \frac{g \sin \theta_w}{\sqrt{2} \cos \theta_w} \left(\tilde{\tau}_L^* \tilde{\Psi}_{\tilde{B}} P_L \Psi_\tau - 2 \tilde{\tau}_R^* \tilde{\Psi}_{\tilde{B}} P_R \Psi_\tau \right) + h.c. . \end{aligned} \quad (\text{C.43})$$

3行目に移るところで, $g' = g \sin \theta_w / \cos \theta_w$, $(\tilde{e}^c)_L = \tilde{e}_R^*$ を用いており, さらに4成分スピノルの表記に変えている. ただし $\Psi_{\tilde{B}}$, Ψ_τ はそれぞれ4成分スピノルで書いた $\tilde{B}$, τ である. これは stau について相互作用の固有状態で書かれているので, 質量の固有状態に書きなおす. 相互作用の固有状態と質量の固有状態は次の関係でむすばれる.

$$\begin{pmatrix} \tilde{\tau}_L \\ \tilde{\tau}_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_\tau & \sin \theta_\tau e^{i\gamma_\tau} \\ -\sin \theta_\tau e^{-i\gamma_\tau} & \cos \theta_\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\tau}_1 \\ \tilde{\tau}_2 \end{pmatrix} \quad (\text{C.44})$$

ここで θ_τ は2つの固有状態を結び付ける混合角で, γ_τ は CP violating phase である. ただし $m_{\tilde{\tau}_1} \leq m_{\tilde{\tau}_2}$ とする. このとき NLSP stau は $\tilde{\tau}_1$ のことなので, $\tilde{\tau}_1$ を $\tilde{\tau}$ と書くことにする. (C.43) 式から NLSP $\tilde{\tau}$ の相互作用ラグランジアンを求めると,

$$\mathcal{L}_{\tilde{B}-\tau-\tilde{\tau}} = \tilde{\tau}^* \bar{\Psi}_{\tilde{B}} (g_L P_L + g_R P_R) \Psi_\tau + h.c. , \quad (C.45)$$

$$g_L = \frac{g}{\sqrt{2} \cos \theta_w} \sin \theta_w \cos \theta_\tau , \quad g_R = \frac{\sqrt{2}g}{\cos \theta_w} \sin \theta_w \sin \theta_\tau e^{i\gamma_\tau} . \quad (C.46)$$

$\tilde{W}^3$ との相互作用項を求める. $\tilde{W}^3-\tau-\tilde{\tau}$ の相互作用項は (C.34) 式から与えられる.

$$\begin{aligned} g L^\dagger V^3 \tau^3 L|_{\tilde{W}^3-\tau-\tilde{\tau}} &= \frac{g}{\sqrt{2}} \tilde{\tau}_L^* \tilde{W}^3 \tau_L + \frac{g}{\sqrt{2}} \tilde{\tau}_L \tilde{W}^3 \tilde{\tau}_L \\ &= \frac{g}{\sqrt{2}} \tilde{\tau}_L^* \Psi_{\tilde{W}^3} P_L \Psi_\tau + h.c. . \end{aligned} \quad (C.47)$$

3 行目は 4 成分スピノルで書いている. ただし $\Psi_{\tilde{W}^3}$ は $\tilde{W}^3$ の 4 成分スピノル表記である. stau を質量の固有状態で書き直すことによって

$$\mathcal{L}_{\tilde{W}^3-\tau-\tilde{\tau}} = \tilde{\tau}^* \Psi_{\tilde{W}^3} \left(\frac{g \cos \theta_w}{\sqrt{2}} P_L \right) \Psi_\tau + h.c. . \quad (C.48)$$

次に higgsino との相互作用項を導く. $h_u^0-\tau-\tilde{\tau}$ の相互作用項は MSSM ラグランジアンの中には存在しない. $h_d^0-\tau-\tilde{\tau}$ の相互作用項は (C.41) 式から得られる.

$$\begin{aligned} (y_e H_d L E + h.c.)|_{\tilde{h}_d^0-\tau-\tilde{\tau}} &= -y_e \left(\tilde{\tau}_L (\tau^c)_L \tilde{h}_d^0 + (\tilde{\tau}^c)_L \tilde{h}_d^0 \tau_L \right) + h.c. \\ &= -y_e \left(\tilde{\tau}_L \bar{\Psi}_\tau P_L \Psi_{\tilde{h}_d^0} + \tilde{\tau}_R^* \bar{\Psi}_{\tilde{h}_d^0} P_L \Psi_\tau \right) + h.c. . \end{aligned} \quad (C.49)$$

