

# 異常磁気モーメント $g-2$ を測る式の導出

15RP010 吉原沙里

2019年3月30日

## 目次

1	はじめに	2
2	歳差運動	2
2.1	コマの歳差運動	2
2.2	スピン	3
3	荷電粒子の回転	5
3.1	円電流と磁気モーメント	5
3.2	荷電粒子の受けるトルク	6
4	相対論的量子力学	9
4.1	ディラック方程式の非相対論的極限	9
4.2	ヘリシティの保存	12
5	トーマス歳差	15
5.1	ローレンツ変換	15
5.2	トーマス歳差	17
6	BMT 方程式	21
6.1	BMT 方程式の導出	21
6.2	静止系での BMT 方程式の性質	23
7	BMT 方程式の拡張	26
7.1	EDM を加える 1	26
7.2	EDM を加える 2	27
7.3	双対と、双対では表せない項を含んだ拡張	30
7.4	磁荷がある場合の運動方程式への拡張	32
8	$g - 2$ 実験	34
8.1	BNL	34
8.2	J-PARC	35
9	参考文献	36

# 1 はじめに

ミューオンの磁気モーメントに  $g$  という値を入れて定義する。これは古典的に考えると 1 であり厳密に 2 であればディラックの結論と一致することを確認していく。しかし、場の理論で考えると  $g = 2$  からずれてしまう。この  $g$  のずれを  $a_\mu = \frac{g-2}{2}$  として測る実験で用いられる基礎的な方程式を求めたい。 $g = 2$  からずれるので、電磁場の中でミューオンを一周させる状況を考えると一周してきたミューオンはサイクロトロン振動数とスピン角振動数の向きがわずかにずれる。そのずれの振動数を観測し、 $a_\mu$  の値を精度よく測る実験が行われている。その実験で用いる基礎的な方程式を導出し、実際の実験の簡単な紹介をする。

## 2 歳差運動

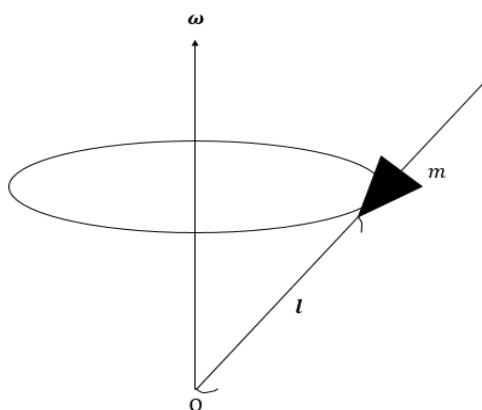
### 2.1 コマの歳差運動

角運動量の定義から

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N} \tag{2.1}$$

が成り立つ。

コマが歳差運動をしている場合を考える。



全角運動量  $\mathbf{L}$  は、重心運動による角運動量と、重心周りの運動による角運動量に分けられて、

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_G + \mathbf{L}' \tag{2.2}$$

コマの自転が非常に速い

$$|\mathbf{L}'| \gg |\mathbf{L}_G| \tag{2.3}$$

のとき原点周りの角運動量は  $\mathbf{L}'$  に等しい。

このコマが感じるトルクは

$$\mathbf{N} = \mathbf{l} \times mg \frac{-\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|} \tag{2.4}$$

角運動量の微小な変化は

$$dL' = d\phi \times L' \quad (2.5)$$

二式から、

$$l \times \frac{mg(-\omega)}{|\omega|} dt = d\phi \times L'$$

$$l \times mg \frac{-d\phi}{|\omega|} = d\phi \times L'$$

$$\frac{mg}{|\omega|} d\phi \times l = d\phi \times L'$$

$$L' = \frac{mg}{|\omega|} l$$

$$\omega = \frac{mgl}{L'} \quad (2.6)$$

## 2.2 スピン

電子の静止系で考える。このとき  $\mathbf{S}$  が全角運動量であるから

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \mathbf{N} \quad (2.7)$$

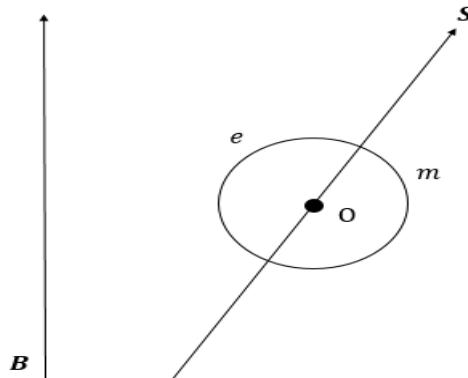
この電子に磁場がかかった時に受けるトルクは

$$\mathbf{N} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} \quad (2.8)$$

ここで、磁気モーメントを質量  $m$ , 電荷が  $e$  として図のように

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{ge}{2m} \mathbf{S} \quad (2.9)$$

とした。



今

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \times \mathbf{S} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S} \quad (2.10)$$

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \mathbf{N} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} = \frac{ge}{2m} \mathbf{S} \times \mathbf{B} \quad (2.11)$$

より、両方の式を比較して、

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S} = -\mathbf{B} \times \frac{ge}{2m} \mathbf{S} \quad (2.12)$$

角速度は

$$\boldsymbol{\omega}_S = -\frac{ge}{2m} \mathbf{B} \quad (2.13)$$

と書けることが分かる。

また、荷電粒子が受けるローレンツ力から、サイクロトロン運動の角速度  $\omega_c$  を求める。運動方程式は、

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (2.14)$$

簡単のため、磁場は  $z$  軸を向いているとする。

$$\mathbf{B} = B_z \mathbf{e}_z \quad (2.15)$$

$$\begin{cases} m \frac{dv_x}{dt} = ev_y B_z \\ m \frac{dv_y}{dt} = -ev_x B_z \end{cases} \quad (2.16)$$

$$m \frac{d^2 v_x}{dt^2} = e \frac{dv_y}{dt} B_z$$

$$m \frac{m}{eB_z} \frac{d^2 v_x}{dt^2} = -ev_x B_z$$

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = -\frac{e^2 B_z^2}{m^2} v_x$$

$$\omega_c = \frac{eB_z}{m} \quad (2.17)$$

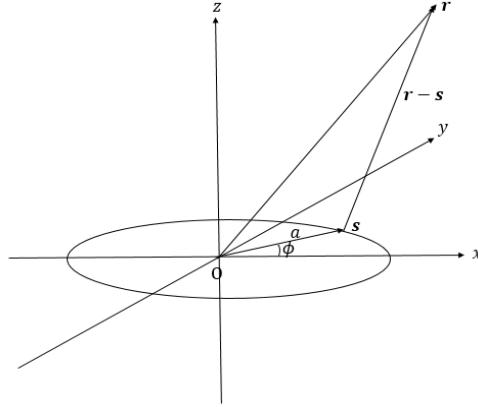
$\omega_s$  と  $\omega_c$  を比較すると

$$\frac{\omega_s}{\omega_c} = -\frac{g}{2} \quad (2.18)$$

$g = 2$  であれば、スピンの角速度と古典的なローレンツ力による角速度が一致することがわかる。

### 3 荷電粒子の回転

#### 3.1 円電流と磁気モーメント



図のように円電流があるとし、各ベクトル量を次のように置く。

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + z\mathbf{e}_z \quad (3.1)$$

$$\mathbf{s} = a \cos \phi \mathbf{e}_x + a \sin \phi \mathbf{e}_y \quad (3.2)$$

$$d\mathbf{s} = (-a \sin \phi \mathbf{e}_x + a \cos \phi \mathbf{e}_y) d\phi \quad (3.3)$$

$$\mathbf{r} - \mathbf{s} = (x - a \cos \phi) \mathbf{e}_x - a \sin \phi \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z \quad (3.4)$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^2 = x^2 + z^2 + a^2 - 2xa \cos \phi \quad (3.5)$$

ビオ・サバールの法則から、位置  $\mathbf{r}$  に作る円電流が作る磁場は、

$$\mathbf{B} = \int d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{s} \times (\mathbf{r} - \mathbf{s})}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^3} \quad (3.6)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\phi \{ az \cos \phi \mathbf{e}_x + az \sin \phi \mathbf{e}_y + (a^2 - ax \cos \phi) \mathbf{e}_z \}}{x^2 + z^2 + a^2 - 2xa \cos \phi} \quad (3.7)$$

$|\mathbf{r}| \gg a, x \gg a$  の時、

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &\simeq \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{(x^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \int d\phi \left[ 1 + 3 \frac{xa \cos \phi}{x^2 + z^2} [za \cos \phi \mathbf{e}_x + az \sin \phi \mathbf{e}_y + (a^2 - ax \cos \phi) \mathbf{e}_z] \right] \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{r^3} \left[ 2\pi a^2 \mathbf{e}_z + 2\pi \frac{3a^2 xz}{2(x^2 + z^2)} \mathbf{e}_x - 2\pi \frac{3a^2 x^2}{2(x^2 + z^2)} \mathbf{e}_z \right] \\ &= \frac{\mu_0 I a^2}{2r^3} \left[ \mathbf{e}_z + \frac{3xz}{2r^2} \mathbf{e}_x - \frac{3x^2}{2r^2} \mathbf{e}_z \right] \end{aligned} \quad (3.8)$$

円電流の面積を  $S = \pi a^2$  とすると、

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I S}{4\pi r^3} \left[ \frac{-x^2 + 2z^2}{r^2} \mathbf{e}_z + \frac{3xz}{r^2} \mathbf{e}_x \right] \quad (3.9)$$

とまとめられる。これが円電流が  $|\mathbf{r}| \gg a$  に作る磁場である。磁気モーメントが遠方に作る磁場を求めると、

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \left[ -\frac{\mathbf{m}}{r^3} + \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{r^5} \right] \quad (3.10)$$

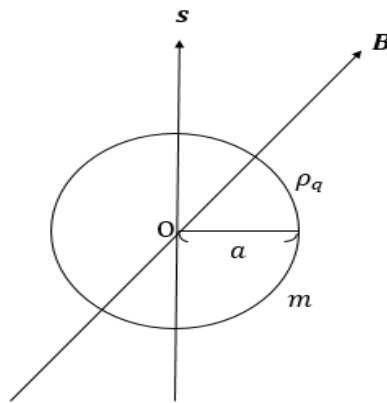
$\mathbf{m} = q_m \mathbf{s}$  である。両方の式を比較して、

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \mu_0 I S = \mu_0 \frac{qv}{2\pi a} \pi a^2 \mathbf{e}_z = \mu_0 \frac{q}{2m} (mva) \mathbf{e}_z \\ &= \frac{\mu_0 q}{2m} L \end{aligned} \quad (3.11)$$

磁気モーメントを角運動量を使って表した。

### 3.2 荷電粒子の受けるトルク

スピンを、古典的な荷電粒子の自転によるものとして解釈してみる。荷電粒子の半径は  $a$ , 質量は  $m$ , 電荷は  $q$  で一様に分布しているとし、外部磁場は図のようにかかっている。荷電粒子を円電流の重ね合わせのように考える。外部磁場が作用しているのでこれはローレンツ力を受け、このトルクを求める。



電流密度は電荷密度  $\rho_q$  を使って

$$\mathbf{j} = \rho_q \mathbf{v} \quad (3.12)$$

と表され、電流は、その微小断面で積分して

$$\mathbf{I} = \int \rho_q \mathbf{v} dS \quad (3.13)$$

と書ける。ローレンツ力は

$$\int d\mathbf{F} = \int d^3x \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (3.14)$$

なので円電流が受けるトルクは

$$\begin{aligned}
 \mathbf{N} &= \int \mathbf{r} \times d\mathbf{F} \\
 &= \int d^3x \mathbf{r} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \\
 &= \int d^3x \{ \mathbf{j}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{j})\mathbf{B} \} \\
 &= \int d^3x \mathbf{j}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

