経路積分による真空寿命の計算と安定性

指導教員　佐藤丈
著者　久保宗弘 *

平成 28 年 2 月 11 日

*埼玉大学理学部物理学科

目 次

1　導入

まず初めに真空の寿命とは何かということと、寿命を計算することで何が得られるかということについて述べる。

量子論における真空とは、物質が何も存在しない空間ではなく、系の最も低いエネルギーの状態のことを指す。これは、あるポテンシャルを考えたとき、その極少点が真空であるということを表している。例えば、スカラー場 ϕ がミンコフスキー 4 次元時空間上で、次のようなラグランジアンで特徴づけられる場合を考える。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - U(\phi) \tag{1}$$

ここでポテンシャル $U(\phi)$ は、下のような極小値を二つ持つような物とする。

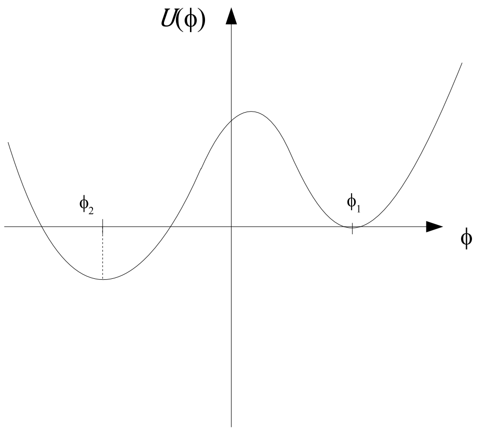

図 1: ポテンシャルの例。$U(\phi)$ は、$\phi = \phi_1$ と $\phi = \phi_2$ に極小点を持つ。

このポテンシャル上では、二つの極小点が $\phi = \phi_1$ と $\phi = \phi_2$ のそれぞれに存在している。量子論における真空とは、系のもっとも低いエネルギー状態のことを指すため、$\phi = \phi_2$ に対する基底状態が真空となる。このような真空の定義に立ったときの真空状態を「真の真空」と呼ぶ。しかし、系が二つの極小点の間にあるポテンシャル障壁を乗り越えるだけのエネルギーを持っていない場合、真空は $\phi = \phi_1$ に対する真空状態に停留することも可能になる。古典論においては、$\phi = \phi_1$ に対応する真空状態は安定しているだろう。しかし、量子論においては、トンネル効果のために $\phi = \phi_1$ に対する真空状態は安定ではなくなる。このような「真の真空」よりも高い基底エネルギーを持ちながら、ポテンシャルの極小点に当たるような真空を「偽の真空」と呼ぶ。

現在、我々の住む宇宙における真空が、「真の真空」であるという証拠はない。もしも現在の宇宙における真空が「偽の真空」であるとすると、スカラー場が従うあるポテンシャルを考えたときに、偽の真空が真の真空に崩壊する平均寿命を求めることができる。また、その寿命と宇宙年齢を比較することで、パラメータに制限を付けることができる。本論文は、その真空が崩壊する寿命をどのように求めることができるのかということと、具体的にどのようなポテンシャルを与えたときにどのようなパラメータの制限を与えることができるのかということについて述べたものである。

2　経路積分を用いた真空の崩壊寿命の計算

2.1　1 次元における真空の崩壊寿命

まず、簡単のために単位質量をもつ粒子が 1 次元ポテンシャル $V(x)$ 上を運動する場合を考える。始状態を x_i、終状態を x_f で表すと、始状態から終状態に行く遷移確率は下のように表すことができる。(遷移時間を t とする。)

$$\left\langle x_f \middle| \mathrm{e}^{-iHt/\hbar} \middle| x_i \right\rangle$$

この遷移確率は、経路積分を用いれば一般的な形として、次のような式に表すことができる。（経路積分については、補足 1 を参照。）

$$\left\langle x_f \middle| \mathrm{e}^{-iHt/\hbar} \middle| x_i \right\rangle = N \int [dx] \mathrm{e}^{iS(x)/\hbar} \tag{2}$$

ここで、$[dx]$ は全ての経路 $x(t)$ にわたる積分を表し、$S(x)$ は経路 $x(t)$ における作用を表す。N は規格化定数である。

後の計算のために、以降の計算ではミンコフスキー時空でなく、時間を虚数にしたユークリッド空間上で行う。この時、(2) 式は次のようになる。

$$\left\langle x_f \middle| \mathrm{e}^{-HT/\hbar} \middle| x_i \right\rangle = N \int [dx] \mathrm{e}^{-S_E(x)/\hbar} \tag{3}$$

ここで、T は遷移時間、$S_E(x)$ はユークリッド空間での作用を表している。

二つの作用の関係について述べる。ミンコフスキー空間での作用は、

$$S = \int dt \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - V(x) \right] \tag{4}$$

である。ユークリッド化するには、$idt \to d\tau$ とし、

$$\begin{aligned} \int dt \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - V(x) \right] \quad &\to \quad \int (-id\tau) \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 - V(x) \right] \\ &= \quad \int (id\tau) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + V(x) \right] \end{aligned}$$

ユークリッド空間での作用とは、

$$S_E = \int d\tau \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + V(x) \right] \tag{5}$$

なので、それぞれの作用の関係は、$iS(x) = -S_E(x)$ となる。強調しておきたい重要なことは、粒子は「ユークリッド空間上では、$-V(x)$ 上を運動しているように見える」ということである。以降は、τ を単に t として書く。

当分は、(3) 式の計算方法について述べる。この式の左辺が何を表しているかを示すために、エネルギー固有状態を導入する。

$$H \left| n \right\rangle = E_n \left| n \right\rangle \tag{6}$$

このエネルギー固有状態の完全系を (3) 式の左辺に作用させる。

$$\left\langle x_f \left| \mathrm{e}^{-HT/\hbar} \right| x_i \right\rangle = \sum_n \mathrm{e}^{-E_n T/\hbar} \langle x_f \,|\, n\rangle \langle n \,|\, x_i\rangle \tag{7}$$

T が十分大きいときを考えると、最も寄与する項は E_n が最も小さいとき、つまり $n=0$ の項であることが分かる。これにより、基底エネルギー E_0 を調べることができる。

(3) 式の右辺を計算する。今、作用 $S_E(x)$ は、

$$S_E = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + V(x) \right] \tag{8}$$

である。$x(t)$ は、$x(-T/2) = x_i$ と $x(T/2) = x_f$ を満たす任意の関数である。この経路 $x(t)$ を任意の経路 $\overline{x(t)}$ まわりで展開する。

$$x(t) = \overline{x(t)} + \sum_n c_n x_n(t) \tag{9}$$

ここで、$x_n(t)$ は下記のような周期的境界条件を満たす直交関数であるとする。

$$x_n\left(\pm\frac{T}{2}\right) = 0 \tag{10}$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt x_n(t) x_m(t) = \delta_{nm} \tag{11}$$

このように $x(t)$ を展開することで、経路 $x(t)$ についての経路積分 $[dx]$ を展開係数 c_n の積分として書き換えることができる。

$$[dx] = \prod_n (2\pi\hbar)^{-1/2} dc_n \tag{12}$$

ここで、後々のために積分の測度を $(2\pi\hbar)^{-1/2}$ とした。c_n の積分範囲は、$-\infty \to \infty$ である。任意の経路 $\overline{x(t)}$ を作用 S_E が最小になるような経路として定めると、

$$\begin{aligned} 0 = \delta S_E &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt \left[\frac{1}{2} \frac{d\overline{x}}{dt} \delta \left(\frac{d\overline{x}}{dt} \right) + V'(\overline{x}) \delta\overline{x} \right] \\ &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt \left[-\frac{1}{2} \frac{d^2\overline{x}}{dt^2} \delta\overline{x} + V'(\overline{x}) \delta\overline{x} \right] \end{aligned}$$

より、$\overline{x(t)}$ は、

$$-\frac{d^2\overline{x}}{dt^2} + V'(\overline{x}) = 0 \tag{13}$$

に従う。ここで、$V'(\overline{x})$ は、x による 1 回微分を表す。ここまで決めると、(3) 式の右辺を鞍点法により次のように計算できるようになる。

(9) 式より、

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \left(\frac{d\overline{x}}{dt} \right)^2 + 2 \sum_n \frac{dx_n}{dt} \frac{d\overline{x}}{dt} + \sum_{n,m} c_n c_m \frac{dx_n}{dt} \frac{dx_m}{dt} \tag{14}$$

