

2020 年度卒業論文
ニュートリノ振動と太陽ニュートリノ

理学部物理学科 素粒子研究室
17RP013 浅野 友哉

2021 年 3 月 7 日

目次

1	導入	2
2	ニュートリノ振動の理論	3
2.1	真空中でのニュートリノ振動	3
2.2	物質中でのニュートリノ振動	5
3	過去の太陽ニュートリノ観測実験	19
3.1	太陽ニュートリノの起源	19
3.2	Homestake 実験 [4]	21
3.3	Kamiokande[5], Super-Kamiokande[7]	21
3.4	Gallium 実験	23
3.5	SNO 実験 [12]	24
3.6	SNO までの結果	26
3.7	KamLAND 実験 [14]	27
4	最近の実験結果	28
4.1	SK-IV による報告 [8]	28
4.2	Borexino による CNO ニュートリノの直接測定 [17]	30
5	将来の実験	31
5.1	Hyper-Kamiokande[18]	31
6	まとめ	33

1 導入

ニュートリノの観測実験は 1960 年代から始められ、現在までに様々な実験で観測されてきた。そして観測結果からニュートリノ振動という現象が起きていることがわかった。ニュートリノ振動はニュートリノが質量を持つことにより起きる現象であるが、素粒子標準模型ではニュートリノは質量を持たないとされているので、ニュートリノ振動を説明することができず、標準模型の修正が必要であることが示された。

太陽ニュートリノの観測によって太陽についてより詳細な理解ができる可能性がある。太陽は我々人類の生活に大きく関わっており、それゆえ太陽について詳しく知ろうというのは自然な考えである。太陽の観測は赤外線や可視光での観測といった様々な方法を用いて行われているが、太陽中心での核融合による熱は太陽中心から太陽表面に現れるまでに約 10 万年かかると言われており、光での観測では 10 万年前の太陽内部を見ることしかできない。しかし、太陽ニュートリノは太陽内で生成後約 8 分で地球に届くため、太陽ニュートリノの観測によりほぼリアルタイムの太陽内部の情報を得ることができる。[1]

太陽ニュートリノ観測実験は 1960 年代の Homestake 実験から始まり、当時の観測結果は理論で作られた標準太陽模型 (SSM) の予測と大きな差異があった。その差異は「太陽ニュートリノ問題」と呼ばれ、2002 年の SNO 実験の結果報告によりニュートリノ振動が原因であると判明するまで 30 年以上解決されなかった。

本論文では、ニュートリノ振動の理論を概観し、太陽ニュートリノ観測実験について過去の実験や観測の最新結果、現在計画・建設中の実験を紹介する。

第 2 章のニュートリノ振動の理論については [2] を参考文献とした。また、標準模型ではニュートリノのフレーバーは 3 つだが、本論文では簡単のためにフレーバーは 2 つで考える。

2 ニュートリノ振動の理論

2.1 真空中でのニュートリノ振動

質量固有状態を ν_1, ν_2 とし、フレーバー固有状態を ν_e, ν_μ とする。質量固有状態について、時間に依存するシュレーディンガー方程式が成り立つ。

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

粒子の運動量 p が各状態の質量 $m_i (i = 1, 2)$ よりも十分大きい時、エネルギー E_i は

$$E_i = \sqrt{p^2 + m_i^2} \simeq p + \frac{m_i^2}{2p} \simeq p + \frac{m_i^2}{2E} \quad (2.2)$$

と展開でき、この時 $\nu_i \rightarrow e^{-ipt} \nu_i$ という位相変換により、

$$H = \begin{pmatrix} \frac{m_1^2}{2E} & 0 \\ 0 & \frac{m_2^2}{2E} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

となる。次にフレーバー固有状態を考える。一般にフレーバー固有状態は質量固有状態が混ざっていると考えられ、

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

と表される。 U は混合行列と呼ばれる。この時 (2.1) 式は

$$i \frac{d}{dt} U^{-1} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m_1^2}{2E} & 0 \\ 0 & \frac{m_2^2}{2E} \end{pmatrix} U^{-1} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix}$$
$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \underbrace{U \begin{pmatrix} \frac{m_1^2}{2E} & 0 \\ 0 & \frac{m_2^2}{2E} \end{pmatrix} U^{-1}}_{\equiv H'} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
H' &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{m_1^2}{2E} & 0 \\ 0 & \frac{m_2^2}{2E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2E} \begin{pmatrix} m_1^2 \cos^2 \theta + m_2^2 \sin^2 \theta & (m_2^2 - m_1^2) \sin \theta \cos \theta \\ (m_2^2 - m_1^2) \sin \theta \cos \theta & m_1^2 \sin^2 \theta + m_2^2 \cos^2 \theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{m_1^2 + m_2^2}{4E} & 0 \\ 0 & \frac{m_1^2 + m_2^2}{4E} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta & \frac{\Delta m^2}{4E} \sin 2\theta \\ \frac{\Delta m^2}{4E} \sin 2\theta & \frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ただし $\Delta m^2 = m_2^2 - m_1^2$ である。フレーバー固有状態 $\nu_\alpha (\alpha = e, \mu)$ に対し、 $\nu_\alpha \rightarrow e^{-i\frac{m_1^2 + m_2^2}{4E}t} \nu_\alpha$ という位相変換で H' の第1項は消え、

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta & \frac{\Delta m^2}{4E} \sin 2\theta \\ \frac{\Delta m^2}{4E} \sin 2\theta & \frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

これがニュートリノの真空での振動を記述する。

次に電子ニュートリノの状態を考える。一般にフレーバー固有状態 $|\nu_\alpha(t)\rangle$ は、混合行列要素を用いて、

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_i U_{\alpha i} e^{-iE_i t} |\nu_i\rangle \quad (2.6)$$

と表される。上と同様に $p \gg m_i$ の時、 $E_i \simeq p + \frac{m_i^2}{2E}$ より、

$$\begin{aligned}
|\nu_e(t)\rangle &= U_{e1} e^{-iE_1 t} |\nu_1\rangle + U_{e2} e^{-iE_2 t} |\nu_2\rangle \\
&= e^{-iE_1 t} \left(U_{e1} |\nu_1\rangle + U_{e2} e^{-i\frac{\Delta m^2}{2E} t} |\nu_2\rangle \right) \quad (2.7)
\end{aligned}$$

これより、時刻 t での $\nu_e \rightarrow \nu_e$ の確率（生存確率） $P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}$ は、

$$\begin{aligned}
P_{\nu_e \rightarrow \nu_e} &= |\langle \nu_e(0) | \nu_e(t) \rangle|^2 \\
&= \left| e^{-iE_1 t} \left(|U_{e1}|^2 + |U_{e2}|^2 e^{-i\frac{\Delta m^2}{2E} t} \right) \right|^2 \\
&= |U_{e1}|^4 + |U_{e2}|^4 + 2|U_{e1}|^2 |U_{e2}|^2 \cos\left(\frac{\Delta m^2}{2E} t\right) \\
&= \cos^4 \theta + \sin^4 \theta + 2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \left(1 - 2 \sin^2\left(\frac{\Delta m^2}{4E} t\right) \right) \\
&= (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^2 - (2 \cos \theta \sin \theta)^2 \sin^2\left(\frac{\Delta m^2}{4E} t\right) \\
&= 1 - \sin^2 2\theta \sin^2\left(\frac{\Delta m^2}{4E} t\right) \tag{2.8}
\end{aligned}$$

また、時刻 t での $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ の確率 $P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}$ は、

$$\begin{aligned}
P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu} &= 1 - P_{\nu_e \rightarrow \nu_e} \\
&= \sin^2 2\theta \sin^2\left(\frac{\Delta m^2}{4E} t\right) \tag{2.9}
\end{aligned}$$

$t = 0$ では $P_{\nu_e \rightarrow \nu_e} = 1, P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu} = 0$ であり、再びこの値になる時の伝播距離を振動長 ℓ_0 とすると、

$$\frac{\Delta m^2}{4E} t = \frac{\Delta m^2}{4E} \ell_0 = \pi \longrightarrow \ell_0 = \frac{4\pi E}{\Delta m^2} \quad \left(t = \frac{\ell_0}{c} = \ell_0 \right) \tag{2.10}$$

と表される。

2.2 物質中でのニュートリノ振動

物質中では、 ν_e と ν_μ は物質（電子）と相互作用するが、 ν_e と ν_μ で起こす相互作用が異なるので、ポテンシャルが異なる。中性カレント反応は ν_e と ν_μ で同じ寄与をするが、荷電カレント反応は ν_e のみが起こす。よって荷電カレント反応の分だけポテンシャルに差が生まれる。

その差は

$$\Delta V = V(\nu_e, e) - V(\nu_\mu, e) = \sqrt{2} G_F n_e \tag{2.11}$$

で与えられる。 G_F はフェルミ結合定数、 n_e は電子数密度である。この差によりハミルトニアンが変更される。(2.5) 式右辺の真空でのハミルトニアンを H_0 とし、物質中でのハ

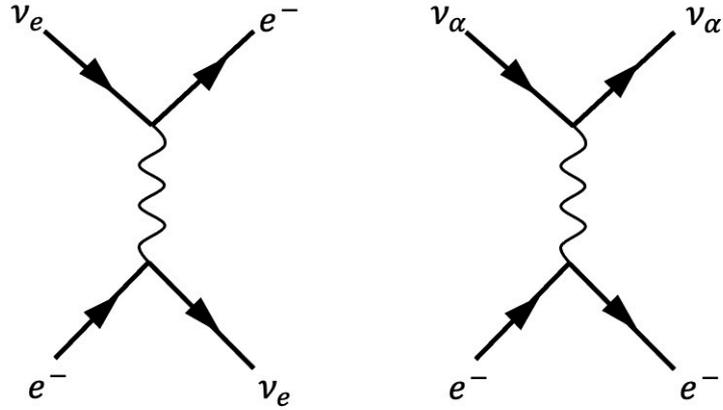


図 2.1 荷電カレント反応 (左) と中性カレント反応 (右) のファインマンダイアグラム

ミルトニアンを \tilde{H} とすると、

$$\tilde{H} = H_0 + \begin{pmatrix} \Delta V & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

と表せる。よってシュレーディンガー方程式は次のように変更される。

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta + \sqrt{2} G_F n_e & \frac{\Delta m^2}{4E} \sin 2\theta \\ \frac{\Delta m^2}{4E} \sin 2\theta & \frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

\tilde{H} の固有状態を $\tilde{\nu}_1, \tilde{\nu}_2$ とすると、対角化されたハミルトニアンは $\tilde{H}_{\text{diag}} = \tilde{U}^{-1} \tilde{H} \tilde{U}$ と書け、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} &= \tilde{U} \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_1 \\ \tilde{\nu}_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \tilde{\theta} & \sin \tilde{\theta} \\ -\sin \tilde{\theta} & \cos \tilde{\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_1 \\ \tilde{\nu}_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.14)$$

