原子干渉計による微細構造定数の決定

埼玉大学理学部物理学科
素粒子理論研究室
小玉　昂史

2017 年 2 月 10 日

目次

1 序論

1.1 微細構造定数

微細構造定数 α は電磁相互作用の強さを表す結合定数であり、1916 年に Sommerfeld によって導入された。sommerfeld は Bohr の原子模型を相対論的に拡張することで Bohr 模型では説明できなかった水素原子のスペクトルの微細構造を説明した。その際に導入されたのが微細構造定数 α であり、

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$$

と表される。ここで、e は電子の電荷、ϵ_0 は真空の誘電率、$\hbar = h/2\pi$ はディラック定数、c は真空中の光速である。α は QED における基礎的な物理量であって、QED の検証のためにもより正確な α の値の決定が求められる。今現在 CODATA[1] により推奨されている微細構造定数の値は

$$\alpha^{-1} = 137.035\,999\,139(31)$$

となっている。

1.2 微細構造定数の決定

微細構造定数を決定する方法はいくつか存在する。代表的なものは電子の異常磁気モーメントの測定による決定であり、異常磁気モーメント a_e を

$$a_e = A_1 \times \frac{\alpha}{\pi} + A_2 \times \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + A_3 \times \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 A_4 \times \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^4 + \ldots$$
$$+ a_e\left(\frac{m_e}{m_\mu}, \frac{m_e}{m_\tau}, \mathrm{weak}, \mathrm{hadoron}\right).$$

として α の冪として展開することで異常磁気モーメントから α を決定することができる。もう一つの方法としては α はリュードベリ定数 R_∞ を用いて

$$\alpha^2 = \frac{2h\mathrm{R}_\infty}{m_e c}$$

と書いて、これを

$$\alpha^2 = \left(\frac{2\mathrm{R}_\infty}{c}\right)\left(\frac{m_p}{m_e}\right)\left(\frac{M_{\mathrm{Cs}}}{m_p}\right)\left(\frac{h}{M_{\mathrm{Cs}}}\right) \tag{1}$$

と変形することで R_∞, m_p/m_e,M_{Cs}/m_p,h/M_{Cs} の値から α^2 の値を得ることができる。リュードベリ定数の値は水素原子のエネルギー準位から測定することができ [1],m_p/m_e,M_{Cs}/m_p の値は Penning trap の実験により求めることができる [2]。h/M_{Cs} の値はこれより述べる原子干渉計を用いた実験により測定することができる。

2　原子干渉計

2.1　原子干渉計の歴史

「干渉計」は、20 世紀の物理学において中心的な役割を果たしてきた実験手法である。1905 年にアインシュタインにより提唱された特殊相対性理論はマイケルソン・モーレーの実験がその実験的基礎になっている。1923 年にド・ブロイにより物質波の概念が提唱されそれが実験的に確認されると、光干渉計に代わり「物質波干渉計」が考案されるようになってきた。1954 年に最初の物質波干渉計として「電子線干渉計」が開発され、アハラノフ・ボーム効果や磁束量子の観測が可能になった。1974 年には Si 単結晶を回折格子とする中性子干渉計が開発され、重力による量子力学的位相および等価原理の検証、中性子の回転対称性の検証などに利用されてきた。

電子、中性子を用いた干渉計は 1970 年代にはすでに確立された技術となっていたのに対し、原子を用いた干渉計は 1990 年代に入るまで実験的研究がほとんどされなかった。その理由として

- 原子は電荷をもたないので、電子のような電磁気的操作が困難であること
- 中性子のように固体中を通過できないので固体結晶を回折格子として利用できないこと
- 電子や中性子に比べ質量が大きいため、ド・ブロイ波が短く、干渉効果の観測が難しいこと

などが挙げられる。最初の原子干渉計は 1991 年にコンスタンツ大の Mlynek のグループ、および MIT の Prichard のグループによってほぼ同時に実現された。Mlynek のグループは準安定 He の熱的原子線をスリットを通して回折させ、広がった原子波をダブルスリットに通すことでヤングの干渉縞を観測することに成功した [3]。一方 Pritchard のグループはスリットの入った SiN 膜の回折格子三枚を用いて Na の熱的原子線を二つの経路に分けて干渉を得る、マッハ・ツェンダー干渉計 [4] を構成した。