また、$x=\overline{x}$ まわりで $V(x)$ を 2 次まで展開すると、

$$
\begin{aligned}
V(x) &= V(\overline{x})+V'(\overline{x})(x(t)-\overline{x(t)})+\frac{1}{2}V''(\overline{x})(x(t)-\overline{x(t)})^2 \\
&= V(\overline{x})+V'(\overline{x})\sum_n c_n x_n(t)+\frac{1}{2}V''(\overline{x})\sum_{n,m} c_n c_m x_n(t)x_m(t) \qquad (15)
\end{aligned}
$$

となることから、

$$
\begin{aligned}
N\int[dx]\mathrm{e}^{-S_E(x)/\hbar} &= N\int\prod_n(2\pi\hbar)^{-1/2}dc_n\exp\left[-\frac{1}{\hbar}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}dt\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\overline{x}}{dt}\right)^2+V(\overline{x})\right)\right] \\
&\times\ \exp\left[-\frac{1}{\hbar}\sum_n\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}dtc_n\left(\frac{dx_n}{dt}\frac{d\overline{x}}{dt}+V'(\overline{x})x_n\right)\right] \\
&\times\ \exp\left[-\frac{1}{2\hbar}\sum_{n,m}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}dtc_nc_m\left(\frac{dx_n}{dt}\frac{dx_m}{dt}+V''(\overline{x})x_nx_m\right)\right]
\end{aligned}
$$

となる。右辺一段目について、

$$
\exp\left[-\frac{1}{\hbar}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}dt\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\overline{x}}{dt}\right)^2+V(\overline{x})\right)\right]=\mathrm{e}^{-S_E(\overline{x})/\hbar}
$$

とする。二段目は、部分積分を行うことで、

$$
\exp\left[-\frac{1}{\hbar}\sum_n\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}dtc_nx_n\left(-\frac{d^2\overline{x}}{dt^2}+V'(\overline{x})\right)\right]=1
$$

とできる。三段目についても部分積分を行う。

$$
\exp\left[-\frac{1}{2\hbar}\sum_{n,m}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}dtc_nc_mx_n\left(-\frac{d^2x_m}{dt^2}+V''(\overline{x})x_m\right)\right]
$$

ここで、$x_m(t)$ を下記のような微分演算子の固有関数とし、その固有値を λ_m とすると、

$$
\left(-\frac{d^2}{dt^2}+V''(\overline{x})\right)x_m(t)=\lambda_m x_m(t) \qquad (16)
$$

となる。これを用いると、先ほどの三段目の指数関数をガウス関数として表すことができるようになる。（ここでは単に λ_m は正の数とする。）(11) 式の直交条件より、

$$
\begin{aligned}
\exp\left[-\frac{1}{2\hbar}\sum_{n,m}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}dtc_nc_mx_n\left(-\frac{d^2x_m}{dt^2}+V''(\overline{x})x_m\right)\right] &= \exp\left[-\frac{1}{2\hbar}\sum_{n,m}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}dt\lambda_mc_nc_mx_nx_m\right] \\
&= \exp\left[-\frac{1}{2\hbar}\sum_n\lambda_nc_n^2\right]
\end{aligned}
$$

とできる。結果、(3) 式の右辺は、

$$
\begin{aligned}
N\int[dx]\mathrm{e}^{-S_E(x)/\hbar} &= N\mathrm{e}^{-S(\overline{x})/\hbar}\int\prod_n(2\pi\hbar)^{-1/2}dc_n\exp\left[-\frac{1}{2\hbar}\sum_n\lambda_nc_n^2\right] \\
&= N\mathrm{e}^{-S(\overline{x})/\hbar}\prod_n\lambda_n^{-1/2}
\end{aligned}
$$

ここで、

$$\prod_n \lambda_n = \det\left[-\frac{d^2}{dt^2} + V''(\overline{x})\right] \tag{17}$$

と書くことにすれば、

$$\left\langle x_f \middle| \mathrm{e}^{-HT/\hbar} \middle| x_i \right\rangle = N\int [dx]\mathrm{e}^{-S_E(x)/\hbar} = N\mathrm{e}^{-S_E(\overline{x})/\hbar}\left(\det\left[-\frac{d^2}{dt^2} + V''(\overline{x})\right]\right)^{-1/2} \tag{18}$$

とできる。

(18) 式を用いて、下の図のような $x=0$ のとき極小値 $V(0)=0$ に持つようなポテンシャル $V(x)$ のトンネル効果の寄与について考える。

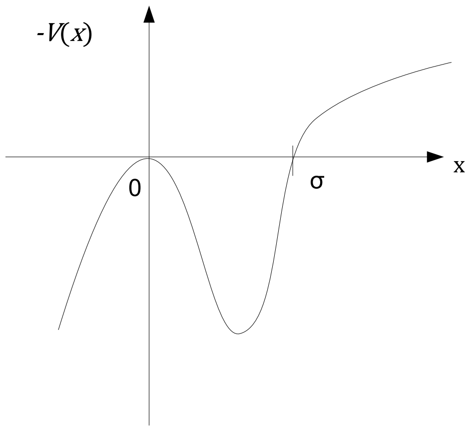

図 2: 偽の真空を $x=0$ にて持つポテンシャル。縦軸が $-V(x)$ となっていることに注意。

以降の計算では、$x_i = x_f = 0$ とする。最も簡単な例は $S_E(\overline{x}) = 0$ とした時である。このとき、$x_i = x_f = 0$、作用が 0 であることから、$\overline{x} = 0$ である。$V''(0) = \omega^2$ と書くと、(18) 式の右辺は、

$$N\left(\det\left[-\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right]\right)^{-1/2}$$

とすることができる。この項は、あくまでも $\overline{x} = 0$ について述べたものであり、まだすべての経路の寄与を含むものではない。更なる経路についての寄与については、後述する。

この項は、ポテンシャルの極小値に当たる $\overline{x} = 0$ からの寄与であるから、調和振動子の基底エネルギーを導出するように定義することができる。T が十分大の時、(18) 式の左辺は、

$$\left\langle 0 \middle| \mathrm{e}^{-HT/\hbar} \middle| 0 \right\rangle = \sum_n \mathrm{e}^{-E_nT/\hbar}\langle 0 \,|\, n\rangle\langle n \,|\, 0\rangle \to \mathrm{e}^{-E_0T/\hbar}|\langle x=0 \,|\, n=0\rangle|^2 \quad (T \text{ が十分大})$$

ここで、一次元調和振動子の $n=0$ の解から、

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2} \qquad |\langle x=0 \,|\, n=0\rangle|^2 = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \tag{19}$$

（この計算でも $\overline{x}=0$ からの寄与のみを考えているため、E_0 としては不完全である。）より、両辺を比較することで、

$$N\left(\det\left[-\frac{d^2}{dt^2}+\omega^2\right]\right)^{-1/2}=\left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2}\mathrm{e}^{-\omega T/2} \tag{20}$$

と考えることができる。

次の目標は、$\overline{x}=0$ 以外の全ての経路の寄与を (20) 式に含め、正しい基底エネルギーを求めることである。以降は、基底エネルギーを求めるために常に $T\to\infty$ とする。$\overline{x}=0$ 以外の経路とは、どんなものが考えられるのか？

図 2 を見ると、今 $x_i=x_f=0$ であるので、最初 $x=0$ にいた粒子が右手にある谷を下り、$x=\sigma$ に到達した後に、再度谷を下り、$x=0$ に戻ってくるという解も存在しうるだろう。このような解を「バウンス」という。バウンスは、$x=0$ の時に運動エネルギーを持たなくても起こすことができる。$E=0$ とすると、$0=E=\frac{1}{2}\left(\frac{d\overline{x}}{dt}\right)^2-V(\overline{x})$ なので、作用 $S_E(\overline{x})$ は、

$$S_E(\overline{x})\equiv B=\int_{-\infty}^{\infty}dt\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\overline{x}}{dt}\right)^2+V(\overline{x})\right)=\int_{-\infty}^{\infty}dt\left(\frac{d\overline{x}}{dt}\right)^2 \tag{21}$$