である。 $\tilde{\theta}$ について、

$$\begin{aligned}\tilde{H}_{\text{diag}} &= \begin{pmatrix} \tilde{H}_{11} \cos \tilde{\theta} - \tilde{H}_{21} \sin \tilde{\theta} & \tilde{H}_{12} \cos \tilde{\theta} - \tilde{H}_{22} \sin \tilde{\theta} \\ \tilde{H}_{11} \sin \tilde{\theta} + \tilde{H}_{21} \cos \tilde{\theta} & \tilde{H}_{12} \sin \tilde{\theta} + \tilde{H}_{22} \cos \tilde{\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \tilde{\theta} & \sin \tilde{\theta} \\ -\sin \tilde{\theta} & \cos \tilde{\theta} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{H}_{11} \tilde{c}^2 - (\tilde{H}_{21} + \tilde{H}_{12}) \tilde{s} \tilde{c} + \tilde{H}_{22} \tilde{s}^2 & (\tilde{H}_{11} - \tilde{H}_{22}) \tilde{s} \tilde{c} - \tilde{H}_{21} \tilde{s}^2 + \tilde{H}_{12} \tilde{c}^2 \\ (\tilde{H}_{11} - \tilde{H}_{22}) \tilde{s} \tilde{c} + \tilde{H}_{21} \tilde{c}^2 - \tilde{H}_{12} \tilde{s}^2 & \tilde{H}_{11} \tilde{s}^2 + (\tilde{H}_{21} + \tilde{H}_{12}) \tilde{s} \tilde{c} + \tilde{H}_{22} \tilde{c}^2 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (2.15)$$

(ただし、 $\tilde{c} = \cos \tilde{\theta}$, $\tilde{s} = \sin \tilde{\theta}$ である。)

であり、非対角要素がゼロであることから、三角関数の 2 倍角の公式を用いると、

$$\begin{cases} \frac{\tilde{H}_{11} - \tilde{H}_{22}}{2} \sin 2\tilde{\theta} + \frac{\tilde{H}_{12} - \tilde{H}_{21}}{2} + \frac{\tilde{H}_{12} + \tilde{H}_{21}}{2} \cos 2\tilde{\theta} = 0 \\ \frac{\tilde{H}_{11} - \tilde{H}_{22}}{2} \sin 2\tilde{\theta} + \frac{\tilde{H}_{21} - \tilde{H}_{12}}{2} + \frac{\tilde{H}_{12} + \tilde{H}_{21}}{2} \cos 2\tilde{\theta} = 0 \end{cases}$$

$\tilde{H}_{12} = \tilde{H}_{21}$ より、正の定数 k を用いて、

$$\begin{aligned}\sin 2\tilde{\theta} &= k \tilde{H}_{12} & \cos 2\tilde{\theta} &= k \frac{\tilde{H}_{22} - \tilde{H}_{11}}{2} \\ &= k \frac{\Delta m^2}{4E} \sin 2\theta & &= k \left(\frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta - \frac{1}{\sqrt{2}} G_F n_e \right)\end{aligned}$$

と表せる。 $\sin^2 2\tilde{\theta} + \cos^2 \tilde{\theta} = 1$ より、

$$\begin{aligned}k^2 \left\{ \left(\frac{\Delta m^2}{4E} \right)^2 \sin^2 2\theta + \left(\frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta - \frac{1}{\sqrt{2}} G_F n_e \right)^2 \right\} &= 1 \\ \longrightarrow k &= \left\{ \left(\frac{\Delta m^2}{4E} \right)^2 \sin^2 2\theta + \left(\frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta - \frac{1}{\sqrt{2}} G_F n_e \right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}\quad (2.16)$$

これより、 $A \equiv 2\sqrt{2}EG_F n_e$ として、

$$\begin{aligned}\sin 2\tilde{\theta} &= \frac{\Delta m^2}{4E} \sin 2\theta \left\{ \left(\frac{\Delta m^2}{4E} \right)^2 \sin^2 2\theta + \left(\frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta - \frac{1}{\sqrt{2}} G_F n_e \right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\sin 2\theta}{\sqrt{\left(\frac{A}{\Delta m^2} - \cos 2\theta \right)^2 + \sin^2 2\theta}}\end{aligned}\quad (2.17)$$

$$\begin{aligned}\cos 2\tilde{\theta} &= \left(\frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta - \frac{1}{\sqrt{2}} G_F n_e \right) \left\{ \left(\frac{\Delta m^2}{4E} \right)^2 \sin^2 2\theta + \left(\frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta - \frac{1}{\sqrt{2}} G_F n_e \right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{-\frac{A}{\Delta m^2} + \cos^2 2\theta}{\sqrt{\left(\frac{A}{\Delta m^2} - \cos 2\theta \right)^2 + \sin^2 2\theta}}\end{aligned}\quad (2.18)$$

$\tilde{\theta}$ はこの 2 式で与えられる。

ハミルトニアンの固有値は、真空の場合 (2.3) 式と同様に考えると、

$$\tilde{H}_{\text{diag}} = \begin{pmatrix} \frac{\tilde{m}_1^2}{2E} & 0 \\ 0 & \frac{\tilde{m}_2^2}{2E} \end{pmatrix}\quad (2.19)$$

と表せる。

(2.15) 式から、

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{m}_1^2}{2E} &= \tilde{H}_{11} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} - \frac{\tilde{H}_{21} + \tilde{H}_{12}}{2} \sin 2\theta + \tilde{H}_{22} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \\ &= \frac{\tilde{H}_{11} + \tilde{H}_{22}}{2} + \frac{\tilde{H}_{11} - \tilde{H}_{22}}{2} \cos 2\theta - \frac{\tilde{H}_{21} + \tilde{H}_{12}}{2} \sin 2\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} G_F n_e - \frac{\Delta m^2}{4E} \left\{ \frac{\left(\frac{A}{\Delta m^2} - \cos 2\theta \right)^2}{\sqrt{\left(\frac{A}{\Delta m^2} - \cos 2\theta \right)^2 + \sin^2 2\theta}} + \frac{\sin^2 2\theta}{\sqrt{\left(\frac{A}{\Delta m^2} - \cos 2\theta \right)^2 + \sin^2 2\theta}} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} G_F n_e - \frac{\Delta m^2}{4E} \sqrt{\left(\frac{A}{\Delta m^2} - \cos 2\theta \right)^2 + \sin^2 2\theta}\end{aligned}\quad (2.20)$$

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{m}_2^2}{2E} &= \frac{\tilde{H}_{11} + \tilde{H}_{22}}{2} - \frac{\tilde{H}_{11} - \tilde{H}_{22}}{2} \cos 2\theta + \frac{\tilde{H}_{21} + \tilde{H}_{12}}{2} \sin 2\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} G_F n_e + \frac{\Delta m^2}{4E} \sqrt{\left(\frac{A}{\Delta m^2} - \cos 2\theta \right)^2 + \sin^2 2\theta}\end{aligned}\quad (2.21)$$

この2式より、

$$\tilde{m}_1^2 = \frac{A}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(A - \Delta m^2 \cos 2\theta)^2 + (\Delta m^2)^2 \sin^2 2\theta} \quad (2.22)$$

$$\tilde{m}_2^2 = \frac{A}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(A - \Delta m^2 \cos 2\theta)^2 + (\Delta m^2)^2 \sin^2 2\theta} \quad (2.23)$$

となる。固有値と θ をグラフにプロットすると図 2.2 のようになる。

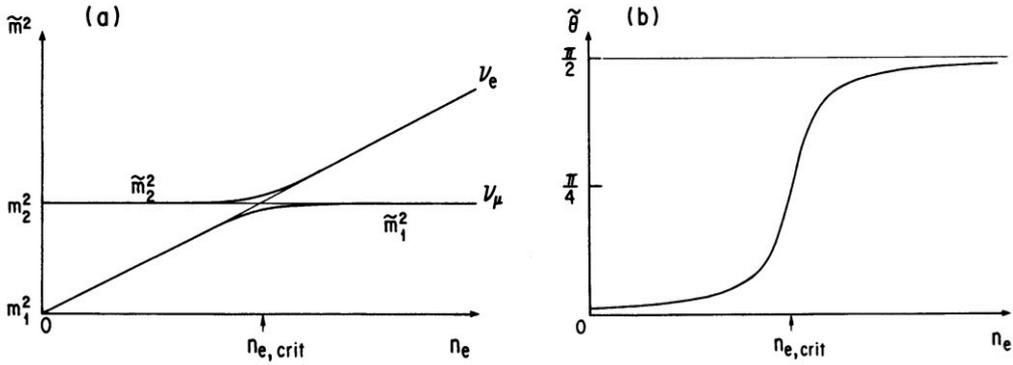


図 2.2 n_e 対 \tilde{m}_i^2 (左)、 n_e 対 $\tilde{\theta}$ (右) のグラフ [2]

この2つの固有値はどちらも電子数密度 n_e に依存しており、2つの値が最も近づくときに準位交差（または共鳴）が起こる。つまりここである状態が別の状態に遷移する。このときの電子数密度を $n_{e,\text{crit}}$ とすると、

$$2\sqrt{2}EG_F n_{e,\text{crit}} = \Delta m^2 \cos 2\theta \quad \rightarrow \quad n_{e,\text{crit}} = \frac{\Delta m^2}{2\sqrt{2}EG_F} \cos 2\theta \quad (2.24)$$

この $n_{e,\text{crit}}$ を用いると、 $\frac{A}{\Delta m^2} = \frac{n_e}{n_{e,\text{crit}}} \cos 2\theta$ と表せ、

$$\begin{cases} n_e \ll n_{e,\text{crit}} \text{ のとき} & \tilde{\theta} = \theta & \rightarrow & |\tilde{\nu}_1\rangle \simeq |\nu_1\rangle, \quad |\tilde{\nu}_2\rangle \simeq |\nu_2\rangle \\ n_e \gg n_{e,\text{crit}} \text{ のとき} & \tilde{\theta} = \frac{\pi}{2} & \rightarrow & |\tilde{\nu}_1\rangle \simeq |\nu_\mu\rangle, \quad |\tilde{\nu}_2\rangle \simeq |\nu_e\rangle \end{cases}$$

となる。

次に振動長を考える。 $n_e \ll n_{e,\text{crit}}$ のとき、物質中での混合角と真空中での混合角が等しいので、振動長は $l_0 = \frac{4\pi E}{\Delta m^2}$ となる。

$n_e \gg n_{e,\text{crit}}$ のとき、

$$\tilde{\ell} = \frac{4\pi E}{\tilde{m}_2^2 - \tilde{m}_1^2} = \frac{4\pi E}{\Delta m^2} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{A}{\Delta m^2} - \cos 2\theta\right)^2 + \sin^2 2\theta}} < \ell_0 \quad (2.25)$$

となる。

ニュートリノの状態の遷移について考えると、断熱近似が成立するのは電子数密度の勾配が十分小さい場合である。その条件は

$$(\text{エネルギーの差}) \times (\text{遷移時間}) \gg \hbar = 1 \quad (2.26)$$

と表せる。遷移時は $n_e = n_{e,\text{crit}}$ より、 $A = \Delta m^2 \cos 2\theta$ である。(2.20) 式、(2.22) 式から、

$$\text{エネルギーの差 } \delta E = \frac{\tilde{m}_2^2 - \tilde{m}_1^2}{2E} = \frac{\Delta m^2}{2E} \sin 2\theta \quad (2.27)$$

また、

$$\text{遷移時間 } \delta t = \delta r = \frac{dr}{dn_e} \delta n_e = \left(\frac{1}{n_e} \frac{dn_e}{dr} \right)^{-1} \frac{\delta n_e}{n_e} = \left(\frac{1}{n_e} \frac{dn_e}{dr} \right)^{-1} \frac{\delta A}{A} \quad (2.28)$$