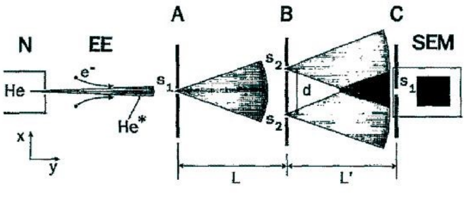

図 1　準安定 He 原子線を用いたヤングの干渉実験

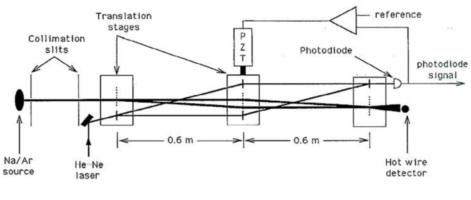

図 2　Na 原子線を用いたマッハ・ツェンダー干渉計

1991 年の最初の成功以降原子干渉計の応用が進み、重力加速度の精密測定 [6]、サニャック効果の測定 [7]、h/m の測定などが行われている。

2.2　原子干渉計の原理

h/m の測定に用いる原子干渉計はラムゼイ・ボーデ原子干渉計といい、2 準位原子と共鳴光を相互作用させると、原子の波束を二つの準位の波束に空間的・時間的に分離させることができ、再び共鳴光と相互作用させ二つの波束を重ね合わせることにより干渉計を構成できる。その際原子の波動関数の位相の変化は原子と光子との相互作用による位相の変化と原子の並進移動に伴う位相変化の和となる。以下ではそれぞれについてどのように位相が変化するかについて議論する。

2.2.1　原子と光子の相互作用

原子の波動関数が二つの状態の重ね合わせでかけるとする

$$|\psi\rangle = a\,|a\rangle + b\,|b\rangle \tag{2}$$

この時原子と電磁場との相互作用ハミルトニアンはは双極子近似を用いて

$$H_{int} = -\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{E} \tag{3}$$

となる。ここで $\boldsymbol{\mu}$ は遷移の双極子モーメント

$$\boldsymbol{\mu} = \mu\hat{\epsilon_\xi}(|a\rangle\langle b| + |b\rangle\langle a|)$$

$\hat{\epsilon_\xi}$ は量子化軸方向の単位ベクトル。また $\boldsymbol{E}$ は

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t + \beta)$$

である。また双極子モーメントの量子化軸は電場と同じ向きを向くとする。このとき、原子の全ハミルトニアンは

$$\hat{H} = \frac{\hat{\boldsymbol{P}}^2}{2m} + \hbar\omega_0\,|b\rangle\langle b| - \mu E_0\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t + \beta)(|a\rangle\langle b| + |b\rangle\langle a|)$$

となる。$\hbar\omega_0$ は準位 a と b の間のエネルギー差。ここで 回転波近似$_{[付録\ A]}$ を行い

$$\hat{H} = \frac{\hat{\boldsymbol{P}}^2}{2m} + \hbar\omega_0\,|b\rangle\langle b| - \mu E_0(e^{-i\theta}\,|a\rangle\langle b| + e^{i\theta}\,|b\rangle\langle a|)$$

$$\theta = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t + \beta$$

と近似する。

これにより原子のシュレーディンガー方程式は

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = \left(\frac{\hat{\boldsymbol{P}}^2}{2m} + \hbar\omega_0\,|b\rangle\langle b| - \mu E_0(e^{-i\theta}\,|a\rangle\langle b| + e^{i\theta}\,|b\rangle\langle a|)\right)|\psi\rangle$$

となり、この式より $|\psi\rangle$ の重ね合わせの係数 a,b についての連立方程式

$$i\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\boldsymbol{P}_a^2}{2\hbar m} & xe^{-i\theta} \\ xe^{i\theta} & \dfrac{\boldsymbol{P}_b^2}{2\hbar m} + \hbar\omega_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$x = \frac{\mu E_0}{\hbar}$$