と書ける。$\overline{x}$ は、運動方程式から決めることができるため、具体的なポテンシャルを与えれば B の値を求めることができる。

後は、(20) 式に新たにバウンスの寄与を含めればよい。境界条件を満たす「全ての経路」を考慮に入れた基底エネルギーを求めるためには、任意の回数バウンスが起こったとして、その回数ごとに全てを足し合わせるという方法をとればよい。

n 回バウンスがあったとして、$x=\sigma$ に到達した時間をそれぞれバウンスごとに t_n と特徴付ける。$(T/2>t>t_2>...>t_{n-1}>t_n>-T/2)$ 今、T が十分大であるという極限を取っているため、時間軸のどこに t_n が存在してもよい。このように定義すると、バウンスはそれぞれ独立な運動であるとみることができる。

n 回のバウンスによる寄与は、1 回バウンスが起こった時の寄与を n 乗すればよいので、

$$\left(\mathrm{e}^{-B/\hbar}K\right)^n=\mathrm{e}^{-nB/\hbar}K^n$$

である。ここで、一回のバウンスにより現れる寄与を K とした。更に、バウンスが起こる時間についても積分を行う必要がある。（「全ての経路」の寄与を計算するため。異なる時刻でバウンスが起これば、回数が同じでも、異なる経路となる。）

$$\int_{-T/2}^{T/2}dt\int_{-T/2}^{t}dt_2\int_{-T/2}^{t_2}dt_3...\int_{-T/2}^{t_n-1}dt_n=\frac{T^n}{n!}$$

よって、全ての経路を含めた結果は、

$$\begin{aligned}\left\langle 0\middle|\mathrm{e}^{-HT/\hbar}\middle|0\right\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2}\mathrm{e}^{-\omega T/2}\times(\mathrm{e}^{-nB/\hbar}K^n)\times\frac{T^n}{n!}\\ &= \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2}\mathrm{e}^{-\omega T/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(K\mathrm{e}^{-B/\hbar}T)^n}{n!}\\ &= \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2}\exp\left(-\omega T/2+K\mathrm{e}^{-B/\hbar}T\right) \qquad (22)\end{aligned}$$

となる。T が十分大であるから、

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2} - \hbar K \mathrm{e}^{-B/\hbar} \tag{23}$$

となる。K を具体的に求めれば、基底エネルギーを求めることができる。

K を決めるために、バウンスが 1 回だけ起こっているときの遷移確率を経路積分を用いて求める。(16) 式まで戻り、固有値 $\lambda_1 = 0$ を持つ固有関数を x_1 とする。つまり、

$$\left(-\frac{d^2}{dt^2} + V''(\overline{x})\right) x_1(t) = 0 \tag{24}$$

である。また、(13) 式を時間微分すると、

$$-\frac{d^3\overline{x}}{dt^3} + V''(\overline{x})\frac{d\overline{x}}{dt} = 0 \tag{25}$$

となる。ここで、

$$x_1 = C\frac{d\overline{x}}{dt} \qquad (C \text{ は定数。})$$

とおく。(24) 式に代入すると、(25) 式と一致する。したがって、x_1と$\overline{x}$ は比例関係にある。規格化条件より、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 dt &= 1 \quad \text{より、} \\ C^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d\overline{x}}{dt}\right)^2 dt &= 1 \\ C &= B^{-1/2} \end{aligned}$$

である。よって、

$$x_1 = B^{-1/2}\frac{d\overline{x}}{dt} \tag{26}$$

と求められる。次に、ゼロモードの積分を行うために、c_1 を t に変数変換する。まず、(9) 式から x 微小変化を 2 通りで表すと、

$$dx = \left(\frac{d\overline{x}}{dt}\right) dt = x_1 dc_1 \tag{27}$$

(26) 式と (27) 式を用いると、

$$(2\pi\hbar)^{-\frac{1}{2}} dc_1 = \frac{1}{x_1}\left(\frac{d\overline{x}}{dt}\right) dt = \left(\frac{B}{2\pi\hbar}\right)^{1/2} dt \tag{28}$$

となる。これにより、ゼロモードの積分を時間積分として計算することができる。

1 回のバウンスに対する経路積分を行う上で、重大な問題がもう一つある。(26) 式を見ると、x_1 と $\frac{d\overline{x}}{dt}$ は比例関係にあるため、x_1 の概形は $\frac{d\overline{x}}{dt}$ に従う。$\frac{d\overline{x}}{dt}$ を図にして表すと、次のようになる。

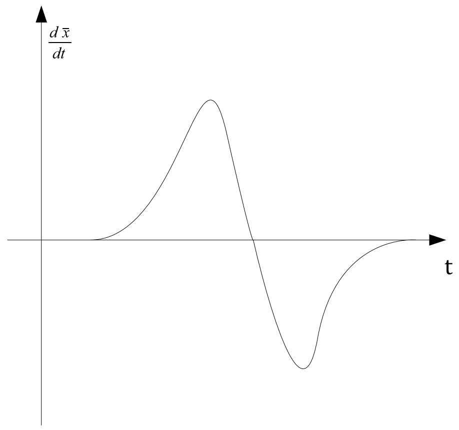

図 3: $\frac{d\bar{x}}{dt}$ の概形。$x=0$ から坂を転がり、$x=\sigma$ 到達後にまた $x=0$ にまで戻ってくるので、その速度を図にすると節を一つ持つような形となる。

図 3 から $\frac{d\bar{x}}{dt}$ は、節を 1 つ持つため x_1 も節を 1 つ持つ解に対応していることが分かる。したがって、x_1 は第一励起状態に対応した解である。このことから、(16) 式には x_1 よりもエネルギーの低い基底状態に対応した解も存在しなくてはならない。しかし、今 $\lambda_1=0$ なので、仮に基底状態に対応する解を x_0 と書くことにすると、$\lambda_0<0$ となる。よって、c_0 に対する積分の被積分関数がガウス関数にならず、積分が発散してしまう。(下の計算参照。) この負の固有値の問題は、どのようにして解決できるのだろうか？

$$
\begin{aligned}
\left(N\int[dx]\mathrm{e}^{-S_E(x)/\hbar}\right)_{one-bounce} &= N\mathrm{e}^{-B/\hbar}\int\prod_n(2\pi\hbar)^{-1/2}dc_n\exp\left(-\frac{1}{2\hbar}\sum_n\lambda_n c_n^2\right)\\
&= N\mathrm{e}^{-B/\hbar}\int(2\pi\hbar)^{-1/2}dc_0\exp\left(-\frac{1}{2\hbar}\lambda_0 c_0^2\right)\\
&\times \int(2\pi\hbar)^{-1/2}dc_1\int\prod_{n\neq 0,1}(2\pi\hbar)^{-1/2}dc_n\exp\left(-\frac{1}{2\hbar}\sum_n\lambda_n c_n^2\right)
\end{aligned}
$$

負の固有値の計算では、ガウス積分により、

$$
\int(2\pi\hbar)^{-1/2}dc_0\exp\left(-\frac{1}{2\hbar}\lambda_0 c_0^2\right)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_0}}
$$

となる。今、λ に対するガウス積分の値を $f(\lambda)$ と定義する。

$$
f(\lambda)=\int(2\pi\hbar)^{-1/2}dc\exp\left(-\frac{1}{2\hbar}\lambda c^2\right)=\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \tag{29}
$$

この関数は、$\lambda>0$ の範囲で定義されていた。これを解析接続の考え方を用いて、定義域を拡張する。負の λ について、

$$
\lambda=-|\lambda|=|\lambda|\mathrm{e}^{-i\pi} \tag{30}
$$

とすると、

$$\sqrt{\lambda} = |\lambda|^{1/2}\mathrm{e}^{-i\pi/2} = -i|\lambda|^{1/2} \tag{31}$$

となる。ここで、位相のとり方には、$\mathrm{e}^{-i\pi}$ と $\mathrm{e}^{i\pi}$ がある。今回、$\mathrm{e}^{-i\pi}$ を選択したのは、基底エネルギーの虚部が正になるように定義したためである。よって、この定義の上で、$f(\lambda)$ は、

$$f(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{-i|\lambda|^{1/2}} = i|\lambda|^{-1/2} \tag{32}$$

よって、この定義により、

$$\operatorname{Im} f(\lambda) = |\lambda|^{-1/2} \tag{33}$$

つまり、

$$\operatorname{Im} f(\lambda_0) = |\lambda_0|^{-1/2} \tag{34}$$

である。このように負の固有値に対して定義をすると、$one-bounce$ の寄与の虚部を取り出すことが可能になる。

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\left(N\int[dx]\mathrm{e}^{-S_E(x)/\hbar}\right)_{one-bounce} &= N\mathrm{e}^{-B/\hbar} \\ &\times \int\left(\frac{B}{2\pi\hbar}\right)^{1/2}dt\int\prod_{n\neq 0,1}(2\pi\hbar)^{-1/2}dc_n\exp\left(-\frac{1}{2\hbar}\sum_n\lambda_n c_n^2\right) \\ &\times \operatorname{Im} f(\lambda_0)\end{aligned}$$

