

2021 年度卒業研究
光コムの原理と時間の精密測定

武田 紗貴乃¹⁾

2022 年 2 月 9 日

1) 埼玉大学理学部物理学科 素粒子理論研究室

目次

第 1 章	背景	3
1.1	本書の目的	3
1.2	光コムとは	3
1.3	光コム開発の目的	3
1.4	光コム発明までの歴史	4
第 2 章	光コムを支える現象と技術	8
2.1	コムがたつ仕組み	8
2.1.1	共振器の原理	8
2.1.1.1	微小共振器、Microresonator	9
2.1.2	レーザ発振の閾値	9
2.2	オフセット周波数: f_0 の存在	11
2.3	時間軸上の短パルス	12
2.3.1	Python で余弦波の合成を見る	13
2.4	モード同期レーザ, Mode Locked Laser	14
2.4.1	Python でモード同期を見る	15
第 3 章	コム方程式の各値	18
3.1	f_r, f_0 の決定	18
3.1.1	要求される条件	18
3.1.2	f_r の測定	19
3.1.3	f_0 の測定 (自己参照法)	19
3.2	マイクロ波帯の周波数の測り方	20
第 4 章	時間測定の精度向上	22
4.1	光時計	22
4.2	その他の応用方法	22
第 5 章	まとめ	24
第 6 章	付録	25
6.1	原子時計	25
6.1.1	Cs 原子時計	25
6.2	周波数標準	26
6.2.1	原子周波数標準	26
6.2.2	光周波数標準	26
6.3	レーザ	27

6.3.1	反転分布	27
6.3.1.1	3 準位レーザー	28
6.3.1.2	4 準位レーザー	28
6.3.2	具体的なレーザーの種類	29
6.3.2.1	Ti:サファイアレーザー	29
6.3.2.2	Er:ファイバレーザー	29
6.3.2.3	色素 (dye) レーザ	29
6.4	デルタ関数とフーリエ級数	30
6.4.1	矩形波の極限としてのデルタ関数	30
6.4.2	ガウシアン型のデルタ関数	30
6.5	ローレンツモデル	31
6.6	非線形光学現象	31
6.6.1	非線形結晶	32
6.6.2	位相整合	32
6.6.3	四光波混合	33
6.6.4	自己位相変調	34
6.7	ヘテロダイン法	34
6.8	dB (デシベル)	34
6.9	マイクロ波の測定	35
6.9.1	マイクロ波周波数カウンタ	36
6.9.2	空洞共振器形高周波周波数計	36
6.10	光波長計	37
	謝辞	38

第 1 章 背景

1.1 本書の目的

2000 年ごろに開発された「光コム」について、作り出す原理とそれを用いた精密測定のおもしろさをまとめる。また付録として、光コムを学ぶ際に耳にする周波数標準から非線形光学など多岐にわたる分野の一部について簡単に述べておく。

1.2 光コムとは

光コムとは、マイクロ波程度の桁数で等間隔で光帯域に並ぶモードの集まりである。(参考：図 1.1)

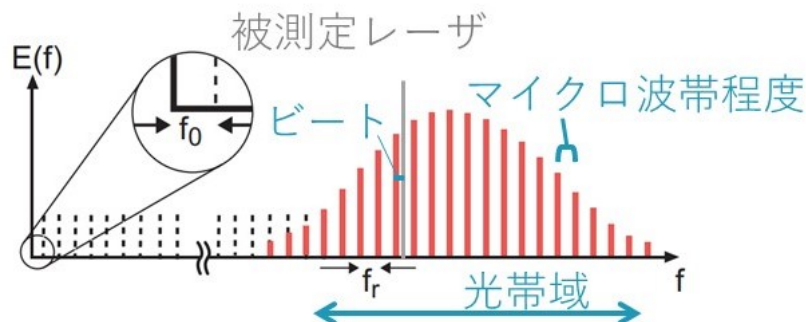


図 1.1 光コム (文献 [2]fig.3 に加筆修正)

光帯域の被測定周波数と光コムの差の周波数（ビート）をとると、そのビート周波数はマイクロ波程度になりこれは電氣的に測ることができる。よって、光コム技術は、マイクロ波帯を測る技術と、何番目のコムのモードとビートが取れているのかを特定する技術の上に成り立っている。

1.3 光コム開発の目的

光コム開発の目的として、できるだけ大きな周波数: $\omega[\text{Hz}] = [1/\text{s}]$ を測るということがある。誤差も考慮した周波数: ω と時間: t についての式: $1 = (\omega \pm \Delta\omega)(t \pm \Delta t)$ より、 $\frac{\Delta t}{t} \sim \frac{\Delta\omega}{\omega}$ となる。ここで周波数について注目すると、測定誤差: $\Delta\omega$ が一定で測定周波数: ω の桁が大きくなった時、不確かさ: $\frac{\Delta\omega}{\omega}$ は小さくなる。ゆえに時間の精度: $\frac{\Delta t}{t}$

は良くなる。時間測定の精度向上の目的として周波数の大きな帯域の周波数測定は重要なものである。

電氣的に作れるパルスの最大の周波数は、 10^{11}Hz 程度である。また、光の作れるパルスの最大の周波数は、 10^{15}Hz 程度である。[10] よって、光帯域を電氣的に測ることはできない。そこで、光周期測定のために光コムが開発された。[3] 光コムで光帯域まで届く周波数の「ものさし」を作る。参考のため、電磁波の種類とその帯域を示した図 1.2 を載せる。

電磁波		周波数(Hz)
	長波	$\sim 3 \times 10^5$
	中波	$3 \times 10^5 \sim 3 \times 10^6$
	短波	$3 \times 10^6 \sim 3 \times 10^7$
高周波	マイクロ波	$3 \times 10^8 \sim 3 \times 10^{12}$
光	赤外線	$3 \times 10^{12} \sim 4 \times 10^{15}$
	可視光線	$4 \times 10^{15} \sim 8 \times 10^{15}$
	紫外線	$8 \times 10^{15} \sim 2 \times 10^{16}$
	X線	$2 \times 10^{18} \sim$
	γ線	

図 1.2 電磁波とその周波数 (参考：文献 [7]p.166)

なお、ここで用いた「測定誤差: $\Delta\omega$ が一定で測定周波数: ω の桁が大きくなった時」という仮定は光コムにおいて成立している。これは、マイクロ波帯域の周波数測定を用いて光帯域の周波数を測るため、 $\Delta\omega$ はマイクロ波周波数測定の誤差、 ω は光帯域の周波数となるためである。

1.4 光コム発明までの歴史

1960 年に「メートル」について原子ベースの定義を導入した。その数年後、「秒」についても原子ベースの定義とした。[2] それによると、SI 秒は ^{133}Cs の遷移を用いて 9,192,631,770 回とされた。[3] なおこれはおよそ 10^9Hz 程度でマイクロ波帯の遷移である。そして 1983 年に光速 $c = 299,792,458[\text{m/s}]$ が定義値となった。[2] これにより、光波長計で波長を測ることで周波数を決定できるようになったが、相対的に 7 桁の精度であった。[3] ここで、電磁波の種類とその周波数についてまとめた図 1.2 を見ると、電磁波の帯域についてマイクロ波の周波数で 8~11 桁程度、光周波数で 13~

15桁程度であり、光波長計の精度では到底光帯域の周波数を精密に測定するのが難しい。そこで、周波数を直接測ることを考えた。

まず、「周波数チェーン」というものが開発された。これでは、複数の大型レーザー、マイクロ波源、非線形通倍混合素子を必要とする。低い周波数から次々に通倍（整数倍）と混合を組み合わせて、被測定レーザーとのビートをとることで高周波数 (10^{12} から 10^{14} Hz) を測定する。[4][5]

これを、式で具体的に見てみる。まずミリ波帯程度の帯域の周波数測定で、レーザーとマイクロ波発振器の周波数をそれぞれ ν_l, ν_m とおくと、次式のビート周波数（うなり） $:\nu_{beat}$ が測定される。

$$\nu_l - m \times \nu_m = \nu_{beat} \quad (1.1)$$

そして、より高い光周波数帯 (10^{14} [Hz] 程度まで) において、被測定周波数の 1/10 倍程度の周波数が比較的近いレーザー（周波数: ν_l ）をさらに加える。すると、測定するビート周波数: ν'_{beat} は次式のようにになる。[5]

$$\nu - l \times \nu_l \pm m' \times \nu_m = \nu'_{beat} \quad (1.2)$$

よって、周波数が大きくなるにつれて系も複雑化する。

また、具体的に CH_4 レーザの周波数測定における回路図を図 1.3 に載せる。途中で $\text{HCN}, \text{H}_2\text{O}, \text{CO}_2$ レーザをおいている。図 1.3 から系も複雑さがわかる。

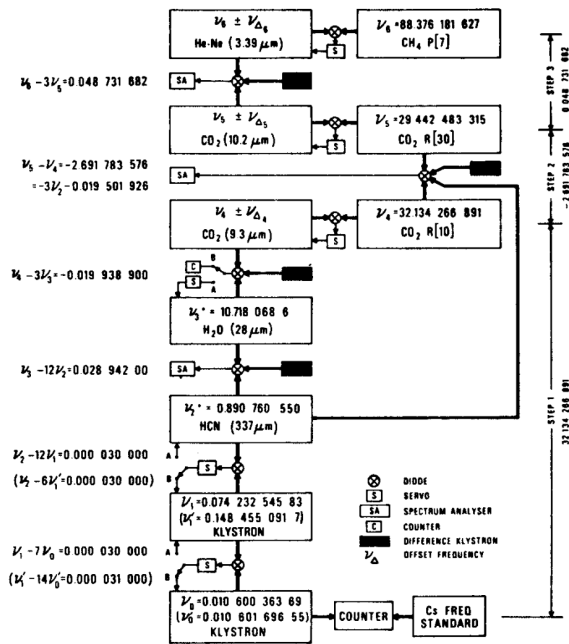


FIG. 1. Stabilized laser frequency synthesis chain. All frequencies are given in THz; those marked with an asterisk were measured with a transfer laser oscillator tuned to approximate line center.