が得られる。光電場が十分強く、$x \gg \frac{P^2}{2m} + \hbar\omega_0$ であるとし、十分短いパルス光 $\omega_0 \Delta t \ll 1$ で励起した時の (4) 式の解は $t = 0$ で $a = 1$ のとき

$$\begin{cases} a(\Delta t) = \cos(x\Delta t) \\ b(\Delta t) = -ie^{i\theta}\sin(x\Delta t) \end{cases} \tag{5}$$

となる。$\Delta t = \pi/4x$ のとき

$$\begin{cases} a(\Delta t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ b(\Delta t) = -\dfrac{i}{\sqrt{2}}e^{i\theta} \end{cases} \tag{6}$$

となって原子は a と b の二つの状態に分かれる。このような $\Delta t = \pi/4x$ のパルス光を $\pi/2$ パルスという。$\Delta t = \pi/2x$ のとき

$$\begin{cases} a(\Delta t) = 0 \\ b(\Delta t) = -ie^{i\theta} \end{cases} \tag{7}$$

となり、状態が入れ替わる。このような $\Delta t = \pi/2x$ のパルス光を π パルスという。(6),(7) 式より状態が a から b に移るとき位相が

$$\theta - \frac{\pi}{2} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t + \beta - \frac{\pi}{2} \tag{8}$$

だけ変化することがわかる。

$t = 0$ で $b = 1$ のとき

$$\begin{cases} a(\Delta t) = -ie^{-i\theta}\sin(x\Delta t) \\ b(\Delta t) = \cos(x\Delta t) \end{cases} \tag{9}$$

となるので、b から a に移るとき位相は

$$-\theta - \frac{\pi}{2} = -\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} + \omega t - \beta - \frac{\pi}{2} \tag{10}$$

だけ変化する。

この過程では光子の吸収、放出が起きるので運動量ベクトルも変化し、状態は空間的にも変化する。運動量保存の法則より、運動量 $\hbar\boldsymbol{k}$ を持つ光子が原子に吸収されたとき、原子の運動量 $\boldsymbol{P}$ は

$$\boldsymbol{P} = \hbar\boldsymbol{k}$$

となり、古典的な運動量 $m\boldsymbol{v} = \boldsymbol{P}$ を用いると

$$\boldsymbol{v}_r = \frac{\hbar k}{m} \tag{11}$$

となる。ここで $\boldsymbol{v}_r$ は光子による原子の反跳速度。

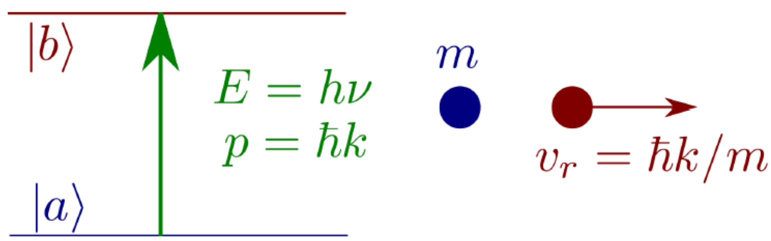

図 3　光子の吸収による原子の準位の励起と速度の変化

これにより励起状態は基底状態と違った運動量を持つことになり、空間的にも二つの準位は分裂する。

2.2.2　原子の波動関数

原子が並進運動しているときの波動関数は、シュレーディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\psi$$

より、

$$\psi = \psi_n \exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - i\omega t) \tag{12}$$

となる。ここで

$$E = \hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\nabla}_k\omega = \frac{\hbar\boldsymbol{k}}{m}$$

より (8) 式は

$$\psi = \psi_n \exp\left(\frac{1}{\hbar}m\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r} - \frac{1}{\hbar}Et\right) \tag{13}$$

となり、原子の並進運動に伴う位相の変化 ϕ は

$$\phi = \frac{i}{\hbar}m\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r} - \frac{i}{\hbar}Et \tag{14}$$