2 行目は 4 成分スピノルで書いており, ここで $\tilde{h}_d^0$ の 4 成分スピノル表記として $\Psi_{\tilde{h}_d^0}$ を使っている. $\tilde{\tau}_R^* \bar{\Psi}_{\tilde{h}_d^0} P_L \Psi_\tau$ のエルミート共役は $\tilde{\tau}_R \bar{\Psi}_\tau P_R \Psi_{\tilde{h}_d^0}$ なので, stau の質量固有状態に書き直すと,

$$\mathcal{L}_{\tilde{h}_d^0-\tau-\tilde{\tau}} = \tilde{\tau} \bar{\Psi}_\tau \left(-y_e \cos \theta P_L + y_e \sin \theta_\tau e^{i\gamma_\tau} P_R \right) \Psi_{\tilde{h}_d^0} + h.c. . \quad (C.50)$$

こうして neutralino の各成分と stau, tau との相互作用ラグランジアンが求められた.

付 録 D stau の decay rate 計算

図 6.1 に描かれているダイアグラムの decay rate を計算する. さらに decay rate の振る舞いを直観的に理解するために, 近似的な式も求める. ここでは $\delta m/m_{\tilde{\chi}^0}$ について最低次以外を無視するという近似をおこなう. また 3 体と 4 体崩壊が支配的になる領域は 2 体崩壊が禁止される $\delta m < m_\tau$ であるので, これらのプロセスはこの領域で近似する. そこで 3 体と 4 体崩壊については, tau のプロパゲーターの分母を m_τ^2 で置き換えるという近似もおこなう. なおニュートリノについては massless として計算している.

D.1 2 体崩壊

(6.2) 式のラグランジアンから 2 体崩壊 $\tilde{\tau} \rightarrow \tilde{\chi}^0 \tau$ の振幅の二乗を計算すると,

$$|\mathcal{M}|^2 = (g_L^2 + |g_R|^2) (p_\tau \cdot p_{\tilde{\chi}^0}) - 4\text{Re}[g_L g_R] m_\tau m_{\tilde{\chi}^0} , \quad (\text{D.1})$$

となる. ここで $p_{\tilde{\chi}^0}, p_\tau$ はそれぞれ $\tilde{\chi}^0, \tau$ の 4 元運動量である.

stau の decay rate は振幅の二乗を用いると,

$$\Gamma = \frac{1}{2m_{\tilde{\tau}}} \int \prod_f \left(\frac{d^3 \vec{P}_f}{(2\pi)^3 2E_f} \right) |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_{\tilde{\tau}} - \sum_f p_f \right) , \quad (\text{D.2})$$

で与えられる. ここで f は終状態粒子をあらわしており, また $\vec{P}_f$ は終状態粒子 f の 3 次元運動量である. 2 体崩壊の場合には終状態粒子の運動量はエネルギー・運動量保存則から完全に決められる. すなわち

$$\begin{aligned} p_\tau \cdot p_{\tilde{\chi}^0} &= m_{\tilde{\tau}}^2 - m_{\tilde{\chi}^0}^2 - m_\tau^2 \\ &= 2m_{\tilde{\chi}^0} \delta m + (\delta m)^2 - m_\tau^2 . \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

このため終状態運動量積分は簡単に計算でき, decay rate は次式となる.

$$\begin{aligned} \Gamma_{2\text{-body}} &= \frac{1}{16\pi m_{\tilde{\tau}}^3} \sqrt{((\delta m)^2 - m_\tau^2) ((2m_{\tilde{\chi}^0} + \delta m)^2 - m_\tau^2)} \\ &\quad \times (g_L^2 + |g_R|^2) (2m_{\tilde{\chi}^0} \delta m + (\delta m)^2 - m_\tau^2) - 4\text{Re}[g_L g_R] m_\tau m_{\tilde{\chi}^0} . \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

上で述べた $\delta m/m_{\tilde{\chi}^0}$ の最低次以外を無視する方法でこの decay rate を近似すると,

$$\Gamma_{2\text{-body}} = \frac{1}{4\pi m_{\tilde{\chi}^0}} \sqrt{(\delta m)^2 - m_\tau^2} ((g_L^2 + |g_R|^2) \delta m - 2\text{Re}[g_L g_R] m_\tau) , \quad (\text{D.5})$$

となる.