Copyright © 1973 American Institute of Physics

192

図 1.3 周波数チェーンの具体例 (引用:文献 [6] fig.1)

周波数チェーンと光コムにおける光周波数測定方法の違いを載せた図を図 1.4 に載せる。このシステムは、学校の教室を占める大きさで運用にも多くの研究者を必要としたため、連続運転には向かない。また、特定の 1 つの周波数しか測ることができなかった。[1]

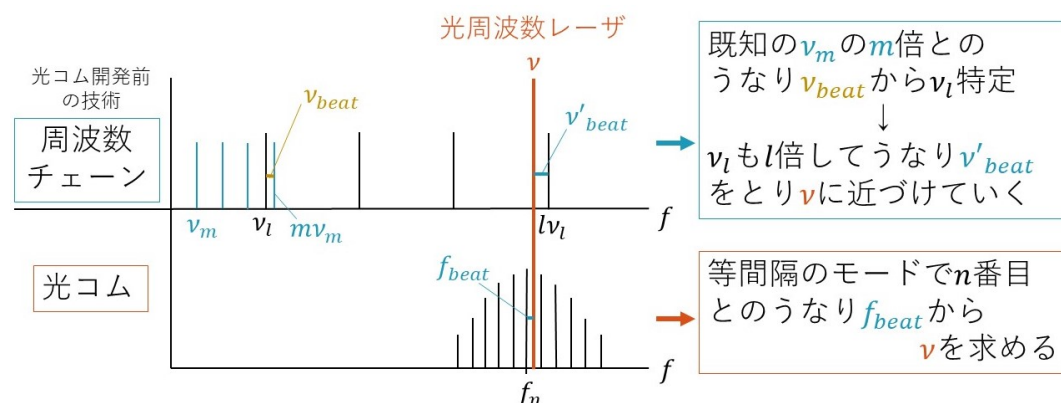


図 1.4 周波数チェーンと光コムにおける光周波数測定方法

1999 年、Hänsch らが「超短パルスモード同期レーザによる光コム」をついに実現した。なお、大津らによって電気光学変調器による光コムも実現していたが、非線形結晶との相性から前者が優位となった。その直後、Ti:サファイアレーザの出現により、1 オクターブ帯域で周波数を広げることができるようになったため、たった 1 台のレーザで可視から近赤外線の周波数を測定ができるようになった。[1] この光周波数コム技術によって、John L. Hall と Theodor W. Hänsch は 2005 年に Nobel 物理学賞を受賞した。[2]

一定のモード間隔を持つ光コムの作り方は 1 つではないが、ここでは、主にこのモード同期レーザに基づく光コムについて述べていく。

第2章 光コムを支える現象と技術

2.1 コムがたつ仕組み

この章では、レーザが持っている「共振器」と「利得媒質」について説明する。図 2.1 にレーザの簡単な仕組みの例を載せる。「共振器」は、等間隔のモードをつくる。また、「利得媒質」は誘導放射で光を増幅するが、これによってレーザが発振する帯域が制限される。

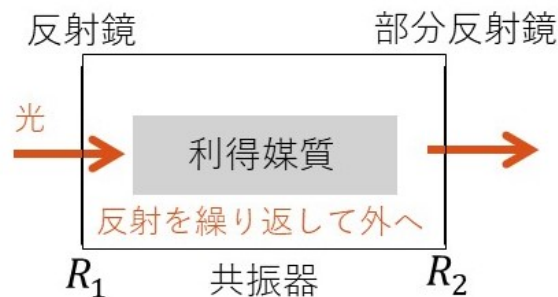


図 2.1 レーザのようす (例)

加えて、短パルスを作るには位相が揃っていることが重要である。短パルスを実現する「モード同期 (Mode Lock)」についても述べる。

2.1.1 共振器の原理

共振器とは、レーザの主要部で出力されるビームの性質を左右する。共振器を図で模式的に書いたものが図 2.2 である。図 2.2 のように箱型の共振器だけでなく、円形の共振器もある。共振器内のビームについて横モードと縦モードがあるが、共振器の軸方向の距離による電界の変化に関する縦モードについて考える。共振器をなす反射鏡が高反射率をもつため、そこで電界がゼロで節をもつ。

つまり電界が共振器内で定在波をつくるので、共振器内で残る波は半波長の整数倍の波だけである。この定在波条件を式で書くと次のようになる。

$$L = \text{整数} \times \frac{\lambda}{2} = \text{整数} \times \frac{c\pi}{n_{cav}\omega} \quad (2.1)$$

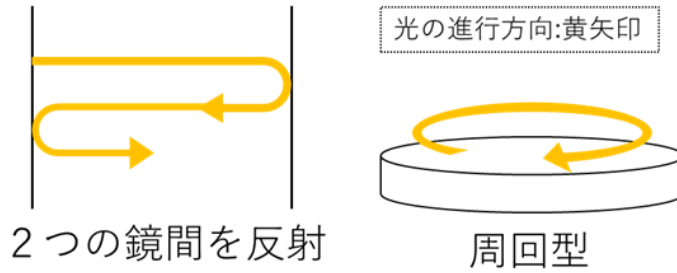


図 2.2 共振器内で光が共振する

ただし、 L :共振器長、 λ :波長、 n_{cav} :共振器内の平均屈折率である。ゆえに、許される角周波数: ω_{mode} は次のようになる。

$$\omega_{mode} = \text{整数} \times \frac{c\pi}{n_{cav}L} \quad (2.2)$$

これを言い換えるとモード間隔: $\Delta\omega_{mode}$ は、

$$\Delta\omega_{mode} = \frac{c\pi}{n_{cav}L} \quad (2.3)$$

と書ける。これは、共振器長が小さくなると、モード間隔は大きくなることを示す。なお、レーザの発光スペクトルは、この縦モードと共振器内の利得媒質から決まる。[8]

2.1.1.1 微小共振器、Microresonator

節 2.1.1 に述べたように、共振器長が小さいほどモード間隔は大きくなる。よって、共振器の小型化は非常に有益である。2000 年以降、より高い性能（高い Q 値）の共振器を微小で作れるようになった。微小共振器では、図 2.2 の周回型の図のような円環形やディスク形の共振器の内側の壁で、光を全反射させて周回させて閉じ込める。その中で四光波混合（詳細：6.6.3）を連鎖的に発生させることでコム状のスペクトルを発生させる。直径が小さいほど、縦モード周波数間隔が広がる。これに基づき光コムを作りモードロックを実現すると、より高い繰り返し周波数の光パルス列が得られる。[11]

2.1.2 レーザ発振の閾値

「レーザ発振」とは、外部から信号を入力しない状態で特定の振動を発生させることで、増幅器の出力が入力に十分な強さのときに起きる。レーザ発振が起きるための条件を考えていく。共振器の中には、「利得媒質（レーザ媒質）」というものが入っており、この誘導放出によって光を増幅する。

ここで、長さ L で両側に 2 枚の反射鏡をもつ図 2.3 のような共振器を考える。

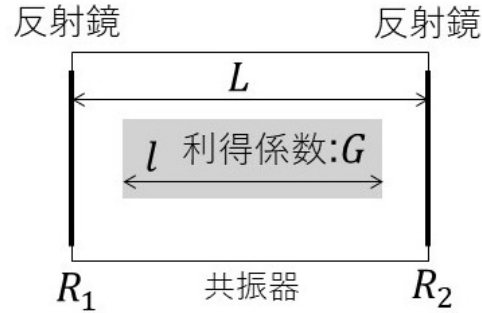


図 2.3 共振器のようす

この共振器は長さ l の利得媒質をもち、共振器の反射鏡の反射率は R_1, R_2 とする。なお、一方の反射鏡の反射率は 100% 近くだが、他方はレーザ出力を取り出すために、80 ~ 99% 程度である。さらに、レーザ媒質の利得係数を G とする。これは、右向きに進む光の強度を $I_1(z)$ とすると、レーザ媒質中で次の式が成り立つことを意味する。

$$\frac{d}{dz} I_1(z) = G I_1(z) \quad (2.4)$$

この解は、

$$I_1(z) = I_1(0) \exp[Gz] \quad (2.5)$$

となる。つまり、レーザが媒質を 1 度通るごとに強度が $\exp[Gl]$ 倍されることを示す。ここでレーザ発振の条件を考えると、共振器内のある点から 1 往復して戻ってきた時の強度がもとの強度を超えればよい。今考えている共振器で光が 1 往復する間に 2 枚の反射鏡で 1 枚ずつ反射し、レーザ媒質を 2 回通る。よって、レーザ発振の条件は、次のようになる。

$$R_1 R_2 \exp[2Gl] > 1 \quad (2.6)$$

これを利得係数について解くと、

$$G > -\frac{1}{2l} \ln[R_1 R_2] \quad (2.7)$$

となる。ここで、反射率 R_1, R_2 は 1 に近いから、透過率 $T_1 = 1 - R_1, T_2 = 1 - R_2$ を用いて $\ln[1 - x] \sim -x (x \ll 1)$ の近似を式 (2.7) に行うと次のようにかかる。

$$G > \frac{1}{2l} (T_1 + T_2) \quad (2.8)$$

要するにこのレーザ発振の条件は、利得媒質による光の増幅の効果が、共振器内の光の損失を上回るということである。この光の損失というのは、上の例では 2 枚の反

射鏡の反射率が 100% でない点によるものであるが、他には光学素子による光の反射、散乱、吸収や光の回折などの原因がある。このような条件を満たすために必要な最低の利得の大きさをレーザ発振のための利得係数の「閾値」: G_{th} という。これは、上の例では次のようになる。

$$G_{th} = \frac{1}{2l}(T_1 + T_2) \quad (2.9)$$

利得が閾値を超えているとき、共振器内での光強度は時間とともに増加するが、当然無限に増加し続けることはない。これは、強度が大きくなると誘導放出過程によってレーザ媒質内に生じている反転分布（詳細 6.3.1）が小さくなり、利得が減少するからである。よって、利得が閾値を超えたものだけが発振する。レーザ媒質の利得は、媒質の種類によって決まる広い周波数範囲に広がる。このレーザ媒質の利得スペクトルと閾値の関係から決まる発振するモードについて表した図を図 2.4 に載せる。[9]