ここで位置と磁場と速度をそれぞれ

$$\mathbf{r} = r \cos \phi \mathbf{e}_x + r \sin \phi \mathbf{e}_y \tag{3.16}$$

$$\mathbf{B} = B_x \mathbf{e}_x + B_y \mathbf{e}_y + B_z \mathbf{e}_z \tag{3.17}$$

$$\mathbf{v} = -v \sin \phi \mathbf{e}_x + v \cos \phi \mathbf{e}_y \tag{3.18}$$

とおくと

$$\begin{aligned}
 \mathbf{N} &= \int r d\phi dS \mathbf{j} r (B_x \cos \phi + B_y \sin \phi) \\
 &= \int r^2 d\phi (-\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y) (B_x \cos \phi + B_y \sin \phi)
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

とまとめられる。 $S_a$  を円電流の作る面積として表すと、

$$\begin{aligned}
 \mathbf{N} &= r^2 \pi (B_x \mathbf{e}_y - B_y \mathbf{e}_x) I \\
 &= I S_a (B_x \mathbf{e}_y - B_y \mathbf{e}_x) \\
 &= I S_a \mathbf{e}_z \times \mathbf{B} \\
 &= \frac{q\mathbf{L}}{2m} \times \mathbf{B}
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

円電流にかかるトルクが求められた。

球に拡張すると、球にかかるトルクは、角速度  $\omega$  で

$$\mathbf{r} = r \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + r \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_y + r \cos \theta \mathbf{e}_z \tag{3.21}$$

$$\mathbf{B} = B_x \mathbf{e}_x + B_y \mathbf{e}_y + B_z \mathbf{e}_z \tag{3.22}$$

$$\mathbf{v} = -r\omega \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_x + r\omega \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_y \tag{3.23}$$

と書く。トルクを計算し直すと

$$\begin{aligned}
 \mathbf{N} &= \int r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \times \rho_q r \omega \sin \theta (-\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y) r (B_x \sin \theta \cos \phi + B_y \sin \theta \sin \phi) \\
 &= \rho_q \omega \frac{a^5}{5} \frac{4\pi}{3} (-B_y \mathbf{e}_x + B_x \mathbf{e}_y) \\
 &= \frac{a^2}{5} \omega q (-B_y \mathbf{e}_x + B_x \mathbf{e}_y)
 \end{aligned} \tag{3.24}$$



半径  $a$ 、質量  $m$  の球にかかる慣性モーメントを求めて、この球の角運動量は

$$\mathbf{L} = \frac{2}{5} m a^2 \boldsymbol{\omega} \quad (3.25)$$

とわかるので、まとめると

$$\mathbf{N} = \frac{q\mathbf{L}}{2m} \times \mathbf{B} \quad (3.26)$$

荷電粒子を新たに球のように考えても点電荷の場合と同じ結果を与えることが分かった。

## 4 相対論的量子力学

### 4.1 ディラック方程式の非相対論的極限

ディラック方程式は、ポテンシャル  $V^\mu = (V^0, \mathbf{V}) = eA^\mu$  を用いて

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = [\boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{V}) + V^0 + \beta m]\psi \quad (4.1)$$

で書かれ、正のエネルギー解を

$$\psi(r, t) = \begin{pmatrix} \chi(r) \\ \eta(r) \end{pmatrix} e^{-iEt} \quad (4.2)$$

で仮定する。ここでエネルギーは  $E = m + T$  である。ディラック方程式は

$$(m + T) \begin{pmatrix} \chi(r) \\ \eta(r) \end{pmatrix} = [\boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{V}) + V^0 + \beta m] \begin{pmatrix} \chi(r) \\ \eta(r) \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

変形すると

$$T \begin{pmatrix} \chi \\ \eta \end{pmatrix} = [-m + V^0 + \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{V}) + m\beta] \begin{pmatrix} \chi \\ \eta \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

$$= H \begin{pmatrix} \chi \\ \eta \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

この  $H$  が  $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$  としたときも不変であってほしい。したがって、 $\mathbf{p}$  に関しては偶数次になるように、非対角にある  $\mathbf{p}$  を消すようなユニタリー変換をする。

$$U = U^\dagger = A\beta + \frac{\lambda}{m} \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} \quad (4.6)$$

ここで

$$A = \sqrt{1 - \frac{\lambda^2 p^2}{m^2}} \quad (4.7)$$

であるような変換で、 $\lambda$  は後で選ばれるパラメーターである。ディラック行列の反交換関係から  $UU^\dagger = U^\dagger U = 1$  であることが確かめられる。 $U$  がユニタリーであるという事実から、変換された波動関数

$$\begin{pmatrix} \chi' \\ \eta' \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \chi \\ \eta \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

が同じノルムを持つ。式 (4.5) を変換して

$$T \begin{pmatrix} \chi' \\ \eta' \end{pmatrix} = UHU^{-1} \begin{pmatrix} \chi' \\ \eta' \end{pmatrix} = H' \begin{pmatrix} \chi' \\ \eta' \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

$H'$  を求める。各項は、

$$U(-m)U^{-1} = -m \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned}
UV^0U^{-1} &= \left( A\beta + \frac{\lambda}{m} \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} \right) \\
&= AV^0A + \beta \frac{\lambda}{m} (AV^0 \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} - \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} V^0 A) + \left( \frac{\lambda}{m} \right)^2 \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} V^0 \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}
\end{aligned} \tag{4.11}$$

$$U \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{V}) U^{-1} = \left( A\beta + \frac{\lambda}{m} \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} \right) \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{V}) \left( A\beta + \frac{\lambda}{m} \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} \right) \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}
U \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{V}) U^{-1} &= -A \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{V}) A + \beta \frac{\lambda}{m} [A \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{V}) \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}) \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{V}) A] \\
&\quad + \left( \frac{\lambda}{m} \right)^2 \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{V}) \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}
Um\beta U^{-1} &= \left( A\beta + \frac{\lambda}{m} \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} \right) m\beta \left( A\beta + \frac{\lambda}{m} \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} \right) \\
&= m\beta A^2 + 2\lambda A \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} - \beta \lambda^2 \frac{p^2}{m}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

非対角項は  $\alpha$  の奇数乗に比例している。 $A$  を展開すると

$$A \simeq 1 - \frac{\lambda^2 p^2}{2m^2} \tag{4.15}$$

$m^{-1}$  次までで展開すると

$$H'_{off-diag} = -\boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{V}) + 2\lambda \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + O\left(\frac{1}{m^2}\right) \tag{4.16}$$

よって  $\lambda = \frac{1}{2}$  を選ぶと、

$$H'_{off-diag} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{V} \tag{4.17}$$

非対角項の近似でディラック方程式は

$$\begin{cases} T\chi' = H'_{11}\chi' + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{V}\eta' \\ T\eta' = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{V}\chi' - 2m\eta' \end{cases} \tag{4.18}$$

と書ける。 $\eta$  を消去して

$$\begin{aligned}
T\chi' &= \left( H'_{11} + \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{V} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{V}}{2m} \right) \chi' \\
&= \left( H'_{11} + \frac{V^2}{2m} \right) \chi'
\end{aligned} \tag{4.19}$$

$\lambda = \frac{1}{2}$  を使って  $H'_{11}$  を簡単化していく。

$$\begin{aligned}
H'_{11} &= -m + AV^0A + \frac{1}{4m^2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} V^0 \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} + \frac{1}{2m} [A \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{V}) \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{V}) A] + mA^2 - \frac{p^2}{4m} \\
&\sim V^0 - \frac{p^2}{8m^2} V^0 - V^0 \frac{p^2}{8m} + \frac{1}{4m^2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} V^0 \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\
&\quad + \frac{1}{2m} [\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{V}) \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{V})] - \frac{p^4}{8m^3} - \frac{p^2}{2m}
\end{aligned} \tag{4.20}$$

ここで、

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k \quad (4.21)$$

を使って

$$\begin{aligned} \sigma \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{V}) \sigma \cdot \mathbf{p} + \sigma \cdot \mathbf{p} \sigma \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{V}) &= 2p^2 - \sigma \cdot \mathbf{p} \sigma \cdot \mathbf{V} - \sigma \cdot \mathbf{V} \sigma \cdot \mathbf{p} \\ &= 2p^2 \mathbf{p} \cdot \mathbf{V} - \mathbf{V} \cdot \mathbf{p} - i \sigma \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{V}) - i \sigma \cdot (\mathbf{V} \times \mathbf{p}) \\ &= (\mathbf{p} - \mathbf{V})^2 + p^2 - V^2 - \sigma \cdot [\nabla \times \mathbf{V}] \\ &= (\mathbf{p} - \mathbf{V})^2 + p^2 - V^2 - e \sigma \cdot \mathbf{B} \end{aligned} \quad (4.22)$$

磁気モーメント相互作用の項が導かれた。 $\mathbf{V}$  を  $e\mathbf{A}$  で置き換え、 $\nabla \times \mathbf{A}$  を使うことで得られた。次に、

$$p^2 V^0 + V^0 p^2 = [p^2 V^0] + 2[\mathbf{p} V^0] \cdot \mathbf{p} + 2V^0 p^2 \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \sigma \cdot \mathbf{p} V^0 \sigma \cdot \mathbf{p} &= \sigma \cdot [\mathbf{p} V^0] \sigma \cdot \mathbf{p} + V^0 p^2 \\ &= [\mathbf{p} V^0] \cdot \mathbf{p} + i \sigma \cdot ([\mathbf{p} V^0] \times \mathbf{p}) + V^0 p^2 \end{aligned} \quad (4.24)$$

より、 $H'_{11}$  で起きる組み合わせで  $V^0 p^2$  と  $[\mathbf{p} V^0] \cdot \mathbf{p}$  の項はキャンセルする。よって

$$-\frac{1}{8m^2}(p^2 V^0 + V^0 p^2) + \frac{\sigma \cdot \mathbf{p} V^0 \sigma \cdot \mathbf{p}}{4m^2} = -\frac{[p^2 V^0]}{8m^2} + \frac{i \sigma \cdot ([\mathbf{p} V^0] \times \mathbf{p})}{4m^2} \quad (4.25)$$

最終的に  $\mathbf{p} = -i\nabla, \mathbf{V} = e\mathbf{A}, V^0 = e\phi = e\phi(r)$  と置き換えると

$$H'_{11} + \frac{V^2}{2m} = \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}{2m} + e\phi - \frac{e}{2m} \sigma \cdot \mathbf{B} - \frac{p^4}{8m^3} + \frac{e[\nabla^2 \phi]}{8m^2} + \frac{e}{4m^2} \sigma \cdot ([\nabla \phi] \times \mathbf{p}) \quad (4.26)$$

を与える。球対称のポテンシャルでは、 $\nabla \phi = \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{d\phi}{dr}$  と書けるので、最終的に有効ハミルトニアンは

$$H_{eff} = \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}{2m} + e\phi - \frac{e}{2m} \sigma \cdot \mathbf{B} - \frac{p^4}{8m^3} + \frac{e[\nabla^2 \phi]}{8m^2} + \frac{e}{4mr^2} \frac{d\phi}{dr} \sigma \cdot \mathbf{L} \quad (4.27)$$

を与える。ここで、 $\mathbf{L}$  は軌道角運動量である。スピン相互作用エネルギーを  $U$  として取り出すと、

$$\begin{aligned} U &= -\frac{e}{2m} \sigma \cdot \mathbf{B} + \frac{e}{4m^2} \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} \sigma \cdot \mathbf{L} \\ &= -2 \left( \frac{e}{2m} \right) \mathbf{S} \cdot \mathbf{B} + \frac{e}{2m^2} \left( \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} \right) \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} \end{aligned} \quad (4.28)$$

$\mathbf{S} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}$  は電子のスピン演算子である。一項目からは  $g = 2$  であることが分かり、二項目は電子の運動のために見える磁場での電子の磁気モーメント相互作用により、トーマス歳差という運動を含んでいて、 $g = 2$  だということが分かる。