D.2 3体崩壊

$\tilde{\tau} \rightarrow \tilde{\chi}^0 \nu_\tau \pi$ のプロセスの振幅の二乗は,

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{2G_F^2 f_\pi^2 \cos^2 \theta_c}{(q_\tau^2 - m_\tau^2)^2 + (m_\tau \Gamma_\tau)^2} \left[2(g_L^2(p_{\tilde{\chi}^0} \cdot q_\tau) - \text{Re}[g_L g_R] m_{\tilde{\chi}^0} m_\tau) \left\{ 2(p_\pi \cdot p_{\nu_\tau})(p_\pi \cdot q_\tau) - (p_{\nu_\tau} \cdot q_\tau) \right\} \right. \\ \left. - (g_L^2 q_\tau^2 - |g_R|^2 m_\tau^2) \left\{ 2(p_{\tilde{\chi}^0} \cdot p_\pi)(p_\pi \cdot p_{\nu_\tau}) - m_\pi^2(p_{\tilde{\chi}^0} \cdot p_{\nu_\tau}) \right\} \right], \quad (\text{D.6})$$

である. ここで p_π は π の 4 元運動量であり, q_τ は中間状態の τ が持つ 4 元運動量で $q_\tau = p_{\tilde{\tau}} - p_{\tilde{\chi}^0} = p_\pi + p_{\nu_\tau}$ である. また $\delta m \geq m_\tau$ となる領域でも計算を行うので, プロパゲーターの分母に $(m_\tau \Gamma_\tau)^2$ を加えている. なお Γ_τ は tau の decay rate である.

decay rate は 2 体崩壊の時と同じように (D.2) 式から計算される. しかし 3 体崩壊の場合には終状態粒子の運動量は一意には決まらないので, 積分は 2 体崩壊のときのように簡単にはおこなえない. そこで以下に説明する, 積分の一部で慣性系を変えるテクニックを使うと計算を容易にできる.

decay rate の被積分関数に含まれる $d\vec{P}_f / \{(2\pi)^3 2E_f\}$, $|\mathcal{M}|^2$, $\delta^{(4)}$ は Lorentz 不変量である. したがって任意の慣性系の量に変数変換しても形は変わらない. そこで積分測度のうち π 運動量のものと ν_τ 運動量のもの: $d\vec{P}_\pi / \{(2\pi)^3 2E_\pi\}$, $d\vec{P}_{\nu_\tau} / \{(2\pi)^3 2E_{\nu_\tau}\}$ と, 振幅の二乗, デルタ関数を tau の 3 次元運動量が 0 になる系 (stau と neutralino の 3 次元運動量が等しくなる系) の運動量に変えて計算する. すなわち

$$\Gamma_{3\text{-body}} = \frac{1}{2m_{\tilde{\tau}}} \int \frac{d^3 \vec{P}_{\tilde{\chi}^0}}{(2\pi)^3 2E_{\tilde{\chi}^0}} \int \frac{d^3 \vec{P}_\pi^*}{(2\pi)^3 2E_\pi^*} \int \frac{d^3 \vec{P}_{\nu_\tau}^*}{(2\pi)^3 2E_{\nu_\tau}^*} \\ \times \frac{2G_F^2 f_\pi^2 \cos^2 \theta_c}{(q_\tau^2 - m_\tau^2)^2 + (m_\tau \Gamma_\tau)^2} \\ \times \left[2(g_L^2(p_{\tilde{\chi}^0}^* \cdot q_\tau^*) - \text{Re}[g_L g_R] m_{\tilde{\chi}^0} m_\tau) \left\{ 2(p_\pi^* \cdot p_{\nu_\tau}^*)(p_\pi^* \cdot q_\tau^*) - (p_{\nu_\tau}^* \cdot q_\tau^*) \right\} \right. \\ \left. - (g_L^2 q_\tau^{*2} - |g_R|^2 m_\tau^2) \left\{ 2(p_{\tilde{\chi}^0}^* \cdot p_\pi^*)(p_\pi^* \cdot p_{\nu_\tau}^*) - m_\pi^2(p_{\tilde{\chi}^0}^* \cdot p_{\nu_\tau}^*) \right\} \right] \\ \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{\tilde{\tau}}^* - p_{\tilde{\chi}^0}^* - p_\pi^* - p_{\nu_\tau}^*). \quad (\text{D.7})$$

