水素原子のラムシフト

埼玉大学理学部物理学科
12RP027 中村有希

2016 年 2 月 10 日

目次

1　概要

ラムシフトは様々な物理定数を評価する際に，理論的な側面からも実験的な側面からも，非常に重要である．このラムシフトの理論値が実際どのように与えられているかを議論する．その方法として，シュレディンガー方程式，ディラック方程式の場合と，QED による摂動計算の場合を比較し，1-loop の量子補正におけるラムシフトの計算を行う．

2　背景

2.1　水素原子のエネルギー準位

まずは，水素原子のエネルギー準位を簡単に確認する．水素原子のエネルギー準位を図 1 に示した．

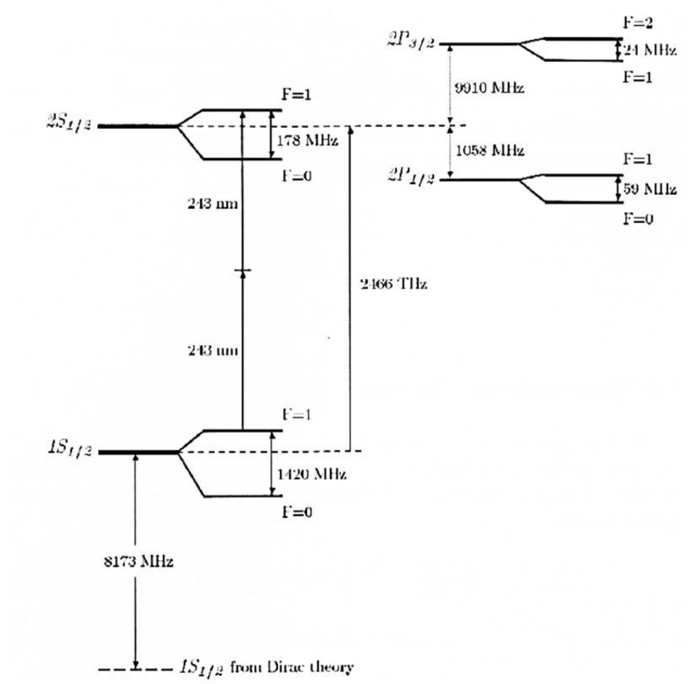

図 1　水素原子のエネルギー準位（引用 [5]）

まず，同じ主量子数 n の上体間に生じる順位の分裂を微細構造（Fine structure）と言う．これは，スピン軌道相互作用によるエネルギーシフトに起因するものである．また，陽子の磁気モーメントと電子の磁気モーメントの相互作用による分裂を超微細構造（Hyperfine structure）と言う．これは，陽子と電子のスピンの和 F によって異なるエネルギーシフトを与えるものである．そして，エネルギー準位の中で特に有名なものがラムシフトである．これは，$2S_{1/2}$ と $2P_{1/2}$ の間のエネルギー準位の分裂であり，ラムとクッシュが実験により発見したものである．ラムシフトの実験値は約 1058 MHz であり，非常に小さいことが知られている．

2.2 理論値の比較

これらのエネルギー準位を求める際に，どのような理論を用いるかによって，その結果は大きく変わる．ここでは，シュレディンガー方程式，ディラック方程式，量子力学（QED）による 3 つの方法を比較する．

まず，シュレディンガー方程式から，水素原子のエネルギー固有値を求めると，

$$E_n = \frac{e^2}{2a_0 n^2} \tag{1}$$

であり，主量子数 n のみに依る式が得られる．つまり，シュレディンガー方程式では同じ主量子数 n の状態は縮退することがわかる．なお，a_0 はボーア半径である．次に，ディラック方程式から得られるエネルギー固有値は，

$$E_{n,j} = m\left[1 + \frac{(Z\alpha)^2}{\sqrt{(j+\frac{1}{2}-(Z\alpha)^2} + n - j - \frac{1}{2}}\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{2}$$