## 4.2 ヘリシティの保存

ここでは相対論的量子力学で1粒子に対する運動を考えて、観測量が定数かどうかを考える。  
ハミルトニアンが

$$H = \alpha_j p_j + \beta m \quad (4.29)$$

である自由粒子に対して運動量に対するハイゼンベルグ運動方程式は

$$\frac{dp_k}{dt} = i[H, p_k] = 0 \quad (4.30)$$

であるので、運動量は保存量である。

次に、自由粒子に対する角運動量を考える。角運動量の第1成分に対しては、

$$\frac{dL_1}{dt} = i[H, L_1] = i[\alpha_k p_k, (x_2 p_3 - x_3 p_2)] = \alpha_2 p_3 - \alpha_3 p_2 \quad (4.31)$$

2,3成分についても同様に考えて

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{p} \quad (4.32)$$

よって自由ディラック粒子に対して角運動量は保存量ではない。

次にスピン角運動量について考える。ここで使うディラック行列の関係は

$$\gamma_k = \begin{pmatrix} 0 & -1\sigma_k \\ i\sigma_k & 0 \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

$$\gamma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} \gamma_5 &= \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} \\ &= i\gamma_k \gamma_4 \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= -i\gamma_1 \gamma_2 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \\ &= -i\gamma_1 \gamma_2 \gamma_5 \\ &= -\begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -\Sigma_k \gamma_5 \\ &= -\gamma_5 \Sigma_k \end{aligned} \quad (4.37)$$

である。スピンの 1 成分に対するハミルトニアンとの交換関係は

$$\begin{aligned}
[H, \Sigma_1] &= [c\alpha_k p_k, \Sigma_k] \\
&= -c[\gamma_5 \Sigma_k p_k, \Sigma_1] \\
&= -(\gamma_5 \Sigma_2 p_2 \Sigma_1 - \Sigma_1 \gamma_5 \Sigma_2 p_2) - (\gamma_5 \Sigma_3 p_3 \Sigma_1 - \Sigma_1 \gamma_5 \Sigma_3 p_3) \\
&= -(i\alpha_3 p_2 + i\alpha_3 p_2) - (-i\alpha_2 p_3 - i\alpha_2 p_3) \\
&= 2i(\alpha_2 p_3 - \alpha_3 p_2)
\end{aligned} \tag{4.38}$$

より、

$$\frac{d\Sigma}{dt} = -2(\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{p}) \tag{4.39}$$

よって、自由電子のスピン角運動量も保存しない。

しかし、スピン角運動量と運動量の積  $\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}$  の時間変化は、

$$\begin{aligned}
\frac{d(\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p})}{dt} &= \frac{d\boldsymbol{\Sigma}}{dt} \cdot \mathbf{p} + \boldsymbol{\Sigma} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.40}$$

これは、ヘリシティ  $\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$  が保存することを意味する。

全角運動量

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \frac{\boldsymbol{\Sigma}}{2} \tag{4.41}$$

も同様に、

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d\boldsymbol{\Sigma}}{dt} = 0 \tag{4.42}$$

保存することがわかる。

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} - e\mathbf{A} \tag{4.43}$$

ハミルトニアン

$$H = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\pi} + eA^0 + \beta m \tag{4.44}$$

を使って、

$$\dot{\pi}_k = i[H, \pi_k] - e \frac{\partial A_k}{\partial t} \tag{4.45}$$

$$= i\alpha_j [\pi_j, \pi_k] + ie[A_0, \pi_k] \tag{4.46}$$

$$[A_0, \pi_k] = [A_0, p_k] \tag{4.47}$$

$$= i \frac{\partial A_0}{\partial x_k} \tag{4.48}$$

と、

$$[\pi_1, \pi_2] = ie \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - ie \frac{\partial A_1}{\partial x_2} = ieB_3 \tag{4.49}$$

の関係は分かるので、代入すると

$$\dot{\pi} = e(\mathbf{E} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{B}) \quad (4.50)$$

演算子のローレンツ力の方程式と見なせる。先ほどと同様に、電磁場での電子の  $\boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}$  の時間変化を見たい。

$$\begin{aligned} \frac{d(\boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})}{dt} &= i[(-\gamma_5 \boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{\pi} + \beta m + eA_0), \boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}] \\ &= ie[A_0, \boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}] \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$e\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{E} \quad (4.52)$$

電場がなければヘリシティが保存することが説明される。

## 5 トーマス歳差

### 5.1 ローレンツ変換

無限小ローレンツ変換

$$A = e^L \quad (5.1)$$

$$= e^{-\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{K} - \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{S}} \quad (5.2)$$

ここで使っていく量は

$$\beta = \tanh \xi \quad (5.3)$$

$$\gamma = \cosh \xi \quad (5.4)$$

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{v}}{c} \quad (5.5)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (5.6)$$

$$\boldsymbol{\xi} = \hat{\boldsymbol{\beta}} \tanh^{-1} \beta \quad (5.7)$$

前半部分、 $e^{-\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{K}}$  がブーストを生成しているのを確認する。 $1(x)$  方向のブースト

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

$$K_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

なので

$$e^{-\xi_1 K_1} = 1 - \xi_1 K_1 + \frac{1}{2} (\xi_1 K_1)^2 - \dots \quad (5.10)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{4!} + \dots & -\xi_1 - \frac{1}{3!}\xi^3 - \dots & 0 & 0 \\ -\xi_1 - \frac{1}{3!}\xi^3 - \dots & 1 - \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{4!} + \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh \xi_1 & -\sinh \xi_1 & 0 & 0 \\ -\sinh \xi_1 & \cosh \xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.12)$$



これは1方向のブーストを再現している。他も同様にして確かめられる。

また、この変換による  $x$  方向と  $y$  方向へのブーストを考える。

$$x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

を考えると

$$x' = e^{-\xi_2 K_2} e^{-\xi_1 K_1} x \quad (5.14)$$

ここで

$$e^{-\xi_2 K_2} e^{-\xi_1 K_1} = e^{-\xi_2 K_2 + (-\xi_1 K_1) + [-\xi_2 K_2, -\xi_1 K_1] + \frac{1}{12} [-\xi_2 K_2 + \xi_1 K_1, [-\xi_2 K_2, -\xi_1 K_1]] + \dots} \quad (5.15)$$

より

$$\xi_2 \xi_1 [K_2, K_1] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

$x, y$  方向へのブーストを考えると  $z$  方向の回転も生成する。回転は古典的にブーストを考えると生じない。

電子の静止系から見る。原子核から見るとクーロンポテンシャルしか見えず、電場しか見えない。電子の静止系から電磁場をローレンツ変換する。

4元ベクトルポテンシャルを

$$A^\mu = (\phi, \mathbf{A}) \quad (5.17)$$

とすると電磁場は

$$F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha \quad (5.18)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

と書ける。

$$F' = A_L F \tilde{A}_L \quad (5.20)$$

で変換する。具体的に  $x$  方向のブーストを考えると、

$$F'^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \cosh \xi_1 & -\sinh \xi_1 & 0 & 0 \\ -\sinh \xi_1 & \cosh \xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \xi_1 & -\sinh \xi_1 & 0 & 0 \\ -\sinh \xi_1 & \cosh \xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

これより、電場の各成分は以下ようになる。

$$E'_x = E_x$$

$$E'_y = \gamma(E_y - \beta B_z)$$

$$E'_z = \gamma(E_z + \beta B_y)$$

この  $x$  方向のブーストから次元解析的に変換された電磁場を求める。a,b,c を定数として、変換後の電場は

$$\mathbf{E}' = a\mathbf{E} + b\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B} + c\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}) \quad (5.22)$$

$x$  方向にしかブーストがかかっていないと

$$E'_x = (a + c\beta_x^2)E_x$$

$$E'_y = aE_y - b\beta_x B_z$$

$$E'_z = aE_z + b\beta_x B_y$$

各成分を比較して

$$a = \gamma$$

$$b = \gamma$$

$$c = -\frac{\gamma^2}{\gamma + 1}$$

となるので、変換された電場は、

$$\mathbf{E}' = \gamma(\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}) \quad (5.23)$$

と書ける。

磁場についても同様にして

$$\mathbf{B}' = \gamma(\mathbf{B} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B}) \quad (5.24)$$

と書ける。

## 5.2 トーマス歳差

原子核の周りを回る電子のスピン相互作用エネルギーを求める。電子の静止系のスピン運動方程式が

$$\left(\frac{d\mathbf{s}}{dt}\right)_{\text{静止系}} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}' \quad (5.25)$$

だとする。 $\mathbf{B}'$  は変換された、電子の静止系での磁場である。変換前の系では原子核によるクーロンポテンシャルによる電場と、磁場が存在する。

$$\mathbf{B}' \sim \gamma(\mathbf{B} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}) \quad (5.26)$$

$$= \mathbf{B} + \boldsymbol{\beta} \times \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \frac{d\phi}{dr}\right) \quad (5.27)$$

$$= \mathbf{B} + \frac{\gamma}{mcr} \frac{d\phi}{dr} (-\mathbf{L}) \quad (5.28)$$

このとき、相互作用エネルギーは、

$$U' = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}' \quad (5.29)$$

$$= -\frac{ge}{2m} \mathbf{s} \cdot \mathbf{B} + g \frac{e}{2m} \mathbf{s} \cdot \mathbf{L} \frac{1}{mcr} \frac{d\phi}{dr} \quad (5.30)$$

$$= -\frac{ge}{2m} \mathbf{s} \cdot \mathbf{B} + g \frac{e}{2m^2} \left( \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} \right) \mathbf{s} \cdot \mathbf{L} \quad (5.31)$$

非相対論的ディラック方程式からのスピン相互作用エネルギーと比べると、一項目は  $g = 2$  を与えるが、二項目が  $g = 1$  となり、 $g$  因子の値が矛盾する。

この式の誤りは、電子スピンの運動方程式に式 (5.25) を用いたことにある。系が回転している場合は一般的に

$$\left( \frac{d\mathbf{s}}{dt} \right)_{\text{実験室系}} = \left( \frac{d\mathbf{s}}{dt} \right)_{\text{静止系}} + \boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{s} \quad (5.32)$$

と書かれる。 $\boldsymbol{\omega}_T$  はトーマスによって求められた回転の角速度である。スピン相互作用エネルギーは、

$$U = U' + \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\omega}_T \quad (5.33)$$

となる。この  $\boldsymbol{\omega}_T$  を導出していく。

電子の静止系座標は、原点が電子の速度で運動している系である。実験室系の時刻  $t$  での電子の静止系の速度は、

$$\mathbf{v}(t) = c\boldsymbol{\beta} \quad (5.34)$$

時刻  $t + \delta t$  では、実験室系に対して、

$$\mathbf{v}(t + \delta t) = c\boldsymbol{\beta}(t + \delta t) \quad (5.35)$$

で運動する。時刻  $t$  と時刻  $t + \delta t$  でそれぞれ、電子の静止系へのブーストを考えると、その変換は

$$x' = A_{\text{boost}}(\boldsymbol{\beta})x \quad (5.36)$$

$$x'' = A_{\text{boost}}(\boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta})x \quad (5.37)$$

電子静止系での変換が見たいので

$$x'' = A_T x' \quad (5.38)$$

$$A_T = A_{\text{boost}}(\boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta}) A_{\text{boost}}^{-1}(\boldsymbol{\beta}) \quad (5.39)$$

$$= A_{\text{boost}}(\boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta}) A_{\text{boost}}(-\boldsymbol{\beta}) \quad (5.40)$$

ブーストが 1 方向で、その増分が 1-2 平面にあるとすると、

$$A_{\text{boost}}(-\boldsymbol{\beta}) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.41)$$

$$A_{boost}(\boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta}) \cong \begin{pmatrix} \gamma + \gamma\beta\delta\beta_1 & -(\gamma\beta + \gamma^3\delta\beta_1) & -\gamma\delta\beta_2 & 0 \\ -(\gamma\beta + \gamma^3\delta\beta_1) & \gamma + \gamma\beta\delta\beta_1 & \left(\frac{\gamma-1}{\beta}\right)\delta\beta_2 & 0 \\ -\gamma\delta\beta_2 & \left(\frac{\gamma-1}{\beta}\right)\delta\beta_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.42)$$