と表せ、

$$\delta A = \frac{\partial A}{\partial \theta} \delta \tilde{\theta} \quad (2.29)$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial A} \sin 2\theta &= \frac{\partial}{\partial A} \frac{\sin 2\theta}{\sqrt{\left(\frac{A}{\Delta m^2} - \cos 2\theta\right)^2 + \sin^2 2\theta}} \\ \text{左辺} &= \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial A} \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \sin 2\tilde{\theta} = \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial A} 2 \cos 2\tilde{\theta} \\ \text{右辺} &= -\frac{1}{2} \frac{\sin 2\theta}{\left\{ \left(\frac{A}{\Delta m^2} - \cos 2\theta\right)^2 + \sin^2 2\theta \right\}^{\frac{3}{2}}} \cdot 2 \left(\frac{A}{\Delta m^2} - \cos 2\theta \right) \frac{1}{\Delta m^2} \\ &= \frac{\sin 2\theta}{\Delta m^2} \frac{-\frac{A}{\Delta m^2} + \cos^2 2\theta}{\left\{ \left(\frac{A}{\Delta m^2} - \cos 2\theta\right)^2 + \sin^2 2\theta \right\}^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial A} &= \frac{\sin 2\theta}{2\Delta m^2} \frac{1}{\left(\frac{A}{\Delta m^2} - \cos 2\theta\right)^2 + \sin^2 2\theta} \\
&= \frac{1}{2\Delta m^2 \sin 2\theta} \quad (A = \Delta m^2 \cos 2\theta \text{ より}) \\
\delta A &= 2\Delta m^2 \sin 2\theta \delta \tilde{\theta}
\end{aligned} \tag{2.30}$$

図 2.3 から、 $n_e = n_{e,\text{crit}}$ 周辺でグラフが直線に近くなっている部分を見ると、 $\tilde{\theta} = \frac{3}{8}\pi$ から $\tilde{\theta} = \frac{\pi}{8}$ 程度の領域になっているので、 $\delta \tilde{\theta} = \frac{\pi}{4}$ として、

$$\delta A \sim \Delta m^2 \sin 2\theta \tag{2.31}$$

とできる。よって (2.28) 式は、

$$\delta t = \left(\frac{1}{n_e} \frac{dn_e}{dr} \right)^{-1} \frac{\Delta m^2 \sin 2\theta}{\Delta m^2 \cos 2\theta} \tag{2.32}$$

となり、(2.26) 式は、

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta m^2}{2E} \sin 2\theta \left(\frac{1}{n_e} \frac{dn_e}{dr} \right)^{-1} \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} &\gg 1 \\
\frac{1}{n_e} \frac{dn_e}{dr} &\ll \frac{\Delta m^2 \sin^2 2\theta}{2E \cos 2\theta}
\end{aligned} \tag{2.33}$$

これが断熱条件である。断熱条件が成り立つとき、物質中での生存確率を考える。時刻 t での状態 $|\nu_e(t)\rangle$ を考えると、

$$|\nu_e(0)\rangle = \cos \tilde{\theta} |\tilde{\nu}_1\rangle + \sin \tilde{\theta} |\tilde{\nu}_2\rangle \tag{2.34}$$

$$\begin{aligned}
|\nu_e(t)\rangle &= \cos \tilde{\theta}_f e^{-iE_1 t} |\tilde{\nu}_1\rangle + \sin \tilde{\theta}_f e^{-iE_2 t} |\tilde{\nu}_2\rangle \\
&= e^{-iE_1 t} \left(\cos \tilde{\theta}_f |\tilde{\nu}_1\rangle + \sin \tilde{\theta}_f e^{-i\frac{\Delta \tilde{m}^2}{2E} t} |\tilde{\nu}_2\rangle \right)
\end{aligned} \tag{2.35}$$

$\tilde{\theta}_f$ は時刻 t での物質中の混合角、 $\Delta \tilde{m}^2 = \tilde{m}_2^2 - \tilde{m}_1^2$ である。これより生存確率は、

$$\begin{aligned}
P_{\nu_e \rightarrow \nu_e} &= |\langle \nu_e(0) | \nu_e(t) \rangle|^2 \\
&= \left| e^{-iE_1 t} \left(\cos \tilde{\theta} \cos \tilde{\theta}_f + \sin \tilde{\theta} \sin \tilde{\theta}_f e^{-i\frac{\Delta \tilde{m}^2}{2E} t} \right) \right|^2 \\
&= \cos^2 \tilde{\theta} \cos^2 \tilde{\theta}_f + \sin^2 \tilde{\theta} \sin^2 \tilde{\theta}_f + 2 \cos \tilde{\theta} \cos \tilde{\theta}_f \sin \tilde{\theta} \sin \tilde{\theta}_f \cos \left(\frac{\Delta \tilde{m}^2}{2E} t \right)
\end{aligned} \tag{2.36}$$

ここで、 $t = \frac{L}{c} = L$ とおき、 $L \gg \tilde{\ell}$ のとき $n_e \rightarrow 0$ より $\tilde{\theta}_f \rightarrow \theta$ となる。また、生成されるニュートリノは様々なエネルギーを持っているので、ある時刻で平均を取ると $\cos\left(\frac{\Delta\tilde{m}^2}{2E}t\right) \rightarrow 0$ となる。
よって、

$$\begin{aligned} P_{\nu_e \rightarrow \nu_e} &= \cos^2 \theta \cos^2 \tilde{\theta} + \sin^2 \theta \sin^2 \tilde{\theta} \\ &= \frac{1}{4}(1 + \cos 2\theta)(1 + \cos 2\tilde{\theta}) + \frac{1}{4}(1 - \cos \theta)(1 - \cos \tilde{\theta}) \\ &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta \cos 2\tilde{\theta}) \end{aligned} \quad (2.37)$$

次に断熱近似が成り立たない場合を考える。このとき遷移が起きる確率は

$$P_f = \exp\left(-\frac{\pi}{2}\gamma\right), \quad \gamma = \frac{\Delta m^2 \sin^2 2\theta}{2E \cos 2\theta} \left(\frac{1}{n_e} \frac{dn_e}{dr}\right)^{-1} \quad (2.38)$$

と表せる。これはランダウ-ツェナー公式と呼ばれており、まずはこの公式の導出を行う。

(2.13) 式のシュレーディンガー方程式を次の形で書く。

$$H\psi = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_2 \end{pmatrix} \psi \quad (2.39)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= a(t) - \frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta, & a(t) &= \sqrt{2}G_F n_e(t) \\ \epsilon_2 &= \frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta, & \epsilon_{12} &= \frac{\Delta m^2}{4E} \sin 2\theta \end{aligned}$$

である。正規直交基底を (c_1, c_2) とすると、シュレーディンガー方程式は

$$\left(H - i\frac{d}{dt}\right) \left[c_1(t)e^{-i\int \epsilon_1 dt} + c_2(t)e^{-i\int \epsilon_2 dt} \right] = 0 \quad (2.40)$$

と表せる。よって、

$$i\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} c_1(t)e^{-i\int \epsilon_1 dt} \\ c_2(t)e^{-i\int \epsilon_2 dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(t)e^{-i\int \epsilon_1 dt} \\ c_2(t)e^{-i\int \epsilon_2 dt} \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} i\frac{dc_1}{dt} = \epsilon_{12}e^{-i\int(\epsilon_2 - \epsilon_1)dt} c_2(t) \\ i\frac{dc_2}{dt} = \epsilon_{12}e^{-i\int(\epsilon_1 - \epsilon_2)dt} c_1(t) \end{cases} \quad (2.42)$$

境界条件は、 $t = -\infty$ で ψ が $|\nu_e\rangle = |c_1\rangle$ の固有状態（図 2.3 の上の分枝）として、

$$|c_1(-\infty)| = 1, \quad c_2(-\infty) = 0 \quad (2.43)$$

とする。遷移確率を求めたいので、 $t = \infty$ で $|\nu_e\rangle = |c_1\rangle$ である確率

$$P_f = |c_1(\infty)|^2 = 1 - |c_2(\infty)|^2 \quad (2.44)$$

を計算する。(2.42) 式から c_1 を消去すると、

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\epsilon}_{12}}{\epsilon_{12}^2} e^{i \int (\epsilon_1 - \epsilon_2) dt} \frac{dc_2}{dt} - \frac{i}{\epsilon_{12}} (\epsilon_1 - \epsilon_2) e^{i \int (\epsilon_1 - \epsilon_2) dt} \frac{dc_2}{dt} - \frac{1}{\epsilon_{12}} e^{i \int (\epsilon_1 - \epsilon_2) dt} \frac{d^2 c_2}{dt^2} \\ = \epsilon_{12} e^{i \int (\epsilon_1 - \epsilon_2) dt} c_2(t) \\ \frac{d^2 c_2}{dt^2} + \left(i(\epsilon_1 - \epsilon_2) - \frac{\dot{\epsilon}_{12}}{\epsilon_{12}} \right) \frac{dc_2}{dt} + \epsilon_{12}^2 c_2(t) = 0 \end{aligned} \quad (2.45)$$

共鳴領域を $t = 0$ として、 $n_e(t)$ が線形であるとする、

$$n_e(t) = n_e^0 + \dot{n}_e^0 t \quad (2.46)$$

と表せ、 n_e^0 は共鳴条件 $\sqrt{2}G_F n_e^0 = \frac{\Delta m^2}{2E} \cos 2\theta$ を満たす。

ここで、

$$\begin{aligned} \epsilon_1 - \epsilon_2 &= a(t) - \frac{\Delta m^2}{2E} \cos 2\theta \\ &= \sqrt{2}G_F (n_e^0 + \dot{n}_e^0 t) - \sqrt{2}G_F n_e^0 \\ &= \sqrt{2}G_F \dot{n}_e^0 t \equiv \alpha t \end{aligned} \quad (2.47)$$

また、

$$c_2(t) = e^{-\frac{i}{2} \int (\epsilon_1 - \epsilon_2) dt} U(t) = e^{-\frac{i}{2} \int \alpha t dt} U(t) \quad (2.48)$$

とすると、(2.46) 式から、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(-\frac{i}{2} \alpha t e^{-\frac{i}{2} \int \alpha t dt} U(t) + e^{-\frac{i}{2} \int \alpha t dt} \frac{dU}{dt} \right) \\ + \left(i\alpha t - \frac{\dot{\epsilon}_{12}}{\epsilon_{12}} \right) \left(-\frac{i}{2} \alpha t e^{-\frac{i}{2} \int \alpha t dt} U(t) + e^{-\frac{i}{2} \int \alpha t dt} \frac{dU}{dt} \right) \\ + \epsilon_{12}^2 e^{-\frac{i}{2} \int \alpha t dt} U(t) = 0 \\ \frac{d^2 U}{dt^2} - \frac{\dot{\epsilon}_{12}}{\epsilon_{12}} \frac{dU}{dt} + \left(\frac{1}{4} (\alpha t)^2 - \frac{i}{2} \alpha + \frac{\dot{\epsilon}_{12}}{\epsilon_{12}} \frac{i}{2} \alpha t + \epsilon_{12}^2 \right) U(t) = 0 \end{aligned} \quad (2.49)$$

さらに、 $\epsilon_{12} = 0$ とすれば、

$$\frac{d^2U}{dt^2} + \left(\epsilon_{12}^2 - \frac{i}{2}\alpha + \frac{1}{4}(\alpha t)^2 \right) U(t) = 0$$