より、

$$\operatorname{Im}\left(N\int[dx]\mathrm{e}^{-S_E(x)/\hbar}\right)_{one-bounce} = N\left(\frac{B}{2\pi\hbar}\right)^{1/2}T\mathrm{e}^{-B/\hbar}\left|\det{}'\left[-\frac{d^2}{dt^2}+V''(\overline{x})\right]\right|^{-1/2} \tag{35}$$

となる。ここで、$\det'$ は 0 固有値を除いた、固有値の積 として定義している。(30) 式右辺と（22）式の $n=1$ の項を比較することにより、K の虚部が次のように分かる。

$$N\left(\det\left[-\frac{d^2}{dt^2}+\omega^2\right]\right)^{-1/2}\mathrm{e}^{-B/\hbar}T\operatorname{Im}K = N\left(\frac{B}{2\pi\hbar}\right)^{1/2}T\mathrm{e}^{-B/\hbar}\left|\det{}'\left[-\frac{d^2}{dt^2}+V''(\overline{x})\right]\right|^{-1/2}$$

この式を $\operatorname{Im}K$ について解くと、

$$\operatorname{Im}K = \left(\frac{B}{2\pi\hbar}\right)^{1/2}\left|\frac{\det'\left[-\frac{d^2}{dt^2}+V''(\overline{x})\right]}{\det\left[-\frac{d^2}{dt^2}+\omega^2\right]}\right|^{-1/2} \tag{36}$$

である。このことから、基底エネルギーの虚部を (23) 式から求められる。

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}E_0 &= -\hbar\mathrm{e}^{-B/\hbar}\operatorname{Im}K \\ &= -\hbar\mathrm{e}^{-B/\hbar}\left(\frac{B}{2\pi\hbar}\right)^{1/2}\left|\frac{\det'\left[-\frac{d^2}{dt^2}+V''(\overline{x})\right]}{\det\left[-\frac{d^2}{dt^2}+\omega^2\right]}\right|^{-1/2}\end{aligned} \tag{37}$$

時間積分を ∂_t と書くと、

$$\mathrm{Im}\,E_0 = -\hbar \mathrm{e}^{-B/\hbar}\left(\frac{B}{2\pi\hbar}\right)^{1/2}\left|\frac{\det'\left[-\partial_t^2 + V''(\overline{x})\right]}{\det\left[-\partial_t^2 + \omega^2\right]}\right|^{-1/2} \tag{38}$$

となり、基底エネルギーの虚部を求めることができた。真空の基底エネルギーが複素数であるということは、その真空が安定でないことを表している。真空の単位時間当たりの崩壊確率を Γ と書く。Γ とエネルギーの虚部の関係は、次にのように簡単に理解できる。実時間軸上で、波動関数 $\phi(0)$ が $\phi(t)$ に時間発展する場合を考える。

$$\phi(t) = \mathrm{e}^{-iEt/\hbar}\phi(0)$$

エネルギーを虚部と実部に分け、両者の確率振幅を考えると、

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \mathrm{e}^{-i\,\mathrm{Re}\,Et/\hbar} \times \mathrm{e}^{\mathrm{Im}\,Et/\hbar}\phi(0) \\ |\phi(t)|^2 &= \mathrm{e}^{2\,\mathrm{Im}\,Et/\hbar}|\phi(0)|^2 \end{aligned}$$

より、崩壊確率とエネルギーの関係は、

$$\Gamma = -\frac{2\,\mathrm{Im}\,E}{\hbar}$$

となる。このことから、結果、偽の真空の単位時間当たりの崩壊確率は、

$$\Gamma = -\frac{2\,\mathrm{Im}\,E_0}{\hbar} = 2\mathrm{e}^{-B/\hbar}\left(\frac{B}{2\pi\hbar}\right)^{1/2}\left|\frac{\det'\left[-\partial_t^2 + V''(\overline{x})\right]}{\det\left[-\partial_t^2 + \omega^2\right]}\right|^{-1/2} \tag{39}$$

となる。ポテンシャルさえ与えれば、この崩壊確率を計算することができる。

2.2 4次元における真空の崩壊寿命

前節では、一次元における崩壊確率を求めた。本節では、それを4次元に書き直すことを目的としている。計算するもの、計算方法はほぼ前節と同じである。単位質量の4次元スカラー粒子を考え、それを ϕ と書く。終状態を ϕ_f、始状態を ϕ_i とすると、遷移確率は、

$$\left\langle \phi_f \middle| \mathrm{e}^{-HT/\hbar} \middle| \phi_i \right\rangle = N\int [d\phi]\mathrm{e}^{-S_E(\phi)/\hbar} \tag{40}$$

である。ここで、$S_E(\phi)$ は、

$$S_E(\phi) = \int d^4x \left[\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + V(\phi)\right] \tag{41}$$

である。$\mu = 1, 2, 3, 4$ である。ユークリッド空間上で扱っているので、縮約を取っている箇所に注意すれば、別に添え字の上下は気にしなくてもよい。ユークリッド空間では、時

間成分が（ミンコフスキー空間での第0成分）第4の空間成分のように見えているためである。前節と同じように、次のように ϕ を展開する。

$$\phi(x) = \overline{\phi}(x) + \sum_n c_{n\mu}\phi_{n\mu}(x) \tag{42}$$

$$\int d^4x \phi_{n\mu}\phi_{m\nu} = \delta_{nm}\delta_{\mu\nu} \tag{43}$$

$$-\partial_\mu\overline{\phi}\partial^\mu\overline{\phi} + V^{'}(\overline{\phi}) = 0 \tag{44}$$

$\phi(x), \overline{\phi}(x)$ は、終状態と始状態の境界条件を満たすものとし、$\phi_{n\mu}(x)$ は境界にて、0となるような周期的境界条件を満たすものとする。また、

$$[d\phi] = \prod_{n,\mu}(2\pi\hbar)^{-1/2}dc_{n\mu} \tag{45}$$

である。また、$\phi_f = \phi_i = \phi_+$ とし、T を十分大にとる。前節の計算に変更を加えるのは、(40) 式の $n=1$ の積分である。

次に0モードの個数を考える。一次元の場合と同様に、停留経路の従う運動方程式を微分する。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\overline{\phi} = V^{'}(\overline{\phi})$$

今、例として x 方向に偏微分すると、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial x} = V^{''}(\overline{\phi})\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial x}$$

整理すると、

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + V^{''}(\overline{\phi})\right)\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial x} = 0$$

となるから、微分演算子の0モードに対応する固有関数は、$\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial x}$ の定数倍である。y方向、z方向、t方向も同様に固有関数が存在する。よって、0モードの解は今4つあるということが分かった。

今、0モードは4つあるため、変数変換して計算すると、

$$\begin{aligned}\int\prod_\mu(2\pi\hbar)^{-1/2}dc_{1\mu} &= (2\pi\hbar)^{-2}\int dc_{11}dc_{12}dc_{13}dc_{14} \\ &= (2\pi\hbar)^{-2}\times B^2\int dtdxdydz \\ &= \left(\frac{B}{2\pi\hbar}\right)^2 VT\end{aligned} \tag{46}$$

となる。この因子が、(34) 式の $(B/2\pi\hbar)^{1/2}$ にとって代わる。よって、4次元の偽の真空の崩壊確率は、

$$\Gamma = -\frac{2\,\mathrm{Im}\,E}{\hbar} = 2\mathrm{e}^{-B/\hbar}\left(\frac{B}{2\pi\hbar}\right)^2 V\left|\frac{\det^{'}\left[-\partial^2 + V^{''}(\overline{x})\right]}{\det\left[-\partial^2 + V^{''}(\phi_+)\right]}\right|^{-1/2} \tag{47}$$

したがって、単位体積単位時間当たりの崩壊確率は、

$$\frac{\Gamma}{V} = 2\mathrm{e}^{-B/\hbar}\left(\frac{B}{2\pi\hbar}\right)^2 \left|\frac{\det'\left[-\partial^2 + V''(\overline{x})\right]}{\det\left[-\partial^2 + V''(\phi_+)\right]}\right|^{-1/2} \tag{48}$$

と求められる。次に、4 次元 B の形について考える。その為に、まず $\delta S(\overline{\phi}) = 0$ となる条件を求める。これは、次のようにパラメータ λ に対する最小作用から求めることができる。

$$S_E(\overline{\phi}, \lambda) = \int d^4x \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \overline{\phi}(\lambda x))^2 + V(\overline{\phi}(\lambda x))\right]$$