したがって、

$$A_T = A_{boost}(\boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta})A_{boost}(-\boldsymbol{\beta}) \quad (5.43)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -\gamma^2\delta\beta_1 & -\gamma\delta\beta_2 & 0 \\ -\gamma^2\delta\beta_1 & 1 & \left(\frac{\gamma-1}{\beta}\right)\delta\beta_2 & 0 \\ -\gamma\delta\beta_2 & -\left(\frac{\gamma-1}{\beta}\right)\delta\beta_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.44)$$

もしブーストが任意のベクトルなら

$$A_T = I - \left(\frac{\gamma-1}{\beta^2}\right) (\boldsymbol{\beta} \times \delta\boldsymbol{\beta}) \cdot \mathbf{S} - (\gamma^2\delta\beta_{\parallel} + \gamma\delta\beta_{\perp}) \cdot \mathbf{K} \quad (5.45)$$

ここで、

$$\Delta\beta \ll v \quad (5.46)$$

のとき

$$A_{boost}(\Delta\boldsymbol{\beta}) = e^{-\Delta\hat{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{K} \tanh^{-1} \Delta\beta} \quad (5.47)$$

$$= e^{-\xi\hat{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{K}} \quad (5.48)$$

$$= 1 - \hat{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{K} \sinh \xi + (\hat{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{K})^2 (\cosh \xi - 1) \quad (5.49)$$

$$\cong 1 - \Delta\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{K} \quad (5.50)$$

同様に

$$R(\Delta\boldsymbol{\Omega}) = e^{-\Delta\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{S}} \quad (5.51)$$

$$\cong 1 - \Delta\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{S} \quad (5.52)$$

と書けるので、無限小ブーストと回転に分けることが出来て

$$A_T = A_{boost}(\Delta\boldsymbol{\beta})R(\Delta\boldsymbol{\Omega}) \quad (5.53)$$

$$= R(\Delta\boldsymbol{\Omega})A_{boost}(\Delta\boldsymbol{\beta}) \quad (5.54)$$

速度  $c(\boldsymbol{\beta} + \Delta\boldsymbol{\beta})$  を持つ系への純粋なローレンツブースト  $x'' = A_{boost}(\boldsymbol{\beta} + \Delta\boldsymbol{\beta})x$  は、 $c\boldsymbol{\beta}$  で運動している系へのブースト  $x' = A_{boost}(\boldsymbol{\beta})x$  に続いて、 $c\Delta\boldsymbol{\beta}$ 、 $\Delta\boldsymbol{\Omega}$  の無限小ローレンツ変換がなされるのと同じである。

電子の静止系に回転が現れないようにすると、 $\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$  のようなものが期待できる。 $c\boldsymbol{\beta}$  で運動する系へのブーストは先ほどと同様に

$$x' = A_{boost}(\boldsymbol{\beta})x \quad (5.55)$$

と書き、今度は連続的にこれにブーストをかけることを考える。

$$x''' = A_{boost}(\Delta\beta)x' \quad (5.56)$$

電子の静止系の変換には回転が現れない形で書けた。

$$x''' = A_{boost}(\Delta\beta)A_{boost}(\beta)x \quad (5.57)$$

$$= R(-\Delta\Omega)A_{boost}(\beta + \delta\beta)x \quad (5.58)$$

$$= R(-\Delta\Omega)x'' \quad (5.59)$$

$x'''$  で定義される静止座標系は、ブーストした実験室系の座標軸  $x''$  に対して、 $-\Delta\Omega$  回転している。

$$\left(\frac{d\mathbf{G}}{dt}\right)_{nonrot} = \left(\frac{d\mathbf{G}}{dt}\right)_e + \boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{G} \quad (5.60)$$

$$\boldsymbol{\omega}_T = -\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\Delta\Omega}{\delta t} \quad (5.61)$$

$$= -\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \frac{\boldsymbol{\beta} \times \delta\boldsymbol{\beta}}{\delta t} \quad (5.62)$$

$$= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \frac{\delta\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\beta}}{\delta t} \quad (5.63)$$

$$= \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \mathbf{a} \times \mathbf{v} \quad (5.64)$$

トーマス歳差は、速度  $\mathbf{v}$  に垂直な加速度の成分が存在すれば生じる。外力の作用のもとで運動する加速度に起因している。今、原子核からはクーロンポテンシャルによる力

$$m\mathbf{a} = e\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{r}}{r} \frac{dV}{dr} \quad (5.65)$$

より、加速度が分かる。 $v \ll c$  の時、トーマスの角速度は

$$\boldsymbol{\omega}_T \cong \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{mr} \frac{dV}{dr} \right) \mathbf{r} \times \mathbf{v} \quad (5.66)$$

$$= -\frac{1}{2m^2} \frac{1}{2} \frac{dV}{dr} \mathbf{L} \quad (5.67)$$

$$U = -\frac{ge}{2m} \mathbf{s} \cdot \mathbf{B} + \frac{(g-1)}{2m^2} \mathbf{s} \cdot \mathbf{L} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \quad (5.68)$$

トーマス歳差を考慮して考えると、ディラックの相互作用エネルギーと比べて二項とも  $g = 2$  を与え、矛盾なく説明できている。

## 6 BMT 方程式

### 6.1 BMT 方程式の導出

静止系スピンの運動方程式

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt'} = \frac{ge}{2m} \mathbf{s} \times \mathbf{B}' \quad (6.1)$$

を相対論的に一般化する。 $\mathbf{s}$  は粒子の静止系でのスピンである。粒子の静止系では、 $S'^\alpha = (0, \mathbf{s})$  となる軸性 4 元ベクトル  $S^\alpha = (S^0, \mathbf{S})$  を考える。

実験室系	静止系	
$S^0$	0	(6.2)
$\mathbf{S}$	$\mathbf{s}$	

$S^\alpha$  が実験室系  $K$  におけるスピン 4 元ベクトルの成分であり、粒子の静止系を  $K'$  における時間成分

$$S'^0 = \gamma(S^0 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{S}) \quad (6.3)$$

$$= U_\alpha S^\alpha \quad (6.4)$$

ここで 4 元速度ベクトルを

$$U^\alpha = (U_0, \mathbf{U}) = \left( \frac{dx_0}{d\tau}, \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} \right) = (\gamma, \gamma\boldsymbol{\beta}) \quad (6.5)$$

$$U_\alpha U^\alpha = 1 \quad (6.6)$$

とした。静止系におけるスピン 4 元ベクトルの時間成分は 0 なので、

$$S'^0 = U_\alpha S^\alpha = 0 \quad (6.7)$$

よって、粒子の速度が  $\boldsymbol{\beta}$  であるような実験室系では、スピンの時間成分が

$$S_0 = \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{S} \quad (6.8)$$

である。

$S^\alpha$  と静止系におけるスピン  $\mathbf{s}$  の関係

$$\mathbf{s} = \mathbf{S} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{S}) \boldsymbol{\beta} - \gamma \boldsymbol{\beta} S_0 \quad (6.9)$$

$$= \mathbf{S} - \frac{\gamma}{\gamma+1} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{S}) \boldsymbol{\beta} \quad (6.10)$$

逆変換は、電子の静止系を  $-\boldsymbol{\beta}$  にブーストした場合で

$$S_0 = \gamma \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{s} \quad (6.11)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{s} + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{s}) \boldsymbol{\beta} \quad (6.12)$$

静止系の3次元ベクトルであるスピン  $\mathbf{s}$  を指定することで任意の実験室系における4元ベクトル  $S^\alpha$  の成分が決定される。

式 (6.1) の左辺の一般化は  $dS^\alpha/d\tau$  である ( $\tau$  は粒子の固有時)。右辺を4元ベクトルとして書きなおす。

方程式はスピン  $\mathbf{S}$ , 電磁場成分  $F$  に関して一次であるとし、電磁場は空間的に一様だとする。 $F$  に関して一次であるという条件と式 (6.6) より、 $U$  の数にも制限が付き、高次の時間微分の項も存在しないものとする。運動方程式

$$\frac{dU^\alpha}{d\tau} = \frac{e}{m} F^{\alpha\beta} U_\beta \quad (6.13)$$

も  $F$  の一次の式で仮定し、独立した  $dS^\alpha/d\tau$  の項としては、 $F^{\alpha\beta} S_\beta, (S_\lambda F^{\lambda\mu} U_\mu) U^\alpha$  の二つのみが考えられる。未知の定数  $A_1, A_2$  を使って四元スピンベクトルの方程式は

$$\frac{dS^\alpha}{d\tau} = A_1 F^{\alpha\beta} S_\beta + A_2 (S_\lambda F^{\lambda\mu} U_\mu) U^\alpha \quad (6.14)$$

式 (6.7) がすべての時間で成り立つために、

$$\frac{d}{d\tau} (U_\alpha S^\alpha) = S^\alpha \frac{dU^\alpha}{d\tau} + U_\alpha \frac{dS^\alpha}{d\tau} = 0 \quad (6.15)$$

$U_\alpha$  を式 (6.14) に左からかけると

$$U_\alpha \frac{dS^\alpha}{d\tau} = A_1 U_\alpha F^{\alpha\beta} S_\beta + A_2 U_\alpha (S_\lambda F^{\lambda\mu} U_\mu) U^\alpha \quad (6.16)$$

式 (6.15) を使うと

$$0 = A_1 U_\alpha F^{\alpha\beta} S_\beta + A_2 U_\alpha (S_\lambda F^{\lambda\mu} U_\mu) U^\alpha + S^\alpha \frac{dU^\alpha}{d\tau} \quad (6.17)$$

$$= (A_1 - A_2 - \frac{e}{m}) U_\alpha F^{\alpha\beta} S_\beta \quad (6.18)$$

$A_1 = A_2 + \frac{e}{m}$  を式 (6.1) に対応させて考えると、式 (6.14) は

$$\frac{dS^\alpha}{d\tau} = \frac{ge}{2m} F^{\alpha\beta} S_\beta + \left( \frac{ge}{2m} - \frac{e}{m} \right) U^\alpha (S_\lambda F^{\lambda\mu} U_\mu) \quad (6.19)$$

したがって、BMT 方程式

$$\frac{dS^\alpha}{d\tau} = \frac{e}{m} \left[ \frac{g}{2} F^{\alpha\beta} S_\beta + \left( \frac{g}{2} - 1 \right) U^\alpha (S_\lambda F^{\lambda\mu} U_\mu) \right] \quad (6.20)$$

が導かれた。

## 6.2 静止系での BMT 方程式の性質

この BMT 方程式はトーマスの歳差運動を含んでいる。式 (6.19) の最後の項に現れる。トーマス歳差を具体的に示すために、電子の静止系におけるスピンの運動方程式を考える。一般的に  $\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E} \neq 0$  の条件で解く。

$$\begin{aligned}
 S_\lambda \frac{dU^\lambda}{d\tau} &= S_0 \frac{dU^0}{d\tau} - \mathbf{S} \cdot \frac{d(\gamma\boldsymbol{\beta})}{d\tau} \\
 &= S_0 \frac{d\gamma}{d\tau} - \mathbf{S} \cdot \left( \frac{d\gamma}{d\tau} \boldsymbol{\beta} + \gamma \frac{d\boldsymbol{\beta}}{d\tau} \right) \\
 &= -\gamma \mathbf{S} \cdot \frac{d\boldsymbol{\beta}}{d\tau}
 \end{aligned} \tag{6.21}$$

