大統一理論

09RP027　　立石明宏

2013/02/13

1 はじめに

大統一理論とは自然界に存在する 4 つの基本的な相互作用のうち強い相互作用、電磁相互作用、弱い相互作用の 3 つを統一的に記述する理論である。これは各相互作用がリー代数に結びついていることから、それらを部分代数として含むようなより大きなただ一つのリー代数によってまとめらるるのではないかという考えに基づいている。どのようにして統一がなされるかということを、群論についての基本的なことから順を追ってみていきたい。

目 次

2 群論

2.1 群と表現

ある集合 G が積に対して以下を満たすとき G は群であるという。
群の定義 *(*公理*)*

1. 積について閉じている $f, g \in G \Rightarrow fg \in G$
2. 結合則が成り立つ $f(gh) = f(gh) \quad f, g, h \in G$
3. 単位元 e が存在 $\quad ef = fe = f$
4. 任意の元 f に対し逆元 f^{-1} が存在 $\quad ff^{-1} = f^{-1}f = e$

元の数を群の位数という。積は一般に可換ではなく, 任意の元に対し

$$fg = gf$$

が成り立つ群をアーベル（可換*)* 群という。
群 G の部分集合 H が以下を満たすとき H を G の部分群という。

1. $f, g \in H \Rightarrow fg \in H$
2. $f \in H \Rightarrow f^{-1} \in H$

上述の条件を満たす集合であればそれは群になっているのだが、そのままでは抽象的なので何か便利なように元を表したい。そこで群の表現がある。群の表現とは元を線形演算子に写す写像で次の性質を満たすものである。

1. $D(e) = \hat{1} \qquad (\hat{1}$は単位演算子$)$
2. $D(g)D(f) = D(gf)$

2.2 正則表現

群の元 g_i 自身をベクトル空間の正規直交基底 $|g_i\rangle$ に採り

$$D(g_i)|g_j\rangle \equiv |g_i g_j\rangle \tag{2.1}$$

と定義したものを正則表現という。正則表現の次元は群の位数である。線形演算子は行列で表すことができ、その行列要素は

$$D(g_i)_{jk} = \langle g_j|D(g_i)|g_k\rangle \tag{2.2}$$

で与えられる。この式は演算子と行列を相互に関係づけるものであり、任意の表現に適用できる。一般の n 次正則行列は積について閉じており逆行列（逆元）も存在するので群をなしている。

2.3　既約表現

群の表現 D と D’が相似変換 S により

$$D'(g) = S^{-1} D(g) S \tag{2.3}$$

となるときこれらの表現は同値であるといい、異なるのは基底の採り方だけである。部分空間の任意のベクトルに対しどの *D(g)* が作用してもその部分空間に入っているとき、その部分空間を不変部分空間と呼ぶ。

$$PD(g)P|u\rangle = D(g)P|u\rangle \quad （P：不変部分空間への射影演算） \tag{2.4}$$

不変部分空間をもつ表現を可約表現、持たないものを既約表現という。 表現 D が相似変換により

$$D(g) = \begin{pmatrix} D_1(g) & 0 & \cdots \\ 0 & D_2(g) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

とブロック対角化できるとき完全可約であるといい、既約表現 D_i の直和に分解できる。

$$D = D_1 \oplus D_2 \oplus \cdots \tag{2.6}$$

3　リー代数

3.1　生成子

群の元が n 個の実パラメータ $\theta^a(a=1,,n)$ に依存し

$$D(g)=e^{\theta^a T_a} \tag{3.1}$$

と表現されるとき、この群を n 次のリー群という。T_a を群の生成子と呼び、(3.1) が群の定義 *1.* を満たすためには

$$[T_a,T_b]=if_{abc}T_c \tag{3.2}$$

と生成子が交換子の下で代数を満たさねばならない。f_{abc} は同じ群であれば全ての表現に対し同じであり、群の構造を決定する定数なので構造定数と呼ぶ。(3.2) を群のリー代数と呼ぶ。

3.2　随伴表現

構造定数を生成子の行列要素として

$$[T_a]_{bc}\equiv -if_{abc} \tag{3.3}$$

と定義した表現を随伴表現と呼ぶ。行と列のラベルが生成子のラベルと同じなので表現の次元は生成子の数であり、状態は生成子自身に対応する。