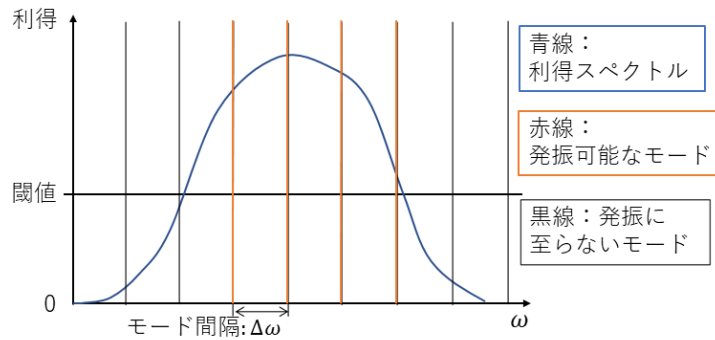


図 2.4 利得スペクトルと閾値から発振するモード（参考：文献 [9] 図 2.13）

2.2 オフセット周波数: f_0 の存在

結晶の屈折率は、周波数とともに必ず変化する。これを「分散」という。[8](詳細：6.6.2) よって、実際には非線形結晶（詳細：6.6.1）、フォトニック結晶などの結晶に光を入射することなどにより、キャリア（搬送波）の位相速度とエンベロープ（包絡線）の群速度が共振器内で異なるため、位相差が生じる。この位相差から出てくる振動数をキャリア-エンベロープオフセット周波数 (carrier-envelope offset (CEO) frequency) という。[1] このずれを f_0 とおくとキャリアとエンベロープの表式でずれの分は、 $\exp[2\pi i f_0 t]$ と書けそうである。

なお、フォトニック結晶とは、屈折率が周期的に変化するような結晶である。これは、光の波長より細かいサイズの構造をもった材料を人工的に作れるようになったことで実現した。軽くその特徴を述べておく。通常の結晶でも、バンドギャップ中の欠陥や不純物はエネルギーをもつが、同様にフォトニック結晶でも欠陥準位を作れる。

そこでフォトニック結晶中に 1 次元の欠陥を作ると光は欠陥部分を伝わるができる。全反射の性質を用いたものでは、曲率が大きくなると光が外に漏れてしまうが、フォトニック結晶を用いたものでは構造の微細化も実現できる。[12] ファイバの径方向に周期構造をもった結晶において、これを用いると光パルスの広がりを抑え光強度を高くできる。[1]

2.3 時間軸上の短パルス

光コムの全光電場: $E(t)$ はその周波数: ω_c のキャリア（搬送波）と振幅: $A(t)$ のエンベロープ（包絡線）を用いて次のようにかける。

$$E(t) = A(t)e^{i\omega_c t} \quad (2.10)$$

さらに、光コムの全光電場はモード間隔: f_r のモードの足し合わせで書けるはずである。 n 番目のコムモードについてその振幅を A_n 、角振動数を ω_n とする。よって、全モード数: N として、全光電場: $E(t)$ は、周期的フーリエ級数和で次のように書ける。

$$E(t) = \sum_{n=1}^N A_n e^{i\omega_n t} \quad (2.11)$$

ここで n 番目の振動数: f_n について、この章の冒頭で言及したようにオフセット周波数: f_0 も含めると次のようにかける。

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = n f_r + f_0 \quad (2.12)$$

この式をコム方程式と呼ぶ。この式は、 f_r と f_0 のたった 2 つの自由度で書かれている。つまり、この 2 つの量が求まれば、光コムの各モードの光帯域の周波数が決まる。[3]

なお、 f_0 について、キャリア-エンベロープオフセット位相: $\Delta\phi$ を用いて次のようにかける。

$$f_0 = \frac{\Delta\phi}{2\pi} f_r \quad (2.13)$$

ただし、次を満たす。

$$0 \leq f_0 < f_r (0 \leq \Delta\phi < 2\pi) \quad (2.14)$$

この $\Delta\phi$ は、光パルスの電場（キャリア）のピークがエンベロープのピークに対して 1 パルスごとにずれていく位相差である。上述のように、これは群速度分散などに起因するものである。[1] 以上の周波数空間の光コムと時間軸上の短パルスのフーリエ変換の関係を表した図 2.5 を載せる。なお、図中の Δ はキャリア-エンベロープ位相 $\Delta\phi$ を表す。

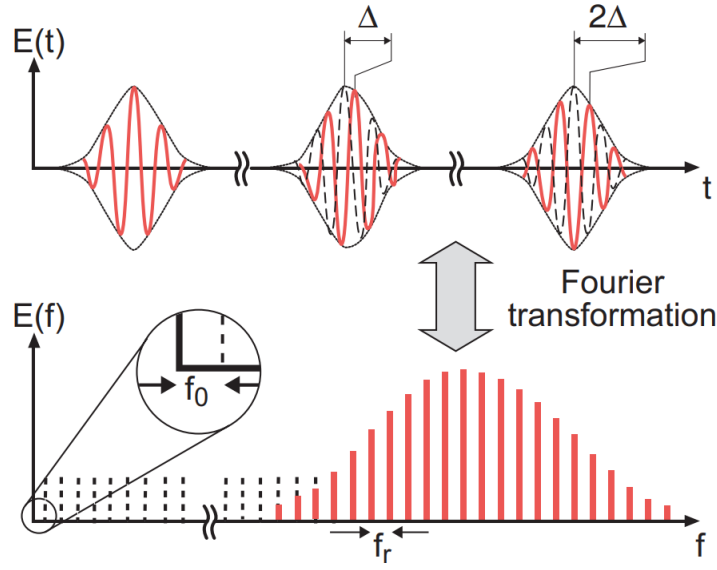


図 2.5 周波数と時間のフーリエ変換 (文献 [2]figure.3 より引用)

以下では、Google Colaboratory で同じモード間隔の波の合成を行い、合成する波の数による合成波の変化の様子を見る。

2.3.1 Python で余弦波の合成を見る

Google Colaboratory で、実際に余弦波を複数個合成した波の形を見ることで、短パルスが出来上がっていく様子を確認する。ただし、合成波は 1 で規格化する。ここで、モード間隔 $\omega_r = 2\pi f_r = 5$ 、オフセット $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2$ 、 $N = 10$ 、時間 $t = (0, 3)$ を 1000 分割とする。 m 番目の角周波数を次のように置く。

$$\omega_m = (N + m)\omega_r + \omega_0 \quad (2.15)$$

まず、 $m = 0, 1$ の 2 個の波の合成 A_2 をみる。

$$A_2 = \frac{1}{2}(\cos[(N\omega_r + \omega_0)t] + \cos[((N + 1)\omega_r + \omega_0)t]) \quad (2.16)$$

この 2 個の余弦波合成の結果を図 2.6 に載せる。なお、図 2.6 中には包絡線（エンベロープ） $A_e = \cos(\omega_r t)$ もともに橙線で載せた。

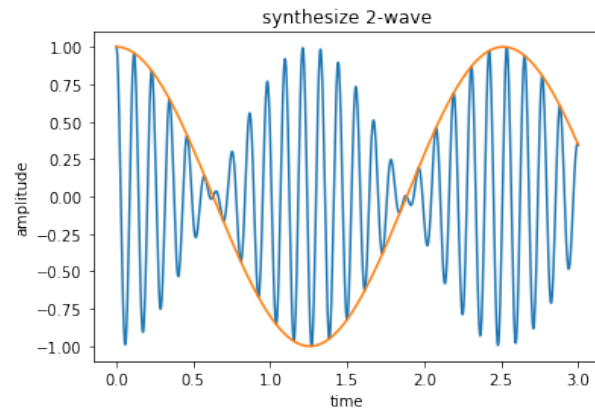


図 2.6 2 個の余弦波合成

図 2.6 より、青線の搬送波の細かい振動と、橙線の包絡線のうなりを確認できる。

次に、同様に $m = 0, 1, 2, 3$ の 4 つと $m = 0, 1, 2, 3, 4$ の 5 つの余弦波を合成した波を図 2.7 に載せる。なお、青線が 4 個、橙線が 5 個の波の合成である。

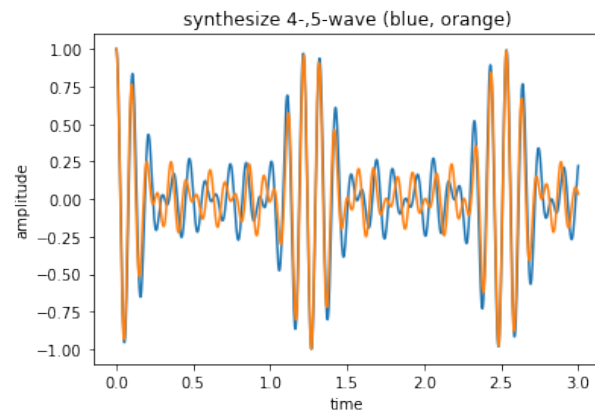


図 2.7 4 個と 5 個の余弦波合成

図 2.6, 2.7 より、重ね合わせる数が増えていくとピークも鋭くなる短パルスができていくことが分かる。

2.4 モード同期レーザ, Mode Locked Laser

前節で見たような時間軸上の超短パルスは、ある時刻で全てのスペクトル成分の位相が揃うと成立する。よって、スペクトルが等間隔である時刻に全ての位相が揃うような状態（モードロック状態）で発振するレーザを「モード同期レーザ」という。[10] モード間隔を大きくするような利得媒質でより短いパルスを得られる。このような短

パルスを実現するレーザとして例えば、色素レーザや Ti:サファイアレーザなどがある。[8]

以下では、Google Colaboratory で同じモード間隔の波の合成を行い、位相のずれによる合成波の違いを見る。

2.4.1 Python でモード同期を見る

Google Colaboratory で、余弦波を 10 個合成する。モード同期している場合と、1 つだけ位相がずれている場合をみる。ここでも、モード間隔 $\omega_r = 2\pi f_r = 5$ 、オフセット $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2$ 、 $N = 10$ 、時間 $t = (0, 3)$ を 1000 分割とする。 m 番目の角周波数を

$$\omega_m = (N + m)\omega_r + \omega_0 \quad (2.17)$$

とし、 $m = 0, 1, \dots, 9$ と 10 個の余弦波をとる。

モード同期している、つまりある時刻で全ての位相が揃うとき合成波は次のようにかける。

$$A = \frac{1}{10} \sum_{m=0}^9 \cos \omega_m t \quad (2.18)$$

このモード同期した 10 個の波を合成したものを縦軸:振幅、横軸:時間で表した図が図 2.8 である。

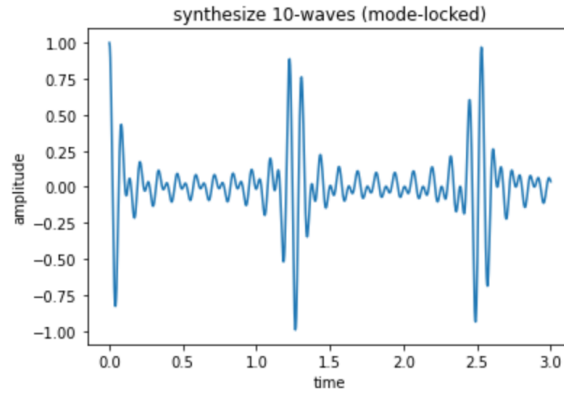


図 2.8 10 波合成（モード同期）

図 2.8 より、10 個の余弦波の足し合わせでも鋭いパルス列ができているのが分かる。次に、10 個目の波だけ $\omega_d = \sqrt{6}$ ずれている場合の合成波を考える。10 個目の波の角周波数は、 $\omega_{9d} = (N + 9)\omega_r + \omega_0 + \omega_d$ とかける。このときの合成波は次のようにかける。

$$A = \frac{1}{10} \left(\sum_{m=0}^8 \cos \omega_m t + \cos \omega_{9d} t \right) \quad (2.19)$$