となる。

E は状態の全エネルギーであり、内部エネルギー E_{int} と運動エネルギー $\frac{1}{2}mv^2$ の和でかけるので

$$\phi = \frac{1}{2\hbar}mv^2t - \frac{1}{\hbar}E_{int}t \tag{15}$$

となる。従って粒子の速度及び内部エネルギーが変化すれば二つの状態に位相差が発生する。

2.2.3　ラムゼイ・ボーデ原子干渉計

上で議論した原子の位相変化及び速度の変化を用いることにより干渉計を構成することができる。

この干渉計における原子線の経路は図 4 のように書ける。原子線に 4 本の位相の同じ $\frac{\pi}{2}$ パルスの共鳴光 I、II、III、IV を原子線に対して直角に入射させる。I と II、III と IV の間の時間間隔は等しく、その時間を T とする。また II と III の間の時間間隔は T' とする。最初原子線は a の状態にあったとすると、I の $\frac{\pi}{2}$ パルスにより a と b の状態に分かれる。時間 T だけ経過した後 II で $\frac{\pi}{2}$ パルスを入射させせると状態はさらに二つに分かれる。時間 T' 後に III で、I と II とは逆向きに $\frac{\pi}{2}$ パルスを入射させせる。それにより状態は再び二つに分かれるが反跳速度は I、II とは逆向きになる。IV で二つの経路は重ね合わせとなり経路差に応じて干渉が起きる。図 4 における経路 ACDF と経路 ABEF で干渉計が構成され、経路 ACHI と経路 ABGI でもまた干渉計が構成される。

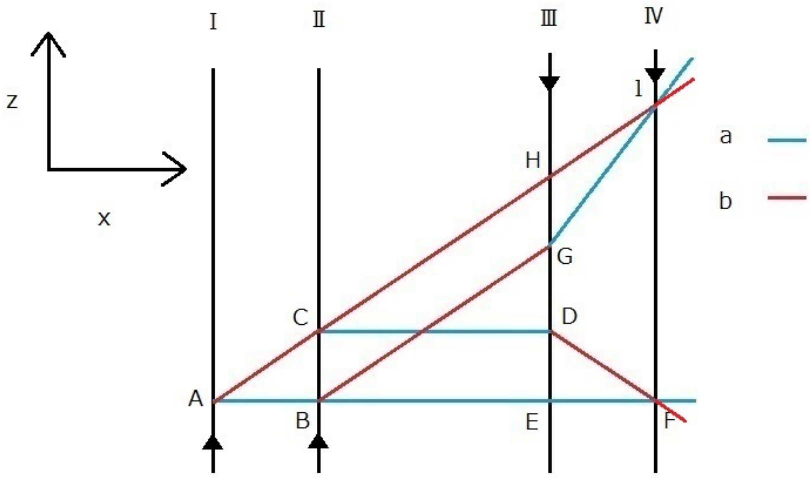

図 4　ラムゼイ・ボーデ原子干渉計の模式図

各干渉計における位相差は原子と光子の相互作用による位相変化と、自由粒子運動における位相の進みから計算できる。各経路の各辺での位相の進みは (15) 式で表され、光子と相互作用する点での位相変化は (8)、(10) 式で与えられる。経路 ACDF と経路 ABEF での位相差 $\Delta\phi_1$ は

$$\Delta\phi_1 = \phi_{AC} + \phi_{CD} + \phi_{DF} + \phi_{DF} + \phi_A + \phi_C + \phi_D + \phi_F - \phi_{AB} - \phi_{BE} - \phi_{EF} \tag{16}$$

となる。各項を計算した結果を次のページの表にまとめる。

この表では z 方向の初速を v_0 とし、定数項及び x 方向の運動による位相の進みは二つの経路で共通なので無視している。

表 1　位相差 $\Delta\phi_1$ の各項の値

ACDF での位相変化	ABEF での位相変化
$\phi_{AC} = -\omega_0 T + \frac{m}{2\hbar}(v_0 + v_r)^2 T$	$\phi_{AB} = \frac{m}{2\hbar} {v_0}^2 T$
$\phi_{CD} = \frac{m}{2\hbar} {v_0}^2 T'$	$\phi_{BE} = \frac{m}{2\hbar} {v_0}^2 T'$
$\phi_{DF} = -\omega_0 T + \frac{m}{2\hbar}(v_0 - v_r)^2 T$	$\phi_{EF} = \frac{m}{2\hbar} {v_0}^2 T$
$\phi_A = 0$	
$\phi_C = \omega T - k(v_0 + v_r)T$	
$\phi_D = -\omega(T + T') - k(v_0 + v_r)T - kv_0 T'$	
$\phi_F = \omega(2T + T') + kv_0(2T + T')$	