そして、変数と定数を

$$z = \sqrt{\alpha} e^{-\frac{\pi i}{4}} t, \quad n = \frac{i\epsilon_{12}^2}{\alpha} \quad (2.50)$$

とすると、

$$\begin{aligned} -i\alpha \frac{d^2U}{dz^2} + \left(-i\alpha n - \frac{i}{2}\alpha + \frac{i}{4}\alpha z^2 \right) U &= 0 \\ \frac{d^2U}{dz^2} + \left(n + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z^2 \right) U &= 0 \end{aligned} \quad (2.51)$$

これはウェーバー方程式といい、解はウェーバー関数 $D_{-n-1}(\pm iz)$ である。 $D_{-n-1}(iz)$ は漸近的に、 $z \rightarrow \infty e^{-\frac{3}{4}\pi i}$ または $\infty e^{-\frac{\pi i}{4}}$ で $D_{-n-1}(iz) \rightarrow 0$ となる。

よって、

$$U = A_+ D_{-n-1}(-iz) \quad (2.52)$$

とすれば、 $t \rightarrow -\infty$ で $U \rightarrow 0$ 、つまり $c_2(t) \rightarrow 0$ という境界条件を満たす。 A_+ は規格化因子で、 $|c_1(-\infty)| = 1$ から決められる。

$D_{-n-1}(iRe^{-\frac{i\pi}{4}})$ の $R \rightarrow \infty$ での漸近形

$$D_{-n-1}(iRe^{-\frac{i\pi}{4}}) \sim e^{-\frac{\pi}{4}(n+1)i} e^{-i\frac{R^2}{4}} R^{-n-1} \quad (2.53)$$

を用いると、 $t \rightarrow -\infty$ での U は、

$$U \sim A_+ e^{-\frac{\pi}{4}(n+1)i} e^{-i\frac{\alpha}{4}t^2} e^{-(n+1)\ln(-\sqrt{\alpha}t)} \quad (2.54)$$

となる。また、(2.42) 式の 2 番目と (2.48) 式を用いると、

$$\begin{aligned} i \left(-\frac{i}{2}\alpha t e^{-\frac{i}{2}\int \alpha t dt} U(-\infty) + e^{-\frac{i}{2}\int \alpha t dt} \frac{dU}{dt} \right) &= \epsilon_{12} e^{-i\int \alpha t dt} c_1(-\infty) \\ -\frac{i}{2}\alpha t U(-\infty) + \frac{dU}{dt} &= -i\epsilon_{12} e^{-\frac{i}{2}\int \alpha t dt} c_1(-\infty) \end{aligned} \quad (2.55)$$

これについて、

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= -\frac{i}{2}\alpha t U(-\infty) + \left\{ -\frac{i}{2}\alpha t U(-\infty) - (n+1) \frac{U(-\infty)}{t} \right\} \\ &\simeq -iatU(-\infty) \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$\text{右辺} \simeq -i\epsilon_{12} e^{-i\frac{\alpha}{4}t^2} c_1(-\infty) \quad (2.57)$$

よって、

$$\begin{aligned} \alpha t A_+ e^{-\frac{\pi}{4}(n+1)i} e^{-i\frac{\alpha}{4}t^2} e^{-n \ln(-\sqrt{\alpha t})} \frac{e^{i\pi}}{\sqrt{\alpha t}} &= \epsilon_{12} e^{-i\frac{\alpha}{4}t^2} c_1(-\infty) \\ c_1(-\infty) &= \frac{\sqrt{\alpha}}{\epsilon_{12}} A_+ e^{-\frac{\pi}{4}ni} e^{\frac{3}{4}\pi i - n \ln(-\sqrt{\alpha t})} \end{aligned} \quad (2.58)$$

規格化 $|c_1(-\infty)| = 1$ より

$$|A_+| = \sqrt{\nu} e^{-\frac{\pi}{4}\nu} \quad \nu \equiv -in = \frac{\epsilon_{12}^2}{\alpha} \quad (2.59)$$

次に $t \rightarrow \infty$ での漸近形を考える。 $D_{-n-1}(iRe^{\frac{3\pi i}{4}})$ の $R \rightarrow \infty$ での漸近展開の主要項は

$$D_{-n-1}(iRe^{\frac{3\pi i}{4}}) \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(n+1)} e^{\frac{\pi}{4}ni} e^{i\frac{R^2}{4}} R^n + e^{\frac{3}{4}\pi(n+1)i} e^{-i\frac{R^2}{4}} R^{-n-1} \quad (2.60)$$

よって、 R の 0 次の項だけ取ると

$$\begin{aligned} |c_2(\infty)|^2 &= |U(\infty)|^2 \\ &= \nu e^{-\frac{\pi}{2}\nu} \frac{2\pi}{|\Gamma(i\nu+1)\Gamma(-i\nu+1)|} e^{-\frac{\pi}{2}\nu} \end{aligned} \quad (2.61)$$

ここで、複素数に拡張したガンマ関数の公式

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= z\Gamma(z) \\ \Gamma(ix) &= \sqrt{\frac{\pi}{x \sinh(\pi x)}} \quad x \text{ は実数} \end{aligned}$$

を用いると、

$$\begin{aligned} |c_2(\infty)|^2 &= \nu e^{-\pi\nu} 2\pi \frac{1}{\nu^2} \frac{\nu \sinh(\pi\nu)}{\pi} \\ &= 2 \sinh(\pi\nu) e^{-\pi\nu} \\ &= 1 - e^{-2\pi\nu} \end{aligned} \quad (2.62)$$

ν は、

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{\epsilon_{12}^2}{\alpha} \\ &= \left(\frac{\Delta m^2}{4E} \right)^2 \sin^2 2\theta \frac{1}{\sqrt{2}G_F n_e^0} \frac{\sqrt{2}G_F n_e^0}{\sqrt{2}G_F n_e^0} \\ &= \frac{1}{4} \frac{\Delta m^2}{2E} \frac{\sin^2 2\theta}{\cos 2\theta} \left(\frac{1}{n_e^0} \frac{dn_e^0}{dr} \right)^{-1} = \frac{1}{4} \gamma \quad (\text{共鳴条件を用いた}) \end{aligned}$$

以上より、遷移確率は (2.44) 式から、

$$P_f = 1 - |c_2(\infty)|^2 = \exp\left(-\frac{\pi}{2}\gamma\right) \quad (2.63)$$

ランダウ-ツェナー公式が導かれた。

本題に戻り、断熱条件が成り立たない時の生存確率を計算する。ここでは一般にエネルギーが時間に依存する場合を考える。まず、 ν_e が時刻 t_i で生成され、 t_r で共鳴を起こし、 $t_f \rightarrow \infty$ で真空で検出されるとする。

時刻 $t = t_i$ で ν_e として生成された状態は

$$\psi_{\nu_e}(t_i) = \cos \tilde{\theta} |\tilde{\nu}_1(t_i)\rangle + \sin \tilde{\theta} |\tilde{\nu}_2(t_i)\rangle \quad (2.64)$$

ε を微小とし、共鳴点の直前で $t = t_r - \varepsilon$ で

$$\psi(t_r - \varepsilon) = \cos \tilde{\theta} e^{i \int_{t_i}^{t_r} E_1 dt} |\tilde{\nu}_1(t_r)\rangle + \sin \tilde{\theta} e^{i \int_{t_i}^{t_r} E_2 dt} |\tilde{\nu}_2(t_r)\rangle \quad (2.65)$$

ただし $E_i = \frac{\tilde{m}_i^2}{2E}$ である。 $t = t_r$ で状態の遷移が起こり、混ざり合う。

$$\begin{aligned} |\tilde{\nu}_1(t_r)\rangle &\rightarrow \alpha |\tilde{\nu}_1(t_r)\rangle + \beta |\tilde{\nu}_2(t_r)\rangle \\ |\tilde{\nu}_2(t_r)\rangle &\rightarrow -\beta^* |\tilde{\nu}_1(t_r)\rangle + \alpha^* |\tilde{\nu}_2(t_r)\rangle \end{aligned}$$

係数は $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ を満たす。共鳴点の直後 $t = t_r + \varepsilon$ で

$$\begin{aligned} \psi(t_r + \varepsilon) &= \cos \tilde{\theta} e^{i \int_{t_i}^{t_r} E_1 dt} (\alpha |\tilde{\nu}_1(t_r)\rangle + \beta |\tilde{\nu}_2(t_r)\rangle) \\ &\quad + \sin \tilde{\theta} e^{i \int_{t_i}^{t_r} E_2 dt} (-\beta^* |\tilde{\nu}_1(t_r)\rangle + \alpha^* |\tilde{\nu}_2(t_r)\rangle) \\ &= \left(\alpha \cos \tilde{\theta} e^{i \int_{t_i}^{t_r} E_1 dt} - \beta^* \sin \tilde{\theta} e^{i \int_{t_i}^{t_r} E_2 dt} \right) |\tilde{\nu}_1(t_r)\rangle \\ &\quad + \left(\beta \cos \tilde{\theta} e^{i \int_{t_i}^{t_r} E_1 dt} + \alpha^* \sin \tilde{\theta} e^{i \int_{t_i}^{t_r} E_2 dt} \right) |\tilde{\nu}_2(t_r)\rangle \\ &\equiv A(t_r) |\tilde{\nu}_1(t_r)\rangle + B(t_r) |\tilde{\nu}_2(t_r)\rangle \end{aligned} \quad (2.66)$$

$t = t_f \rightarrow \infty$ で

$$\begin{aligned} \psi(t_f \rightarrow \infty) &= A(t_r) e^{i \int_{t_r}^{\infty} E_1 dt} (\cos \theta |\nu_e\rangle - \sin \theta |\nu_\mu\rangle) \\ &\quad + B(t_r) e^{i \int_{t_r}^{\infty} E_2 dt} (\sin \theta |\nu_e\rangle + \cos \theta |\nu_\mu\rangle) \end{aligned} \quad (2.67)$$

ただし、 $|\tilde{\nu}_i(t_f \rightarrow \infty)\rangle = |\nu_i\rangle = U^{-1}|\nu_\alpha\rangle$ を用いた。

よって、生存確率は

$$\begin{aligned}
P_{\nu_e \rightarrow \nu_e} &= |\langle \nu_e | \psi(t_f \rightarrow \infty) \rangle|^2 \\
&= \left| A(t_r) \cos \theta e^{i \int_{t_r}^{\infty} E_1 dt} + B(t_r) \sin \theta e^{i \int_{t_r}^{\infty} E_2 dt} \right|^2 \\
&= |A|^2 \cos^2 \theta + |B|^2 \sin^2 \theta + \left(A^* B e^{-i \int_{t_r}^{\infty} (E_1 - E_2) dt} + A B^* e^{i \int_{t_r}^{\infty} (E_1 - E_2) dt} \right) \cos \theta \sin \theta \\
&= |A|^2 \cos^2 \theta + |B|^2 \sin^2 \theta + 2|AB| \cos \theta \sin \theta \cos \left(\int_{t_r}^{\infty} (E_1 - E_2) dt - \Omega \right)
\end{aligned} \tag{2.68}$$