で与えられる．つまり，ディラック方程式のエネルギー固有値は，n と全角運動量量子数 j のみに依る形で得られる．また，QED では場の量子論も考慮することで，n, j のみならず,軌道角運動量量子数 l にも依る形でエネルギーを書くことができる．このように，用いる理論形式によってエネルギー準位の縮退の仕方が異なることがわかる．

特に，ディラック方程式では主量子数 n と全角運動量量子数 j が等しい状態が縮退するが，実験ではその状態間にはわずかな差があることが知られている．このわずかな差は角運動量量子数 $l = j \pm \frac{1}{2}$ に起因するもので，QED を使えば計算できる．これらのエネルギー差の中でも，特に $2P_{1/2} - 2P_{1/2}$ 間のエネルギー差をラムシフトと呼ぶ．

そもそも，ディラック方程式で縮退が起きたのは，外場（ここではクーロン場）を固定し，その中を運動する電子を方程式で記述していたためである．実際は，電子も電磁場をつくるため，電子は自身の電磁場の影響も受けている．具体的には，電子は単に電子のまま運動するのではなく，ゆらぎを持ち，途中で仮想光子を放出，吸収したりする．これらの影響を考慮していないことがディラック方程式での縮退の大きな原因である．この問題を解決するためには，電子や光子も場として考える必要がある．これを考慮した理論が，電子と光子の運動を記述する，量子電気力学（QED）である．QED では，ファインマンルールを用いることで電子や格子の運動を視覚的に運動ととらえ，これを計算することができる．これより，ラムシフトを QED によって計算することを目標とする．

3 QED による摂動計算

ラムシフトを計算するには，QED による摂動の補正を考える必要がある．ラムシフトに最も寄与するのが輻射補正（Radiative correction）である．これらの寄与をファインマンダイアグラムを用いて表すと，図 2 のように書くことができる．

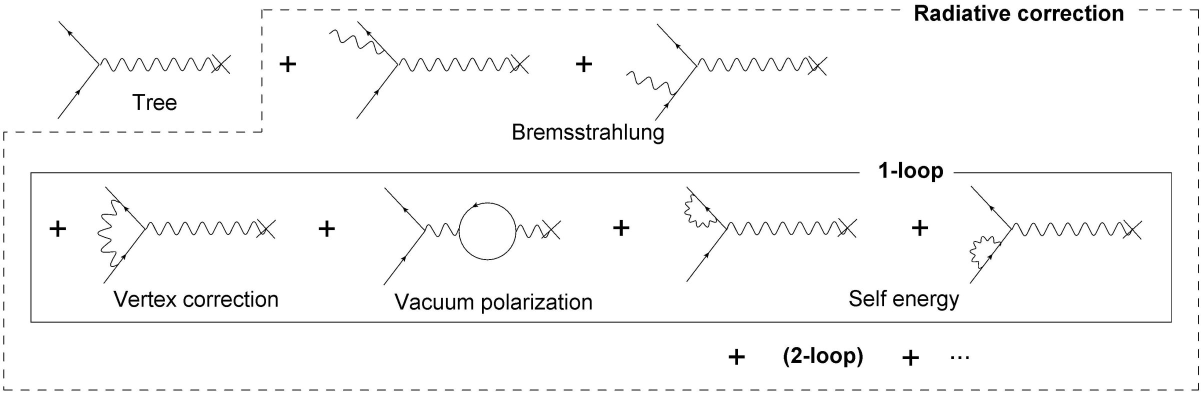

図 2 輻射補正（Radiative correction）

輻射補正には主に，制動放射（Bremsstrahlung)，頂点補正（Vertex correction)，真空偏極（Vacuum polarization)，自己エネルギー（Self energy）が挙げられる．1-loop と書かれた部分は α の一次補正を表し，これらの 1-loop の輻射補正を計算する．これらの補正によるエネルギーシフトを足し合わせることで，ラムシフトを得ることができる．これより，それぞれの補正について詳しく見る．