これより

$$\Delta\phi_1 = 2(\omega - \omega_0)T - \frac{\hbar k^2}{m} T \tag{17}$$

となる。

経路 ABGI と経路 ACHI についても同様にして計算すると下の表のようになる

表 2　$\Delta\phi_2$ の各項の値

ACHI での位相変化	ABGI での位相変化
$\phi_{AC} = -\omega_0 T + \frac{m}{2\hbar}(v_0 + v_r)^2 T$	$\phi_{AB} = \frac{m}{2\hbar} {v_0}^2 T$
$\phi_{CH} = -\omega_0 T' + \frac{m}{2\hbar}(v_0 + v_r)^2 T'$	$\phi_{BG} = -\omega_0 T' + \frac{m}{2\hbar}(v_0 + v_r)^2 T'$
$\phi_{DF} = -\omega_0 T + \frac{m}{2\hbar}(v_0 + v_r)^2 T$	$\phi_{EF} = \frac{m}{2\hbar}(v_0 + 2v_r)^2 T$
$\phi_A = 0$	$\phi_B = -\omega T + kv_0 T$
$\phi_I = \omega(2T + T') + k(v_r T' + 2v_r T) + kv_0(2T + T')$	$\phi_G = \omega(T + T') + kv_r T' + kv_0(T + T')$

よって経路 ACHI と経路 ABGI での位相差は

$$\Delta\phi_2 = 2(\omega - \omega_0)T + \frac{\hbar k^2}{m} T \tag{18}$$

と得られる。従って $\Delta\Phi \equiv \Delta\phi_1 - \Delta\phi_2$ とすれば

$$\Delta\Phi = -2\frac{\hbar k^2}{m} T \tag{19}$$

となる。これより、最終的な結果は原子の準位間の遷移周波数に依らない形で表すことができる。

3　h/m の精密測定

(19) 式を用いれば原理的には $\Delta\Phi$ の値を測定すれば用いたパルスの波数及びパルスの間の時間間隔 T から $\hbar/m$ の値を得ることができる。この章ではより精度よく $\hbar/m$ の値を測定する方法について議論していく。

3.1　誘導ラマン遷移

二準位原子を用いて干渉計を構成する場合、自然放出により原子の準位が下がると、コヒーレンスが崩れ、正確な測定が困難となる。従って原子の励起状態の寿命は観測に関わる時間より長いことが望まれる。一般に長い寿命を持つ励起状態を作るには誘導ラマン遷移が用いられる。

誘導ラマン遷移とは原子に対して周波数の違う二つの光子を入射させることで一度原子を高いエネルギー準位に励起させてから、もう一度順位を下げ順位の低い励起状態に遷移させる方法であり、これを用いることでエネルギー差の小さい励起状態を得るのに、大きな波数のパルス光を用いることが可能となる。

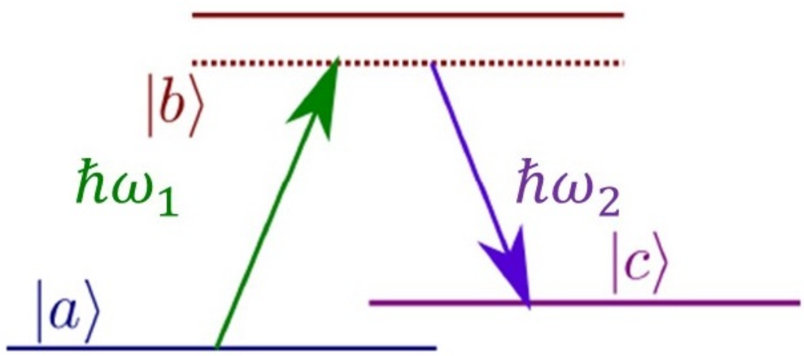

図 5　誘導ラマン遷移の概念図

この時電場は二つの電場の重ね合わせとなり、(5),(9) 式における位相 θ は

$$\theta = (\boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2) \cdot \boldsymbol{r} - (\omega_1 - \omega_2)t + \beta_1 + \beta_2$$