と定義し、$\lambda = 1$ の時に最小になるように条件を求めればよい。つまり、

$$\frac{dS_E(\overline{\phi}, \lambda)}{d\lambda}|_{\lambda=1} = 0 \tag{49}$$

$\lambda x \to x$ と変換すると、

$$S_E(\overline{\phi}, \lambda) = \int d^4x \left[\lambda^{-2}\frac{1}{2}(\partial_\mu \overline{\phi}(x))^2 + \lambda^{-4} V(\overline{\phi}(x))\right]$$

より、

$$\frac{dS_E(\overline{\phi}, \lambda)}{d\lambda}|_{\lambda=1} = -2\int d^4x \frac{1}{2}(\partial_\mu \overline{\phi}(x))^2 - 4\int d^4x V(\overline{\phi}(x)) = 0$$

整理すると、

$$-\frac{1}{4}\int d^4x (\partial_\mu \overline{\phi}(x))^2 = \int d^4x V(\overline{\phi}(x)) \tag{50}$$

となる。これを用いると、B は、次のように求められる。

$$B = S_E(\overline{\phi}) = \int d^4x \left[\frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \overline{\phi} + V(\overline{\phi})\right] = \frac{1}{4}\int d^4x (\partial_\mu \overline{\phi}(x))^2 \tag{51}$$

ここで、関数 $\phi(x)$ を 4 次元球対称な関数とする。$\rho = \sqrt{t^2 + |\boldsymbol{x}|^2}$ と変数変換すると、(46) 式は、

$$B = \frac{1}{4}\int d^4x (\partial_\mu \overline{\phi}(x))^2 = \frac{\pi^2}{2}\int_0^\infty d\rho \rho^3 \left(\frac{d\overline{\phi}}{d\rho}\right)^2 \tag{52}$$

となる。また、$\overline{\phi}$ の運動方程式も変数変換する。もともとの運動方程式は、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right)\overline{\phi} = V'(\overline{\phi}) \tag{53}$$

である。$\overline{\phi}(\rho)$ には角度依存性がないから、4 次元ラプラシアンの動径方向の微分の項を抜き出せばよい。より、運動方程式は、

$$\frac{d^2\overline{\phi}}{d\rho^2} + \frac{3}{\rho}\frac{d\overline{\phi}}{d\rho} = V'(\overline{\phi}) \tag{54}$$

となる。ポテンシャルを与えることで、(49) 式から $\overline{\phi}$ を求めることができる。すると (47) 式から、B を求めることができる。これにより、4 次元の真空の崩壊確率を計算することができる。

3 Electroweak 真空の崩壊の寿命計算

前章では、4 次元ポテンシャル $V(\phi)$ が与えられたときの偽の真空の崩壊確率の一般式を導出した。この章では、そのポテンシャルとして tree-level のヒッグス有効ポテンシャルを考え、我々の現在いる「真空」が標準理論においてどの程度安定なのかということについて見る。そこで、まず考えるヒッグス有効ポテンシャルについて述べる。繰り込み可能な tree-level でのヒッグスポテンシャルは、複素スカラー 2 重項を ϕ とすると、以下のように書くことができる。

$$V(\phi) = m^2|\phi|^2 + \lambda|\phi|^4 \tag{55}$$

ここで、複素スカラー 2 重項は、実スカラー場を用いて下のように書くことができる。

$$\phi = \begin{pmatrix} G^- \\ (H+iG)/\sqrt{2} \end{pmatrix} \tag{56}$$

このように書くと有効ポテンシャルは、以下のように展開される。

$$\begin{aligned} V(\phi) &= m^2|\phi|^2 + \lambda|\phi|^4 \\ &= m^2\left(\frac{H^2+G^2}{2} + G^{-\ 2}\right) + \lambda\left(\frac{H^2+G^2}{2} + G^{-\ 2}\right)^2 \end{aligned} \tag{57}$$

G, G^- を 0 と取ると残る項は、

$$V(H) = \frac{m^2}{2}H^2 + \frac{\lambda}{4}H^4 \tag{58}$$

である。ここで、H の真空期待値を $\langle 0|\, H\, |0\rangle = v \neq 0$ とする。もし、$m^2 > 0$ ならば、このポテンシャルは、$H = 0$ のみに極小値を持つ様なポテンシャルとなる。なので、今真空期待値を持たせるために、$m^2 < 0$ とする。ポテンシャルの極小点の時に、H は真空期待値を持つ。よって、結合定数と真空期待値の関係は、(58) 式を微分することにより調べることができる。

$$\frac{dV(H)}{dH} = m^2H + \lambda H^3 = 0$$

より、真空期待値を取ると、$(H = v)$

$$v = \sqrt{\frac{-m^2}{\lambda}} \tag{59}$$

という関係を得ることができる。この時、ヒッグス粒子の質量 m_H はポテンシャルの曲率で決まるので、

$$m_H^2 = \frac{d^2V(H)}{dH^2}|_{H=v} = m^2 + 3\lambda v^2 = 2\lambda v^2 \tag{60}$$

となる。真空期待値 v の値は、フェルミ結合定数から知ることができる。今の場合、

$$v = (G_F\sqrt{2})^{-1/2} = 246.2(\mathrm{GeV}) \tag{61}$$

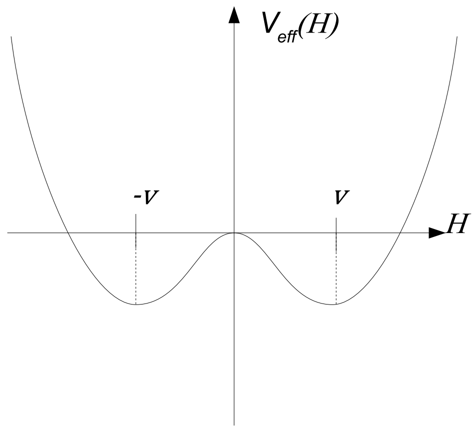

図 4: ヒッグスポテンシャルの概形。$H = +v, -v$ にて極小値を持つような形をしている。

である。現在の宇宙は、この $v = 246(\mathrm{GeV})$ の真空に停留した状態である。(58) 式のポテンシャルは、以下のような形をしている。

勿論、このポテンシャルの上では、我々の真空は真の真空であり、崩壊することはない。このポテンシャルのスケールが大きい範囲での概形について考える。もし、H の値が非常に大きいとき、このポテンシャルの中では、2 次の項よりも 4 次の項の寄与の方が大きくなる。

$$V(H \gg v) \simeq \frac{\lambda(H)}{4} H^4 \tag{62}$$

ここで、ヒッグス 4 次結合定数 λ は、物理スケールに依存した数である。あるスケールにおいて、λ の値が負になると、このポテンシャルは、負の無限大に発散するような形となる。実際に、λ の値は、$10^{11}(\mathrm{GeV})$ あたりで 0 となり、それ以上のスケールになると、負の値を取る。したがって、ポテンシャルの概形を非常に広いスケールで見ると、Electroweak 真空が偽の真空となり、真の真空との間に、非常に「長い」ポテンシャル障壁があるような形となるだろう。したがって、非常に高い物理スケールと考えることで、真空の崩壊を議論することができる。今回は、プランクスケール ($M_P \simeq 10^{18}(\mathrm{GeV})$) に真の真空があるとして、真空の安定性を考える。

具体的なポテンシャルの形は、(62) 式を用いるものとする。便利のために H に球対称性を持たせ、$H(\rho)$ とする。($\rho = \sqrt{t^2 + |\boldsymbol{x}|^2}$) まず、停留経路 $\overline{H}(\rho)$ を求めることから始める。停留経路は、運動方程式 (54) 式から決定することができる。

$$\frac{d^2\overline{H}}{d\rho^2} + \frac{3}{\rho}\frac{d\overline{H}}{d\rho} = \lambda \overline{H}^3 \tag{63}$$

$\lambda < 0$ に注意し、境界条件を $\overline{H}'(0) = 0, \overline{H}(\infty) = 0$ とすると、$\overline{H}(\rho)$ は、次のようになる。

$$\overline{H}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{|\lambda|}} \frac{2R}{\rho^2 + R^2} \tag{64}$$