3.1 頂点補正

まず，頂点補正（Vertex correction）を考える．頂点では，tree の場合に充てる関数は $-ie\gamma^\mu$ であるが，高次の補正では $\Gamma^\mu = \gamma^\mu + \delta\Gamma^\mu$ のような補正された関数を考える必要がある．ここで新しい関数 $-ie\Gamma^\mu(p', p)$ は高次の寄与を足し合わせた和の形で，ダイアグラムは図 3 のように書く．

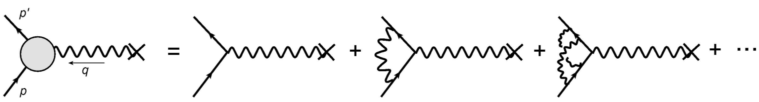

図 3 頂点補正（$-ie\Gamma^\mu(p', p)$）

Γ^μ はローレンツ不変であり，ローレンツ変換の下でベクトルとして変換する．今，考えられる可能な量は，$\gamma^\mu, p^\mu, P'^\mu$ であり，この線形の組み合わせでなくてはならない．ここでは，$p + p', p - p'$ を用いるのが簡単で，これらの線形結合は，

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu \cdot A + (p'^\mu + p^\mu) \cdot B + (p'^\mu - p^\mu) \cdot C \tag{3}$$

のように書くことができる．ここで現れた A, B, C はディラック行列を含み，$\not p$ または $\not p'$ のような形をしている．したがって，これは $u(p)$ や $\bar{u}(p')$ のような関数に作用した場合，$\not p u(p) = mu(p)$,$\bar{u}(p')\ \not p' = m\bar{u}(p')$ と

なるように係数は数になる．

さらに，ここで許されるスカラーは，$q^2 = (p' - p)^2 = -2p' \cdot p + 2m^2$ のみであることから，これらの係数は q^2 のみに依存する関数でなければならない．

Ward 恒等式 $q_\mu \Gamma^\mu = 0$ を用いると第一項が消え，第二項は $\bar{u}$と u に挟まれると消えてしまうため，$C = 0$ であることがわかる．また，ゴルドン恒等式

$$\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p')\left[\frac{p'^\mu + p^\mu}{2m} + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}\right]u(p) \tag{4}$$

により，$p'^\mu + p^\mu$ の項は $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ に書き直すことができて，Γ^μ は最終的に

$$\Gamma^\mu(p', p) = \gamma^\mu F_1(q^2) + i\frac{\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}F_2(q^2) \tag{5}$$

と書くことができる．ここで現れた F_1 と F_2 は未知定数で，Form factor と呼ばれる．F_1 は Dirac form factor と呼ばれ，クーロンポテンシャルによる寄与を，F_2 は Pauli form factor と呼ばれ，スピンによる寄与を表している．この新しい Γ^μ はそれぞれの Form factor を高次の寄与で展開して，

$$\begin{aligned}
\Gamma^\mu(p', p) &= \gamma^\mu F_1(q^2) + i\frac{\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}F_2(q^2) \\
&= \gamma^\mu[1 + \delta F_1(\mathcal{O}(\alpha)) + F_1(\mathcal{O}(\alpha)) + \cdots] + i\frac{\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}[0 + \delta F_2(\mathcal{O}(\alpha)) + F_2(\mathcal{O}(\alpha)) + \cdots]
\end{aligned} \tag{6}$$

と変形できる．α の一次の項がそれぞれ 1-loop の補正に対応している．ここでは，それぞれの Form factor に関して 1-loop の寄与を考える．頂点に関する 1-loop の補正は図 4 のように書くことができる．