ただし * がついている量は tau の 3 次元運動量が 0 となる系での値で, stau の静止系での量とは次の Lorentz 因子で関係付けられる.

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{P}_{\tilde{\chi}^0}}{m_{\tilde{\tau}} - E_{\tilde{\chi}^0}}, \quad \gamma = \frac{m_{\tilde{\tau}} - E_{\tilde{\chi}^0}}{\sqrt{m_{\tilde{\tau}}^2 - 2m_{\tilde{\tau}} E_{\tilde{\chi}^0} + m_{\tilde{\chi}^0}^2}}. \quad (\text{D.8})$$

この系の変数で計算することには, 運動量積分で絶対値と角度方向の積分を独立におこなえるというメリットがある. これは以下のような理由による. 一般には終状態粒子の運動量の絶対値と角度方向は独立ではなく, 互いに相関がある. このため積分は複雑になってしまう. しかし終状態運動量積分のうち 2 つは問題なくおこなえる. これは, 1 つは角度の基準とし, もう 1 つはデルタ関数のうちの 3 次元運動量部分を使うことによる. 3 体崩壊の場合には運動量積分が 1 つ残ることになるが, 3 次元運動

量が 0 になる系では出てくる粒子は等方的なので、運動量の絶対値の積分と角度の積分は独立におこなえるようになる。

こうして ν_τ 積分でデルタ関数を使い、 $\tilde{\chi}^0$ を角度の基準にして計算すると、

$$\begin{aligned} \Gamma_{3\text{-body}} &= \frac{G_F^2 f_\pi^2 \cos^2 \theta_c ((\delta m)^2 - m_\pi^2)}{64\pi^3 m_\tau^3} \\ &\times \int_0^1 dx \sqrt{((\delta m)^2 - q_f^2) ((\delta m + 2m_{\tilde{\chi}^0})^2 - q_f^2)} \frac{1}{(q_f^2 - m_\tau^2)^2 + (m_\tau \Gamma_\tau)^2} \\ &\times (q_f^2 - m_\pi^2) \left[\frac{1}{4} (g_L^2 q_f^2 + |g_R^2| m_\tau^2) ((\delta m)^2 + 2m_{\tilde{\chi}^0} \delta m - q_f^2) - \text{Re}[g_L g_R] m_{\tilde{\chi}^0} m_\tau q_f^2 \right]. \quad (\text{D.9}) \end{aligned}$$

ここで q_f^2 は次式で与えられる量である。

$$q_f^2 = (\delta m)^2 - ((\delta m)^2 - m_\pi^2) x. \quad (\text{D.10})$$

ただし $f(= \pi, e, \mu)$ は終状態粒子の種類によって異なり、3 体崩壊では $f = \pi$ である。ここから $\delta m/m_{\tilde{\chi}^0}$ の主要次のみを残す近似をした decay rate を求めると、

$$\begin{aligned} \Gamma_{3\text{-body}} &= \frac{G_F^2 f_\pi^2 \cos^2 \theta_c}{210(2\pi)^3 m_{\tilde{\chi}^0} m_\tau^4} ((\delta m)^2 - m_\pi^2)^{5/2} \\ &\times \left[g_L^2 \delta m (4(\delta m)^2 + 3m_\pi^2) - 2\text{Re}[g_L g_R] m_\tau (4(\delta m)^2 + 3m_\pi^2) + 7|g_R|^2 m_\tau^2 \delta m \right] \quad (\text{D.11}) \end{aligned}$$