ただし $A^* B = |AB| e^{i\Omega}$ とした。最後の項は $E_1 - E_2$ で平均をとると \cos の平均が 0 になるので消える。 $A(t_r)$ と $B(t_r)$ を代入すると、

$$\begin{aligned}
P_{\nu_e \rightarrow \nu_e} &= \cos^2 \theta \left[|\alpha|^2 \cos^2 \tilde{\theta} + |\beta|^2 \sin^2 \tilde{\theta} - 2|\alpha\beta| \cos \tilde{\theta} \sin \tilde{\theta} \cos \left(\int_{t_i}^{t_r} (E_1 - E_2) dt + \omega \right) \right] \\
&\quad + \sin^2 \theta \left[|\beta|^2 \cos^2 \tilde{\theta} + |\alpha|^2 \sin^2 \tilde{\theta} + 2|\alpha\beta| \cos \tilde{\theta} \sin \tilde{\theta} \cos \left(\int_{t_i}^{t_r} (E_1 - E_2) dt + \omega \right) \right] \\
&= \cos^2 \theta \left(\frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{2} + \frac{|\alpha|^2 - |\beta|^2}{2} \cos 2\tilde{\theta} \right) + \sin^2 \theta \left(\frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{2} - \frac{|\alpha|^2 - |\beta|^2}{2} \cos 2\tilde{\theta} \right) \\
&\quad - |\alpha\beta| \cos 2\theta \sin 2\tilde{\theta} \cos \left(\int_{t_i}^{t_r} (E_1 - E_2) dt + \omega \right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (|\alpha|^2 - |\beta|^2) \cos 2\theta \cos 2\tilde{\theta} - |\alpha\beta| \cos 2\theta \sin 2\tilde{\theta} \cos \left(\int_{t_i}^{t_r} (E_1 - E_2) dt + \omega \right)
\end{aligned} \tag{2.69}$$

ただし $\alpha\beta = |\alpha\beta| e^{i\omega}$ とした。上と同様に最後の項は平均をとると消える。

$$|\beta|^2 = P_f, \quad |\alpha|^2 = 1 - P_f \tag{2.70}$$

とすれば、

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_e} = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - P_f \right) \cos 2\theta \cos 2\tilde{\theta} \tag{2.71}$$

となり、これが断熱近似が成り立たないときの生存確率である。

太陽で生成されたニュートリノは、共鳴時の遷移の有無にかかわらず地球で観測される際には質量固有状態になっていると考えられる。例外は質量二乗差が非常に小さく、 $n_{e,\text{crit}}$ が太陽表面近くになるときで、このとき振動長 (2.25) が共鳴点と太陽表面との距

離よりも長くなると物質中では振動が起きず、太陽から出た後に真空中で振動を起こす。これは just-so 解と呼ばれている。

3 過去の太陽ニュートリノ観測実験

3.1 太陽ニュートリノの起源

太陽は核融合によってエネルギーを生み出していると考えられている。太陽内で起きている主要な反応は陽子 2 個から始まる核融合の連鎖で、pp チェインと呼ばれている。この連鎖の過程でニュートリノを生成する反応は 5 種類ある。

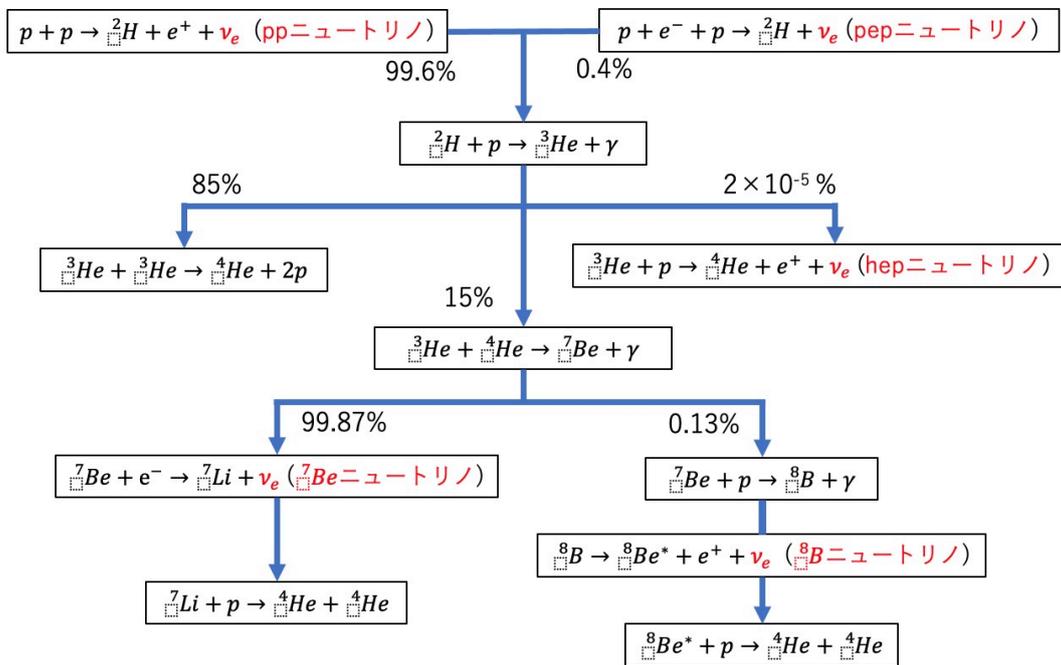


図 3.1 pp チェインの過程と各反応の割合 (数値は [3])

pp チェイン以外にも CNO サイクルと呼ばれる核融合反応もあり、これはホウ素より重い原子核である炭素、窒素、酸素、フッ素原子核による反応である。この連鎖の過程ではニュートリノは 3 種類の反応から生成される。

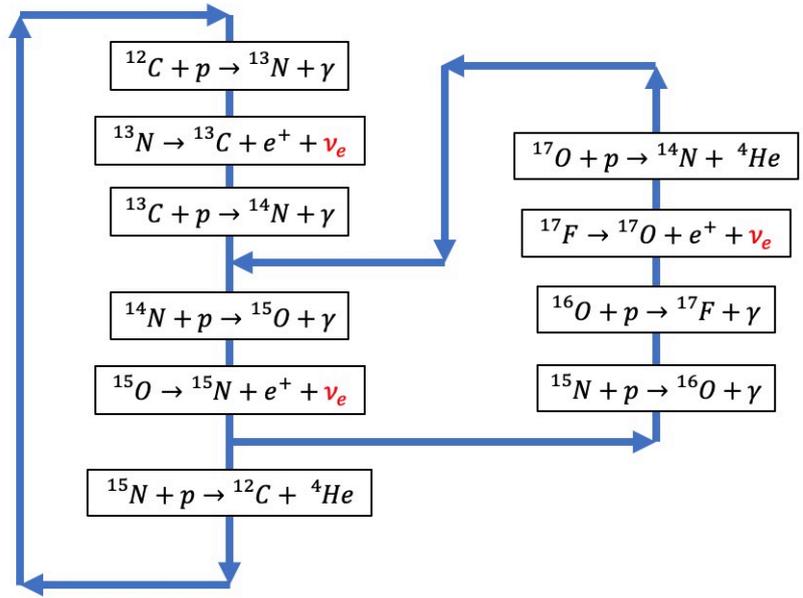


図 3.2 CNO サイクルの過程

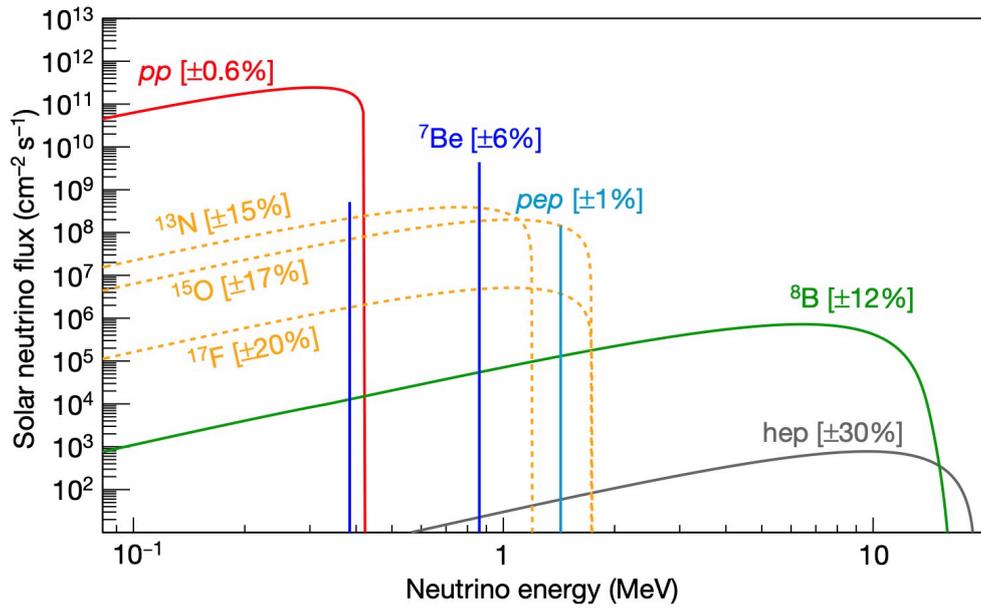


図 3.3 太陽ニュートリノのエネルギースペクトル (予想図) [3]

3.2 Homestake 実験 [4]

Homestake 実験は検出器に 615 トンのテトラクロロエチレン (C_2Cl_4) を用いた実験で、太陽内の核融合によるニュートリノを観測する目的で始まった。塩素とニュートリノの反応 ($E \geq 0.814\text{MeV}$ で起きる)



から生じる ^{37}Ar は放射性同位体であり、半減期 35 日で塩素に戻る。このアルゴンを取り出し、崩壊を検出することで数を数え、そこからニュートリノの数を測定した。

1995 年までに測定されたデータから、

$$\phi_{\nu_e}^{\text{Cl}} = 2.56 \pm 0.16(\text{stat.}) \pm 0.16(\text{syst.}) \quad [\text{SNU}] \quad (3.2)$$

となった。(stat.) は統計誤差、(syst.) は系統誤差を表す。

SNU は太陽ニュートリノ単位という単位で、1SNU は 10^{36} 個の原子に 1 秒あたり 1 回捕獲されるだけのニュートリノの流量を表す。標準太陽模型 (SSM) の予測では

$$\phi_{\nu_e}^{\text{Cl}}(\text{SSM}) = 7.6_{-1.1}^{+1.3} \quad [\text{SNU}] \quad (3.3)$$

であり、測定結果は予測の約 1/3 程度であった。Homestake 実験で、30 年間解決しなかった「太陽ニュートリノ問題」という電子ニュートリノの不足が指摘された。しかし、Homestake 実験では (3.1) 式の反応が起こった時刻やニュートリノの飛来方向はわからなかったため、本当に太陽から飛んできたニュートリノを数えられているのかという疑問があった。

3.3 Kamiokande[5], Super-Kamiokande[7]

Kamiokande は神岡鉱山の地下 1000m に位置し、検出器に 2140 トンの純水を用いた。ニュートリノと電子の弾性散乱

$$\nu_\alpha + e^- \rightarrow \nu_\alpha + e^- \quad (\alpha = e, \mu, \tau) \quad (3.4)$$

で生じる電子が発するチェレンコフ光を、光電子増倍管で検出することでニュートリノフラックスを測定した。Kamiokande の次に作られたのが Super-Kamiokande (SK) で、SK の実験は 4 段階に分けられる。