この1つだけ位相のずれた10個の波を合成したものを縦軸:振幅、横軸:時間で表した図が図 2.9 である。

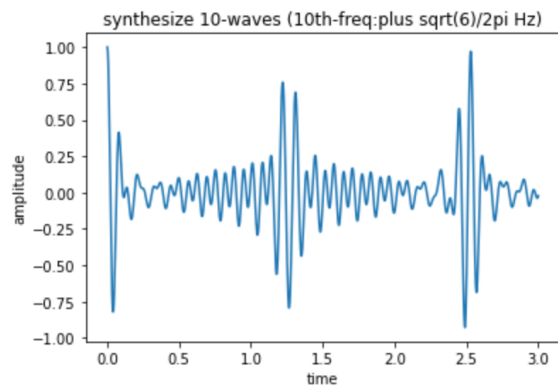


図 2.9 10 波合成（10 個目のみ位相をずらす）

図 2.8、図 2.9 より 1 つでも位相がずれると、特に図中央から左側かけて合成波のピークが崩れていくことが分かる。

また、さらに $m = 10, 11, \dots, 19$ の波を加えて 20 個の波の合成をし、モード同期したものと 10 個目と 20 個目の位相をずらして計算したものを載せておく。まず、20 個の波のモード同期した合成波は、図 2.10 のようになる。

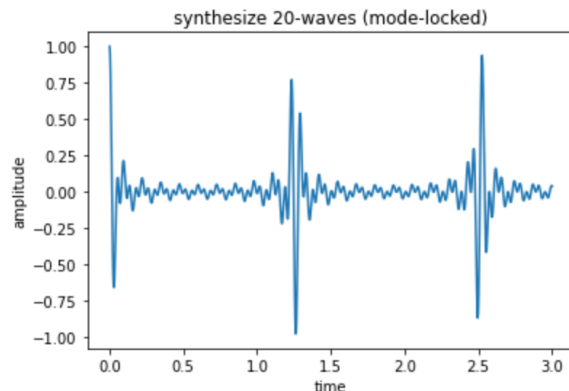


図 2.10 20 波合成（モード同期）

図 2.10 より、10 個の余弦波合成の図 2.8 よりパルス列が鋭くなっていることも確認できる。次に、10 個目のモードを $\frac{\sqrt{6}}{2\pi}$ [Hz]、さらに 20 個目のモードの位相を $\frac{\sqrt{7}}{2\pi}$ [Hz] だけずらした 20 個の波の合成波を図 2.11 に載せる。

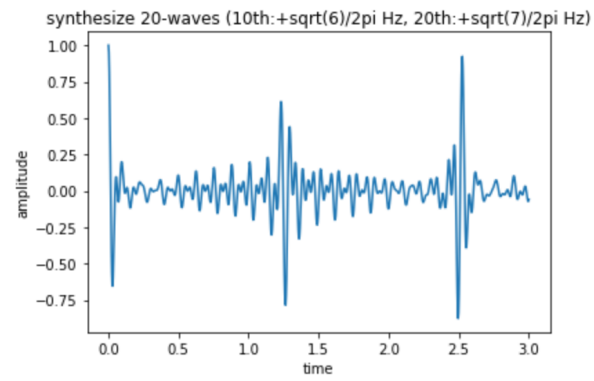


図 2.11 20 波合成（10 個目と 20 個目の位相ずらす）

ここでも、図 2.11 は、図 2.10 と比べて図中央から左側でパルス列が乱れていることが分かる。以上より、1 つ程でもモードの位相がずれると短パルス列が乱れることが分かる。

第3章 コム方程式の各値

以上より、光コムの繰り返し周波数: f_r 、オフセット周波数: f_0 を考慮すると、 n 番目のモードの周波数: f_n を次式のようにかける。

$$f_n = n \times f_r + f_0 \quad (3.1)$$

この式を、コム方程式 (Comb Equation) という。 f_r, f_0 の2自由度で光コムのモードが決まることが分かる。ここで、各値の桁数を見ておく。 f_n は光の周波数なので $10^{13} - 10^{15}$ [Hz] 程度である。また、 f_r, f_0 はマイクロ波帯 $10^8 - 10^{11}$ [Hz] 程度である。よって n は $10^5 - 10^6$ 程度となる。

3.1 f_r, f_0 の決定

3.1.1 要求される条件

マイクロ波帯域にある f_r, f_0 の測定において、当然不確かさはある。ここで、特に 10^5 から 10^6 倍されることで測定にも大きな影響を与える f_r の誤差: Δf_r について考察する。光周波数を測定するにあたり、光コムとビートを取りビート周波数を測定するため、どの光コムのモードとビートが取られているか、把握することは非常に重要な問題である。ここで、コムが一本分ずれないための条件について考察する。 n 番目のコムの周波数 f_n について、誤差を合わせて考えると、

$$f_n = N \times (f_r \pm \Delta f_r) + f_0 \quad (3.2)$$

と書ける。ここで

$$N \Delta f_r < f_r \quad (3.3)$$

を満たさないと、コム一本分ずれてしまう。また、不確かさ: $\frac{\Delta f_r}{f_r}$ で見ると、

$$\frac{\Delta f_r}{f_r} < \frac{1}{N} \quad (3.4)$$

とかける。

実際に適当な数値を代入してみる。 $N \sim 10^5$ とすると、不確かさ: $\frac{\Delta f_r}{f_r}$ について要求される値は 10^{-5} より小さい値となる。

ここで実際に存在する装置での値と比較してみる。最も厳しい確度要件を満たすような高確度の光波長計について、その波長確度は $\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = 0.2 \text{ ppm} = 0.2 \times 10^{-4}$ となる

ようである。[24] ここで $c = (f \pm \Delta f)(\lambda \pm \Delta \lambda)$ より、 $\frac{\Delta f}{f} \sim \frac{\Delta \lambda}{\lambda}$ である。よって、光波長計を用いれば Nf_r を決めることができる。

また、電波の送信設備用の基準発振器は周波数確度 $\frac{\Delta f}{f} = 1.3 \times 10^{-10}$ より良いものが用いられ、さらに送信設備の点検を行うための測定器は $\frac{\Delta f}{f} = 1.3 \times 10^{-11}$ より良い周波数確度の基準発振器が必要である。しかし、これほどの確度要求となると水晶発振器では要求性能を満たすことができないため、ルビジウム原子発振器などの原子発振器が使われる。[25]

マイクロ波帯域の測定は十分な精度で行われている上で、光コム技術が成り立っている。

3.1.2 f_r の測定

光コムの2つの光モードの間の差の周波数をとることで f_r についてのみの情報を取り出す。[3]

$$f_n - f_m = (nf_r + f_0) - (mf_r + f_0) = (n - m)f_r \quad (3.5)$$

目盛りとしての正確さについて、コム全体の高周波側半分から低周波側半分の差の比較することで中心に対して対称かどうかをみる方法がある。2003年の報告によると、モード間隔が 3×10^{-17} よりもよい精度とされている。[1]

3.1.3 f_0 の測定（自己参照法）

光コムが1オクターブあるとき、自己参照法によって f_0 を測定できる。これは、一番低いモード f_n を2倍にしたものと、1オクターブのモード f_{2n} とのヘテロダインビートを取る方法である。これを式にすると、

$$2f_n - f_{2n} = 2(nf_r + f_0) - (2nf_r + f_0) = f_0 \quad (3.6)$$

となる。[3] 自己参照法を表した概念図を図3.1に載せる。

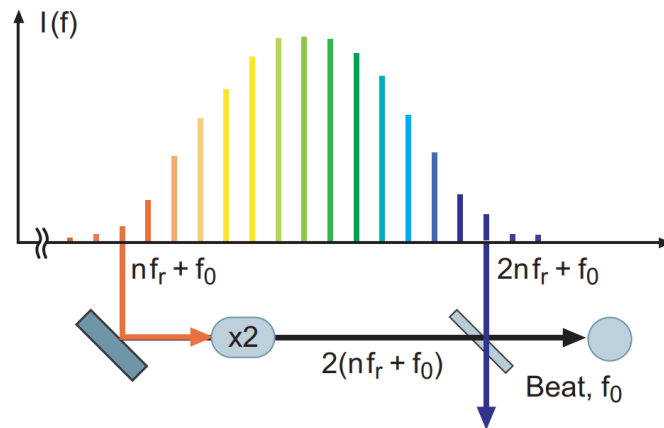


図 3.1 自己参照法（文献 [2]figure.3 より引用）

3.2 マイクロ波帯の周波数の測り方

光帯域より周波数の小さい高周波などの周波数の測定方法について主に 2 つの方法がある。1 つ目は「直接計数方式」で 1 秒間の繰り返し数を数える方法である。これは、測定周波数が大きくなるにつれ測定桁数も大きくなってしまうため、桁数の大きな周波数の測定に不向きである。2 つ目は「レシプロカル方式」で時間間隔を測るものである。この方法では、周期が周波数の逆数であることを利用して周期の測定から周波数を求めている。周波数分解能は、内部クロックの時間分解能に依存していて、直接計数方式とは異なり測定する周波数の桁数によらない。よって、レシプロカル方式が主流となっている。[16][17]