となる。

D.3 4 体崩壊

4 体崩壊 $\tilde{\tau} \rightarrow \tilde{\chi}^0 \nu_\tau l \nu_l$ の振幅の二乗は

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{128 G_F^2}{(q_\tau^2 - m_\tau^2)^2 + (m_\tau \Gamma_\tau)^2} \\ &\times \left[g_L^2 \left\{ -q_\tau (p_{\tilde{\chi}^0} \cdot p_l) + 2(p_{\tilde{\chi}^0} \cdot q_\tau)(q_\tau \cdot p_l) \right\} - 2\text{Re}[g_L g_R] m_{\tilde{\chi}^0} m_\tau (q_\tau \cdot p_l) + |g_R|^2 m_\tau^2 (p_{\tilde{\chi}^0} \cdot p_l) \right] \\ &\times (p_{\nu_\tau} \cdot p_{\nu_l}). \quad (\text{D.12}) \end{aligned}$$

ここで p_l, p_{ν_l} はそれぞれ l, ν_l の 4 元運動量であり、 l は終状態に応じて e, μ をとる。

4 体崩壊でも decay rate を求める積分は複雑になる。しかしニュートリノが massless であることと、3 体崩壊のときに使ったテクニックを使うと比較的に容易に計算できる。こうして求めた結果が次式で

ある.

$$\begin{aligned}
\Gamma_{4\text{-body}} &= \frac{G_F^2 ((\delta m)^2 - m_l^2)}{24(2\pi)^5 m_\tau^3} \\
&\times \int_0^1 dx \sqrt{((\delta m)^2 - q_f^2) ((\delta m + 2m_{\tilde{\chi}^0})^2 - q_f^2)} \frac{1}{(q_f^2 - m_\tau^2)^2 + (m_\tau \Gamma_\tau)^2} \frac{1}{q_f^4} \\
&\times \left[\frac{1}{4} (g_L^2 q_f^2 + |g_R^2| m_\tau^2) ((\delta m)^2 + 2m_{\tilde{\chi}^0} \delta m - q_f^2) - \text{Re}[g_L g_R] m_{\tilde{\chi}^0} m_\tau q_f^2 \right] \\
&\times \left[12m_l^4 q_f^4 \log \left[\frac{q_f^2}{m_l^2} \right] + (q_f^4 - m_l^4)(q_f^4 - 8m_l^2 q_f^2 + m_l^4) \right]. \tag{D.13}
\end{aligned}$$

ただし q_l^2 は (D.10) 式で与えられていて, 終状態に応じて $l = \mu, e$ をとる. また m_l は e もしくは μ の質量である. こうして 4 体崩壊の decay rate は, $\delta m/m_{\tilde{\chi}^0}$ の主要次の近似で次のように書けることがわかる.

$$\begin{aligned}
\Gamma_{4\text{-body}} &= \frac{G_F^2}{945(2\pi)^5 m_{\tilde{\chi}^0} m_\tau^4} ((\delta m)^2 - m_l^2)^{5/2} \\
&\times \left[2g_L^2 (\delta m)^3 (2(\delta m)^2 - 19m_l^2) - 4\text{Re}[g_L g_R] m_\tau (\delta m)^2 (2(\delta m)^2 - 19m_l^2) \right. \\
&\quad \left. + 3|g_R|^2 m_\tau^2 \delta m (2(\delta m)^2 - 23m_l^2) \right]. \tag{D.14}
\end{aligned}$$