	実験期間	エネルギー閾値
SK-I	1996年4月～2001年7月	4.5MeV
SK-II	2002年10月～2005年10月	6.0MeV
SK-III	2006年6月～2008年9月	4.0MeV
SK-IV	2008年9月～現在	3.5MeV

図 3.4 SK の各段階の実験期間とエネルギー閾値 [6]

SK では5万トンの超純水を用いており、Kamiokande と同様に電子のチェレンコフ光を検出することでニュートリノフラックスを測定している。Homestake と異なり、散乱が起こった時刻や、発生したチェレンコフ光の様子から散乱が起こった位置やニュートリノの飛来方向がわかるので、太陽ニュートリノを検出できていることが判明した。

SK-I から SK-IV (2016 年まで) のデータによる 8B ニュートリノフラックスの測定結果は、

$$\phi_{sB}^{\text{SK}} = 2.345 \pm 0.014 \pm 0.036 \quad [10^6/\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}] \quad (3.5)$$

これは太陽ニュートリノ問題が解決した後の測定結果も含まれているが、当時と結果が大きく変わったわけではなく、この値も当時の測定結果も標準太陽模型の予測の約 1/2 程度であった。Kamiokande、SK-I の測定結果によって、「太陽ニュートリノ問題」が認められるようになっていった。

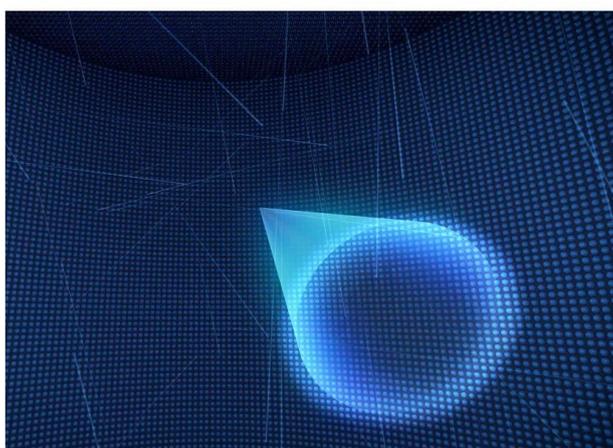


図 3.5 チェレンコフ光発生のイメージ [8]

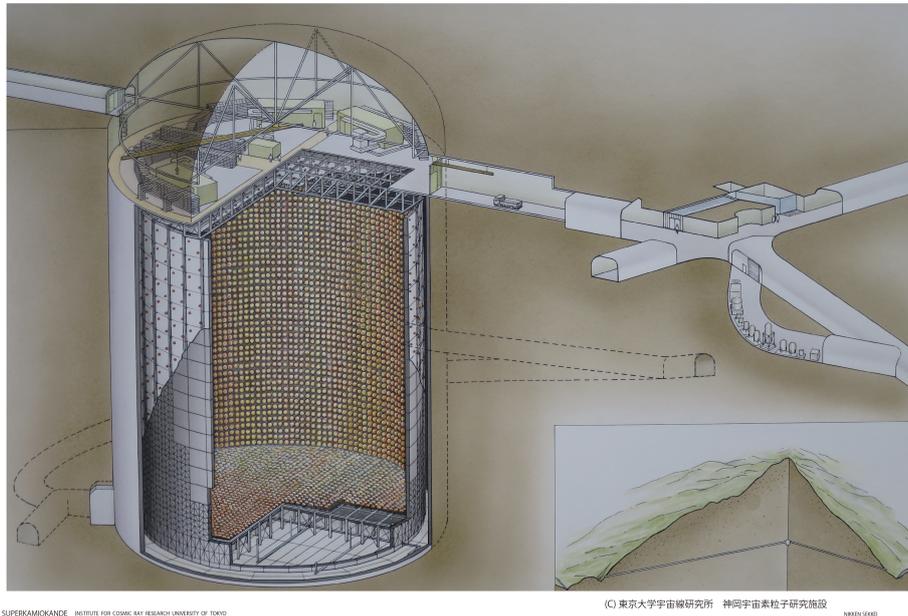


図 3.6 SK 検出器のイメージ図 [9]

3.4 Gallium 実験

SAGE (Soviet American Gallium Experiment)、Gallex (Gallium experiment)、GNO (Gallium Neutrino Observatory) の3つはガリウムを用いた実験を行った。ガリウムとニュートリノの反応 ($E \geq 0.233\text{MeV}$ で起きる)



で生じる ${}^{71}\text{Ge}$ を取り出し数えることで、ニュートリノフラックスを測定した。反応のエネルギー閾値が低いため、pp ニュートリノ等の低エネルギーのニュートリノも測定できるということからガリウムが選ばれた。

3.4.1 SAGE[10]

SAGE は 50 トンのガリウムを用い、常に 30°C に保つことでガリウムを液体のままに保った (ガリウムの融点は 29.76°C)。測定結果は

$$\phi_{\nu_e}^{\text{SAGE}} = 70.8_{-5.2}^{+5.3}(\text{stat.})_{-3.2}^{+3.7}(\text{syst.}) \quad [\text{SNU}] \quad (3.7)$$

で、標準太陽模型の予測の約 55% 程度であった。

3.4.2 Gallex / GNO[11]

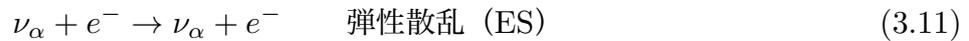
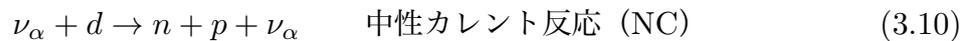
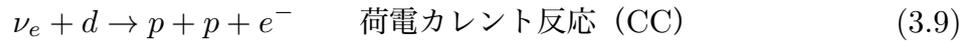
Gallex、GNO では 30.3 トンのガリウムを含む 100 トンの塩化ガリウムを用いた。Gallex は 1991 年～1997 年、GNO は 1998 年～2003 年まで測定を行った。Gallex と GNO を合わせた測定結果は

$$\phi_{\nu_e}^{\text{Gallex+GNO}} = 69.3 \pm 4.1(\text{stat.}) \pm 3.6(\text{syst.}) \quad [\text{SNU}] \quad (3.8)$$

で、標準太陽模型の予測の約 54% 程度であった。これら 3 つの実験から、低エネルギー領域でも太陽ニュートリノ問題が確認された。

3.5 SNO 実験 [12]

SNO (Sudbury Neutrino Observatory) 実験では 1000 トンの重水を用いた。重水を用いることにより、



という 3 つの反応をそれぞれ測定することが可能になった。 $\alpha = e, \mu, \tau$ であり、NC と ES は全てのフレーバーのニュートリノが起こす。ただし ES は ν_e が ν_μ, ν_τ よりも約 6 倍起こしやすい。各反応による測定結果は

$$\phi_{\text{CC}}^{\text{SNO}} = 1.76_{-0.05}^{+0.06}(\text{stat.})_{-0.09}^{+0.09}(\text{syst.}) \quad [10^6 \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}] \quad (3.12)$$

$$\phi_{\text{NC}}^{\text{SNO}} = 5.09_{-0.43}^{+0.44}(\text{stat.})_{-0.43}^{+0.46}(\text{syst.}) \quad [10^6 \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}] \quad (3.13)$$

$$\phi_{\text{ES}}^{\text{SNO}} = 2.39_{-0.23}^{+0.24}(\text{stat.})_{-0.12}^{+0.12}(\text{syst.}) \quad [10^6 \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}] \quad (3.14)$$

となった。ここで、ニュートリノ振動を仮定すると、次の関係式が得られる。

$$\phi_{\text{CC}}^{\text{SNO}} = \phi_e \quad (3.15)$$

$$\phi_{\text{NC}}^{\text{SNO}} = \phi_e + \phi_{\mu, \tau} \quad (3.16)$$

$$\phi_{\text{ES}}^{\text{SNO}} = \phi_e + 0.1559\phi_{\mu, \tau} \quad (3.17)$$

ϕ_e は電子ニュートリノのフラックス、 $\phi_{\mu,\tau}$ はミュー、タウニュートリノのフラックスである。この関係式を用いて計算すると、

$$\phi_e = 1.76_{-0.05}^{+0.05}(\text{stat.})_{-0.09}^{+0.09}(\text{syst.}) \quad [10^6 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}] \quad (3.18)$$

$$\phi_{\mu,\tau} = 3.41_{-0.45}^{+0.45}(\text{stat.})_{-0.45}^{+0.48}(\text{syst.}) \quad [10^6 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}] \quad (3.19)$$

が得られる。(3.12)~(3.14) 式、(3.18)~(3.19) 式をグラフにしたものが次の図 3.7 である。

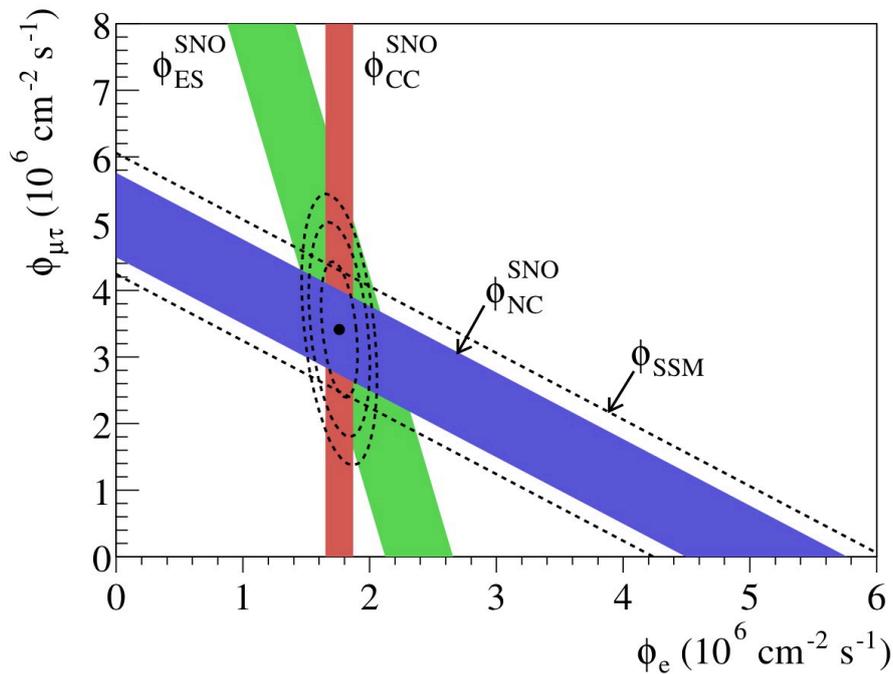


図 3.7 SNO の測定結果。色付きの領域は各反応のフラックスからの可能なエリア。黒点が (3.18), (3.19) 式。[12]

ニュートリノ振動を仮定したところ、 ν_e と $\nu_{\mu,\tau}$ のフラックスが 3 つの反応からの可能な領域にピッタリと重なった。この SNO 実験の結果によって、電子ニュートリノが他のフレーバーのニュートリノに変化したというニュートリノ振動の証拠が得られ、太陽ニュートリノ問題が解決された。

