

ニュートリノ

中島 建雄

today

概 要

本稿では、標準模型におけるニュートリノの描写とニュートリノの質量仮定による標準模型の変化を扱います。これは、現代での素粒子物理学で重要な役割を果たします。

ニュートリノの概念は1930年 Wolfgang Pauli のニュートリノ仮定の提唱からはじまり、1933年 Enrico Fermi により β 崩壊の論文が提出しました。 β 崩壊は物理において弱い相互作用を扱うものである。 β 崩壊は中性電荷、スピン1/2の粒子が中性子の崩壊から生じる3体崩壊です。 ^{14}N はスピン1/2なのでフェルミ統計とされてきましたが実験ではボース統計に従うと示されました。そのため理論を変えぬように上述の粒子を考えました。Fermiはこの中性粒子をニュートリノと名付けました。この粒子の驚嘆すべきところは電荷をもたない唯一のフェルミオンであることです。この粒子が根本的物質の探求、根本的な力の探求、そしてどう自然界に作用するかを示す基本法則を探求する今日の物理学者を魅了している粒子である。

1958年、1967年に提唱されたV-A理論、標準理論に組み込まれたニュートリノであるが太陽ニュートリノ問題と大気ニュートリノ問題によりニュートリノが振動していることが確認されました。これはニュートリノに質量があることを示唆します。この発見は標準理論の物理の大きな躍進につながります。本論文ではこれらに述べられている概念を紹介し、若輩の筆者の得た結果を示します。

本文からもわかるように、ニュートリノの質量仮定によってスタンダード理論等の知識が必要不可欠です。筆者は学部において場の理論を勉強し、その応用として、ここでニュートリノ問題を取り扱います。標準理論自身、壮麗な理論体系をもち、未解決な問題も多いです。その深遠たる領域は、僅か1年間ではその表面すらなぞらないものであり、まだまだ研鑽の余地があるものと思います。

学部から通じて4年間、遅々として進まぬ研究テーマにも拘わらず、多大なご指導、ご助言を下さった佐藤准教授、ならびに上野先輩に心から感謝します。また物理学科の大勢の方々、同級生諸君に対して大変お世話になりました。

目 次

1	準備～標準理論の構成要素～	4
1.1	<u>定義 1.1 ゲージ対称性</u>	4
1.2	<u>定義 1.2 自発的対称性の破れ</u>	5
2	電弱理論	6
2.1	<u>スタンダード理論でのニュートリノ</u>	7
3	標準理論を超えたニュートリノ	9
3.1	大気ニュートリノ振動	9
3.2	ディラックニュートリノとマジョラナニュートリノの質量項	9
3.3	ディラック質量とレプトンの保存	10
3.4	マジョラナ質量とレプトンの破れ	10
3.5	混合質量項とシーソー機構	11
4	参考図書	13

1 準備～標準理論の構成要素～

本章では2章以降で必要となる定理や補題等を準備し、標準理論の基礎を述べる。

1-1 用語

以下方程式は自然単位系で表す

フェルミオン場 $\Psi(x)$ $\not{D} = \gamma^\mu \partial_\mu$

$m \cdots \cdots$ {電子質量} $D_\mu \equiv \partial_\mu - ieA_\mu(x)$

添え字 i (列成分)、 j (行成分)

1.1 定義 1.1 ゲージ対称性

QED は $U(1)$ ゲージ不変である

$$D_\mu \Psi \rightarrow D'_\mu \Psi'$$

$$\Psi'(x) \rightarrow e^{-i\alpha(x)} \Psi(x) = \partial_\mu - ieA'_\mu(x) e^{-i\alpha(x)} \Psi(x)$$

これより

$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x)$ これは局所ゲージ変換です。テンソル

$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ をくわえて QED の全ラグランジアン

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\Psi}(x)(i\not{D} - m)\Psi(x)$$

ここで $e\bar{\Psi}(x)\gamma^\mu \Psi(x)eA_\mu$ 電子～光子のバーテックス

SUN 群を満たすため

$$[t^i, t^j] = ic^{ijk} t^k \quad ijk \rightarrow \{1, 2, \dots, N^2 - 1\}$$

$$\text{場 } \Psi(x) \text{ は } \Psi(x) \rightarrow \Psi'(x) = e^{-i\theta^k(x)T^k} \Psi(x)$$