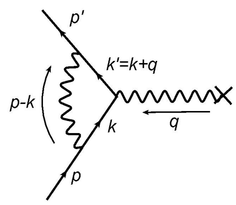

図 4　1-loop の頂点補正

1-loop の頂点補正を考慮した頂点関数を $\Gamma^\mu = \gamma^\mu + \delta\Gamma^\mu$ と書くとすると，

$$\bar{u}(p')\delta\Gamma^\mu(p', p)u(p) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{-ig_{\nu\rho}}{(k-p)^2 + i\epsilon}\bar{u}(p')(-ie\gamma^\nu)\frac{i(\not{k}' + m)}{k'^2 - m^2 + i\epsilon}\gamma^\mu\frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2 + i\epsilon}(-ie\gamma^\rho)u(p) \tag{7}$$

ここで，分母をディラック行列に関して，

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu &= -2\gamma^\nu \\
\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma_\mu &= 4g^{\nu\rho} \\
\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_\mu &= -2\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu
\end{aligned} \tag{8}$$

を用いて整理すると，

$$= 2ie^2\int_0^1 \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{\bar{u}(p')[\not{k}\gamma^\mu \not{k}' + m^2\gamma^\mu - 2m(k + k')^\mu]}{((k-p)^2 + i\epsilon)(k'^2 - m^2 + i\epsilon)(k^2 - m^2 + i\epsilon)} \tag{9}$$

この積分の分母はファインマンパラメーターを用いて計算できる．この計算で必要なファインマンパラメーターは，

$$\frac{1}{A_1A_2\cdots A_n} = \int_0^1 dx_1\cdots dx_n\delta(\Sigma x_i - 1)\frac{(n-1)!}{[x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_nA_n]^n} \tag{10}$$

で与えられる．これを用いて，分母を変形させると，

$$\frac{1}{((k-p)^2 + i\epsilon)(k'^2 - m^2 + i\epsilon)(k^2 - m^2 + i\epsilon)} = \int_0^1 dxdydz\sigma(x+y+z-1)\frac{2}{D^3} \tag{11}$$

ここで，

$$\begin{aligned}
D &= x(k^2 - m^2) + y(k'^2 - m^2) + z(k-p)^2 + (x+y+z)i\epsilon \\
&= k^2 + 2k(yq - zp) + yq^2 + zp^2 - (1-z)m^2 + i\epsilon \\
&= l^2 - y^2q^2 + 2yqzp - z^2p^2 + yq^2 + zp^2 - (1-z)m^2 + i\epsilon \\
&= l^2 - y^2q^2 + 2yqzp - z^2m^2 + yq^2 + zm^2 - (1-z)m^2 + i\epsilon \\
&= l^2 + 2yqzp - y(1-y)q^2 - (1-z)^2m^2 + i\epsilon \\
&= l^2 + 2yqzp - y(x+z)q^2 - (1-z)^2m^2 + i\epsilon \\
&= l^2 + 2yqzp - yzq^2 - xyq^2 - (1-z)^2m^2 + i\epsilon \\
&= l^2 + yz(p'^2 - p^2) - xyq^2 - (1-z)^2m^2 + i\epsilon \\
&= l^2 - \Delta + i\epsilon
\end{aligned} \tag{12}$$

ただし，$\Delta \equiv -xyq^2 + (1-z)^2m^2$．なお，$k' = k+q, p' = p+q$ であることに注意し，デルタ関数を考慮して $x+y+z=1$ 用いた．さらに三行目では，積分経路を変更するために $l \equiv k + yq - zq$ の置き換えを行った．

分母は l の偶数乗の形で書くことができるため，分子の l の次数によって，積分を分類することができる．

$$\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4}\frac{l^\mu}{D^3} = 0 \tag{13}$$

$$\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4}\frac{l^\mu l^\nu}{D^3} = \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4}\frac{\frac{1}{4}g^{\mu\nu}l^2}{D^3} \tag{14}$$

分子が奇数乗の場合は奇関数になるため，0 になる．分子が偶数の場合は，$\mu = \nu$ でない限り 0 になる．これらの等式を利用して，分子をさらに書き換えると，

$$(分子) = \bar{u}(p')[\frac{1}{2}\gamma^\mu l^2 + (-y\not{q} + z\not{p})\gamma^\mu((1-y)\not{q} + z\not{p}) + m^2\gamma^\mu - 2m((1-2y)q^\mu + 2zp^\mu)]u(p) \tag{15}$$