であり、式 (6.19) は最初の 2 項を新たに  $F^\alpha$  とおくことで、

$$\frac{d\mathbf{S}}{d\tau} = \mathbf{F} + \gamma^2 \boldsymbol{\beta} \left( \mathbf{S} \cdot \frac{d\boldsymbol{\beta}}{d\tau} \right) \tag{6.22}$$

$$\frac{dS_0}{d\tau} = F_0 + \gamma^2 \left( \mathbf{S} \cdot \frac{d\boldsymbol{\beta}}{d\tau} \right) \tag{6.23}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathbf{s}}{d\tau} &= \frac{d\mathbf{S}}{d\tau} - \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\gamma}{\gamma+1} S_0 \boldsymbol{\beta} \right) \\
 &= \frac{d\mathbf{S}}{d\tau} - \left( \frac{d}{d\tau} \frac{\gamma}{\gamma+1} \right) S_0 \boldsymbol{\beta} - \frac{\gamma}{\gamma+1} \left( \frac{dS_0}{d\tau} \boldsymbol{\beta} + S_0 \frac{d\boldsymbol{\beta}}{d\tau} \right) \\
 &= \mathbf{F} + \gamma^2 \boldsymbol{\beta} \left( \mathbf{S} \cdot \frac{d\boldsymbol{\beta}}{d\tau} \right) - \frac{1}{(\gamma+1)^2} \frac{d\gamma}{d\tau} - \frac{\gamma}{\gamma+1} \left[ F_0 + \gamma^2 \left( \mathbf{S} \cdot \frac{d\boldsymbol{\beta}}{d\tau} \right) \right] \boldsymbol{\beta} - \frac{\gamma}{\gamma+1} S_0 \frac{d\boldsymbol{\beta}}{d\tau} \\
 &= \mathbf{F} - \frac{\gamma \boldsymbol{\beta}}{\gamma+1} F_0 + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \boldsymbol{\beta} \left( \mathbf{S} \cdot \frac{d\boldsymbol{\beta}}{d\tau} \right) - \frac{1}{(\gamma+1)^2} \frac{d\gamma}{d\tau} S_0 \boldsymbol{\beta} - \frac{\gamma}{\gamma+1} \frac{d\boldsymbol{\beta}}{d\tau} \\
 &= \mathbf{F} - \frac{\gamma \boldsymbol{\beta}}{\gamma+1} F_0 + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \boldsymbol{\beta} \left( \mathbf{s} \cdot \frac{d\boldsymbol{\beta}}{d\tau} \right) + \frac{\gamma^3}{(\gamma+1)^2} \boldsymbol{\beta} S_0 \frac{e}{m} \frac{1}{\gamma^2} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}) - \frac{1}{(\gamma+1)^2} \frac{d\gamma}{d\tau} S_0 \boldsymbol{\beta} - \frac{\gamma}{\gamma+1} S_0 \frac{d\boldsymbol{\beta}}{d\tau} \\
 &= \mathbf{F} - \frac{\gamma \boldsymbol{\beta}}{\gamma+1} F_0 + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \boldsymbol{\beta} \left( \mathbf{s} \cdot \frac{d\boldsymbol{\beta}}{d\tau} \right) + \frac{\gamma^3}{(\gamma+1)^2} \boldsymbol{\beta} S_0 \frac{e}{m} \frac{1}{\gamma^2} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}) - \frac{1}{(\gamma+1)^2} \gamma^3 \left( \boldsymbol{\beta} \cdot \frac{d\boldsymbol{\beta}}{d\tau} \right) S_0 \boldsymbol{\beta} \\
 &\quad - \frac{\gamma}{\gamma+1} S_0 \frac{d\boldsymbol{\beta}}{d\tau} \\
 &= \mathbf{F} - \frac{\gamma \boldsymbol{\beta}}{\gamma+1} F_0 - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \left( \boldsymbol{\beta} \times \frac{d\boldsymbol{\beta}}{d\tau} \right) \times \mathbf{s}
 \end{aligned} \tag{6.24}$$

$(F_0, \mathbf{F})$  は式 (6.19) で  $ge/2m$  を持つ項の時間・空間成分を表している。ここで、 $\mathbf{F}$  は静止系で  $(F'_0, \mathbf{F}') = (0, \mathbf{F}')$  になるような四元ベクトルであり、式 (6.11), (6.12) より最初の二項は電子の静止系でのトルク  $\mathbf{F}'$  である。



$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{s}}{dt} &= \frac{\mathbf{F}'}{\gamma} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\{(\mathbf{a} \times \boldsymbol{\beta}) \times \mathbf{s}\} \\ &= \frac{\mathbf{F}'}{\gamma} + \boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{s}\end{aligned}\quad (6.25)$$

式 (6.19) はスピンのトーマス歳差運動を含む。

運動方程式は

$$\frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt} = \frac{e}{\gamma m}\{\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B} - \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E})\}\quad (6.26)$$

また、変換後のトルク  $\mathbf{F}'$  は

$$\mathbf{F}' = \boldsymbol{\mu}' \times \mathbf{B}'\quad (6.27)$$

$$= \frac{ge}{2m}\mathbf{s} \times \left[ \gamma(\mathbf{B} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B}) \right]\quad (6.28)$$

より

$$\frac{1}{\gamma}\mathbf{F}' = \frac{ge}{2m}\mathbf{s} \times \left[ \mathbf{B} - \frac{\gamma}{\gamma+1}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B})\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E} \right]\quad (6.29)$$

式 (6.25) に代入してまとめると

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \frac{e}{m}\mathbf{s} \times \left[ \left( \frac{g}{2} - 1 + \frac{1}{\gamma} \right) \mathbf{B} - \left( \frac{g}{2} - 1 \right) \frac{\gamma}{\gamma+1}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B})\boldsymbol{\beta} - \left( \frac{g}{2} - \frac{\gamma}{\gamma+1} \right) \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E} \right]\quad (6.30)$$

よって

$$\boldsymbol{\omega}_s = -\frac{e}{m} \left[ \left( \frac{g}{2} - 1 + \frac{1}{\gamma} \right) \mathbf{B} - \left( \frac{g}{2} - 1 \right) \frac{\gamma}{\gamma+1}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B})\boldsymbol{\beta} - \left( \frac{g}{2} - \frac{\gamma}{\gamma+1} \right) \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E} \right]\quad (6.31)$$

と決まる。

次は、サイクロトロン振動数  $\boldsymbol{\omega}_c$  を求める。運動方程式を  $\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}$  の時、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta} \times (\mathbf{E} \times \boldsymbol{\beta}) &= \beta^2 \mathbf{E} - (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E})\boldsymbol{\beta} \\ &= \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} \mathbf{E}\end{aligned}\quad (6.32)$$

より書き換える。

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt} &= \frac{e}{\gamma m} \left[ \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} \boldsymbol{\beta} \times (\mathbf{E} \times \boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B} \right] \\ &= -\frac{e}{\gamma m} \left[ \mathbf{B} + \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} (\mathbf{E} \times \boldsymbol{\beta}) \right] \times \boldsymbol{\beta}\end{aligned}\quad (6.33)$$

より、

$$\boldsymbol{\omega}_c = -\frac{e}{\gamma m} \left[ \mathbf{B} + \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} (\mathbf{E} \times \boldsymbol{\beta}) \right]\quad (6.34)$$

と決まる。よって

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_a &= \boldsymbol{\omega}_s - \boldsymbol{\omega}_c \\ &= -\frac{e}{m} \left[ a_\mu \mathbf{B} - a_\mu \frac{\gamma}{\gamma+1} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B}) \boldsymbol{\beta} + \left( a_\mu - \frac{1}{\gamma^2-1} \right) \mathbf{E} \times \boldsymbol{\beta} \right]\end{aligned}\quad (6.35)$$

ここで、

$$a_\mu = \frac{g-2}{2} \quad (6.36)$$

である。

具体的にこの量を用いる例として、スピン  $\mathbf{s}$  のヘリシティの変化率を考える。 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  は  $\boldsymbol{\beta}$  の単位ベクトルである。 $(\hat{\boldsymbol{\beta}} = \frac{\boldsymbol{\beta}}{\beta})$

$$\frac{d}{dt}(\hat{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{s}) = \hat{\boldsymbol{\beta}} \cdot \frac{d\mathbf{s}}{dt} + \left( \frac{d}{dt} \hat{\boldsymbol{\beta}} \right) \cdot \mathbf{s} \quad (6.37)$$

$$= \hat{\boldsymbol{\beta}} \cdot \frac{d\mathbf{s}}{dt} + \left( \frac{1}{\beta} \frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt} \right) \cdot \mathbf{s} + (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{s}) \frac{d}{dt} \frac{1}{\beta} \quad (6.38)$$

$$= \hat{\boldsymbol{\beta}} \cdot \frac{d\mathbf{s}}{dt} + \frac{1}{\beta} [\mathbf{s} - (\hat{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{s}) \hat{\boldsymbol{\beta}}] \cdot \frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt} \quad (6.39)$$

式 (6.26), (6.30) より

$$\frac{d}{dt}(\hat{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{s}) = -\frac{e}{m} \mathbf{s}_\perp \cdot \left[ \left( \frac{g}{2} - 1 \right) \hat{\boldsymbol{\beta}} \times \mathbf{B} + \left( \frac{g\beta}{2} - \frac{1}{\beta} \right) \mathbf{E} \right] \quad (6.40)$$

$\mathbf{s}_\perp$  は速度に垂直な  $\mathbf{s}$  の成分である。

$g = 2$  のときを考える。一項目を見ると磁場内のヘリシティは保存するような歳差運動をすることがわかる。電場が存在するとき、粒子が相対論的であれば ( $\beta \rightarrow 1$ )、ヘリシティはゆっくり変化する。電場の係数

$$\beta - \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\beta} \frac{1}{\gamma^2} \quad (6.41)$$

であるから、その変化率は電場の  $\gamma^{-2}$  に比例する。

## 7 BMT 方程式の拡張

### 7.1 EDM を加える 1

EDM を含む新たなスピンの振動数を求められるよう、式 (6.14) を変形したい。\$g\$ のときに対して双対なトルクを加えることを考えると

$$\begin{aligned}\frac{dS^\alpha}{d\tau} &= A_1 F^{\alpha\beta} S_\beta + A_2 (S_\lambda F^{\lambda\mu} U_\mu) U^\alpha + B_1 \tilde{F}^{\alpha\beta} S_\beta + B_2 (S_\lambda \tilde{F}^{\lambda\mu} U_\mu) U^\alpha \\ &= A_1 F^{\alpha\beta} U_\beta + A_2 (S_\lambda F^{\lambda\mu} U_\mu) U^\alpha + B_1 \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} S_\beta F_{\gamma\delta} + B_2 \varepsilon^{\beta\gamma\delta\varepsilon} S_\beta F_{\gamma\delta} U_\varepsilon U^\alpha\end{aligned}\quad (7.1)$$

と書きなおす。\$B\_1\$ は \$A\_1, B\_2\$ は \$A\_2\$ に双対な項である。ここで仮定している運動方程式は式 (6.13) である。\$S, F, U\$ などの文字の性質は同じであるので、式 (6.6), (6.21), (6.22), (6.25) の議論は前と変わらない。

ここで、電磁場中のハミルトニアンを

$$H = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}\quad (7.2)$$

と書く。二項目は一項目に完全に双対な項である。磁気モーメントは \$\boldsymbol{\mu} = g \frac{e}{2m} \mathbf{s}\$ と書いているので、電気双極子モーメントは

$$\mathbf{d} = \eta \frac{e}{2m} \mathbf{s}\quad (7.3)$$

と書けるようなベクトルであるとする。

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{F}} &= \mathbf{d} \times \mathbf{E}' \\ &= \eta \frac{e}{2m} \mathbf{s} \times \left[ \gamma (\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}) \right]\end{aligned}\quad (7.4)$$

式 (6.25) の \$\mathbf{F}'\$ について、係数が \$A\$ の場合と双対な \$B\$ の項で次のように表す。

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F}'_A + \tilde{\mathbf{F}}'_B\quad (7.5)$$

$$\begin{aligned}&= \frac{ge}{2m} \mathbf{s} \times \left[ \gamma (\mathbf{B} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B}) \right] \\ &+ \frac{\eta e}{2m} \mathbf{s} \times \left[ \gamma (-\mathbf{E} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}) \right]\end{aligned}\quad (7.6)$$