ここで T^k は生成子 t^k の行列表記, θ^k は時間空間に依存した関数で。

また共変微分は

$$D_\mu = \partial_\mu - iegT^k A_\mu^k(x) \text{ と書きかえられる}$$

ここで、 $A_\mu^k(x)$ はゲージ場 ($k = 1, 2, \dots, N$)

もしここでも $U(1)$ ゲージ変換 $D_\mu \Psi \rightarrow D'_\mu \Psi' = e^{-i\theta^k(x)T^k} D_\mu \Psi(x)$ を要請

するなら

$$T^k A_\mu^k(x) \rightarrow T^k A'_\mu^k(x) = e^{-i\theta^k(x)T^k} - \frac{1}{g} (\partial_\mu e^{-i\theta^k(x)T^k}) e^{i\theta^k(x)T^k}$$

よって

$$A_\mu^k(x) \rightarrow A'_\mu^k(x) = A_\mu^k(x) - \frac{i}{g} \partial_\mu \theta^k(x) - c^{klm} A_\mu^l(x) \theta^m(x)$$

テンソルは、これより

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + gc^{ijk} A_\mu^j A_\nu^k$$

これらをつかってゲージ不変ラグランジアンは

$$L_{SU(N)} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i\bar{\Psi}(x)\not{D}\Psi(x) \text{ となる}$$

1.2 定義 1.2 自発的対称性の破れ

弱い相互作用は有質量ゲージボソンを媒介して行われていて、質量項 $m A_\mu^i(x) A_\mu^i(x)$ のような項は局所ゲージ不変性を破ります。これによって自発的対称性の破れとヒッグス機構が考案されました。自発的対称性の破れを探索するために、グローバルゲージ対称性を考えます。

$$L_\phi = \partial^\mu \phi^\dagger \partial_\mu \phi - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \quad \mu^2, \lambda \text{ は実数}$$

$$L_\phi \text{ はゲージ不変であるため } \phi \rightarrow \phi' = e^{-i\alpha} \phi, \delta \equiv \phi' - \phi = -i\alpha \phi$$

L_ϕ の差分は

$$\delta L_\phi = \frac{L_\phi}{\delta \phi} \delta \phi + \frac{L_\phi}{\delta (\partial^\mu \phi)} \partial^\mu \delta \phi$$

$$\delta S = \int \delta L_\phi d\mathbf{r}^4 = i \int \alpha(x) \partial_\mu [\phi^\dagger (\partial^\mu \phi) - (\partial_\mu \phi^\dagger) \phi] d\mathbf{r}^4$$

$$\text{カレント } J_\mu = \phi^\dagger (\partial^\mu \phi) - (\partial_\mu \phi^\dagger) \phi$$

南部ゴールドストンボソンを見るために複素場 $\phi = (\eta + i\chi)/2$ として

L_ϕ を書き直すと

$$L_\phi = \frac{1}{2} \partial^\mu \eta \partial_\mu \eta + \frac{1}{2} \partial^\mu \chi \partial_\mu \chi - \frac{1}{2} \mu^2 (\eta^2 + \chi^2) - \frac{1}{4} \lambda (\eta^2 + \chi^2)^2$$

L_ϕ は回転不変なため

$$\eta \rightarrow \eta' = \eta \cos \theta + \chi \sin \alpha$$

$$\chi \rightarrow \chi' = -\eta \sin \theta + \chi \cos \alpha$$

また差分は $\delta \eta = +\alpha \chi, \delta \chi = -\alpha \eta$

η を真空期待値 u とそのゆらぎ $\tilde{\eta}$ を使って $\eta = u + \tilde{\eta}$ と書き直し L_ϕ 組み込む。ここで $\lambda > 0, \mu < 0$ とすると

$$L_\phi = \frac{1}{2} \partial^\mu \tilde{\eta} \partial_\mu \tilde{\eta} + \frac{1}{2} \partial^\mu \chi \partial_\mu \chi - \frac{1}{2} (-2\mu^2) (\tilde{\eta}^2) + \dots \quad \text{ここで } u = \sqrt{-\mu^2/\lambda}$$

$$m_{\tilde{\eta}}^2 = -2\mu^2 \text{ そして } m_\chi^2 = 0$$

χ がマスレスゴールドストンボソンであり真空期待値での U(1) 対称性の自発的対称性の破れの後に出てくる粒子です。これがマスレスゲージボソンがゴールドストンボソンを取り込み質量を得ます。これが有名な SU(2) × U(1) ゲージ対称性を基にしたヒッグス機構になる。