3.6 SNO までの結果

SNO までの観測結果から混合パラメータについての制限は次の図 3.8 である。

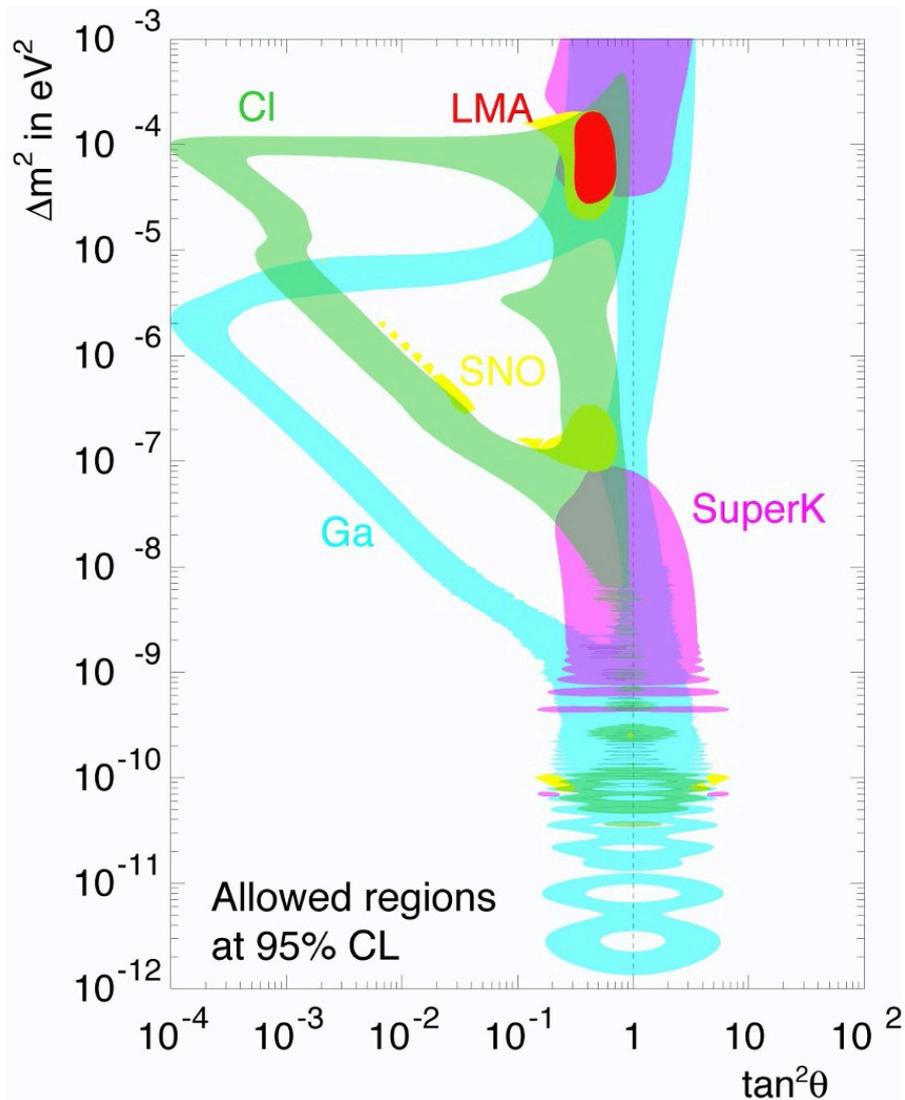


図 3.8 各実験からのパラメータの制限領域 [13]

各実験からの制限が重なっている部分はいくつかあるが、最も好ましいとされているのは LMA (Large Mixing Angle) 解と呼ばれるパラメータ領域である (図中の赤い領域)。

3.7 KamLAND 実験 [14]

KamLAND 実験は神岡鉱山の地下 1000m に 1000 トンの液体シンチレーター検出器を設置した。KamLAND では、原子炉からくる反電子ニュートリノを逆ベータ崩壊 ($E \geq 1.8\text{MeV}$ で起きる)



によって検出する。逆ベータ崩壊が起きると即座に e^+ が光を發し、その後 $200\mu\text{s}$ 遅れて水素による中性子捕獲からの光が発生する。發光が 2 回起こることにより、高い信頼度で反電子ニュートリノとバックグラウンドを区別することができる。

KamLAND によるパラメータ領域の制限が次の図 3.9 で、LMA 解を裏付けるような制限が得られた。

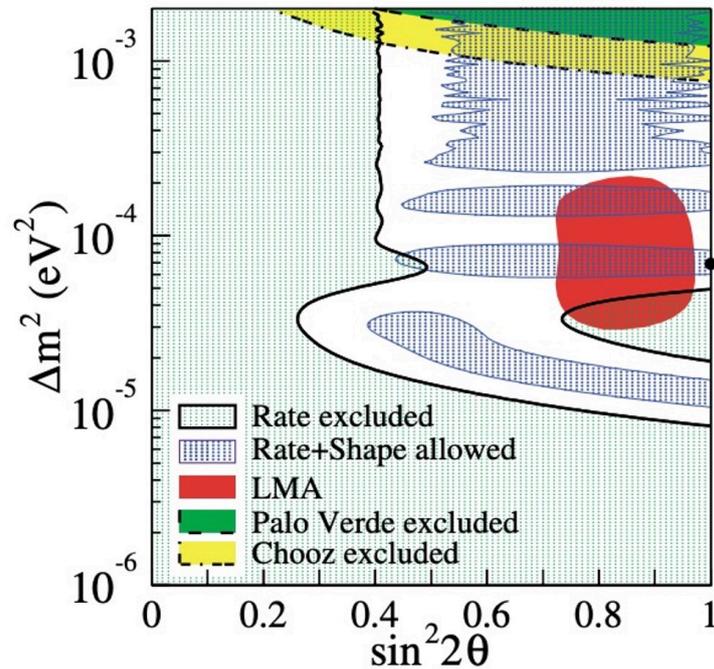


図 3.9 KamLAND 実験からのパラメータ制限。LMA 解以外は全て除外されている。[15]

4 最近の実験結果

4.1 SK-IV による報告 [8]

MSW-LMA (物質効果を考えた LMA) 解のパラメータでは、電子ニュートリノの生存確率の予測は次の図 4.1 のようになっている。

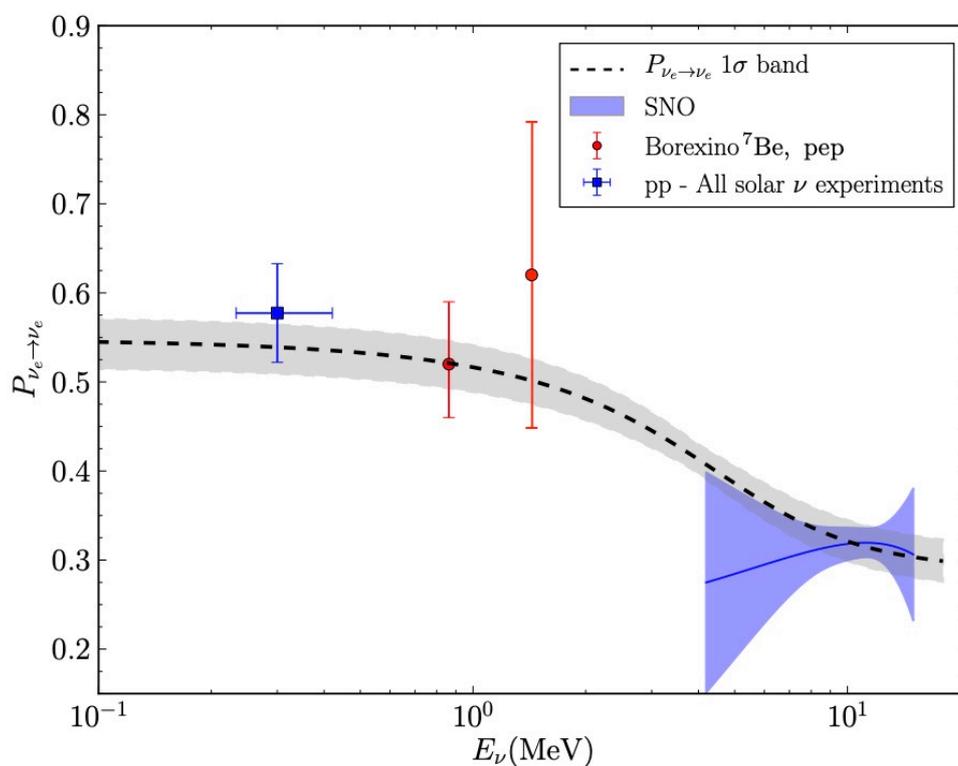


図 4.1 MSW-LMA 解の予測 [16]

特徴は、低エネルギーに行くにつれて徐々に生存確率が高くなっていくことであり、これは「upturn」と呼ばれている。SK-IV のエネルギー閾値は 3.5MeV なので、ニュートリノのエネルギースペクトルを測定することで upturn の検証ができる。

SK と SNO のデータから得られる生存確率の制限は次の図 4.2 である。

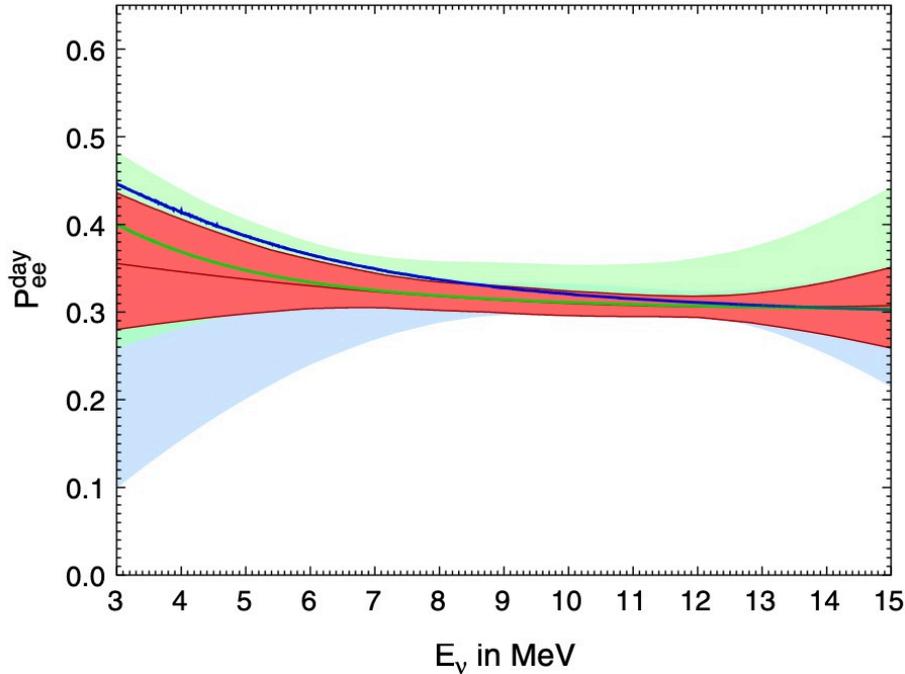


図 4.2 SK と SNO による生存確率の許される領域。上側の緑の領域が SK、下側の青の領域が SNO、SK と SNO のデータを合わせたものが赤の領域。[8]

SK はほんの少し upturn が好ましく、SNO は upturn と逆で生存確率が低エネルギーで減少する「downturn」の方が好ましい。この 2 つの実験結果を混ぜると upturn が好ましいという結果になり、現在の混合パラメータによる予測と一致している。