すると

$$\begin{aligned}
\frac{ds}{dt} &= \frac{ge}{2m} \mathbf{s} \times \left[ \gamma(\mathbf{B} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B}) \right] \\
&+ \frac{\eta e}{2m} \mathbf{s} \times \left[ \gamma(-\mathbf{E} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}) \right] \\
&+ \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \mathbf{s} \times \left[ \boldsymbol{\beta} \times \frac{e}{m} (\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B} - \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E})) \right] \\
&= \frac{e}{m} \mathbf{s} \times \left[ \left( \frac{g}{2} - 1 + \frac{1}{\gamma} \right) \mathbf{B} - \left( \frac{g}{2} - 1 \right) \frac{\gamma}{\gamma+1} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B}) \boldsymbol{\beta} - \left( \frac{g}{2} - \frac{\gamma}{\gamma+1} \right) \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E} \right] \\
&+ \frac{\eta e}{2m} \mathbf{s} \times \left[ \gamma(-\mathbf{E} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}) \right] \tag{7.7}
\end{aligned}$$

よりスピンの歳差振動数は分かる。 $\omega_c$  は変わらないので式 (6.26) より  $\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E} = 0$  を課して前と同様に anomaly frequency  $\boldsymbol{\omega}$  を求める。

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_a + \boldsymbol{\omega}_{EDM} \tag{7.8}$$

と表せる。

今  $\boldsymbol{\omega}_{EDM}$  は

$$\boldsymbol{\omega}_{EDM} = -\frac{\eta e}{2m} \left[ \gamma(-\mathbf{E} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}) \right] \tag{7.9}$$

とした。

## 7.2 EDM を加える 2

次に、式 (7.1) を、時間・空間成分に書き下す方法によって anomaly frequency を求める。その前に、まず式 (6.14) を静止系に変換するよう書き下した時、式 (6.30) と一致するのを見て、式 (7.1) に拡張していく。式 (6.14) の各成分を 0 成分と空間成分に分ける。

・ 0 成分

$A_1$

$$F^{0\beta} S_\beta = F^{0i} S_i = \mathbf{E} \cdot \mathbf{S} \tag{7.10}$$

$A_2$

$$\begin{aligned}
(S_\lambda F^{\lambda\mu} U_\mu) U^0 &= \gamma(S_0 F^{0\mu} U_\mu + S_i F^{i\mu} U_\mu) \\
&= \gamma(S_0 F^{0i} U_i + S_i F^{i0} U_0 + S_i F^{ij} U_j) \\
&= \gamma^2 [S_0 \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\beta} - \mathbf{S} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{S} \cdot (\mathbf{B} \times \boldsymbol{\beta})] \tag{7.11}
\end{aligned}$$

・ 空間成分

$A_1$

$$F^{i\beta} S_\beta = F^{i0} S_0 + F^{ij} S_j = S_0 \mathbf{E} - \mathbf{B} \times \mathbf{S} \tag{7.12}$$

$A_2$

$$(S_\lambda F^{\lambda\mu} U_\mu) U^i = \gamma^2 [S_0 \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\beta} - \mathbf{S} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{S} \cdot (\mathbf{B} \times \boldsymbol{\beta})] \boldsymbol{\beta} \quad (7.13)$$

式 (6.14) を 0 成分と空間成分に分けて書きなおすと、

$$\frac{dS^0}{d\tau} = A_1 \mathbf{E} \cdot \mathbf{S} + A_2 [S_0 \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\beta} - \mathbf{S} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{S} \cdot (\mathbf{B} \times \boldsymbol{\beta})] \quad (7.14)$$

$$\frac{d\mathbf{S}}{d\tau} = A_1 (S_0 \mathbf{E} - \mathbf{B} \times \mathbf{S}) + A_2 \gamma^2 [S_0 \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\beta} - \mathbf{S} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{S} \cdot (\mathbf{B} \times \boldsymbol{\beta})] \boldsymbol{\beta} \quad (7.15)$$

$\mathbf{S}$  から  $\mathbf{s}$  に変換する式は式 (6.12) より、

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{s}}{d\tau} &= \frac{d\mathbf{S}}{d\tau} - \frac{\gamma}{\gamma+1} \frac{dS_0}{d\tau} \boldsymbol{\beta} - \frac{\gamma}{\gamma+1} S_0 \frac{d\boldsymbol{\beta}}{d\tau} - \left[ d \left( \frac{\gamma}{\gamma+1} \right) \right] S_0 \boldsymbol{\beta} \\ &= A_1 \left[ S_0 \mathbf{E} - \mathbf{B} \times \mathbf{S} - \frac{\gamma}{\gamma+1} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{S}) \boldsymbol{\beta} \right] \\ &\quad + A_2 \gamma^2 \left( 1 - \frac{\gamma}{\gamma+1} \right) [S_0 \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\beta} - \mathbf{S} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{S} \cdot (\mathbf{B} \times \boldsymbol{\beta})] \boldsymbol{\beta} - \frac{\gamma}{\gamma+1} S_0 \frac{d\boldsymbol{\beta}}{d\tau} \\ &\quad - \frac{\gamma^2}{(\gamma+1)^2} \frac{e}{m} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}) (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{s}) \boldsymbol{\beta} \end{aligned} \quad (7.16)$$

右辺をさらに式 (6.12) などを用いて変換する。右辺  $A_1$  の項は

$$\begin{aligned} &\gamma (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{s}) \mathbf{E} - \mathbf{B} \times \left[ \mathbf{s} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{s}) \boldsymbol{\beta} \right] - \frac{\gamma}{\gamma+1} \left[ \mathbf{E} \cdot \left[ \mathbf{s} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{s}) \boldsymbol{\beta} \right] \right] \boldsymbol{\beta} \\ &= \gamma (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{s}) \mathbf{E} - \mathbf{B} \times \mathbf{s} - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{s}) (\mathbf{B} \times \boldsymbol{\beta}) - \frac{\gamma}{\gamma+1} \left[ (\mathbf{E} \cdot \mathbf{s}) \boldsymbol{\beta} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} (\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\beta}) (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{s}) \boldsymbol{\beta} \right] \\ &= \gamma (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{s}) \mathbf{E} - \mathbf{B} \times \mathbf{s} - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{s}) (\mathbf{B} \times \boldsymbol{\beta}) - \frac{\gamma}{\gamma+1} (\mathbf{E} \times \boldsymbol{\beta}) \times \mathbf{s} - \frac{\gamma}{\gamma+1} \left[ (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{s}) \mathbf{E} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} (\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\beta}) (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{s}) \boldsymbol{\beta} \right] \\ &= \frac{\gamma^2}{\gamma+1} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{s}) \mathbf{E} - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{s}) (\mathbf{B} \times \boldsymbol{\beta}) - \frac{\gamma}{\gamma+1} \frac{\gamma^2}{\gamma+1} (\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\beta}) (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{s}) \boldsymbol{\beta} - \mathbf{B} \times \mathbf{s} - \frac{\gamma}{\gamma+1} (\mathbf{E} \times \boldsymbol{\beta}) \times \mathbf{s} \end{aligned} \quad (7.17)$$

$A_2$  の項は、

$$\begin{aligned} &\left[ \gamma (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{s}) (\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\beta}) - \left( \mathbf{s} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{s}) \boldsymbol{\beta} \right) \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{B} \times \boldsymbol{\beta}) \right] \\ &= \gamma (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{s}) (\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\beta} - [(\mathbf{E} - \mathbf{B} \times \boldsymbol{\beta}) \times \boldsymbol{\beta}] \times \mathbf{s} - (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{s}) (\mathbf{E} - \mathbf{B} \times \boldsymbol{\beta}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} [\boldsymbol{\beta} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{B} \times \boldsymbol{\beta})] (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{s}) \boldsymbol{\beta} \\ &= \frac{\gamma}{\gamma+1} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{s}) (\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\beta} - (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{s}) (\mathbf{E} - \mathbf{B} \times \boldsymbol{\beta}) - [(\mathbf{E} - \mathbf{B} \times \boldsymbol{\beta}) \times \boldsymbol{\beta}] \times \mathbf{s} \end{aligned} \quad (7.18)$$

したがって

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{s}}{d\tau} &= A_1 \left[ \frac{\gamma^2}{\gamma+1} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{s}) \mathbf{E} - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{s}) (\mathbf{B} \times \boldsymbol{\beta}) - \frac{\gamma}{\gamma+1} \frac{\gamma^2}{\gamma+1} (\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\beta}) (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{s}) \boldsymbol{\beta} - \mathbf{B} \times \mathbf{s} - \frac{\gamma}{\gamma+1} (\mathbf{E} \times \boldsymbol{\beta}) \times \mathbf{s} \right] \\
&+ A_2 \frac{\gamma}{\gamma+1} \left[ \frac{\gamma}{\gamma+1} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{s}) (\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\beta} - (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{s}) (\mathbf{E} - \mathbf{B} \times \boldsymbol{\beta}) - [(\mathbf{E} - \mathbf{B} \times \boldsymbol{\beta}) \times \boldsymbol{\beta}] \times \mathbf{s} \right] \\
&- \frac{\gamma^2}{\gamma+1} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{s}) \frac{e}{m} [\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B} - \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E})] - \frac{\gamma^2}{(\gamma+1)^2} \frac{e}{m} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}) (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{s}) \boldsymbol{\beta} \\
&= A_1 \left[ \frac{\gamma^2}{\gamma+1} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{s}) (\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) - \frac{\gamma}{\gamma+1} \frac{\gamma^2}{\gamma+1} (\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\beta}) (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{s}) \boldsymbol{\beta} - \mathbf{B} \times \mathbf{s} - \frac{\gamma}{\gamma+1} (\mathbf{E} \times \boldsymbol{\beta}) \times \mathbf{s} \right] \\
&+ A_2 \frac{\gamma}{\gamma+1} \left[ \frac{\gamma}{\gamma+1} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{s}) (\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\beta} - (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{s}) (\mathbf{E} - \mathbf{B} \times \boldsymbol{\beta}) - [(\mathbf{E} - \mathbf{B} \times \boldsymbol{\beta}) \times \boldsymbol{\beta}] \times \mathbf{s} \right] \\
&- \frac{\gamma^2}{\gamma+1} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{s}) \frac{e}{m} [\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B} - \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E})] - \frac{\gamma^2}{(\gamma+1)^2} \frac{e}{m} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}) (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{s}) \boldsymbol{\beta} \\
&= \frac{e}{m} \frac{\gamma^2}{\gamma+1} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{s}) (\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) - \frac{e}{m} \frac{\gamma}{\gamma+1} \frac{\gamma^2}{\gamma+1} (\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\beta}) (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{s}) \boldsymbol{\beta} \\
&- A_1 \mathbf{B} \times \mathbf{s} - A_1 \frac{\gamma}{\gamma+1} (\mathbf{E} \times \boldsymbol{\beta}) \times \mathbf{s} - A_2 \frac{\gamma^2}{\gamma+1} [(\mathbf{E} - \mathbf{B} \times \boldsymbol{\beta}) \times \boldsymbol{\beta}] \times \mathbf{s} \\
&- \frac{e}{m} \frac{\gamma^2}{\gamma+1} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{s}) [\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B} - \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E})] - \frac{\gamma^2}{(\gamma+1)^2} \frac{e}{m} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}) (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{s}) \boldsymbol{\beta} \\
&= \frac{e}{m} \mathbf{s} \times \left[ \left( \frac{g}{2} - 1 + \frac{1}{\gamma} \right) \mathbf{B} - \left( \frac{g}{2} - 1 \right) \frac{\gamma}{\gamma+1} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B}) \boldsymbol{\beta} - \left( \frac{g}{2} - \frac{\gamma}{\gamma+1} \right) \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E} \right] \tag{7.19}
\end{aligned}$$

これは、式 (6.30) に一致する。式 (7.1) に拡張するため、 $B_1, B_2$  についても同様に解くと、

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{s}}{dt} &= \frac{e}{m} \mathbf{s} \times \left[ \left( \frac{g}{2} - 1 + \frac{1}{\gamma} \right) \mathbf{B} - \left( \frac{g}{2} - 1 \right) \frac{\gamma}{\gamma+1} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B}) \boldsymbol{\beta} - \left( \frac{g}{2} - \frac{\gamma}{\gamma+1} \right) \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E} \right] \\
&+ B_1 (\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{s} - B_1 \frac{\gamma}{\gamma+1} (\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{s} \tag{7.20}
\end{aligned}$$