§1-1 定義 1.3 くりこみ

2 電弱理論

電磁相互作用と、弱い相互作用、標準理論の電弱相互作用のユニタリ理論の構築は素粒子でのもっとも偉大な成功の一つです。この模型は $SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ対称性の基に構築されており、そのゲージは自発的に破れて $U(1)_Q$ 対称性に崩壊する。 $U(1)_Q$ ゲージボソンは光子のようにゲージ不変性のため、マスレスです。対称的に $SU(2)_L$ ゲージボソンはヒッグス機構で質量をもち、短い範囲の弱い相互作用を媒介にする。標準模型でクォークとレプトンの左巻き成分は $SU(2)_L$ 2重項です。

$$Q_L = \left(\overbrace{\begin{pmatrix} (u_L)_a \\ d_L \end{pmatrix}}^{\alpha}, \overbrace{\begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}}^{\alpha} \right) \Big\}^j \quad l_L = \left(\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}, \overbrace{\begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix}}^{\alpha} \right) \Big\}^j$$

ここで世代の足を α , $SU(2)$ の足を j 、スピノルの足を $a(1 \sim 2)$ とします。
左巻きクォークの成分は $SU(2)$ 一重項なので

$$U_R \equiv u_R, c_L, t_L; \quad D_R \equiv d_R, s_R, b_R; \quad E_R \equiv e_R, \mu_R, \tau_R,$$

3ニュートリノのうち左巻き成分しか弱い相互作用に関わらない、なぜならそれらは標準理論のなかでマスレスワイル粒子だからです。クォークとレプトンはハイパーチャージ Y とアイソスピン I^3 を持ちます。

粒子成分	弱アイソスピン I^3 , ハイパーチャージ Y , 電荷 Q		
$Q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$	$+1/6$	$\begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$
$l_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$	$-1/2$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1/3 \end{pmatrix}$
$U_R = u_R, c_L, t_L$		0	$+2/3$
$D_R = d_R, s_R, b_R$		0	$-1/3$
$E_R = e_R, \mu_R, \tau_R$		0	-1

フェルミ場の運動項は

$$L_F = \bar{Q} i \not{D} Q_L + \bar{l}_L i \not{D} l_L + \bar{U}_R i \not{D} U_R + \bar{D}_R i \not{D} D_R + \bar{E}_R i \not{D} E_R \quad (1.2)$$

ここで

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - ig \tau^k W_\mu^k(x) - ig' Y B_\mu$$

$$\partial' \equiv \partial_\mu - ig' Y B_\mu \quad \tau_k \equiv \sigma_k \quad (k = 1, 2, 3)$$

ゲージ場の運動量項は

$$L_G = -\frac{1}{4} W^{i\mu\nu} W_{\mu\nu}^i - \frac{1}{4} B^{i\mu\nu} B_{\mu\nu}^i$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$$

W_μ^i, B_μ は $SU(2)_L, U(1)_Y$ ゲージボソンです。しかしながら、局所ゲージ変換は破られ、 $SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_Q$ となる。ここで $U(1)_Q$ はゲージ群です。ゲージ対称性の破れはヒッグス 2 重項をスカラー場に導入することでわかる。

$$L_H = (D^\mu H)^\dagger (D_\mu H) - \mu^2 H^\dagger H - \lambda (H^\dagger H)^2 \quad (1.1)$$

$\mu^2 > 0$ なら真空期待値 $\langle H \rangle \equiv \langle 0|H|0 \rangle = 0$ でその場合はゲージ対称性は破られない。しかし $\mu^2 < 0$ なら

$$|\langle 0|H|0 \rangle|^2 = \frac{1}{2}v^2 \quad \text{ここで、} \quad u = \sqrt{-\mu^2/\lambda} \text{ とし、}$$

$$\langle H \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad H = e^{i\tau^k \xi^k(x)/v} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix} \quad \text{とする。}$$