である．今，F_1に関する寄与と F_2 に関する寄与を分離させるために，γ^μに比例する項と $i\sigma^{\mu\nu}q_\nu$ に比例する項に分けたい．これを簡単に行うには，頂点関数を変形するときに線形結合をつくったように，

$$\gamma^\mu \cdot A + (p'^\mu + p^\mu)\cdot B + q^\mu \tag{16}$$

を考えればよい．

すると，F_1と F_2 の 1-loop 補正の部分は以下のように書くことができる．F_1 については，

$$\begin{aligned}
\delta F_1(\mathcal{O}(\alpha)) = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 & dxdydz\delta(x+y+z-1) \\
& \left[\log\left(\frac{2m^2z(1-z)}{m^2(1-z)^2 - q^2xy}\right) + m^2(1-4z+z^2) + \frac{q^2(1-x)(1-y)}{m^2(1-z)^2 + \mu^2z}\right]
\end{aligned} \tag{17}$$

である．なお，μ は赤外発散を防ぐために入れた光子の仮想的な質量であり，実際の光子の質量は 0 なので，μ は最後に 0 にする．また，F_2 については，

$$\delta F_2(\mathcal{O}(\alpha)) = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dxdydz\delta(x+y+z-1)\left[\frac{2m^2z(1-z)}{m^2(1-z)^2-q^2xy}\right] \tag{18}$$

で与えられる．この積分は赤外発散も紫外発散もしない．

3.2　制動放射

$\delta F_1(\mathcal{O}(\alpha))$ の積分を実行すると，低エネルギー極限 $q^2 \ll m^2$ で，

$$\delta F_1(\mathcal{O}(\alpha)) \simeq \frac{\alpha}{3\pi}\frac{q^2}{m^2}\left(\ln\frac{m}{\mu}-\frac{3}{8}\right) \tag{19}$$

を与える．この状態で光子の質量 μ を 0 にすると，対数が発散してしまう．しかし，この発散は見かけの発散であり，制動放射を考えることで打消し合う．

制動放射（Bremsstrahlung）のダイアグラムは図 5 のように書くことができる．

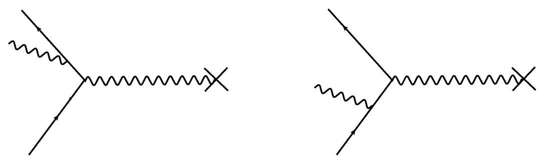

図 5　制動放射

問題になっている発散は，輻射補正を個々に考えてしまったため起こったが，実際の観測では弾性散乱の頂点補正と非弾性散乱の制動放射との区別はつかない．これは，制動放射で出ていく光子として失われるエネルギーが小さいためである．この発散は制動放射を分離して考えたために現れた見かけの発散であり，この補正を加えることで発散は打消し合う．これは次のように行われる．制動放射による補正は，

$$-\frac{2\alpha}{3\pi}\frac{q^2}{m^2}\left(\ln\frac{2\Delta E}{\mu}-\frac{5}{6}\right) \tag{20}$$

であり，Dirac form factor の効果と足し合わせると，

$$|1+\delta F_1(\mathcal{O}(\alpha))|^2 - \frac{2\alpha}{3\pi}\frac{q^2}{m^2}\left(\ln\frac{2\Delta E}{\mu}-\frac{5}{6}\right) \tag{21}$$

である．ここで第一項について α の一次までとることとすると，

$$\begin{aligned}|1+\delta F_1(\mathcal{O}(\alpha))|^2 &= |1+2\delta F_1(\mathcal{O}(\alpha))+\delta F_1(\mathcal{O}(\alpha))^2| \\ &\simeq 1+2\delta F_1(\mathcal{O}(\alpha))\end{aligned} \tag{22}$$