このときのスピン角振動数  $\boldsymbol{\omega}_s'$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}_s' &= -\frac{e}{m} \left[ \left( \frac{g}{2} - 1 + \frac{1}{\gamma} \right) \mathbf{B} - \left( \frac{g}{2} - 1 \right) \frac{\gamma}{\gamma+1} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B}) \boldsymbol{\beta} - \left( \frac{g}{2} - \frac{\gamma}{\gamma+1} \right) \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E} \right] \\
&+ B_1 \left[ \mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B} - \frac{\gamma}{\gamma+1} (\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\beta} \right] \tag{7.21}
\end{aligned}$$

anomaly frequency  $\boldsymbol{\omega}_a$  は

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}_a &= -\frac{e}{m} \left[ a_\mu \mathbf{B} - a_\mu \frac{\gamma}{\gamma+1} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B}) \boldsymbol{\beta} + \left( a_\mu - \frac{1}{\gamma^2 - 1} \right) \mathbf{E} \times \boldsymbol{\beta} \right] \\
&+ B_1 \left[ \mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B} - \frac{\gamma}{\gamma+1} (\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\beta} \right] \tag{7.22}
\end{aligned}$$

### 7.3 双対と、双対では表せない項を含んだ拡張

式 (6.14) の制限を緩めて拡張する。式 (6.14) を

$$\begin{aligned} \frac{dS^\alpha}{d\tau} &= A_1 F^{\alpha\beta} S_\beta + A_2 (S_\lambda F^{\lambda\mu} U_\mu) U^\alpha + B_1 \tilde{F}^{\alpha\beta} S_\beta + B_2 (S_\lambda \tilde{F}^{\lambda\mu} U_\mu) U^\alpha \\ &\quad + C \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} S_\beta U_\gamma F_{\delta\rho} U^\rho \end{aligned} \quad (7.23)$$

$$\begin{aligned} &= A_1 F^{\alpha\beta} S_\beta + A_2 (S_\lambda F^{\lambda\mu} U_\mu) U^\alpha + B_1 \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} S_\beta F_{\gamma\delta} + B_2 \varepsilon^{\beta\gamma\delta\varepsilon} S_\beta F_{\gamma\delta} U_\varepsilon U^\alpha \\ &\quad + C \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} S_\beta U_\gamma F_{\delta\rho} U^\rho \end{aligned} \quad (7.24)$$

と書きなおす。\$B\_1\$ は \$A\_1, B\_2\$ は \$A\_2\$ に双対な項であり、\$C\$ は新たに反対称テンソルを用いて作られる双対性からは導かれない項である。同様に左から \$U\_\alpha\$ をかけると

$$\begin{aligned} U_\alpha \frac{dS^\alpha}{d\tau} &= (A_1 - A_2) (U_\lambda F^{\lambda\mu} S_\mu) + B_1 U_\alpha \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} S_\beta F_{\gamma\delta} + B_2 \varepsilon^{\beta\gamma\delta\varepsilon} S_\beta F_{\gamma\delta} U_\varepsilon \\ &\quad + C U_\alpha \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} S_\beta U_\gamma F_{\delta\rho} U^\rho \end{aligned} \quad (7.25)$$

$$0 = (A_1 - A_2 - \frac{e}{m}) U_\lambda F^{\lambda\mu} S_\mu + (B_1 - B_2) \varepsilon^{\alpha\gamma\delta\beta} U_\alpha F_{\gamma\delta} S_\beta \quad (7.26)$$

より、\$A\_1 = A\_2 + \frac{e}{m}, B\_1 = B\_2\$ と決まり、\$C\$ は任意の定数である。

式 (7.23) の \$C\$ の項

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} S_\beta U_\gamma F_{\delta\rho} U^\rho = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} S_\beta U_\gamma F_{\delta 0} U^0 + \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} S_\beta U_\gamma F_{\delta m} U^m \quad (7.27)$$

を具体的に、時間成分と空間成分で書くと

0 成分 (\$\alpha = 0\$):

$$\varepsilon^{0\beta\gamma\delta} S_\beta U_\gamma F_{\delta\rho} U^\rho = -\gamma^2 \mathbf{S} \cdot (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}) + \gamma^2 \mathbf{S} \cdot (\boldsymbol{\beta} \times (\mathbf{B} \times \boldsymbol{\beta})) \quad (7.28)$$

空間成分 (\$\alpha = i\$):

$$\begin{aligned} \varepsilon^{i\beta\gamma\delta} S_\beta U_\gamma F_{\delta\rho} U^\rho &= -\gamma^2 S_0 (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E})^i + \gamma^2 (\mathbf{S} \times \mathbf{E})^i + \gamma^2 S_0 (\boldsymbol{\beta} \times (\mathbf{B} \times \boldsymbol{\beta}))^i \\ &\quad - \gamma^2 (\mathbf{S} \times (\mathbf{B} \times \boldsymbol{\beta}))^i - \gamma^2 \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\beta} (\mathbf{S} \times \boldsymbol{\beta})^i \end{aligned} \quad (7.29)$$

式 (7.23) を、一般的に \$\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\beta} \neq 0, \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\beta} \neq 0\$ となる場合の 0 成分と空間成分に分ける。

$$\begin{aligned} \frac{dS^0}{d\tau} &= A_1 \mathbf{E} \cdot \mathbf{S} + A_2 \{ S_0 (\mathbf{E} \cdot \mathbf{u} - \gamma (\mathbf{S} \cdot \mathbf{E}) + \mathbf{S} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{u})) \} u^0 \\ &\quad + B_1 \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} + B_1 \{ S_0 (\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}) - \gamma (\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{S} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{u}) \} u^0 + C \{ -\gamma \mathbf{S} \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{E}) + \mathbf{S} (\mathbf{u} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{u})) \} \\ &= A_1 \mathbf{E} \cdot \mathbf{S} + \gamma^2 A_2 \{ -(\mathbf{S} \cdot \mathbf{E}) + \mathbf{S} \cdot (\mathbf{B} \times \boldsymbol{\beta}) \} + B_1 \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} - \gamma^2 B_1 \{ \mathbf{S} \cdot \mathbf{B} \mathbf{S} \cdot (\mathbf{E} \times \boldsymbol{\beta}) \} \\ &\quad + \gamma^2 C \{ -\mathbf{S} \cdot (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}) + \mathbf{S} \cdot (\boldsymbol{\beta} \times (\mathbf{B} \times \boldsymbol{\beta})) \} \end{aligned} \quad (7.30)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{S}}{d\tau} &= A_1\{S_0\mathbf{E} - (\mathbf{B} \times \mathbf{S})\} + \gamma^2 A_2\{S_0(\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\beta}) - (\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{S} \cdot (\mathbf{E} \times \boldsymbol{\beta})\}\boldsymbol{\beta} \\
&\quad + B_1\{S_0\mathbf{B} + \mathbf{E} \times \mathbf{S}\} + \gamma^2 B_1\{S_0(\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\beta}) - \mathbf{S} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{S} \cdot (\mathbf{E} \times \boldsymbol{\beta})\} \\
&\quad + \gamma^2 C\{-S_0(\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}) + \mathbf{S} \times \mathbf{E} + S_0(\boldsymbol{\beta} \times (\mathbf{B} \times \boldsymbol{\beta})) - \mathbf{S} \times (\mathbf{B} \times \boldsymbol{\beta}) - (\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\beta})\mathbf{S} \times \boldsymbol{\beta}\}
\end{aligned} \tag{7.31}$$

また式 (6.12) より

$$\frac{d\mathbf{S}}{d\tau} = \frac{d\mathbf{s}}{d\tau} + \left(\frac{d}{d\tau} \frac{\gamma}{\gamma+1}\right) S_0 \boldsymbol{\beta} + \frac{\gamma}{\gamma+1} \frac{dS_0}{d\tau} \boldsymbol{\beta} + \frac{\gamma}{\gamma+1} S_0 \frac{d\boldsymbol{\beta}}{d\tau} \tag{7.32}$$

これを変形して代入すると

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{s}}{d\tau} &= A_1 \left[ \frac{1}{\gamma+1} S_0 \mathbf{E} - \frac{\gamma}{\gamma+1} \mathbf{S} \times (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}) - \mathbf{B} \times \mathbf{S} \right] + \gamma^2 A_2 \left[ -\frac{1}{\gamma+1} \mathbf{S} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{\gamma+1} \mathbf{S} \cdot (\mathbf{B} \times \boldsymbol{\beta}) \right] \boldsymbol{\beta} \\
&\quad + B_1 \left[ \frac{1}{\gamma+1} S_0 \mathbf{B} - \frac{\gamma}{\gamma+1} \mathbf{S} \times (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) + \mathbf{E} \times \mathbf{S} \right] - \gamma^2 B_1 \left[ \frac{1}{\gamma+1} \mathbf{S} \cdot \mathbf{B} + \frac{1}{\gamma+1} \mathbf{S} \cdot (\mathbf{E} \times \boldsymbol{\beta}) \right] \boldsymbol{\beta} \\
&\quad + \gamma^2 C \left[ \left(-1 + \frac{\gamma}{\gamma+1}\right) S_0 \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E} + \left(1 - \frac{\gamma}{\gamma+1} \beta^2\right) \mathbf{S} \times \mathbf{E} - \frac{1}{\gamma^2} S_0 \mathbf{B} + \left(1 - \frac{\gamma}{\gamma+1} \beta^2\right) (\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}) \boldsymbol{\beta} \right] \\
&\quad - \frac{\gamma}{\gamma+1} S_0 \frac{e}{m} (\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B} - \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E})) + \frac{\gamma}{(\gamma+1)^2} \frac{e}{m} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}) S_0 \boldsymbol{\beta}
\end{aligned} \tag{7.33}$$

右辺の  $S_0, \mathbf{S}$  は、式 (6.12) などの関係から  $\mathbf{s}$  に書き換えられる。

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{s}}{d\tau} &= \frac{ge}{2m} (-\gamma \mathbf{s} \times (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}) + \gamma \mathbf{s} \times \mathbf{B}) - \frac{e}{m} \left[ -\frac{\gamma^2}{\gamma+1} (\mathbf{s} \cdot \mathbf{E}) \boldsymbol{\beta} + (\gamma-1) \mathbf{s} \times \mathbf{B} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} (\mathbf{s} \cdot \mathbf{B}) (\mathbf{B} \times \boldsymbol{\beta}) \right] \\
&\quad + B_1 (-\gamma \mathbf{s} \times (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) - \gamma \mathbf{s} \times \mathbf{E}) + C\gamma (-\mathbf{E} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{s} \\
&\quad - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{s}) \frac{e}{m} (\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B} - \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E})) + \frac{\gamma^2}{(\gamma+1)^2} \frac{e}{m} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}) (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{s}) \boldsymbol{\beta} \\
&= \frac{ge}{2m} \gamma (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E} - \mathbf{B}) \times \mathbf{s} - \frac{e}{m} \left[ \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E} - (\gamma-1) \mathbf{B} \right] \times \mathbf{s} \\
&\quad + B_1 \gamma (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B} + \mathbf{E}) \times \mathbf{s} - C\gamma (\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{s} - (B_1 - C) \frac{\gamma^2}{\gamma+1} (\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{s}
\end{aligned} \tag{7.34}$$

$B_1, C$  の項は独立ではなかったことがわかる。式 (7.23) で、双対項では表せないとして  $C$  の項を加えたが、 $B_1, B_2$  で拡張はできていたことになる。 $\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \boldsymbol{\omega}_s' \times \mathbf{s}$  の角振動数は

$$\boldsymbol{\omega}_s' = \frac{ge}{2m} (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E} - \mathbf{B}) - \frac{e}{m\gamma} \left[ \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E} - (\gamma-1) \mathbf{B} \right] + (B_1 - C) \left[ \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B} + \mathbf{E} - \frac{\gamma}{\gamma+1} (\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\beta} \right] \tag{7.35}$$