このレシプロカル方式を見ていく。上述のように、クロック周波数によって測定分解能が決まる。例えば、500MHz のクロックで 2ns 程度の分解能となる。また、これ以上の高分解能化は回路の技術応用上、実用的でない。よって、図 3.2 に示すように内部クロックの 1 周期以下の短い端数時間を測定する「端数時間測定方式」がとられている。

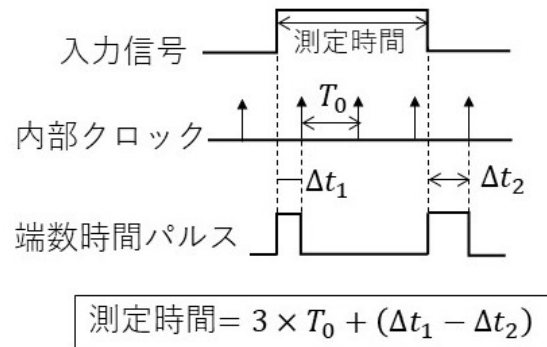


図 3.2 端数時間測定方式 (参考：文献 [17] 図 1)

この端数時間を測る方法はいくつかある。例えば、「多相クロック方式」では、位相を少しずつずらした内部クロックを複数台おく。しかしこれは分解能を 1 桁上げるのには簡単だが、それ以上は回路規模が大きくなってしまう。他に、端数時間を電圧に変換して AD 変換する「時間/電圧変換方式」がある。[17]

第4章 時間測定の精度向上

4.1 光時計

Cs 原子時計はマイクロ波帯の遷移の標準を利用している。原子やイオンの励起状態と基底状態の光遷移を基準としたより高い「光周波数標準」を用いることで、さらに時間について精度の高い時計を作ることができる。そこで、より高精度な「光周波数標準」と周波数カウンタとしての「光コム」を組み合わせると、「光時計」ができる。[19]

これまでは、光コムを Cs 原子時計などのマイクロ波源に安定化して光周波数標準を計測していた。一方で、光コムを光周波数標準に安定化して、マイクロ波の周波数を作ることにもできる。つまり、これは光周波数から桁数の小さいマイクロ波周波数への「downconversion」で、これによりマイクロ波帯の精度も向上できる。ただし、これを行うには光周波数標準の性能向上が重要である。このマイクロ波と光周波数を結ぶ光コムの関係を図にしたものを図 4.1 に載せる。なお、光周波数標準として、「イオントラップ」や「自由落下の冷却中性原子」の2つの方法があるが、これには利点と欠点がある。しかし、この両方の利点を併せ持つ「光格子時計」が実現した。[4] これらのイオントラップから光格子時計などの説明は 6.2.2 に載せる。

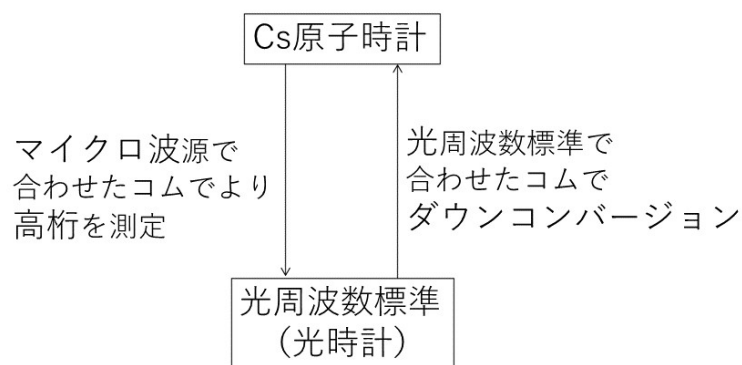


図 4.1 マイクロ波と光周波数を結ぶ光コムの関係（参考：文献 [4] 図 8）

4.2 その他の応用方法

光コムに応用方法として、前の章で見たように周波数標準、光時計、「秒」の定義に関わるような使用方法だけでない。分光器の広帯域かつ高精度な校正手段として天文分野でも期待されている。これらは、光コムを「ものさし」として使用するものである。他に、光コムを超短パルス列光源や、広帯域スペクトル光源などの光源として利用するものもある。[20]

第 5 章 まとめ

電氣的に測れる周波数は、マイクロ波程度が限界である。よって、より周波数の大きな光帯域の周波数は電氣的に直接測定することはできない。

$$f_n = n \times f_r + f_0 \quad (5.1)$$

そこで、 n 番目のモードが上式を満たすような周波数軸上で等間隔のスペクトルをもつ「光周波数コム」が実現した。これにより、被測定レーザとのビートをとってビート信号をマイクロ波にまで落とすことで光周波数の測定ができるようになった。ただし、予めマイクロ波の測定において繰り返し周波数: f_r やオフセット周波数: f_0 を、また光波長計で大まかに被測定レーザの周波数を見積もり Nf_r を定めておくことが必要である。

光周波数コムの実現により、光帯域の周波数測定から時間測定の精度を上げることができる。さらに光遷移標準の周波数を測定し測定桁数を大きくしていくことで、いずれはより良い精度の「秒」の定義にもなりうる。他にも、分光学から天文学など多岐に渡る応用がなされている。

第 6 章 付録

6.1 原子時計

原子時計の性能を見る尺度として、「正確さ」と「安定度」がある。「正確さ」は、 $\frac{\nu}{\nu_0}$ の値で評価する。ここで、 ν_0 は時計の出力する中心周波数、 $\delta\nu$ は中心値からのずれで主に外場や原子間衝突によるものである。一方で、「安定度」はアラン分散を用いて $\sigma_y(\tau) \sim \frac{\Delta\nu}{\nu_0} \frac{1}{\sqrt{N\tau}}$ のような出力する周波数のゆらぎの大きさで見る。ここで、 $\Delta\nu$ は観測される原子のスペクトル幅、 N は単位時間あたりに観測される原子数、 τ は積算時間を表す。よって、高精度化のためには、 ν_0 を大きくするのが簡単である。つまり、マイクロ波帯域から光帯域へと大きくしていくことで精度があがる。[23]

6.1.1 Cs 原子時計

1960 年に国際度量衡委員会はメートル原器を捨てて、1 メートルについて不活性ガスのクリプトンを用いた原子ベースの定義を導入した。その数年後、1 秒についても原子ベースの定義を導入した。それは、セシウムに基づく原子時計を読み取ることで、セシウムのある遷移の共鳴の振動についての時間を用いたものである。これらの定義により、波長と振動数の生成物として光速を決められることになる。なお、光速は 1983 年に最高の測定として誤差無しで 299,792,458[m/s] として定義された。[2] 現在の 1 秒の定義となっている「Cs 原子時計」について簡単に述べる。基本的に原子時計では、人為的に発生させた電磁波を原子や分子に照射しどの周波数で相互作用を生じるかを調べ、様々な方式がある。[5]

原子や分子のスペクトル線を基準として、より短い帯域 ($\sim 10^6$ Hz) の水晶発振器を周波数制御する方式がある。具体的には、水晶発振器の出力: ν を合成・逡倍して、原子または分子の周波数: ν_r に近くなるような $N\nu$ のマイクロ波を発生させる。これを原子または分子に照射する。そして、周波数差: $|N\nu - \nu_r|$ に比例した信号を検出し、その差がなくなるように水晶発振器を自動制御する。よって、 $\nu = \frac{\nu_r}{N}$ が分かる。この関係を図にしたものが図 6.1 である。[5]

セシウムは、常温で固体だが加熱して液体として用いる「セシウムビーム型標準器」や、セシウムを上方に打ち上げて上昇時と下降時の 2 回でマイクロ波ビームとの作用を起こす「原子泉方式」などがある。[5]

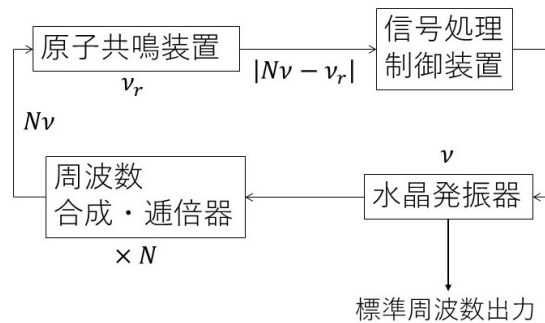


図 6.1 原子時計の受動型方式の関係図（参考：文献 [5]p.99）

6.2 周波数標準

国際標準は、SI 単位系で定義されている「秒」である。しかし、実質的には全世界の国家計量標準機関で運用されている原子時計約 300 台の重みづけ平均で計算される国際原子時に基づく協定世界時 (UTC) を基準値として校正がなされている。従来では、上位機関へ校正する器物を持ち込み、校正を定期的の実施していたが、これでは校正から次の校正までの間の器物のふるまいは保証されない。しかし最近では、GPS 衛星などの信号を仲介した遠隔校正が開発され、運ぶ必要がなく使用状態で校正できるようになったため、利便性が良くなり不確かさも低減しそうである。[16] 以下では、周波数の標準である「周波数標準」について述べる。

6.2.1 原子周波数標準

原子や分子の固有スペクトル線の周波数を基準に利用したもので、極めて高精度の周波数源である。特に、長期間の運転が可能で、基準に同期した 1 秒信号を供給できるようにし、時系の生成を行えるようなものを「原子時計」という。[5]GPS による周波数標準もあり、GPS と 10MHz の水晶発振器の 10^{-7} 倍の信号を比較する。このとき、水晶発振器の周波数安定性のためにコンピュータ処理が行われる。

基準信号として、セシウム標準発振器を用いることもできる。内蔵の水晶発振器を外部からの信号に合わせながら、その水晶発振器のエージング特性や温度特性などを学習する。外部からの基準信号が入らなくても、もとの水晶発振器より 10 倍以上も高い安定度の水晶発振器となる。[21]

6.2.2 光周波数標準

まず、従来の光時計「単一イオン光時計」と「自由落下の冷却中性原子による光時計」の利点と欠点について述べておく。「単一イオン光時計」について、レーザ冷却された単一イオンがトラップポテンシャルの底におかれることで、相互作用時間が長

いという利点がある。さらに、イオンを吸収波長よりずっと小さい領域に閉じ込めることで、吸収スペクトルがドップラー効果の影響を受けない。一方で、欠点として単一の粒子であるため、スペクトルの信号が弱く周波数安定度が上がらない点がある。

次に、「自由落下の冷却中性原子による光時計」について、約 100 万個の粒子が信号に寄与できるため、観測信号が強く周波数安定度が上がる。一方で、冷却原子の集団であるため、原子間の相互作用による光時計の不確かさがでてくるという欠点がある。