であるから，よって，

$$\begin{aligned}1 &+\frac{2\alpha}{3\pi}\frac{q^2}{m^2}\left(\ln\frac{m}{\mu}-\frac{3}{8}\right)-\frac{2\alpha}{3\pi}\frac{q^2}{m^2}\left(\ln\frac{2\Delta E}{\mu}-\frac{5}{6}\right) \\ &= 1+\frac{2\alpha}{3\pi}\frac{q^2}{m^2}\left(-\frac{3}{8}+\frac{5}{6}\right)\end{aligned} \tag{23}$$

となり，発散は消えた．

3.3 F_1 の 1-loop 補正

したがって，Dirac form factor によるエネルギー補正は，

$$\Delta E = \left[\left[\frac{1}{3}\left(\ln\frac{m(Z\alpha)^{-2}}{m_r} - \frac{3}{8} + \frac{5}{6}\right)\right]\delta_{l0} - \frac{1}{3}\ln k_0(n,l)\right]\frac{4\alpha(Z\alpha)^4}{\pi n^3}\left(\frac{m_r}{m}\right)^3 m \tag{24}$$

$$\ln k_0(n,l) = \frac{n^3}{2m(Z\alpha)^4}\sum_m |\langle m|\hat{v}|n\rangle|^2 (E_m - E_n)\ln\frac{(Z\alpha)^2 m}{2|E_m - E_n|} \tag{25}$$

で与えられる．なお，m_r は換算質量．今は，水素原子を考えているため，電子と陽子について換算質量を考えればよい．これに実際に数値を代入して計算すると，$2S_{1/2}$ と $2P_{1/2}$ に対するエネルギーシフトは，

$$\Delta E_{2S_{1/2}} = 1013 \text{ MHz} \tag{26}$$

$$\Delta E_{2P_{1/2}} = 4 \text{ MHz} \tag{27}$$

と求めることができた．ここで $\ln k_0(n,l)$ に使用した値は，$\ln k_0(2,0) = 2.984, \ln k_0(2,1) = 2.811$（[5]）である．

3.4 F_2 の 1-loop 補正

F_1 が関わる 1-loop の補正を計算することができたため，次に Pauli form factor F_2 の α の一次補正を考える．$\delta F_2(\mathcal{O}(\alpha))$ が与える摂動ハミルトニアンは，

$$\Delta H = -\frac{1}{4m^2}\left[\Delta V + 2\boldsymbol{\sigma}\cdot\frac{m}{m_r}[\nabla V \times \boldsymbol{p}]\right]\delta F_2(\mathcal{O}(\alpha))|_{q^2=0} \tag{28}$$

ここで，$V = -Z\alpha/r$ である．

$$\Delta H = \left[\frac{Z\alpha\pi}{m^2}\delta^3(r) + \frac{Z\alpha\pi}{r^3 m m_r}\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S}\right]\quad \delta F_2(\mathcal{O}(\alpha))|_{q^2=0} \tag{29}$$

$\delta F_2(\mathcal{O}(\alpha))|_{q^2=0}$ は積分をそのまま計算することができて，$\delta F_2(\mathcal{O}(\alpha))|_{q^2=0} = \alpha/2\pi$ である．この期待値をとる際に，

$$\langle \boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S}\rangle = \frac{1}{2}\left[j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}\right] \tag{30}$$

また，

$$\langle\frac{1}{r^3}\rangle = \frac{2}{n^3 l(l+1)(2l+1)}(m\alpha Z)^3 \tag{31}$$

を用いる. ハミルトニアンの第一項は $l = 0$ のとき，第二項は $l \neq 0$ のときのみ残るため、エネルギーシフトはこの条件で場合分けされる。したがって，エネルギーシフトは

$$\Delta E_{l=0} = \frac{\alpha(\alpha Z)^4 m}{2\pi n^3}\left(\frac{m_r}{m}\right)^3 \tag{32}$$

$$\Delta E_{l\neq 0} = \frac{\alpha(\alpha Z)^4 m}{2\pi n^3}\frac{j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}}{l(l+1)(2l+1)}\left(\frac{m_r}{m}\right)^2 \tag{33}$$