ここで、運動方程式は変わっていないから  $\boldsymbol{\omega}_c$  は変わらない。よって、新しい  $\boldsymbol{\omega}_a$  を

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}_a' &= \boldsymbol{\omega}_s' - \boldsymbol{\omega}_c \\
&= \frac{e}{m} \left[ \left(\frac{g}{2} - \frac{\gamma^2}{\gamma^2-1}\right) \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E} + \left(-\frac{g}{2} + 1\right) \mathbf{B} \right] + (B_1 - C) \left[ \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B} + \mathbf{E} - \frac{\gamma}{\gamma+1} (\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\beta} \right] \\
&= -\frac{e}{m} \left[ \left(a_\mu - \frac{1}{\gamma^2-1}\right) \mathbf{E} \times \boldsymbol{\beta} + a_\mu \mathbf{B} \right] + (B_1 - C) \left[ \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B} + \mathbf{E} - \frac{\gamma}{\gamma+1} (\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\beta} \right] \\
&= \boldsymbol{\omega}_a + (B_1 - C) \left[ \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B} + \mathbf{E} - \frac{\gamma}{\gamma+1} (\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\beta} \right]
\end{aligned} \tag{7.36}$$



2.1 節の結果と比べて  $\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0$  のときには

$$B_1 - C = -\gamma \frac{\eta e}{2m} \quad (7.37)$$

とできる。

## 7.4 磁荷がある場合の運動方程式への拡張

スピンの運動方程式では

$$\frac{d\mathbf{S}}{d\tau} = A_1 F^{\alpha\beta} S_\beta + A_2 (S_\lambda F^{\lambda\mu} U_\mu) U^\alpha + B_1 \tilde{F}^{\alpha\beta} S_\beta + B_2 (S_\lambda \tilde{F}^{\lambda\mu} U_\mu) U^\alpha \quad (7.38)$$

考えられる項をすべて ( $S, F$  について一次) 考え、双対な項を加えたが、運動方程式には加えていなかった。運動方程式を

$$\frac{dU^\alpha}{d\tau} = \frac{e}{m} F^{\alpha\beta} U_\beta + \frac{q_m}{m} \tilde{F}^{\alpha\beta} U_\beta \quad (7.39)$$

と書く。  $q_m$  は単磁荷である。式 (7.39) は、  $U_\alpha$  をかけて

$$0 = (A_1 - A_2 - \frac{e}{m}) U_\alpha F^{\alpha\beta} S_\beta + (B_1 - B_2 - \frac{q_m}{m}) \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} U_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} S_\delta \quad (7.40)$$

より、

$$A_1 = A_2 + \frac{e}{m} \quad (7.41)$$

$$B_1 = B_2 + \frac{q_m}{m} \quad (7.42)$$

の条件が付く。先ほどと同様にして解くと、

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{s}}{d\tau} = & - \left[ \frac{ge}{2m} + (\gamma - 1) \left( \frac{ge}{2m} - \frac{e}{m} \right) \right] \mathbf{B} \times \mathbf{s} - \frac{\gamma}{\gamma + 1} \left[ \frac{ge}{2m} + \gamma \left( \frac{ge}{2m} - \frac{e}{m} \right) \right] (\mathbf{E} \times \boldsymbol{\beta}) \times \mathbf{s} \\ & + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \left( \frac{ge}{2m} - \frac{e}{m} \right) (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{s} \\ & + \left[ \frac{\eta e}{2m} + (\gamma - 1) \left( \frac{\eta e}{2m} - \frac{q_m}{m} \right) \right] \mathbf{E} \times \mathbf{s} - \frac{\gamma}{\gamma + 1} \left[ \frac{\eta e}{2m} + \gamma \left( \frac{\eta e}{2m} - \frac{q_m}{m} \right) \right] (\mathbf{B} \times \boldsymbol{\beta}) \times \mathbf{s} \\ & - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \left( \frac{\eta e}{2m} - \frac{q_m}{m} \right) (\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{s} \end{aligned} \quad (7.43)$$

式 (6.1) から、新たに  $\boldsymbol{\omega}'_c$  は

$$\frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt} = \frac{1}{\gamma} \left[ \frac{e}{m} (\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) + \frac{q_m}{m} (\mathbf{B} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}) \right] \quad (7.44)$$

$$= \boldsymbol{\omega}'_c \times \boldsymbol{\beta} \quad (7.45)$$

となるような  $\boldsymbol{\omega}'_c$  を求める。  $\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\beta} = \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0$  を用いて

$$\boldsymbol{\omega}'_c = -\frac{1}{\gamma} \left[ \frac{e}{m} \left( \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} \mathbf{E} \times \boldsymbol{\beta} + \mathbf{B} \right) + \frac{q_m}{m} \left( \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} \mathbf{B} \times \boldsymbol{\beta} - \mathbf{E} \right) \right] \quad (7.46)$$

よって

$$\boldsymbol{\omega}'_a = \boldsymbol{\omega}'_s - \boldsymbol{\omega}'_c \quad (7.47)$$

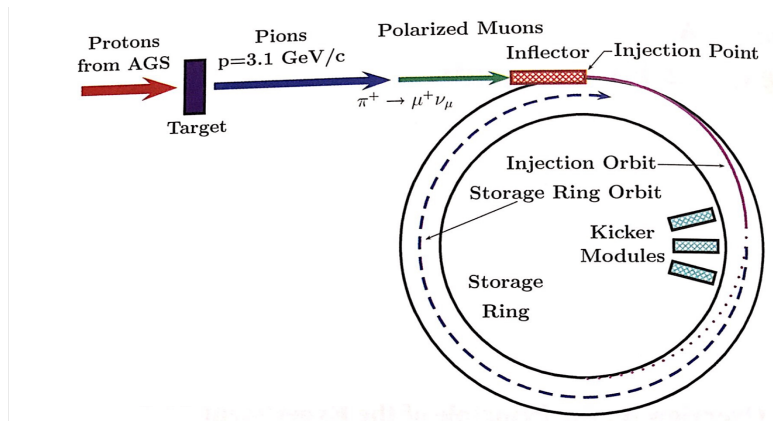
$$\begin{aligned} &= -\frac{e}{m} \left[ a_\mu \mathbf{B} - a_\mu \frac{\gamma}{\gamma+1} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B}) \boldsymbol{\beta} + \left( a_\mu - \frac{1}{\gamma^2-1} \right) \mathbf{E} \times \boldsymbol{\beta} \right] \\ &\quad - \left( \frac{\eta e}{2m} - \frac{q_m}{m} \right) \mathbf{E} - \left( \frac{\eta e}{2m} - \frac{q_m}{m} - \frac{1}{\gamma^2-1} \frac{q_m}{m} \right) \mathbf{B} \times \boldsymbol{\beta} \\ &\quad + \frac{\gamma}{\gamma+1} \left( \frac{\eta e}{2m} - \frac{q_m}{m} \right) (\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\beta} \end{aligned} \quad (7.48)$$

EDM を考え、さらに磁荷があった場合の式への拡張の式を得た。

## 8 $g - 2$ 実験

この節では、ミューオン  $g - 2$  を観測する実験について、アメリカの BNL と日本の J-PARC での実験を簡単に紹介し、求めてきた anomaly frequency がどのように測られるのかをみる。

### 8.1 BNL



AGS からのプロトンがターゲットに衝突し、パイオン  $\pi^+$  を生成する。パイオンは不安定なので  $\mu^+$  と  $\nu_\mu$  に崩壊し、偏極  $\mu^+$  が一様磁場  $\mathbf{B}$  に入射し、サイクロトロン運動をする。

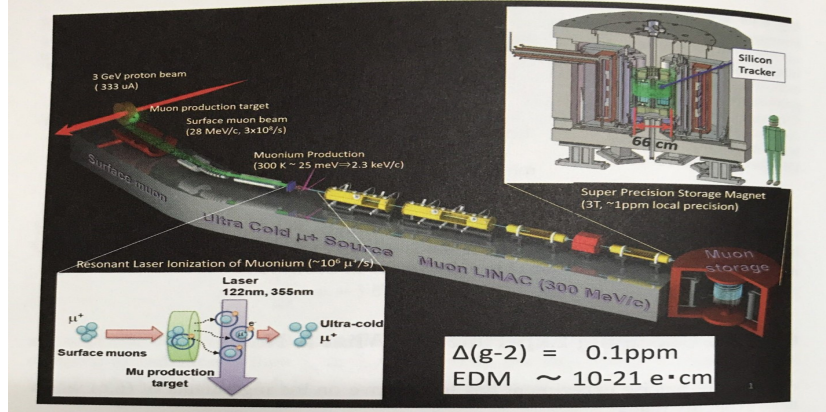
$\mu^+$  は  $\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$  に崩壊する。内側に観測器を置き、崩壊してきたポジトロンの数を測定し  $\omega_a$  を測る。

$$\omega_a = -\frac{e}{m} \left[ a_\mu \mathbf{B} - a_\mu \frac{\gamma}{\gamma + 1} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B}) \boldsymbol{\beta} + \left( a_\mu - \frac{1}{\gamma^2 - 1} \right) \mathbf{E} \times \boldsymbol{\beta} \right] \quad (8.1)$$

二項目は  $\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B} = 0$  となるように磁場を書けるよう設定することで落ちる項である。三項目は、 $a_\mu \simeq \frac{\alpha}{\pi}$  より  $a_\mu = \frac{1}{\gamma^2 - 1}$  となるような  $\gamma$  で入射できれば消える。そのような  $\gamma$  であるような運動量を magic momentum といい、図のように 3.1GeV をとる。

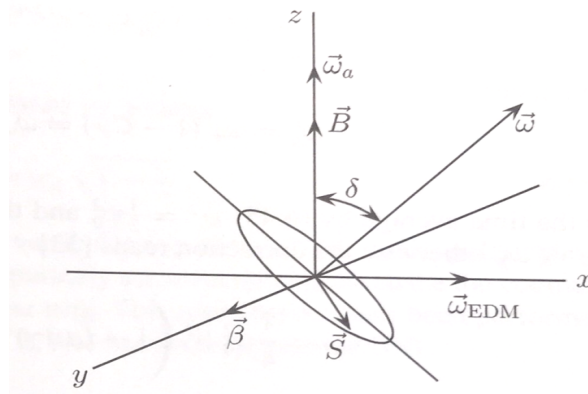
BNL では近似的に無視する項を考えていた。

## 8.2 J-PARC



極冷ミュオンビームを考えることによって BNL よりも精度よく測定しようとしている。ミュオンビームを Target に当て、電子との束縛状態、ミュオニウムを作る。これに高強度レーザーを当て、静止したミュオンを加速させてサイクロトロン運動をさせる。BNL との違いとして、入射させるミュオンの方向が揃うので、電場をかける必要がない。電場  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$  として、磁荷がない場合の式で評価することを考える。

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\omega} &= -\frac{e}{m} \left[ a_{\mu} \mathbf{B} - a_{\mu} \frac{\gamma}{\gamma+1} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B}) \boldsymbol{\beta} + \left( a_{\mu} - \frac{1}{\gamma^2 - 1} \right) \mathbf{E} \times \boldsymbol{\beta} \right] \\
 &+ \frac{\eta e}{2m} \left[ \mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B} - \frac{\gamma}{\gamma+1} (\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\beta} \right] \\
 &= \boldsymbol{\omega}_a + \frac{\eta e}{2m} \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B} \\
 &= \boldsymbol{\omega}_a + \boldsymbol{\omega}_{EDM}
 \end{aligned} \tag{8.2}$$



$a_{\mu}$  については BNL と同様に、ミュオンの運動する平面で、リングの内側に観測器を置くことで測ることが出来る。EDM については図のように  $\boldsymbol{\omega}_a$  に垂直であるので、観測器は  $z$  方向の上下に置くことで測ることが出来る。

## 9 参考文献

1. 電磁気学 原書第2版 (上)(下) J.D.JACKSON 著
2. 『The Anomalous Magnetic Moment of the Muon』Second Edition Friedrich Jegerlehner 著