そこで、2001 年に東大工学部の香取氏によりこの 2 つの方法の利点をあわせもつ「光格子時計」がうまれた。これは、多くの原子をレーザー光の定在波で作られる光格子に閉じ込めることで、時計の周波数に影響を及ぼすドップラー効果などのいくつかの要因が消える。また、光格子中の全ての原子が光時計の安定化のための信号に寄与できるため、時計の周波数安定度が単一イオン光時計よりかなり良くなりそうである。[22] 光格子時計において光コムは、光遷移の周波数カウンタとしての役割を果たす。ここで、 f_{CEO} や f_{beat} は水素メーザ基準の固定周波数を使用する。 f_{rep} をカウントすることで周波数を測定する。[23]

6.3 レーザ

光コムを作るために、レーザーは主要な部分である。基本的なレーザーのしくみと、いくつかの具体的な種類のレーザーについてその特徴を述べておく。

6.3.1 反転分布

2 準位系を考える。下方の準位を 1，上方の準位を 2 とし、各エネルギーを W_1, W_2 とし、系の数を N_1, N_2 とする。また、角周波数 ω の光のエネルギー密度を $U(\omega)$ としたとき、単位時間当たりの変化の割合（レート，rate）を $BU(\omega)$ とおく。ここで、光の吸収によって単位時間あたりに下から上に遷移する系の数は、 $N_1BU(\omega)$ となる。一方、誘導放出によって単位時間あたりに上から下へ遷移する系の数は $N_2BU(\omega)$ となる。この関係を図 6.2 に示す。

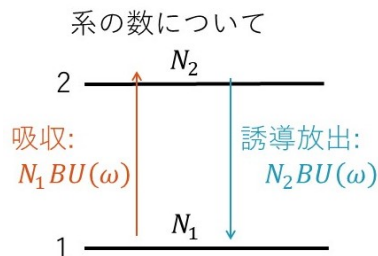


図 6.2 各準位と系の数

光のエネルギーは、これらに比例して増減する。よって、全体として

$$\begin{cases} N_1 > N_2 \text{で、吸収} > \text{誘導放出} : \text{減衰} \\ N_1 < N_2 \text{で、吸収} < \text{誘導放出} : \text{増幅} \end{cases} \quad (6.1)$$

となる。つまり、レーザにおける誘導放出による光増幅の原理は、上の準位の数の下準位の数より多いとき ($N_2 > N_1$) であり、これを「反転分布」という。

一般に、温度 T の熱平衡状態でボルツマン分布 $N_2 = N_1 \exp(-\frac{\hbar\omega}{k_B T})$ に従う。よって、反転分布で温度が負となってしまう。実際にこのような状態は存在しない。つまり、熱の流れがある非熱平衡状態で反転分布が実現する。

レーザに用いる系において、外部からエネルギーをいれて下準位を上準位にあげるポンピングによって生成される。ポンピングについては、光のエネルギーを用いた光ポンピングや、放電ポンピング、電流ポンピングなどがある。ポンピングには、逆過程が必ず存在する。よって、純粋な2準位系では反転分布は基本的に作れないため、レーザにするには準位は3つ以上必要である。[9]

6.3.1.1 3準位レーザ

3準位系を考える。各 $n = 1, 2, 3$ 準位のエネルギーを $W_n (W_1 < W_2 < W_3)$ とし、ポンピングレート (pumping rate) を Γ 、準位 m から準位 n への緩和レートを γ_{mn} とおく。光が存在しない時にも、準位 2, 3 から緩和によってある割合で下の順位に遷移する。ここで特に準位 3 から 2 への緩和が非常に速いとなると、ポンピングで結果的に準位 2 に多くの系が励起できる。その数が十分だと準位 2 と 1 の間に反転分布が起き、この間の遷移の共鳴に対して増幅される。各エネルギー準位の関係を図 6.3(a) に載せる。ポンピングと緩和の効果を含めて各準位に存在する系の数 $N_n (n = 1, 2, 3)$ の時間変化について、レート方程式が成立する。ここではその具体的な形は明示しないが、この式を定常状態で解くとレーザ準位間の緩和レートがポンピングレートより大きいとき反転分布が起きることを確認できる。[9]

6.3.1.2 4準位レーザ

図 6.3(b) のような4準位系で、3準位系よりも簡単に反転分布ができる。準位 $n = 0, 1, 2, 3$ の各エネルギーを $W_n (W_0 < W_1 < W_2 < W_3 < W_4)$ 、分布を N_n とおく。準位 0 から 3 へポンピングし、準位 3 から 2 で早い緩和が起き、大きな分布をためると準位 2 から 1 に反転分布ができ光が増幅される。各エネルギー準位の関係を図 6.3(b) に載せる。ポンピングがないとき準位 1 に全く系が分布していないとすると、非常に弱いポンピングでも反転分布がおきるため、4準位レーザが有利である。[9]

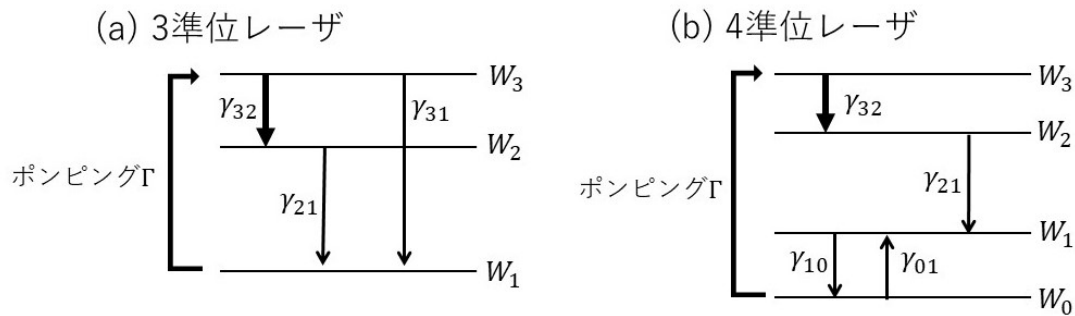


図 6.3 レーザのエネルギー準位の関係（参考：文献 [9] 図 2.7, 2.8）

6.3.2 具体的なレーザーの種類

6.3.2.1 Ti:サファイアレーザー

サファイア (Al_2O_3) に Ti^{3+} をドープした $\text{Ti}:\text{Al}_2\text{O}_3$ を用いた波長可変の固体レーザーである。帯域は、 $700\text{nm} \sim 1\mu\text{m}$ と広帯域である。波長選択素子を入れると波長可変レーザーになる。また、波長選択せず共振器構造をもたせてモード同期をすると短パルスができる。[9]

しかし、Ti:サファイアレーザーのスペクトル線だけでは1オクターブに達しないため、その光パルスをフォトニック結晶に入れ、自己位相変調（詳細：6.6.4）によりスペクトルを広げる。[1]

6.3.2.2 Er:ファイバレーザー

希土類イオン Er^{3+} を用いると、 $1.55\mu\text{m}$ で利得を得られる。これを光ファイバにドープすることで、光通信の増幅器（エルビウム添加ファイバ増幅器,EDFA）ができる。他の希土類イオンをドープしたものをレーザー媒質としたレーザーもあり開発も盛んである。[9]

6.3.2.3 色素 (dye) レーザ

有機分子である色素 (dye) をレーザー媒質に用いたレーザーで、モード同期短パルスレーザーや波長可変のレーザーとして機能する。主に溶液の状態であるから、液体レーザーである。色素は、分子量の比較的大きな複雑な分子であるため、多数の振動励起準位が付随できる。また非常に広い発光スペクトルとなる。種類も非常に多くあり、新しいものを合成することができる。これにより、発振波長など使用条件に応じたものを用意できるが、欠点として比較的早く劣化してしまう。ゆえに、波長可変固体レーザーの普及により使用分野は狭まってきている。[9]

6.4 デルタ関数とフーリエ級数

6.4.1 矩形波の極限としてのデルタ関数

時間的な短パルスを周期的な矩形波と近似することで、そのフーリエ級数から周波数空間を見る。周期を T として、

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(t) \quad (6.2)$$

$$f_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon} & (nT - \epsilon < t < nT + \epsilon) \\ 0 & (t < nT - \epsilon, nT + \epsilon < t) \end{cases} \quad (6.3)$$

の周期関数のフーリエ級数を考える。

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{1}{2\epsilon} e^{-in\omega t} dt = \frac{1}{T} \frac{\sin(n\omega\epsilon)}{n\omega\epsilon} \quad (6.4)$$

ここで、 $n\omega\epsilon \ll 1$ のとき、

$$c_n \sim \frac{1}{T} \frac{n\omega\epsilon}{n\omega\epsilon} = \frac{1}{T} \quad (6.5)$$

つまり、 n 番目の周波数において定数 $1/T$ となる。周波数軸でこれを書くと一定の高さのスペクトルが広がっている図となる。また、パルス列については

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(n\omega\epsilon)}{n\omega\epsilon} e^{in\omega t} \longrightarrow \delta(t) \quad (6.6)$$

とかけ、デルタ関数列になる。

6.4.2 ガウシアン型のデルタ関数

デルタ関数は、様々な形の関数の極限形としてかける。前節で見たものとは他の形として、ガウシアン形の極限で書けるものを考える。

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon\sqrt{\pi}} e^{-\frac{t^2}{\epsilon^2}} \quad (6.7)$$

このとき、パルス列は、極限を飛ばす前の形で

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\epsilon\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{(t-nT)^2}{\epsilon^2}\right] \quad (6.8)$$

このとき、フーリエ級数は

$$c_n = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt \frac{1}{T} \frac{1}{\epsilon\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{(t-nT)^2}{\epsilon^2}\right] e^{-in\omega t} \quad (6.9)$$

となる。

6.5 ローレンツモデル

誘電体が光の電場で振動する双極子の集まりであるとする「ローレンツモデル」を考える。共鳴周波数: ω_0 で幅 γ をもつ光のスペクトルをもつ「ローレンツ型」のスペクトルについて述べる。これは誘電体を光の電場で振動する双極子の集まりとするモデルである。このモデルにおいて、物質を構成する分子の分極率と密度から屈折率を計算できる。双極子の固有角周波数を ω_0 、減衰定数を γ とおく。[12] ローレンツ型をなす現象として、例えば自然放出光がある。周波数スペクトル: $I(\omega)$ は次のように書ける。

$$I(\omega) \propto \frac{\gamma}{\pi (\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} \quad (6.10)$$