となる。

またこの時、二つの光子をそれぞれ反対向きに入射させると、原子の反跳速度は吸収と放出で同じ方向に反跳されるので

$$v_r = \frac{\hbar(k_1 + k_2)}{m} \tag{20}$$

となる。これによって (17),(18) 式は

$$\Delta\phi_1 = 2(\omega_1 - \omega_2 - \omega_0)T - \frac{\hbar(k_1 + k_2)^2}{m}T \tag{21}$$

$$\Delta\phi_2 = 2(\omega_1 - \omega_2 - \omega_0)T + \frac{\hbar(k_1 + k_2)^2}{m}T \tag{22}$$

と置き換わり、

$$\Delta\Phi = -2\frac{\hbar(k_1 + k_2)^2}{m}T \tag{23}$$

となる。

準位間のエネルギー差が小さい 2 準位系の場合、通常の吸収遷移で励起状態を作ろうとすると、用いる光子の波数は小さくなり、原子の反跳速度も小さくなる。しかし誘導ラマン遷移を用いると用いる 2 つの光子の波数の差さえ合えば 2 つの波数を大きくとることが可能となる。これにより原子の反跳速度も大きくなり、大きな位相差を得ることができる。

3.2 π パルスによる反跳

さらに大きな反跳速度を得るために、図 4 における、II と III の $\pi/2$ パルスの間に 2N 回の π パルスを上下交互に入射させる。これにより、原子の状態は入れ替わりパルスを入射させるごとに反跳速度 $\hbar k/m$ を得るが、このとき二つの経路上の原子は同じ内部状態を持つので二つの経路で位相差は発生しない。したがって最終的な位相差は I と II 及び、III と IV の間の位相差だけで議論ができる。

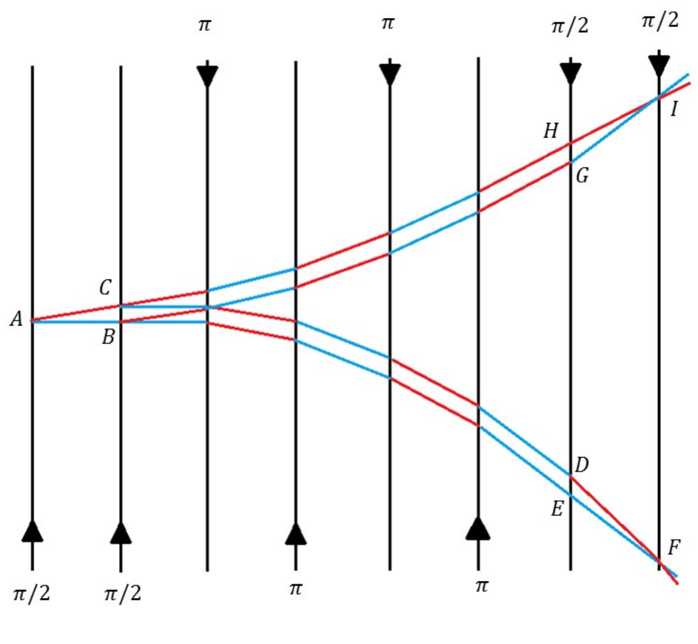

図 6　二回目の $\pi/2$ パルスのあと 4 回 π パルスを入射させたときの原子の経路

この時、2N 回の反跳により、表 1 中の ϕ_{DF}、ϕ_{EF} は

$$\phi_{DF} = -\omega_0 T + \frac{m}{2\hbar}(v_0 - (2N+1)v_r)^2 T$$

$$\phi_{EF} = \frac{m}{2\hbar}(v_0 - 2Nv_r)^2 T$$

と変更され,ϕ_C, ϕ_D, ϕ_F は

$$\phi_C + \phi_D + \phi_F = 2\omega T + 2k(2N+1)v_r T$$

となる。$\Delta\phi_2$ に対しても同様に計算して、最終的な結果は

$$\Delta\Phi = -2(2N+1)\frac{\hbar(k_1+k_2)^2}{m} \tag{24}$$

となり $\Delta\Phi$ は (2N+1) 倍に拡大される。

4　重力による補正

今まで、経路上で原子は自由粒子状態にあると仮定して議論をしてきたが、この章では経路上にポテンシャルが存在しているときに位相差はどのように変更されるかについて議論する。