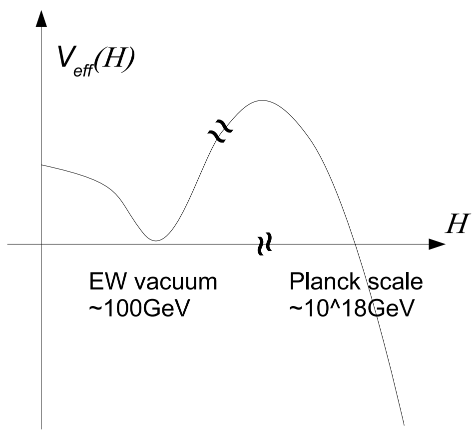

図 5: ヒッグスポテンシャルの非常に大きい物理スケールまで見たときの概形。真の真空がプランクスケールあたりにあるとしている。

これは、確かに (63) 式と境界条件を満たす解となっている。ここで、R は後に、真の真空の物理スケールの逆数をとったものとして評価をする。次に、この解を使い、バウンスに対する作用を (52) 式を用いて求める。

$$
\begin{aligned}
B &= \frac{1}{4}2\pi^2\int_0^\infty d\rho\rho^3\left(\frac{d\overline{H}}{d\rho}\right)^2 \\
&= \frac{\pi^2}{|\lambda|}\int_0^\infty d\rho\frac{16\rho^5R^2}{(\rho^2+R^2)^4}
\end{aligned}
$$

この積分を変数変換を使い計算する。$\rho^2=u$ とおき、整理すると、

$$
B=\frac{8\pi^2}{|\lambda|}\int_0^\infty du\frac{u^2R^2}{(u+R^2)^4}
$$

更に、$u+R^2=t$ と置けば、

$$
\begin{aligned}
B &= \frac{8\pi^2}{|\lambda|}R^2\int_{R^2}^\infty dt\left(\frac{1}{t^2}-\frac{2R^2}{t^3}+\frac{R^4}{t^4}\right) \\
&= \frac{8\pi^2}{3|\lambda|} \qquad (65)
\end{aligned}
$$

となる。これで、作用 B をヒッグス 4 次結合定数 λ で表すことができた。次に、(48) 式を大雑把に評価をする。自然単位系をとり、(48) 式を改めて書くと、

$$
\frac{\Gamma}{V}=2\mathrm{e}^{-B}\left(\frac{B}{2\pi}\right)^2\left|\frac{\det'\left[-\partial^2+V''(\overline{H})\right]}{\det\left[-\partial^2+V''(H_+)\right]}\right|^{-1/2} \qquad (66)
$$

である。ここで、左辺の V を現在の宇宙年齢 T_U を使い、$V\sim T_U^3$ と評価する。行列式の比については、今は次元解析をすることで評価する。行列式の比において、$\det'$ の部分に

て、0 固有値が 4 つ除かれていることに注意すれば、その分 det に余分な固有値 4 つがあると考えることができる。固有値一つの次元は、$[M^2]$ なので、行列式の比全体を次元解析すると、

$$\left(\frac{1}{[M^2]^4}\right)^{-1/2} = [M^4] = [L^{-4}] \tag{67}$$

となる。質量 4 乗の次元を持っていることが分かったので、これを真の真空の物理スケールを使い評価することにする。またその逆数も次のように定義する。

$$\mu(\mathrm{GeV}) = \frac{1}{R(\mathrm{GeV}^{-1})} \tag{68}$$

以上から、T_U と R を使い、真空の平均寿命 τ を表すと、

$$\frac{1}{\Gamma} = \tau = T_U \left[\frac{2\pi^2}{B^2}\frac{R^4}{T_U^4}e^B\right] \tag{69}$$

とできる。これが、tree-level での真空の崩壊を評価するために使うことのできる式である。ここに具体的な値を代入することにより、τ と T_U の大小関係を議論できるため、真空の安定性を評価することができる。

$$\left[\frac{2\pi^2}{B^2}\frac{R^4}{T_U^4}e^B\right] = N(|\lambda|) \tag{70}$$

とおく。$N(\lambda)$ は、τと T_U の大小関係を表している。

まず、$R = 10^{18}(\mathrm{GeV}^{-1})$ の時を考える。また、宇宙年齢については、この先 10^{10}(year) を用いる事とする。すると、さまざまな $|\lambda|$ の値に対する τと T_U の大小関係を調べることができる。これをグラフにすると、次のようになる。

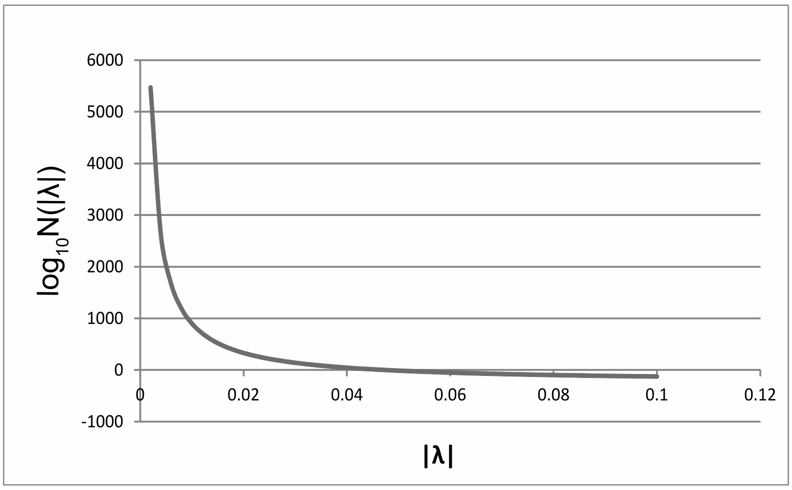

図 6: 縦軸 $\log_{10}N(|\lambda|)$、横軸 $|\lambda|$ のグラフ。

ここで、縦軸は常用対数を用いている。このグラフからも分かるとおり、λ の値が少しでも動くと、τと T_U の大小が冪で変化するということが分かる。例えば、$|\lambda| = 0.0143$ の

時、$\tau \sim 10^{557} T_U$ となる。これは、真空の崩壊寿命が、現在の宇宙年齢の 10^{557} 倍であることを表す。つまり、遥か遥か未来に崩壊する可能性があるということである。したがって、このとき真空は、「準安定」状態にあるということが分かる。また、別の例として、$|\lambda| = 0.0800$ の時を考えると、$\tau \sim 10^{-97.6} T_U$ となる。つまり、これは、宇宙のごく初期に真空の崩壊があったことを表す。しかし、我々の宇宙では、インフレーション以降真空の崩壊は観測されていない。したがって、このとき真空は、「不安定」状態にいるということが言える。この不安定領域と準安定領域の境目は、$\tau \sim T_U$ となる $|\lambda|$ である。今回の計算では、この境界が $\lambda = -0.0475$ という結果になった。つまり、$\lambda < -0.0475$ の時、真空は不安定であり、$0 > \lambda > -0.0475$ の時、準安定ということである。

今、ヒッグス 4 次結合定数そのものに制限を加えることができた。次に、この 4 次の結合定数がどんな物理パラメータによる定数なのかを見る。そして、その関係のある物理パラメータに具体的にどんな制限を加えることができるのかということについて議論する。ヒッグス 4 次結合定数は、トップクォークとヒッグス粒子の質量を使い、プランクスケール近傍で次のように表される。

$$\lambda(M_P) = -0.0143 - 0.0066\left(\frac{M_t}{\mathrm{GeV}} - 173.34\right) + 0.0029\left(\frac{M_h}{\mathrm{GeV}} - 125.15\right) \tag{71}$$

不安定領域と準安定領域を分ける λ は先ほど求められた。その値を (71) 式に代入することで、$M_h - M_t$ 平面に二つの領域を分ける線を書くことができる。更に、$\lambda > 0$ の時、真空は崩壊せず、EW 真空が真の真空であることが分かる。(非常にスケールが大の時でも、ヒッグス有効ポテンシャルが負に発散しないため。) この領域を「安定」領域とすると、$\lambda = 0$ を考えることにより、安定領域と準安定領域を分ける線も書くことができる。この二つの境界線を書くと、次のようになる。

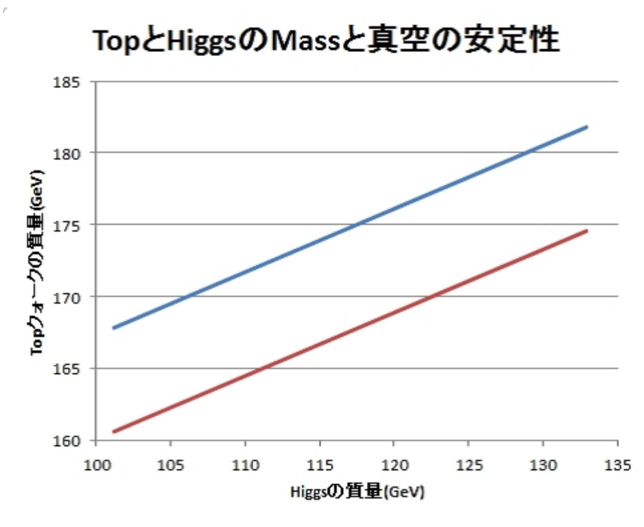

図 7: 横軸:ヒッグスの質量、縦軸：トップクォークの質量。青線（上の線）が「不安定」と「準安定」を分ける境界線であり、赤線（下の線）が「準安定」と「安定」を分ける境界線である。上から順に「不安定」、「準安定」、「安定」と分けられている。