と書くことができる．これより，$2S_{1/2}$ と $2P_{1/2}$ に対するエネルギーシフトは，

$$\Delta E_{2S_{1/2}} = 51 \text{ MHz} \tag{34}$$

$$\Delta E_{2P_{1/2}} = -33 \text{ MHz} \tag{35}$$

と求めることができた．

3.5　真空偏極

真空偏極（Vacuum polarization）のダイアグラムは，図 6 のように与えられる．これは，高次の項まで足し合わせた寄与で描かれている．

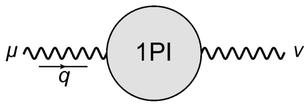

図 6　真空偏極

この真空偏極の和に対応する積分は，

$$i\Pi^{\mu\nu}(q) = i(q^2\eta^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu)\Pi(q^2) \tag{36}$$

で与えられる．1-loop の寄与の部分（図 7）について計算したいので，その部分を $i\Pi_1^{\mu\nu}(q)$ と書くこととする．下添え字の 1 はα の次数を表す．

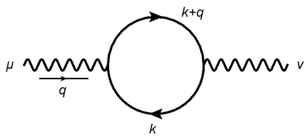

図 7　1-loop の真空偏極

ポテンシャルの形は，

$$V(\boldsymbol{x}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}} \frac{-e^2}{|\boldsymbol{q}|^2[1-\widehat{\Pi}_1(-|\boldsymbol{q}|^2)]} \tag{37}$$

ただし，

$$\widehat{\Pi}_1(q^2) = \Pi_1(q^2) - \Pi_1(0) = -\frac{2\alpha}{\pi}\int_0^1 dx x(1-x)\log\frac{m^2}{m^2 + x(x-1)|\boldsymbol{q}|^2}$$

電子はおよそ $q \simeq m\alpha$ であるから，$|\boldsymbol{q}|^2 \ll m^2$ に対して，対数を展開することができる．

$$\begin{aligned}\widehat{\Pi}_1(q^2) &= \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^1 dx x(1-x)\log\left(1 + \frac{|\boldsymbol{q}|^2}{m^2}x(1-x)\right)\\ &= \frac{2\alpha}{\pi}\left(\frac{1}{30}\frac{|\boldsymbol{q}|^2}{m^2}\right)\\ &\simeq \frac{\alpha}{15\pi m^2}|\boldsymbol{q}|^2\end{aligned} \tag{38}$$

ここで，二行目の数値計算は Mathematica を使った．これを先ほどのポテンシャルに代入すると，

$$V(\boldsymbol{x}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}} \frac{-e^2}{|\boldsymbol{q}|^2}\left[1 - \frac{\alpha}{15\pi m^2}|\boldsymbol{q}|^2\right]^{-1} \tag{39}$$

これをさらに，$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \cdots$ で展開すると，

$$
\begin{aligned}
&\simeq \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}} \frac{-e^2}{|\boldsymbol{q}|^2}\left(1+\frac{\alpha}{15\pi m^2}|\boldsymbol{q}|^2\right) \\
&= -e^2\left[\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}}{|\boldsymbol{q}|^2} + \frac{\alpha}{15\pi m^2}\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\right]
\end{aligned} \tag{40}
$$

第一項は，三次元極座標で積分することができ，第二項はデルタ関数になるため，最終的な式の形は，

$$
V(\boldsymbol{x}) = -\frac{\alpha}{r} - \frac{4\alpha^2}{15m^2}\delta^3(\boldsymbol{x}) \tag{41}
$$