ポテンシャルが存在しているとき原子の波動関数は WKB 近似 [付録 B] を用いて

$$\psi = A(\boldsymbol{r})\exp\left(\frac{i}{\hbar}\int dr\sqrt{2m(E-V(r)}\right) \tag{25}$$

と書ける。この時波動関数の位相

$$\phi = \frac{1}{\hbar}\int dr\sqrt{2m(E-V(r)}$$

を $E \gg V(r)$ として

$$\sqrt{2m(E-V(r)} \approx (2mE)^{1/2}\left(1-\frac{V(r)}{2E}\right)$$

と近似すると

$$\phi \approx \frac{1}{\hbar}\int dr(2mE)^{1/2}\left(1-\frac{V(r)}{2E}\right) \tag{26}$$

となる。この式の第一項はポテンシャルに依らない項であり、ポテンシャルの位相による項は

$$\phi[V] = -\frac{1}{\hbar}\sqrt{\frac{m}{2E}}\int drV(r) \tag{27}$$

となる。古典的な運動エネルギー $E=\frac{1}{2}mv^2$ を用いれば

$$\phi[V] = -\frac{1}{\hbar v}\int drV(r) \tag{28}$$

となる。よってポテンシャルに依る位相の変化は粒子の速度によって変化するということがわかる。

$V(r)=mgz$ としてすべての経路について計算すると

$$\Delta\Phi[V] = -2(k_1+k_2)g(T+T') \tag{29}$$

この値はおよそ 10^{-3}mrad 程である。

なので重力補正を加えた最終的な結果は

$$\Delta\Phi = -2(2N+1)\frac{\hbar(k_1+k_2)^2}{m}T - 2(k_1+k_2)g(T+T')T \tag{30}$$

となる。

5 まとめ

この原子干渉計を用いた微細構造定数の決定の実験は 1993 年に S.Chu らによって最初に行われた。S.Chu らは ^{133}Cs の超微細構造 $6S_{1/2}$ の $|F=3, m_F=0\rangle$ と $|F=4, m_F=0\rangle$ を用いて実験を行った。その際得られた値は

$$\alpha^{-1} = 137.036\,000\,3(10)$$

であり、この時の重力による補正は

$$-9.7 \pm 1.0\text{ppb}$$

となった。また現在行われている原子干渉計を用いた微細構造定数の決定の実験の結果は

$$\alpha^{-1} = 137.035\,999\,173(35)$$

となっており、これを CODATA が推奨している、QED による計算の値

$$\alpha^{-1} = 137.035\,999\,139(31)$$

と比較すると、最初に行われた実験よりも二桁精度がよくなっていることがわかる。

最近の実験では効率よく粒子を加速させるために Bloch 振動を利用した原子干渉計などが開発され、また原子の冷却技術などの向上により今後さらに精度を上げた実験が期待される。

付録 A　回転波近似

原子と光子の相互作用ハミルトニアンに対して行った回転波近似について簡単に触れておく。シュレーディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi\right\rangle = (H_0 + V)\left|\psi\right\rangle$$

$$V = -\frac{dE_0}{2}(e^{-i\theta} + e^{i\theta})(\left|a\right\rangle\left\langle b\right| + \left|b\right\rangle\left\langle b\right|)$$

に対して、

$$\left|\psi\right\rangle = a\left|a\right\rangle + be^{-i\omega_0 t}\left|b\right\rangle$$

を代入すると

$$aV\left|a\right\rangle + e^{-i\omega_0 t}bV\left|b\right\rangle = i\hbar\dot{a}\left|a\right\rangle + i\hbar e^{-i\omega_0 t}b\left|b\right\rangle$$

となる。両辺に $\left\langle a\right|$ をかけると

$$\dot{a} = -\frac{i}{\hbar}b\left\langle a|V|b\right\rangle e^{-i\omega_0 t}$$

両辺に $\left\langle b\right|$ をかけると

$$\dot{b} = -\frac{i}{\hbar}a\left\langle b|V|a\right\rangle e^{i\omega_0 t}$$

したがって

$$\dot{a} = i\frac{dE_0}{2\hbar}\left(e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\beta)}e^{i(\omega-\omega_0)t} + e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\beta)}e^{-i(\omega+\omega_0)t}\right)b$$

$$\dot{b} = i\frac{dE_0}{2\hbar}\left(e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\beta)}e^{-i(\omega-\omega_0)t} + e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\beta)}e^{i(\omega+\omega_0)t}\right)a$$