参考文献

- [1] P. A. M. Dirac, Proc. R. Soc. London Ser. A **114**, 243 (1927).
- [2] V. Weisskopf and E. P. Wigner, Z. Phys. **63**, 54 (1930); G. Gamow, *ibid.* **51**, 204 (1928).
- [3] L. A. Khalfin, Sov. Phys. JETP **6**, 1053 (1958); M. Levy, Nuovo Cimento **13**, 115 (1959); G. N. Fleming, Nuovo Cimento Soc. Ital. Fis., A **16**, 232 (1973); C. B. Chiu, E. C. G. Sudarshan, and B. Misra, Phys. Rev. D **16**, 520 (1977); A. Peres, Ann. Phys. (N.Y.) **129**, 33 (1980), and references therein.
- [4] E. B. Norman, S. B. Gazes, S. G. Crane, and D. A. Bennett, Phys. Rev. Lett. **60**, 2246 (1988); G. Alexander *et al.*, Phys. Lett. B **368**, 244 (1996).
- [5] For a review of other particle physics experiments, see N. N. Nikolaev, Sov. Phys. Usp. **11**, 522 (1968); S. R. Wilkinson *et al.*, Nature (London) **387**, 575 (1997).
- [6] E. B. Norman, S. B. Gazes, S. G. Crane, and D. A. Bennett, Phys. Rev. Lett. **60**, 2246 (1988); C. F. Bharucha, K. W. Madison, P. R. Morrow, S. R. Wilkinson, B. Sundaram, and M. G. Raizen, Phys. Rev. A **55**, R857 (1997); Q. Niu, X.-G. Zhao, G. A. Georgakis, and M. G. Raizen, Phys. Rev. Lett. **76**, 4504 (1996).
- [7] S. R. Wilkinson *et al.*, Nature (London) **387**, 575 (1997); M. C. Fischer, B. Gutierrez-Medina, and M. G. Raizen, Phys. Rev. Lett. **87**, 040402 (2001).
- [8] T. Jittoh, S. Matsumoto, J. Sato, Y. Sato, and K. Takeda, Phys. Rev. **A71**, 012109 (2005), quant-ph/0408149.
- [9] T. Jittoh, J. Sato, T. Shimomura and M. Yamanaka, hep-ph/0512197
- [10] K. Griest, and D. Seckel, Phys. Rev. **D43**, 3191 (1991).
- [11] A. Peres, Ann. Phys. (N.Y.) **129**, 33 (1980).
- [12] A. G. Kofman, G. Kurizki, and B. Sherman, J. Mod. Opt. **41**, 353 (1994); A. G. Kofman and G. Kurizki, Nature (London) **405**, 546 (2000).
- [13] D. A. Dicus, W. W. Repko, R. F. Schwitters, and T. M. Tinsley, Phys. Rev. A **65**, 032116 (2002)

- [14] P. T. Greenland, *Nature* (London) **335**, 22 (1988); C. Bernardini, L. Maiani, and M. Testa, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 2687 (1993); L. Maiani and M. Testa, *Ann. Phys. (N.Y.)* **263**, 353 (1998); I. Joichi, Sh. Matsumoto, and M. Yoshimura, *Phys. Rev. D* **58**, 045004 (1998).
- [15] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics* (Butterworth-Heinemann, London, 1977) p.557.
- [16] H. Goldberg, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 1419 (1983).
- [17] J. R. Ellis, J. S. Hagelin, D. V. Nanopoulos, K. A. Olive, and M. Srednicki, *Nucl. Phys.* **B238**, 453 (1984).
- [18] J. L. Feng, S. Su, and F. Takayama, *Phys. Rev.* **D70**, 075019 (2004a), [hep-ph/0404231](#).
J. L. Feng, S.-f. Su, and F. Takayama, *Phys. Rev.* **D70**, 063514 (2004b), [hep-ph/0404198](#).
J. L. Feng, A. Rajaraman, and F. Takayama, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 011302 (2003), [hep-ph/0302215](#).
J. L. Feng, and T. Moroi, *Phys. Rev.* **D58**, 035001 (1998), [hep-ph/9712499](#).
W. Buchmuller, K. Hamaguchi, M. Ratz, and T. Yanagida, *Phys. Lett.* **B588**, 90 (2004), [hep-ph/0402179](#).
K. Hamaguchi, and A. Ibarra, *JHEP* **02**, 028 (2005), [hep-ph/0412229](#).
- [19] K. Hamaguchi, Y. Kuno, T. Nakaya, and M. M. Nojiri, *Phys. Rev.* **D70**, 115007 (2004), [hep-ph/0409248](#).
- [20] J. L. Feng, and B. T. Smith, *Phys. Rev.* **D71**, 015004 (2005), [hep-ph/0409278](#).
- [21] S. Profumo, K. Sigurdson, P. Ullio, and M. Kamionkowski, *Phys. Rev.* **D71**, 023518 (2005), [astro-ph/0410714](#).
- [22] J. R. Ellis, T. Falk, K. A. Olive, and M. Srednicki, *Astropart. Phys.* **13**, 181 (2000), [hep-ph/9905481](#).
- [23] C. Rothe, Private communication.
- [24] Soudan2, <http://hepunix.rl.ac.uk/soudan2/>.
- [25] J. D. Lykken, [hep-th/9612114](#).