ここで $U(\xi) = e^{i\tau^k \xi^k(x)/v}$ としこれの基にユニタリ変換すると

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix}$$

$$\tau^k \widetilde{W}_\mu^k = U(\xi) \tau^k U^{-1}(\xi) - \frac{i}{g} [\partial_\mu U(\xi)] U^{-1}(\xi)$$

(1) ゲージボソンの質量は式 (1.1) の最初の項からでる。

$$(D^\mu H)^\dagger (D_\mu H) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi')^2 + \left(\frac{g^2}{4} W_{\mu k}^+ W^{+\mu k} + \frac{g^2 + g'^2}{4} Z_\mu Z^\mu \right) v^2 + \dots$$

$$W_\mu^\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \mp W_\mu^2)$$

$$\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & -\sin \theta_W \\ \sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix}$$

この式より

$$\tan \theta_W = \frac{g'}{g} \quad M_{W^\pm}^2 = \frac{g^2 v^2}{4} \quad M_{Z^0}^2 = \frac{g^2 + g'^2}{4} v^2$$

ここで光子は $U(1)_Q$ 対称性を壊さないためマスレスです。ゲージボソン $W^\pm$ と Z^0 は、質量をもち、ヒッグス場の真空期待値に比例しています。

(2)、ヒッグスの質量は式 (1.1) の 2 項目で出せます。

$$V(H) = \mu^2 H^\dagger H + \lambda (H^\dagger H)^2 = -\mu^2 h^2 + \lambda v h^3 + \frac{\lambda}{4} h^4$$

ここでヒッグスの質量は h^2 の項の係数ですから、 $M_h = \sqrt{-2\mu^2}$ です。

6 クォークの質量は

$$L_Y = -(\overline{Q_L})_i^\alpha (Y_u)_{\alpha\dot{\alpha}} (\tilde{H})_1^{\dot{\alpha}} U_R^{\alpha 1} - \overline{Q_L} Y_d H U_R - \overline{l_L} Y_l H E_R + \dots$$

$$(M_u)_{\alpha\dot{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{2}} v_u (Y_u)_{\alpha\dot{\alpha}} \quad (M_d)_{\alpha\dot{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{2}} v_u (Y_d)_{\alpha\dot{\alpha}} \quad (M_l)_{\alpha\dot{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{2}} v_u (Y_l)_{\alpha\dot{\alpha}}$$

ここで、 $\tilde{H} \equiv i\sigma_2 H^*$, Y_u, Y_d, Y_l は湯川結合行列これを bi ユニタリ変換すると

$$U_u^\dagger M_u U'_u = \text{Diag} \{m_u, m_c, m_t\}, \quad U_d^\dagger M_d U'_d = \text{Diag} \{m_d, m_s, m_b\}, \quad U_l^\dagger M_l U'_l = \text{Diag} \{m_e, m_\mu, m_\tau\}$$

となりクォークの質量を与える。

2.1 スタンダード理論でのニュートリノ

ニュートリノは $W^\pm, Z^0$ を通して他の粒子と相互作用する。それらについてをチャージカレント (cc) 相互作用と中性相互作用 (nc) で描写する。

式 (1. 2) からクォークの cc 相互作用項を書き出す。

$$L_{cc}^q = g \overline{Q_L} \gamma^\mu \tau^A W_\mu^A Q_L$$

$$L_{cc}^q = g \overline{(Q_L)_a^i} (\sigma_\mu)^{a\dot{a}} (\tau^A)_i^j (Q_L)_j^a W_\mu^A$$

$$= \frac{g}{\sqrt{2}} (\overline{u_L})_{\dot{a}} (\sigma_\mu)^{a\dot{a}} (d_L)_a W^+ + \frac{g}{\sqrt{2}} (\overline{d_L})_{\dot{a}} (\sigma_\mu)^{a\dot{a}} (u_L)_a W^- + \text{etc}$$

$$= \frac{g}{\sqrt{2}} (\overline{u \ c \ t})_L \gamma^\mu \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}_L W_\mu^+ + \text{h.c}$$

ここで前述したクォークの質量の対角化と同様にして、フレーバーも bi ユニタリー変換すると、

$$L_{cc}^q = \frac{g}{\sqrt{2}} (\overline{u' \ c' \ t'})_L \gamma^\mu V \begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix}_L W_\mu^+ + \text{h.c}$$