となる。この式において $\omega \approx \omega_0$ であると仮定して、第二項は十分急速に振動する項として無視すると

$$\dot{a} = i\frac{dE_0}{2\hbar}e^{-i(\theta+\omega_0 t)}b$$

$$\dot{b} = i\frac{dE_0}{2\hbar}e^{i(\theta+\omega_0 t)}a$$

となる。これが回転は近似である。本文中ではこの状態の係数の方程式に対する近似をハミルトニアンにおいて初めから対応する項を取り除くことによって実現している。

付録 B　位相差の検出

本文中で、位相差を検出することにより $\hbar/m$ の値を求めることができると述べたが、ここで具体的な位相差の検出法について議論していく。粒子の重ね合わせにおいて位相差が存在すると粒子の存在確立が変化する。したがって干渉が起きた粒子の粒子数を測定することによりその存在確立が求まり位相差が測定できる。本文図 4 の点 F を通過した a の原子は経路 ACDF を通過した原子と経路 ABEF を通過した原子の重ね合わせとなり、点 F を通過した a の原子の波動関数を $\left|\psi_a\right\rangle_o ut$ とすると

$$\left|\psi_a\right\rangle_{out} = \frac{1}{2}(1 + e^{i\Delta\phi_1})\left|a\right\rangle$$

となる。この時の a の存在確立は

$$\left|_{out}\left\langle\psi_a|\psi_a\right\rangle_{out}\right|^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \cos(\Delta\phi_1)\right)$$

同様にして b の存在確立は

$$\left|_{out}\left\langle\psi_b|\psi_b\right\rangle_{out}\right|^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \cos(\Delta\phi_1)\right)$$

となるので a と b の粒子数から位相差 $\Delta\phi_1$ を得ることができる。

謝辞

この論文を執筆するにあたり一年を通して大きな助力を賜りました佐藤丈准教授には深く感謝申し上げます。またこのテーマに関してアドバイスをくださった仁尾真紀子客員准教授に心から感謝いたします。この論文の執筆以外の場面でも大変お世話になった谷井義彰教授、高西康敬氏、また4年間共に学んだ同期の方々にこの場を借りてお礼申し上げたいと思います。本当にありがとうございました。

参考文献

[1] Peter J.Mohr, David B.Newell, Barry N. Taylor, CODATA Reccommended Values of the Fundamental Physical Constants: 2014 arXiv:1507.07956vl [physics.atom-ph] 21 Jul 2015

[2] M.P.Bradley, et al., Penning trap measurements of the masses Cs-133, Rb-87,Rb-85,and Na-23 with uncerainties$\leq$0.2 ppb,$Phys.Rev.Lett.$**83** (1999)4510-4513.

[3] O. Carnal and L. Mlynek, Phys. Rev. Lett. 66, 2689 (1991).

[4] David W. Keith, Christopher R. Ekstrom, Quentin A. Turchette, and David E. Pritchard, Phys. Rev. Lett. 66, 2693 (1991).

[5] 鳥井寿夫　ルビジウム原子気体のボースアインシュタイン凝縮体の生成および原子波干渉計への応用　http://qo.phys.gakushuin.ac.jp/ torii/Dthesis/Word/

[6] M. Kasevich and S. Chu, Appl. Phys. B 54, 321 (1992).

[7] F. Riehle, Th. Kisters, A. Witte, and J. Helmcke, Phys. Rev. Lett. 67, 177 (1991).

[8] 猪木慶次・川合光　量子力学 II　講談社サイエンティフィク

[9] M. フォックス　著　木村達也　訳　量子光学　丸善出版

[10] P. メスター　著　盛永篤郎　本多和仁　訳　原子光学　シュプリンガー・フェアラーク東京

[11] 奥村晴彦　改訂第 6 版　$\LaTeX 2_\varepsilon$ 美文書作成入門　技術評論社