境界線で分けられている領域は、上から順に不安定領域（青線の上の領域）、準安定領

域（青線と赤線の間の領域）、安定領域（赤線の下の領域）となっている。したがって、トップクォークとヒッグスの質量を与えたときに、その真空の安定性を議論することができる。二つの粒子の質量の中心値は、$M_h = 125.15(\mathrm{GeV}), M_t = 173.34(\mathrm{GeV})$ なので、図 7 から、現在の宇宙の真空が「準安定」であるということが分かった。

4　経路積分におけるファインマン核の形式

この章では、自然単位系を最初から用いることとする。今回の計算の出発点となったのは (2) 式である。この節では、確率振幅が (2) 式のようになることを経路積分の方法を用いて示すことを目的としている。
(2) 式の左辺は、「ファインマン核」と呼ばれている。波動関数の座標表示を考える。

$$\psi(q,t) = \langle q|\psi(t)\rangle \tag{72}$$

時間発展演算子を、

$$\hat{U}(t,t^{'}) = \mathrm{e}^{-i\hat{H}(t-t^{'})} \tag{73}$$

とすると波動関数が、時間 $t^{'}$ から時間 t へと時間発展する場合は、

$$\langle q|\psi(q,t)\rangle = \langle q|\hat{U}(t,t^{'})|\psi(q,t^{'})\rangle \tag{74}$$

と表せる。ここで、q の完全系を挟むと、

$$\langle q|\psi(q,t)\rangle = \int dg^{'}\,\langle q|\hat{U}(t,t^{'})|q^{'}\rangle\,\langle q^{'}|\psi(q,t)\rangle \tag{75}$$

となる。形式的に、

$$\langle q|\hat{U}(t,t^{'})|q^{'}\rangle = K(q,t;q^{'},t^{'}) \tag{76}$$

と書くことにする。この K を「ファインマン核」という。ファインマン核は、この定義から「時刻 $t^{'}$、位置 $q^{'}$ に見いだされた粒子が時刻 t、位置 q にて見出される遷移確率振幅」を表すものと分かる。これが、(2) 式の左辺の意味であった。次に、このファインマン核の経路積分による表式を求める。その為に、今まで、q が時間発展しない「シュレディンガー描像」を用いてきたが、この先、ハイゼンベルグ描像を用いることとする。二つの描像は、時間発展演算子によるユニタリー変換で結びついている。時間発展演算子を次のように書く。

$$\hat{U}(t,t^{'}) = \mathrm{e}^{-i\hat{H}(t-t^{'})} = \mathrm{e}^{-i\hat{H}t}\mathrm{e}^{i\hat{H}t^{'}} = \hat{U}(t)\hat{U}(t^{'})^{\dagger} \tag{77}$$

ファインマン核は、

$$K(q,t;q^{'},t^{'}) = \langle q|\hat{U}(t,t^{'})|q^{'}\rangle = \langle q|\hat{U}(t)\hat{U}(t^{'})^{\dagger}|q^{'}\rangle \tag{78}$$

となる。ここで、新たに座標を

$$\hat{U}(t^{'})^{\dagger} |q^{'}\rangle = |q^{'}, t^{'}\rangle \tag{79}$$

と定義すれば、

$$K(q, t; q^{'}, t^{'}) = \langle q, t | q^{'}, t^{'}\rangle \tag{80}$$

と書ける。ここで、(79) 式で導入した座標とは、ハイゼンベルグ描像における $q(t)$ を対角化するものである。もともと、シュレディンガー描像では $|q\rangle$ は、$\hat{q}$ を対角化するような表示であった。

$$\hat{q} |q\rangle = q |q\rangle \tag{81}$$

シュレディンガー描像とハイゼンベルグ描像は、時間発展演算子によるユニタリー変換で、次のように関係づけられている。

$$\begin{cases} \hat{q}(t) = \hat{U}^{\dagger}(t)\hat{q}\hat{U}(t) & (82) \\ \hat{p}(t) = \hat{U}^{\dagger}(t)\hat{p}\hat{U}(t) & (83) \end{cases}$$

$$|\psi\rangle = \hat{U}^{\dagger}(t) |\psi(t)\rangle \tag{84}$$

である。より、

$$\hat{U}(t)\hat{q}(t)\hat{U}^{\dagger}(t) = \hat{q} \tag{85}$$

これを (81) 式に代入すると、

$$\hat{U}(t)\hat{q}(t)\hat{U}^{\dagger}(t) |q\rangle = q |q\rangle \tag{86}$$

つまり、

$$\hat{q}(t)\hat{U}^{\dagger}(t) |q\rangle = q(t)\hat{U}^{\dagger}(t) |q\rangle \tag{87}$$

なので、(79) の定義から、

$$\hat{q}(t) |q, t\rangle = q(t) |q, t\rangle \tag{88}$$

となり、この形で対角化されていることが分かる。よって、K は (80) 式のように書くことができる。ここで、時間間隔 $t - t^{'}$ を N 等分することを考える。k 番目の時刻を t_k と書くと、

$$\begin{cases} t_k = t^{'} + \epsilon k & (89) \\ \epsilon = \dfrac{t - t^{'}}{N} & (90) \end{cases}$$

となる。t_k での座標を $q(k)$ と書く。各時刻 t_k における位置 $q(k)$ を決めることは、時刻 $t^{'}$ で $q^{'}$ から始まり、時刻 t で q まで至る一つの経路を指定することとなる。これを図にすると次のようになる。

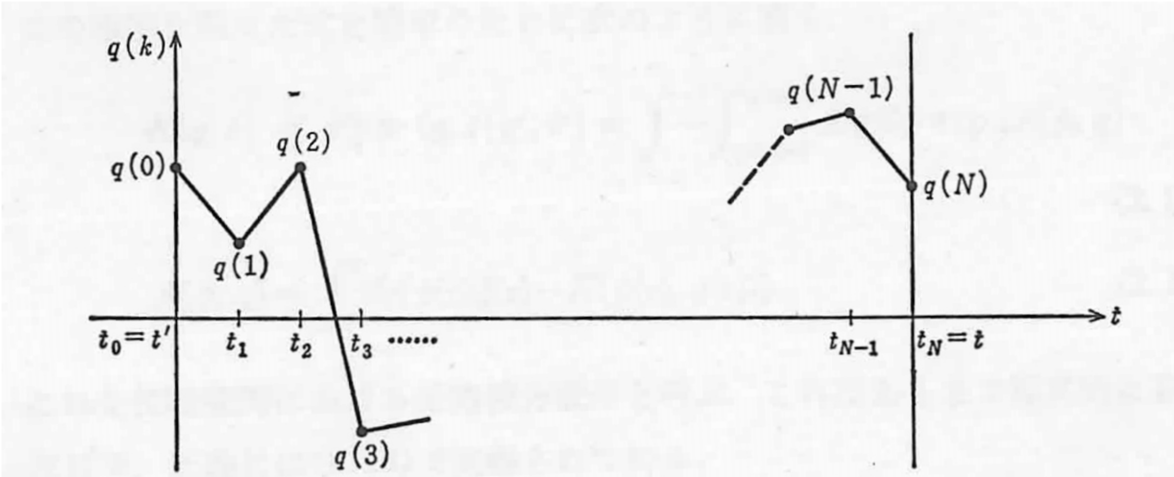

図 8: 経路の例。[6]P.10 から引用した。時刻 $t^{'}$ で q(0) が、時刻 t で q(N) がそれぞれ決まっており、その間にある一連の $q(k)$ を決めることにより、一つの経路を書くことができる。

q 表示の基底ベクトルは完全系をなしているので、各時刻 t_k において、それぞれの完全系を次のように書くことができる。

$$\int |q(k), t_k\rangle \, dq(k) \, \langle q(k), t_k| = 1 \tag{91}$$

各時刻の完全系を挟むことにより、ファインマン核は次のように多重積分で表すことができる。

$$\langle q, t|q^{'}, t^{'}\rangle = \lim_{N\to\infty} \int \cdots \int \prod_{k=1}^{N-1} \left(dq(k) \, \langle q(k+1), t_{k+1}|q(k), t_k\rangle\right) \langle q(1), t_1|q(0), t_0\rangle \tag{92}$$