$V \equiv U_u^\dagger U_d$ これは CKM 行列です。同様にレプトンの cc 相互作用は、

$$L_{cc}^l = \frac{g}{\sqrt{2}} (\overline{e \ \mu \ \tau})_L \gamma^\mu \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}_L W_\mu^- + \text{h.c}$$

ニュートリノに質量がないとされたため、混成行列は加えない。

式 (1.1) からクォークの nc 相互作用を導ける。

$$\begin{aligned} L_{nc}^q &= g \overline{Q}_L \gamma^\mu \tau_3 Q_L W_\mu^3 + g' (\overline{Q}_L \gamma^\mu Y Q_L + \overline{U}_R \gamma^\mu Y U_R + \overline{D}_R \gamma^\mu Y D_R) B_\mu \\ &= \sum_{i=1}^3 \left[g (\overline{q_i \ q'_i})_L \gamma^\mu \begin{pmatrix} I_{q_i L}^3 & 0 \\ 0 & I_{q'_i L}^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_i \\ q'_i \end{pmatrix}_L W_\mu^3 \right. \\ &\quad + g' (\overline{q_i \ q'_i})_L \gamma^\mu \begin{pmatrix} Y_{q_i L} & 0 \\ 0 & Y_{q'_i L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_i \\ q'_i \end{pmatrix}_L B_\mu \\ &\quad \left. + g' (\overline{q_i \ q'_i})_R \gamma^\mu \begin{pmatrix} Y_{q_i R} & 0 \\ 0 & Y_{q'_i R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_i \\ q'_i \end{pmatrix}_R B_\mu \right] \end{aligned}$$

ここで、 q_i と q'_i ($i=1,2,3$) は、(u,c,t) と (d,s,b) です。また Z_μ, A_μ で書き直すと、

$$L_{nc}^q = e \sum_f A^\mu Q_f \bar{f} \gamma_\mu f + \frac{g}{\cos \theta_W} \sum_f \left(C_L^f \bar{f}_L \gamma_\mu f_L + C_R^f \bar{f}_R \gamma_\mu f_R \right) Z_\mu$$

ここで、 $Q = I^3 + Y$ 、 $e = g \sin \theta$ 、 f はすべてのクォーク、レプトンです。

また $C_L^f = I_{fL}^3 - Q_f \sin^2 \theta_W$ 、 $C_R^f = I_{fR}^3 - Q_f \sin^2 \theta_W$

Z_μ のゲージ場での nc 相互作用ラグランジアンは

$$\begin{aligned} L_{nc} &= \frac{g}{\cos \theta_W} \sum_f \left(C_L^f \bar{f}_L \gamma_\mu f_L + C_R^f \bar{f}_R \gamma_\mu f_R \right) Z_\mu \\ &= \frac{g}{\cos \theta_W} \sum_f \bar{f} \gamma_\mu \left(C_V^f - C_A^f \gamma_5 \right) f Z_\mu \end{aligned}$$

電磁場での nc 相互作用ラグランジアンは

$$L_{EM} = e \sum_f A^\mu Q_f \bar{f} \gamma_\mu f$$

	$f=u$	$f=d$	$f=l$	$f=u$
C_L^f	$\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sin^2 \theta$	$-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \sin^2 \theta$	$-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \sin^2 \theta$	$\frac{1}{2}$
C_R^f	$-\frac{2}{3} \sin^2 \theta$	$\frac{1}{3} \sin^2 \theta$	$\frac{2}{3} \sin^2 \theta$	0
C_V^f	$\frac{1}{2} - \frac{4}{3} \sin^2 \theta$	$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \sin^2 \theta$	$-\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta$	$\frac{1}{2}$
C_A^f	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

3 標準理論を超えたニュートリノ

素粒子の質量は、静止時の内部エネルギーで表します。よって、マスの粒子は光と同様に静止しないです。質量をもつ フェルミオンは右左の状態を持っていないとかならない。なぜなら、質量に関わる演算子は カイラリティ と 向きをひっくり返すスピノル場の積にならなければならぬからです。