ゆえに、この 1 次の相関関数: $g^{(1)}(\tau)$ は次のようになる。

$$g^{(1)}(\tau) = \frac{\int I(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega}{\int I(\omega) d\omega} = \exp[-i\omega_0\tau - \gamma|\tau|] \quad (6.11)$$

[13] 結晶を扱う際には規則性も考慮する必要があるが、アモルファスの場合はランダムに分布しているためローレンツモデルをそのまま用いることができる。

複素数で表された屈折率の複素部分について、吸収の効果を表す。ローレンツモデルにおいて、吸収線から十分離れた周波数領域で吸収はほとんどなく、屈折率変化のみが残される。光学材料は、通常この吸収のほとんどない周波数領域で用いられる。[12]

6.6 非線形光学現象

光コムを扱う際に出てくる主な非線形光学現象について述べる。非線形現象は、光コムを作る上で利用できる現象と信号を劣化させてしまう現象がある。例えば、「自己位相変調」など「四光波混合」を利用して光コムが作られる。一方で、ビート信号の劣化を招いたりする可能性も挙げられている。他に、出力スペクトルに光強度の弱い波長ができ、周波数測定ができない領域が現れてしまう原因として、「位相整合」などが考えられている。しかし、非線形効果でコムの正確さが低下する可能性については、 4×10^{-17} 以上と分かっており問題なさそうである。[1] 以下では、光学結晶と非線形現象である「位相整合」、「四光波混合」、「自己位相変調」について簡単に説明する。

6.6.1 非線形結晶

結晶を光学的性質で分類すると、等方性結晶、一軸結晶、二軸結晶となる。特に一軸結晶とは、結晶に固有の特別な軸方向（光学軸、c 軸）とこれに直交する方向で異方性を示す。電場の振動面が c 軸に直交する偏光を常光線、c 軸を含む偏光を異常光線という。[14]

6.6.2 位相整合

節の冒頭に述べたように、出力スペクトルに光強度の弱い波長ができる原因として「位相整合」に問題がある可能性が挙げられている。[1]

通常、非線形効果の影響は小さい。よって、有用な非線形変換効率を得るためには、長い非線形媒質がいる。これが有効に働くのは、新たに発生する波の間で同じ位相関係が全結晶にわたり存在し、電界が相加的に累積するときだけである。これが実現したとき、「位相整合領域にある」という。[8] 高い変換効率を得るには位相整合条件を満たすことは不可欠である。位相整合条件を具体的に書くと、波数の不整合量: Δk について $\Delta k = 0$ を満たすことである。[14] 一般に、これは結晶の非常に特殊な方向でしか起こらない。[8]

この現象が重要な理由は、結晶の屈折率が周波数とともに変化するからである。これを「分散」という。特に吸収線から離れた周波数領域において周波数とともに増加し、これを「正常分散」という。また吸収線の近くで屈折率の変化は正常分散から大きく逸脱し、これを「異常分散」という。[12] これは、非線形相互作用によって発生する波がポンプビームとは異なる速度で伝わることを意味する。[8] なお、光学材料は通常、吸収がほとんどない正常分散の領域で使われる。[12]

例えば「周波数の通倍」において、角周波数: 2ω の第 2 高調波は、 ω の基本波より遅い位相速度である。これは、結晶前面で発生する波が基本波より遅く背面に到達し、背面で発生する波と全面からの波の位相が一致しないことによる。[8]

位相整合の方法は、様々なものがある。特に複屈折を用いたものについて簡単に述べておく。まず複屈折とは、適当にカットした結晶の板を通して物体を見ると二重の像が見える現象である。その起源は、光が横波であり 2 つの直交する振動方向（偏光）があることと、結晶に異方性があることである。等方媒質中では光は同心球面状に広がるが、異方性媒質中では光は 2 つの変更に分けられそれぞれ異なる速度で伝播し複雑な形状で広がっていく。[12] よって、結晶中でそれぞれが異なる屈折率をもって伝播する。この偏光による屈折率差を利用して分散をキャンセルすることで位相整合を行う。結晶への入射角を調節して行うことが多く、それを確度位相整合法という。[14]

6.6.3 四光波混合

非線形効果のうち、誘電率の3次分極に起因するものを光カー効果といい、そのひとつに「四光波混合 (four-wave mixing, FWM)」がある。四光波混合は、2つ以上の異なった光がファイバ中に入射したときに発生する。3つの異なる波長の光を光ファイバ中に入れた時、それらのどれとも一致しない波長の光が発生する。それを「アイドラ光」と呼ぶ。

発生原理について述べる。入射前からある光をシグナル光といい、その周波数を f_{signal} とおく。さらに2つの周波数: f_{p1}, f_{p2} のポンプ光をいれる。すると、アイドラ光の周波数: f_{idler} は、次のように書ける。

$$f_{idler} = f_{p1} + f_{p2} - f_{signal} \quad (6.12)$$

ポンプ光が2波のときのスペクトルの関係の概念図を図6.4(a)に載せる。

ここで、2つのポンプ光の周波数が等しい時 $f_{p1} = f_{p2} \equiv f_p$ を考える。これを、「縮退四光波混合」という。このとき、アイドラ光の周波数は、

$$f_{idler} = 2f_p - f_{signal} \quad (6.13)$$

と書ける。[15] ここで、特に周波数の間隔について

$$f_{idler} - f_p = f_p - f_{signal} \quad (6.14)$$

となっており、アイドラ光とポンプ光間、ポンプ光とプローブ光間で等しくなっていることが分かる。ポンプ光が1波のときのスペクトルの関係図を図6.4(b)に載せる。

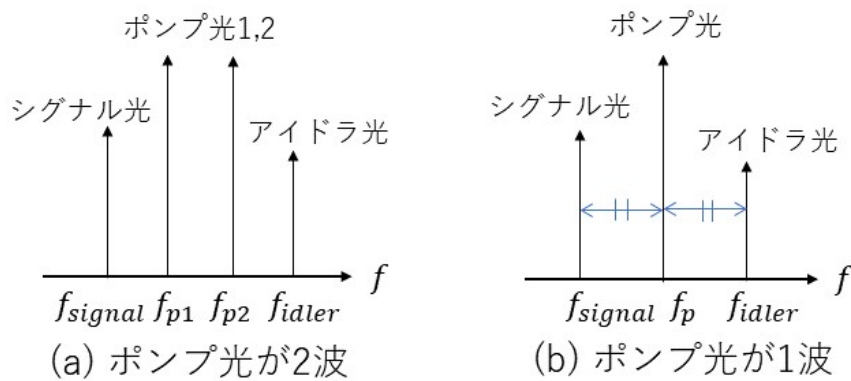


図 6.4 四光波混合 (参考: 文献 [15] 図 1)

6.6.4 自己位相変調

四光波混合の一種で、光コムのモード3つからエネルギー保存則を満たして第4の波が発生する。これによって、コムの外側へ同じモード間隔で新しい波が発生していく。Ti:サファイアレーザの光パルスをフォトニック結晶に入れることでこの自己位相変調がおき、発振する帯域が広がることで1オクターブの光コムが実現できる。[1]

6.7 ヘテロダイン法

周波数の測定方法の1つである「ヘテロダイン法」について簡単に述べておく。近い周波数 f_1, f_2 をもつ2つの光キャリアを考える。この合成波の周波数 F は、 $F = |f_1 - f_2|$ となる。このうなりの周波数を測定する方法をヘテロダイン法という。この差をとる測定技術は光コムの測定技術の中心でもあり、 f_r, f_0 の測定にも使われる。[3] 今から下で見るように f_r, f_0 ともある周波数の差分を取ることで決定する。ヘテロダイン法は非常によく使われる。

6.8 dB（デシベル）

デシベルとは、信号の大きさ、増幅の利得、 S/N （信号対雑音比）など、交流伝送特性を表すときに周波数領域と関係なく用いるものである。入・出力間などの任意の2点間の電圧、電流、電力などの関係を見るときに、これらの比をとって表すと便利である。具体的には、比の常用対数を取ったものが [B](ベル) でその 1/10 倍したものが [dB](デシベル) である。

常用対数を用いるメリットとしては、

- 比をそのまま扱うより大きな数を扱いやすい
- 増幅器または減衰器などを多段に組み合わせた回路などで、総合的な増幅または減衰量をそれぞれの和または差で計算できる。

などがある。[21]

ここで、具体的に図 6.5 のような回路を考えることで [dB] の表式を見る。

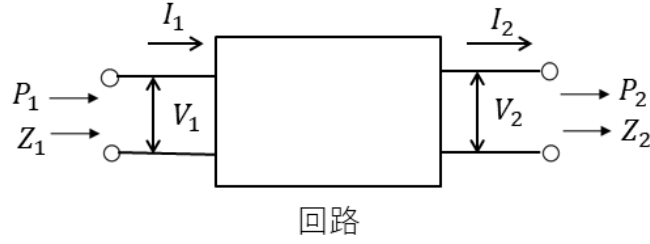


図 6.5 [dB] の表式をみるために考える回路図 (参考: 文献 [21] 図 2.2)

図 6.5 中の表式の入力側について、入力電力: P_1 、入力インピーダンス: Z_1 、入力電圧: V_1 、入力電流: I_1 とする。また出力側について、出力電力: P_2 、出力インピーダンス: Z_2 、出力電圧: V_2 、出力電流: I_2 とする。まず、「電力比」の B 表示を B 、dB 表示を b とすると次のようになる。

$$B = \log_{10} \frac{P_1}{P_2} [\text{B}] \quad (6.15)$$

$$b = 10 \log_{10} \frac{P_1}{P_2} [\text{dB}] \quad (6.16)$$

つまり、電力の dB 表示でみるとその入力出力比の常用対数の 10 倍の値となる。次に、 b の電圧または電流の表示をそれぞれ b_V, b_I として見る。まず電圧について見る。

$$b_V = 10 \log_{10} \frac{P_1}{P_2} = 10 \log_{10} \frac{\frac{V_1^2}{Z_1}}{\frac{V_2^2}{Z_2}} = 20 \log_{10} \frac{V_1}{V_2} - 10 \log_{10} \frac{Z_1}{Z_2} \quad (6.17)$$