ここで、$q(N) = q, t_N = t, q(0) = q^{'}, t_0 = t^{'}$ として書いている。(92) 式は、微小時間におけるファインマン核の積で書けていることが分かる。この、微小時間におけるファインマン核の形式について考える。今、ϵ は微小量なので、微小時間における核は次のようにハミルトニアンを用いて書ける。

$$\begin{aligned}
\langle q(k+1), t_{k+1}|q(k), t_k\rangle &= \langle q(k+1)|\mathrm{e}^{-i\epsilon \hat{H}}|q(k)\rangle \\
&= \langle q(k+1)|1 - i\epsilon \hat{H}(\hat{p}, \hat{q})|q(k)\rangle
\end{aligned} \tag{93}$$

となる。これを積分系に書き換える。ここで、$\hat{H}$ の構造を「$\hat{q}$が$\hat{p}$の右側にある」という仮定をする。すると、$\hat{H}$ の右側の $|q(k)\rangle$ のために $\hat{q}$ は演算子から固有値に置き換わる。つまり、演算子が $\hat{p}$ のみの構造とすることができる。よって、(93) 式を運動量表示の完全系を

挟むことにより、次のように積分系で書き換えることが可能になる。

$$\begin{aligned}\langle q(k+1), t_{k+1}|q(k), t_k\rangle &= \langle q(k+1)|\mathrm{e}^{-i\epsilon\hat{H}(\hat{p},\hat{q})}|q(k)\rangle \\ &= \int\frac{dp_k}{2\pi}\langle q_{k+1}|p_k\rangle\langle p_k|\mathrm{e}^{-i\epsilon\hat{H}(\hat{p},\hat{q})}|q_k\rangle \\ &= \int\frac{dp_k}{2\pi}\langle q_{k+1}|p_k\rangle\,\mathrm{e}^{-i\epsilon H(p_k,q_k)}\,\langle p_k|q_k\rangle \\ &= \int\frac{dp_k}{2\pi}\mathrm{e}^{ip_kq_{k+1}}\mathrm{e}^{-i\epsilon H(p_k,q_k)}\mathrm{e}^{-ip_kq_k} \\ &= \int\frac{dp_k}{2\pi}\exp[ip_k(q_{k+1}-q_k)-\epsilon H(p_k,q_k)] \end{aligned} \tag{94}$$

となる。形式上次のように書く事にする。

$$\langle q(k+1), t_{k+1}|q(k), t_k\rangle = \int\frac{dp_k}{2\pi}\exp[iA(p_k, q_{k+1}, q_k)] \tag{95}$$

$$A(p_k, q_{k+1}, q_k) = p_k(q_{k+1}-q_k) - \epsilon H_k \tag{96}$$

より、(94) 式を (92) 式に代入すると、

$$\begin{aligned}\langle q, t|q^{'}, t^{'}\rangle &= \lim_{N\to\infty}\int\cdots\int\prod_{k=1}^{N-1}\left(dq(k)\int\frac{dp_k}{2\pi}\exp[iA(p_k,q_{k+1},q_k)]\right)\int\frac{dp_0}{2\pi}\exp[iA(p_0,q_1,q_0)] \\ &= \lim_{N\to\infty}\prod_{i=1}^{N-1}\int dq_i\prod_{j=0}^{N-1}\int\frac{dp_k}{2\pi}\exp\left[i\sum_{k=0}^{N-1}A(p_k,q_{k+1},q_k)\right]\end{aligned} \tag{97}$$

この式を簡単な形で書くと、次のようになる。

$$K(q, t; q^{'}, t^{'}) = \langle q, t|q^{'}, t^{'}\rangle = \int\cdots\int[dq][dp]\exp iA[p,q] \tag{98}$$

$$A[q,p] = \int_t^{t^{'}} d\tau[p(\tau)\dot{q}(\tau) - H(p(\tau), q(\tau))] \tag{99}$$

これが、経路積分の表式である。これは、境界条件を満たす位相空間における全経路にわたり、汎関数の「作用」$A[p,q]$ を $\exp iA[p,q]$ の形で足し合わせている形をしている。ここから、(2) 式の形式にかけることを示すためには、具体的なハミルトニアンの形を決定し、運動量積分を実行した形を書けばよい。1 次元において、次のようにハミルトニアンが書けているとする。

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{p})^2 + V(\hat{q}) \tag{100}$$

A_k は、

$$A_k = p_k(q_{k+1}-q_k) - \epsilon\left(\frac{1}{2}{p_k}^2 + V(q_k)\right) \tag{101}$$

ここで、$p_k \to p_k + \frac{q_{k+1}-q_k}{\epsilon}$ と変数変換すると、

$$A_k = -\frac{\epsilon}{2}{p_k}^2 + \frac{1}{2\epsilon}(q_{k+1}-q_k)^2 - \epsilon V(q_k) \tag{102}$$

となる。よって、運動量積分を実行できる。

$$\int \frac{dp_k}{2\pi} \exp(-i\frac{\epsilon}{2}{p_k}^2) = (\frac{2\pi}{i\epsilon})^{1/2} \tag{103}$$

よって、ファインマン核は、

$$\langle q,t|q^{'},t^{'}\rangle = \lim_{N\to\infty} \int\cdots\int \prod_{k=1}^{N-1} dq_k (\frac{1}{2\pi i\epsilon})^{1/2} \exp\left[i\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{1}{2\epsilon}(q_{k+1}-q_k)^2 - \epsilon V(q_k)\right)\right] \tag{104}$$

ここで、

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\epsilon}(q_{k+1}-q_k) = \lim_{N\to\infty} \frac{N}{T}(q_{k+1}-q_k) = \dot{q}(t) \tag{105}$$

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \epsilon = \int_{t_i}^{t_f} dt \tag{106}$$

を約束すれば、

$$K(q,t_f;q^{'},t_i) = \langle q,t_f|q^{'},t_i\rangle = \int\cdots\int [dq] \exp[iA(t_f,t_i)] \tag{107}$$

$$A(t_f,t_i) = \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{1}{2}\dot{q}(t)^2 - V(q(t))\right] \tag{108}$$

となり、(2) 式の形式を導出できる。ここで、

$$\lim_{N\to\infty} \quad \left(\frac{1}{2\pi i\epsilon}\right)^{N/2} \prod_{k=1}^{N-1} dq_k = [dq] \tag{109}$$

である。(2) 式では、場の関数を $x(t)$ に置き換えた形で計算をしていた。確かに、(107)(108) 式から、ファインマン核が、境界条件を満たす経路すべてについて、作用 A を経路ごとに積分することで表現できるということが分かった。

謝辞

今回、初めて論文を作成するにあたり、指導教員の佐藤丈准教授から様々な面でご指摘を賜りました。心から御礼を申し上げたく思います。
また、経路積分の計算にあたっては同研究室の B4 の荒井 玲於奈さんの協力なくしては成しえませんでした。計算に当たっての物理的描像の理解に協力してくださったことをここに感謝の意を表します。宇宙論ゼミや研究室の活動の中で、高西 康敬 氏、荒木 威氏、太田 俊彦 氏、齋藤 悠人氏、星野 志穂里氏の的確なアドバイスにも助けられました。
本論文の作成に協力していただいたすべての皆様に心から感謝します。本当にありがとうございました。

参考文献

[1] S. R. Coleman, Phys. Rev. D **15** (1977) 2929 [Phys. Rev. D **16** (1977) 1248]. doi:10.1103/PhysRevD.15.2929, 10.1103/PhysRevD.16.1248

[2] C. G. Callan, Jr. and S. R. Coleman, Phys. Rev. D **16** (1977) 1762. doi:10.1103/PhysRevD.16.1762

[3] V. Branchina and E. Messina, Phys. Rev. Lett. **111** (2013) 241801 doi:10.1103/PhysRevLett.111.241801 [arXiv:1307.5193 [hep-ph]].

[4] D. Buttazzo, G. Degrassi, P. P. Giardino, G. F. Giudice, F. Sala, A. Salvio and A. Strumia, JHEP **1312** (2013) 089 doi:10.1007/JHEP12(2013)089 [arXiv:1307.3536 [hep-ph]].

[5] G. Isidori, G. Ridolfi and A. Strumia, Nucl. Phys. B **609** (2001) 387 doi:10.1016/S0550-3213(01)00302-9 [hep-ph/0104016].

[6] 崎田　文二 , 吉川　圭二 (1993) 経路積分による多自由度の量子力学

[7] S. R. Coleman (1988) Aspects of symmetry