標準理論では、3つのニュートリノ ($\nu_e \nu_\mu \nu_\tau$) をもち、左手系しかありません。よってニュートリノはマスのフェルミオンです。マスのニュートリノはレプトンを保存しますが、後に保存しないことがわかります。したがって多くの物理学者がニュートリノに質量があるのではと推察しました。もしニュートリノに質量があるなら、アップ、ダウソクオークのフレーバーのように混成が起るはずでス。これがニュートリノ振動でス。

3.1 大気ニュートリノ振動

ニュートリノ振動の最初の確たる証拠はスーパーカミオカンデでの大気ニュートリノの観測でス。これは宇宙線によって大気から生じる大気ニュートリノを地下から観測するものです。この実験において大気ニュートリノ $\nu_e \nu_\mu$ の上向きのフラックスと下向きのフラックスが互いに等しくなければなりません。 $\Psi_\alpha(\theta_z) = \Psi_\alpha(\pi - \theta_z)$ しかし SK の実験では大気ニュートリノ $\nu_e \nu_\mu$ の上向きのフラックスと下向きのフラックスの非対称性を観測しました。

$$\frac{\Psi_e(-1 \leq \cos \theta_z \leq 0.2)}{\Psi_e(0.2 \leq \cos \theta_z \leq 1)} = 0.916^{+0.086}_{-0.079} \pm 0.016$$

$$\frac{\Psi_\mu(-1 \leq \cos \theta_z \leq 0.2)}{\Psi_\mu(0.2 \leq \cos \theta_z \leq 1)} = 0.551^{+0.035}_{-0.033} \pm 0.004$$

この結果は $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ と $\nu_\mu \rightarrow \nu_s$ の振動による変化だと考えられています。ここで、 ν_s は普通の電弱相互作用を及ぼさない不毛ニュートリノとされています。

3.2 ディラックニュートリノとマジョラナニュートリノの質量項

3ニュートリノの質量項を書き出すために、標準理論を拡張して右巻きニュートリノを導入します。

$$\nu_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ \nu_{\mu L} \\ \nu_{\tau L} \end{pmatrix} \quad N_R = \begin{pmatrix} N_{1R} \\ N_{2R} \\ N_{3R} \end{pmatrix}$$

ν_L と N_R の荷電共役は

$$(\nu_L)^c \equiv C \bar{\nu}_L^T, \quad (N_R)^c \equiv \overline{N_R}^T$$

$$(\bar{\nu}_L)^c = (\nu_L)^T, \quad \overline{(N_R)^c} = (\overline{N_R})^T C$$

ここで、 C は荷電共役行列で次の関係を満たす。

$$C \gamma_\mu^T C^{-1} = -\gamma_\mu \quad C \gamma_\mu^T C^{-1} = -\gamma_\mu \quad C^{-1} = C^\dagger = C^T = -C$$

3.3 ディラック質量とレプトンの保存

ディラックニュートリノは4成分ディラックスピノル $\nu = \nu_L + N_R$ で表します。ディラック質量項は湯川相互作用から表せます。

$$-L_{Dirac} = (\bar{l}_L)_i^\alpha (Y_\nu)_{\alpha\dot{\alpha}} (\tilde{H})_1^{\dot{\alpha}} (N_R)_\alpha^1 + \text{h.c}$$

ここで、 $\tilde{H} \equiv i\sigma H^*$ で H は標準理論でのヒッグス2重項です。 l_L は左巻きレプトン2重項です。ゲージ対称性の崩壊の後 ($SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_Q$)

$$-L'_{Dirac} = \bar{\nu}_L M_D N_R + \text{h.c}$$

ここで、 $(M_D)_{\alpha\dot{\alpha}} = Y_\nu \langle H \rangle = v (Y_\nu)_{\alpha\dot{\alpha}}$ 、またこの行列はbiユニタリ変換で対角化される。 $V^\dagger M_D U = \widehat{M}_D \equiv \text{Diag} \{m_1, m_2, m_3\}$ ここで m_i はニュートリノ質量 ($i=1,2,3$) です。対角化されると、

$$-L'_{Dirac} = \bar{\nu}'_L \widehat{M}_\nu N'_R + \text{h.c}$$

ここで、 $\nu'_L = V^\dagger \nu_L, N'_L = V^\dagger N_R$ また、ディラックスピノールは

$$\nu' = \nu'_L + N'_L = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} \text{ とすると、}$$

$$-L'_{Dirac} = \bar{\nu}' \widehat{M}_\nu \nu' = \sum_{i=1}^3 m_i \bar{\nu}_i \nu_i$$