で与えられる．よって変化分は $\delta V(\boldsymbol{x}) = -\frac{4\alpha^2}{15m^2}\delta^3(\boldsymbol{x})$ であるから，これによるエネルギーシフトは，期待値をとって，

$$
\Delta E \simeq -\frac{4\alpha^2}{15m^2}|\Psi(0)|^2 \tag{42}
$$

これより，この近似では S 状態のエネルギーシフトは計算できるが，P 状態の波動関数が $r=0$ で 0 になるため，P 状態のエネルギーシフトはほとんどないことがわかる．これは水素原子の場合，電子から見た陽子は，原点にほとんど点のように存在して見えることが関係している．S 状態は原点を中心に球対称な広がりを持っているため，原点との重なりがあり影響が出るが，P 状態は羽のような形をして原点との重なりを持たないため，ほとんど影響を与えないからである．S 状態の場合は $r=0$ で 0 にはならないため，エネルギーシフトを計算できて，S 状態のエネルギーシフトは水素原子の S 状態の波動関数

$$
\Psi = \left(\frac{1}{2a_0}\right)^{3/2}\left(2-\frac{r}{a_0}\right)\exp\left(-\frac{r}{2a_0}\right)\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \tag{43}
$$

を用いて計算すると，

$$
\Delta E_{2S_{1/2}} = \frac{m\alpha^5}{30\pi} = -27\ \mathrm{MHz} \tag{44}
$$

を与える．

3.6 1-loop 補正によるラムシフト

これまでのすべての補正を表 1 にまとめた．

表 1　1-loop 補正のラムシフト (MHz)

	Dirac form factorF_1	Pauli form factorF_2	真空偏極	ラムシフト（合計）
$\Delta E_{2S_{1/2}}$	1013	51	-27	
$\Delta E_{2P_{1/2}}$	4	-33	0	
$\Delta E_{2S_{1/2}} - \Delta E_{2P_{1/2}}$	1009	84	-27	1066

すべての補正の和がラムシフトを与えるので，1-loop 補正によるラムシフトは

$$
\Delta E_{QED} = 1066\ \mathrm{MHz} \tag{45}
$$

であることが求められた．これは，実験値 ([1])

$$
\Delta E_{exp} = 1057.862 \pm 0.020\ \mathrm{MHz} \tag{46}
$$

と比較すると約 0.8% の差で一致している．

4　考察

QED の摂動計算では，ディラック方程式では現れない，微細な水素原子のラムシフトを計算できた．水素原子のラムシフトの主な寄与は，Dirac form factorF_1，Pauli form factorF_2, 真空偏極の順で与えられることがわかった．1-loop 補正によるこれらの補正を足し合わせると，1066MHz が得られた．これは実験値の 1057.862 ± 0.020MHz([1]) と比較すると，約 0.8% の差で一致した．1-loop の寄与のみ考えたが，十分に良い精度で一致することが確認できた．2-loop などのさらに高次の摂動を加えると，QED の理論値は実験値とより良い一致を示し，QED は最も正確な現代物理の理論として確立されていることが知られている．QED はラムシフトを説明するだけでなく，QED の理論値と実験値を比較することで，微細構造定数や電子と陽子の質量比などを求めることも可能である．

参考文献

[1] G. Newton, D. A. Andrews, P. J. Unsworth, Phil. Trans. R. Soc. London 290,373 (1979).

[2] 日笠健一, ディラック方程式　相対論的量子力学と量子場理論, サイエンス社 (2014).

[3] 川村嘉春, 相対論的量子力学, 裳華房 (2012).

[4] M. E. Peskin, D. V. Schroeder, An Introduction to Quantum Field Theory, Westview Press (1995).

[5] M. I. Eides, H. Grotch, and V. A. Shelyuto, Theory of Light Hydrogenic Bound States, Springer Tracts in Modern Physics (2007).

謝辞

本研究を進めるにあたり，熱心なご指導を賜りました佐藤丈准教授に深く感謝致します．また，多くの助言をいただいた研究室の先輩の方々，一緒にゼミや議論を行ってくれた同期の皆様に心から感謝します．