ここで $Z_1 = Z_2$ のとき

$$b_V = 20 \log_{10} \frac{V_1}{V_2} \quad (6.18)$$

次に電流について見る。

$$b_I = 10 \log_{10} \frac{P_1}{P_2} = 10 \log_{10} \frac{I_1^2 Z_1}{I_2^2 Z_2} = 20 \log_{10} \frac{I_1}{I_2} + 10 \log_{10} \frac{Z_1}{Z_2} \quad (6.19)$$

ここで $Z_1 = Z_2$ のとき

$$b_I = 20 \log_{10} \frac{I_1}{I_2} \quad (6.20)$$

よって、電圧、電流の dB 表示ではそれぞれの入力出力比の常用対数を 20 倍にしたものとなる。

6.9 マイクロ波の測定

高周波（マイクロ波・ミリ波）の測定について述べる。計測に使われる計測器は、正しい値を計測するかどうか、正しい値をもつ「標準器」によって「校正」されている必要がある。[21]（詳細：6.2）ここで、いくつかのマイクロ波の周波数測定の方法について参考程度に示しておく。

6.9.1 マイクロ波周波数カウンタ

マイクロ波周波数カウンタには、「ヘテロダイン ダウンコンバータ方式」「トランスファ オシレータ方式」「ハーモニック ヘテロダイン方式」など様々な方式があるようである。ここでは「ハーモニック ヘテロダイン方式」について述べる。

被測定周波数： f_x を 2 分割してハーモニックミキサへ入れる。同時に、マイクロプロセッサで制御されたメインシンセサイザの周波数： f_1 とオフセットシンセサイザの周波数 $f_3 = f_1 - 100\text{kHz}$ もハーモニックミキサへ入れる。すると、出力は次のようになる。

$$f_x = n f_1 \pm f_2, f_x = n f_3 \pm f_4 \quad (6.21)$$

ただし、 n は高調波次数である。この 2 式より、

$$|n| = \frac{f_4 - f_2}{f_1 - f_3} = \frac{f_4 - f_2}{100\text{kHz}} \quad (6.22)$$

と書ける。よって、まずカウンタで $(f_4 - f_2)$ を計測して n を決定する。次に、 f_2 を測定し、また f_1 はマイクロプロセッサに記憶された値であるため、この 2 つの値を代入すると、 f_x が決まる。

基準周波数を持っているものは、その基準発振器の周波数安定度で測定の不確かさがきまる。基準発振器として、水晶発振器が用いられることがほとんどである。安定度として、ある期間に周波数がどれほどずれるか表示される。水晶発振器で、電源を入れた直後は不安定のため 1 日以上電源を入れておく必要がある。また、温度特性を避けるため、恒温槽にいてある物が多い。

基準周波数安定度以外の不確かさとして、2 つ挙げる。1 つ目は、ノイズによる「トリガーエラー」である。これにより最大で周期が $2\Delta T$ ずれる。2 つ目は、「 ± 1 カウントエラー」で測定周波数のパルスと、ゲート時間の相対的な位相関係により、 ± 1 だけずれるエラーである。これは、測定回数を多くして平均化することで 1 桁少なくなる。[21]

6.9.2 空洞共振器形高周波周波数計

「空洞共振器形高周波周波数計」は、構造が簡単で価格も安く、100GHz 程度まで測定できる。よって、不確かさ 0.2 ~ 0.025% 程度が許される測定では便利である。[21] ただしこの不確かさでは、光コムに用いられるようなマイクロ波の測定において不十分である。

これは、測定したいマイクロ波の伝送路の中にいれて、調整ヘッドを回転させることで空洞ピストンを上下させて空洞長を調整する。共振周波数において通過電力が最大となるため、この点で目盛りを読んで周波数を測定する。[21]

6.10 光波長計

光波長計の測定原理について述べる。マイケルソン干渉計で、固定ミラーと可動ミラーで光路長差を変化させながら干渉させる。この干渉信号を受光器で検出する。干渉信号は高速フーリエ変換によって横軸を波長または周波数、縦軸を光パワーとする光スペクトル波形に変換する。また、干渉計には被測定信号だけでなく、内蔵の波長基準光源の干渉信号も入れて同時に測定することで常に測定誤差を補正する。[24] この構造を図にしたものが図 6.6 である。

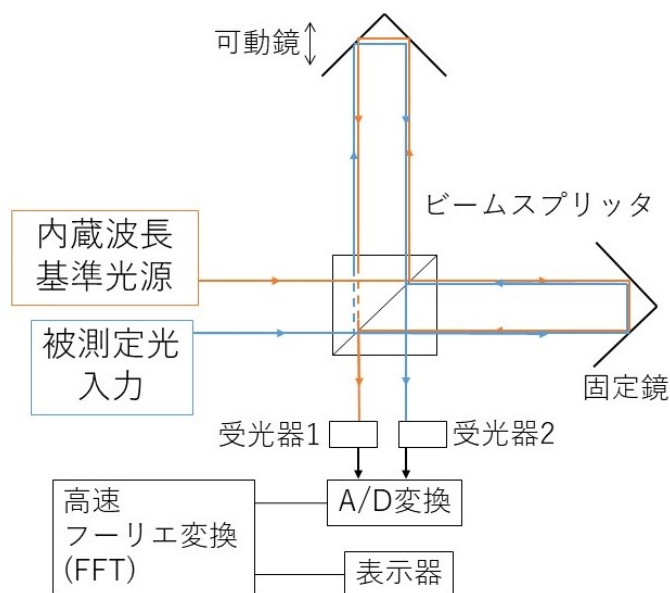


図 6.6 光波長計の測定原理（参考：文献 [24]p.10）

光波長計の測定原理について考える。図 6.6 において光源から固定鏡までの長さを l 、可動鏡から受光器までの長さを $l + d$ とおく。また、被測定光源の波長を Λ とする。ここで波長基準光源の波長 λ と干渉の最も明るいときの光強度 $I(\lambda)$ は、既知の値とする。ここで可動鏡を動かすと光路長が変化し、明るくなったり暗くなったりする。ここで、被測定光源で最も暗くなる時、 $d = \frac{\Lambda}{2}$ が成立する。この時の波長基準光源の光強度 $I(d)$ を測る。すると、次式が成り立つ。

$$\frac{I(d)}{I(\lambda)} = \frac{d}{\lambda} \quad (6.23)$$

以上より、被測定光源の波長は、

$$\Lambda = 2\lambda \frac{I(d)}{I(\lambda)} \quad (6.24)$$

と求まるはずである。

謝辞

光コムについて勉強するにあたり指導や助言をしてくださった全ての方々に、ここで感謝申し上げます。ありがとうございました。

参考文献

- [1] 杉山和彦, マイクロ波と光周波数を結ぶ新しい周波数チェーン-モード同期レーザーによる光周波数計測技術-, 日本物理学会, vol.58 No.3, 2003.
- [2] popular-physicsprize2005.pdf, The Nobel Prize in Physics 2005, The Royal Swedish Academy of Sciences, 2005.
- [3] Tara Fortier and Esther Baumann, 20years of developments in optical frequency comb technology and applications, COMMUNICATIONS PHYSICS, 2019.
- [4] 洪鋒雷, 光コムによる光周波数メトロロジー, 36 巻 2 号, 2007.
- [5] 吉村和幸 古賀保喜 大浦宣徳, 周波数と時間-原子時計の基礎/原子時のしくみ-, 社団法人電子情報通信学会, 1989.
- [6] K.M.Evenson, J.S.Wells, F.R.Peterson, B.L.Danielson and G.W.Day, Accurate Frequency of Molecular Transitions Used in Laser Stabilization, Appl. Phys. Lett, 22, p192, 1973.
- [7] 小形正男, 裳華房テキストシリーズ-物理学 振動・波動, 裳華房, 2018.
- [8] M. フォックス, 量子光学, 丸善出版, 2.4 節, 4.7.2 節, 2012.
- [9] 服部利明, レーザ光学講義テキスト 2010 年度版, 2009.
- [10] 黒田和男, 非線形光学効果を用いた超短パルス光の波長変換, 東大生産技術研究所.
- [11] 田邊孝純 鈴木良 藤井瞬 久保田啓寛 瀧田美夏 柿沼康弘, 微小共振器を用いた小型の光周波数コム光源開発の展開, 精密工学会誌 Vol.84, No.8, 2018.
- [12] 黒田和男, 光学材料と屈折率, 精密工学会誌 vol.70, No.5, 2004.
- [13] 久我隆弘, 朝倉物性物理シリーズ 量子力学, 朝倉書店, 2003.
- [14] 黒田和男, 第 4 章 第 2 高調波発生.
- [15] 麻生修 忠熊昌輝 並木周, 光ファイバ中の四光波混合発生とその応用技術開発, 古河電工時報 第 105 号 平成 12 年.
- [16] 今江理人, 電子情報通信学会『知識の森』, 12 群 6 編 3 章, 2011 (2009 受理) .

- [17] 浅香孝雄, 技術ノート (基本物理量の精密測定法) 周波数の測定, 応用物理 第 65 巻第 5 号 1996.
- [18] 大苗敦, 「光通信帯での光周波数標準とその応用」解説特集号によせて, 第 31 巻, 第 7 号, 2003.
- [19] 洪鋒雷, 時間周波数標準と光コム of 現状, 電気学会誌 vol.137, no.7, p.418-421, 2017.
- [20] 美濃島薫, 光コムによる精密計測, 精密工学会誌, Vol.82, No.12, 2016.
- [21] 森屋倅昌 関和雄, 高周波計測 -マイクロ波通信からデバイスまで-, 東京電機大学出版局, 1998.
- [22] 大苗敦 洪鋒雷, 世紀のイノベーション、光コム技術, 応用物理学会 第 84 巻 第 1 号 2015.
- [23] 高本将男, 香取秀俊, 次世代周波数標準: 光格子時計, 光学 37 巻 7 号, 2008.
- [24] 横河計測株式会社, Test & Measurement Fast Accurate Cost-effective AQ6150 シリーズ 光波長計, 2021.
- [25] 山崎俊雄, 今どきの高周波測定技術と測定器管理の基礎知識 ~ その 2 周波数測定器における確度評価の実際 ~, 電波技術協会報 FORN, No.307, 2015.11.
- [26] 奥村晴彦 黒木裕介, [改訂第 8 版] L^AT_EX2 ϵ 美文書作成入門, 技術評論社, 2020.