別のトピックとして day-night 効果というものがある。太陽ニュートリノを観測する際に、夜間は地球を通過して検出器に飛んでくるので、地球の物質効果を考えることができ、これを day-night 効果と呼んでいる。地球の効果によって日中のフラックスと夜間のフラックスに差が生じることが考えられる。日中のフラックスを ϕ_D 、夜間のフラックスを ϕ_N としたとき、地球の物質効果を測る量として day-night 非対称

$$A_{DN} = 2 \frac{\phi_D - \phi_N}{\phi_D + \phi_N} \quad (4.1)$$

を導入する。これは Δm^2 (2章で定義したもの、1番目と2番目の質量差) に感度がある。

4.49MeV から 19.5MeV までのフラックスの測定結果から、

$$A_{DN} = -4.9 \pm 1.8(\text{stat.}) \pm 1.4(\text{syst.})\% \quad (4.2)$$

で、過去の測定結果と合わせると

$$A_{DN} = -3.3 \pm 1.0(\text{stat.}) \pm 0.5(\text{syst.})\% \quad (4.3)$$

であった。

4.2 Borexino による CNO ニュートリノの直接測定 [17]

CNO ニュートリノは 0~1.74MeV の間のエネルギーを持ち、飛んでくる量も少ない。Borexino はシンチレーターの純化や分析方法の改善により 320keV という低いエネルギー閾値を実現し、2020 年に直接測定に成功という報告があった。CNO ニュートリノのエネルギースペクトルは次の図 4.3 である。

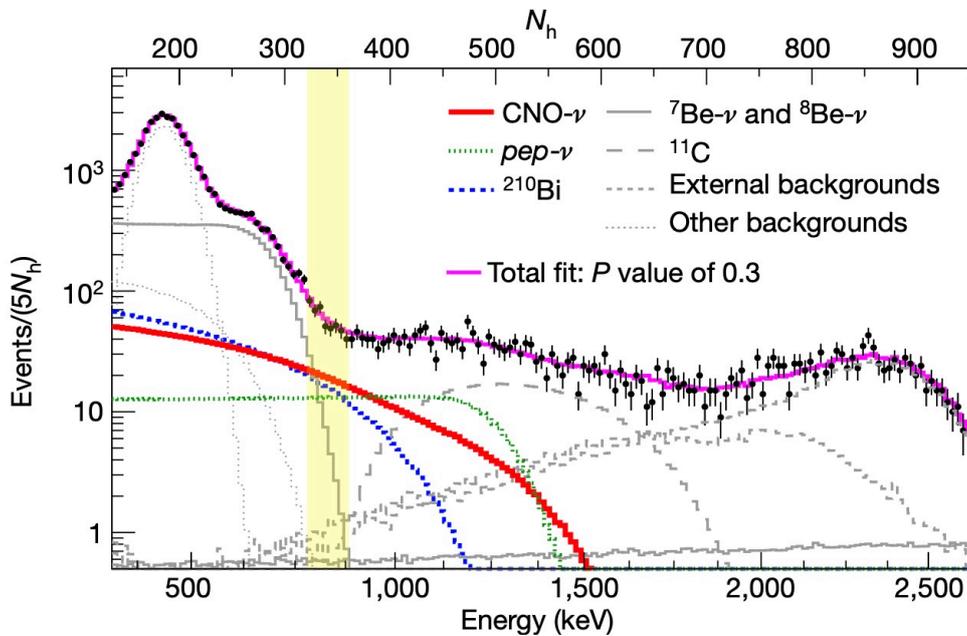


図 4.3 Borexino による CNO ニュートリノのエネルギースペクトル [17]

太陽について「金属量問題」と呼ばれる太陽内の $Z \geq 3$ の原子核の比率の問題があり、長年解決されていない。SSM には $Z \geq 3$ の原子核の量について 2つのモデルがあり、相対的に多い SSM-HZ と相対的に少ない SSM-LZ がある。今回の報告ではどちらも排除することができないが、CNO 以外のニュートリノの観測によって、HZ の方が LZ よりも好ましいという結果になった。

将来の高性能な実験によって CNO ニュートリノが測定されていけば、「金属量問題」の解決の糸口が見つかることが期待できる。

5 将来の実験

5.1 Hyper-Kamiokande[18]

Hyper-Kamiokande (HK) は SK の次の実験として計画されたもので、ニュートリノの検出方法は SK と同じである。検出器は直径 68m、深さ 71m の円筒型タンクに超純水を満たしたもので、SK と同じく 2 重の水槽になっている。内水槽の壁から 2m 内側の領域は有効体積と呼ばれており、HK は 19 万トンで SK の約 10 倍となる。これにより SK で得られる 100 年分のデータが 10 年で得られることになる。検出器に用いる光電子増倍管は SK の 2 倍の感度を持つものが開発中で、新しい光センサーによりエネルギー閾値を低くでき、光の量や検出時間をさらに正確に測ることができる。

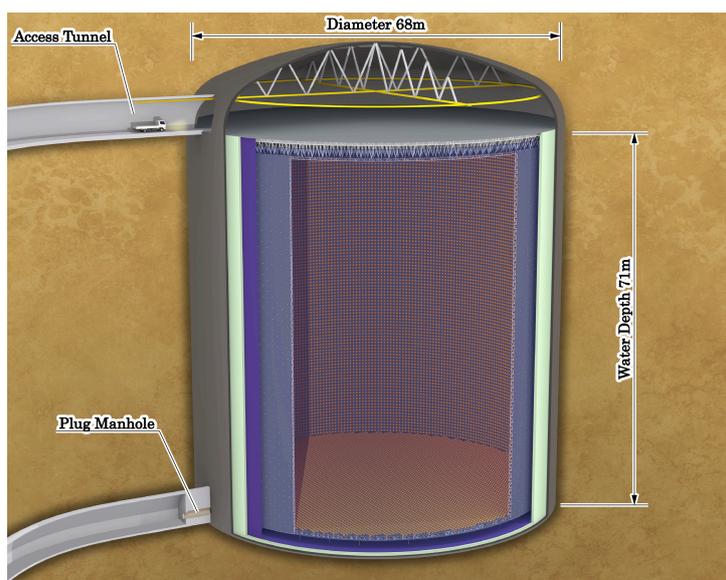


図 5.1 HK 検出器のイメージ図 [18]

実験の目的は主に 4 つあり、CP 対称性の破れの測定、ニュートリノの質量階層性の決定、太陽・大気・超新星ニュートリノ等の観測、陽子崩壊の観測である。

ニュートリノの CP 対称性の破れは、宇宙の物質・反物質非対称性に大きく関わっていると考えられており、破れの測定により非対称性の説明ができることが期待されている。CP 対称性が破れている場合、ニュートリノと反ニュートリノで物理現象の発生確率が異なるはずであり、HK では茨城県東海村の J-PARC 加速器からのミューニュートリノと反ミューニュートリノを観測し、振動確率の差を調べる予定である。

ニュートリノの質量固有状態は3種類ありそれぞれ質量が異なっていることはわかっているが、太陽ニュートリノや大気ニュートリノなどの観測では質量二乗差しか測ることができないので、それぞれの質量の値や大きさの順序はまだ判明していない。これはニュートリノ質量階層性問題と呼ばれており、 m_2 と m_3 で m_2 の方が軽い場合は「正常階層」、 m_3 の方が軽い場合は「逆階層」と言う。大気ニュートリノの day-night 効果の観測時に、正常階層では $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ が強められ、逆階層では $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ が強められることがわかっている。この差は5%から15%程度だが、巨大なHKならば測定できることが予想され、質量階層性が判明する可能性がある。

Kamiokandeは大マゼラン星雲で発生したSN1987Aという超新星爆発からのニュートリノを1987年に観測し、その結果は超新星爆発の理論に大きく貢献した。しかしSKでは超新星ニュートリノを観測できておらず、性能が向上したHKで観測を目指している。超新星ニュートリノの観測によって超新星爆発のメカニズムを詳しく調べることができ、さらに理論に貢献することが期待される。

大統一理論の中には陽子崩壊を予言しているものが存在する。大統一理論のエネルギースケールは 10^{16} GeV程度と予測されており、現代の実験設備では到達できないエネルギー領域である。しかし、陽子崩壊が観測できれば大統一理論と実験データを比較することができ、物理学に大きな進歩をもたらすことが期待される。SKの最新報告によれば、陽子の寿命は $p \rightarrow e^+\pi^0$ が $> 2.4 \times 10^{34}$ 年、 $p \rightarrow \mu^+\pi^0$ が $> 1.6 \times 10^{34}$ 年となっている[19]。HKは巨大な水槽を用いるので、大量の陽子を観測し続けることができる。10年間の観測で寿命 10^{35} 年のオーダーまで感度があり、様々な大統一理論のモデルを検証することができる。

6 まとめ

本論文では、ニュートリノ振動の定式化を、特に物質中の場合は詳細に行った。簡単のためフレーバーを2世代にして行ったが、実際これは実験結果とのずれが小さく、よい近似である。また、様々な太陽ニュートリノ観測実験を紹介し、どのように発展してきたかを見た。現在、12 混合の混合パラメータは

$$\sin^2 \theta = 0.304 \pm 0.012 \quad (6.1)$$

$$\Delta m^2 = 7.42_{-0.20}^{+0.21} \times 10^{-5} \text{eV}^2 \quad (6.2)$$

となっている [20]。太陽ニュートリノは初めて観測されてから 50 年以上経過したが、2020 年には CNO ニュートリノの初の直接測定が成功するなど、まだまだ新しい成果が生まれている。より精度の良い将来の実験によって、混合パラメータの値の決定や未解決の疑問点の発展が期待される。

参考文献

- [1] <http://www-sk.icrr.u-tokyo.ac.jp/sk/sk/solar.html>
- [2] M. Fukugita et al. / *Physics of Neutrinos and Application to Astrophysics* (2003)
- [3] M. Agostini / *Nature* 562, 505-510 (2018)
- [4] B. T. Cleveland et al. / *Astrophys. J.* 496:505-526 (1998)
- [5] K. S. Hirata et al. / *Phys. Rev. Lett.* 63, 16 (1989)
- [6] <http://www-sk.icrr.u-tokyo.ac.jp/sk/sk/history.html>
- [7] K. Abe et al. / *Phys. Rev. D* 94, 052010 (2016)
- [8] <http://www-sk.icrr.u-tokyo.ac.jp/sk/detector/cherenkov.html>
- [9] http://www-sk.icrr.u-tokyo.ac.jp/sk/gallery/wmj/sk_build02h-wmj.jpg
- [10] J. N. Abdurashitov et al. / *Journal of Experimental and Theoretical Physics* volume 95, p.181-193(2002)
- [11] M. Altmann et al. / *Phys. Lett. B* 616 (2005) 174-190
- [12] A. Bellerive et al. / *Nucl. Phys. B* 908 (2016) 30-51
- [13] Bruce Berger / <https://slideplayer.com/slide/14824677> p.12 (2004)
- [14] T. Araki et al. / *Phys. Rev. Lett.* 94, 081801 (2005)
- [15] K. Eguchi et.al / *Phys. Rev. Lett.* 90, 021802 (2003)
- [16] W.C. Haxton et al. / *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* 51 (2013) 21-61
- [17] M. Agostini et al. / *Nature* Vol. 587, 577-582 (2020)
- [18] <http://www.hyper-k.org/physics.html>
- [19] A. Takenaka et al. / *Phys. Rev. D* 102, 112011 (2020)
- [20] I. Esteban et al. / *J. High Energ. Phys.* 2020, 178 (2020)