また、運動量項は

$$L'_{kinetic} = i\bar{\nu}_L \gamma_\mu \partial^\mu \nu_L + i\bar{N}_R \gamma_\mu \partial^\mu N_R = i\bar{\nu} \gamma_\mu \partial^\mu \nu' = i \sum_{i=1}^3 i\bar{\nu}_k \gamma_\mu \partial^\mu \nu_k \text{ 後はクオークと同様の方法で cc 相互作用をだします。}$$

$$L_{cc}^l = \frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{e} \mu \tau)_L \gamma^\mu V \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}_L W_\mu^- + \text{h.c} \text{ これでクオークと同様に質量固有値が導出することができニュートリノに質量が加わります。またこの式は明らかにレプトン数が保存します。}$$

3.4 マジヨラナ質量とレプトンの破れ

左巻きニュートリノ場 ν_L とその荷電共役 $(\nu_L)^c$ はニュートリノ質量項です。

$$\nu_L = \begin{pmatrix} \nu_{1L} \\ \nu_{2L} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \nu_R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (\nu_{3L})^c \\ (\nu_{4L})^c \end{pmatrix}$$

$$\text{ここで、} \nu = \nu_L + \nu_R = P_L \nu + P_R \nu = \begin{pmatrix} \nu_{1L} \\ \nu_{2L} \\ (\nu_{3L})^c \\ (\nu_{4L})^c \end{pmatrix}$$

$$\text{また、 } P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ここで Weyl 行列を使っています。

荷電共役を

$$\nu^c = C\bar{\nu}^T, \text{ として}$$

$$(\nu_L)^c = C\bar{\nu}_L^T = P_R \nu^c = \nu_R^c$$

同様にして $(\nu_R)^c = \nu_L^c$

$(\bar{\nu}\nu^c) = (\bar{\nu}^c\nu)$ というエルミート性よりマジョラナ粒子の質量項を

$$\begin{aligned} L_M &= \frac{1}{2} [M_D \bar{\nu}^c \nu^c + \bar{\nu} M_M \nu^c + \bar{\nu}^c M_M \nu] \\ &= \frac{1}{2} [M_D \bar{\nu}^c \nu^c + (\bar{\nu}_L M_L \nu_R^c + \bar{\nu}_R^c M_L \nu_L) + (\bar{\nu}_R M_R \nu_L^c + \bar{\nu}_L^c M_R \nu_R)] \end{aligned}$$

ここで、 M_D は、ディラック質量行列、 M_R 、 M_L はそれぞれ、右巻き、左巻きマジョラナ質量行列です。次にマジョラナ質量項のみを着目します。

$$-L'_{Majorana} = \frac{1}{2} \bar{\nu}'_L \widehat{M}_\nu (\nu'_L)^c + \text{h.c}$$

$$\text{ここで、 } \nu'_L = V^\dagger \nu'_L, \quad (\nu'_L)^c = C\bar{\nu}'_L^T$$

このときのニュートリノ場は

$$\nu' = \nu'_L + (\nu'_L)^c \quad \text{これは、} (\nu')^c = \nu' \text{ を満たします。}$$

$$-L'_{Majorana} = \frac{1}{2} \bar{\nu}' \widehat{M}_\nu \nu' = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i \bar{\nu}_i \nu_i$$

マジョラナニュートリノの運動量項は、

$$L_{kinetic} = i\bar{\nu}_L \gamma^\mu \partial_\mu \nu_L = i\bar{\nu}'_L \gamma^\mu \partial_\mu \nu'_L = i\frac{1}{2} \bar{\nu}' \gamma^\mu \partial_\mu \nu' = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \bar{\nu}_i \gamma^\mu \partial_\mu \nu_i$$

ここで、自由マジョラナニュートリノのラグランジアンは

$$L_\nu = i\bar{\nu}_L \gamma_\mu \partial^\mu - [\frac{1}{2} \bar{\nu}_L M_L (\nu_L)^c + \text{h.c}] = -\frac{1}{2} (i\partial^\mu \bar{\nu}' \gamma_\mu \nu' + \bar{\nu}' \widehat{M}_\nu \nu')$$

これをオイラーラグランジアン方程式に当てはめると、

$$\partial^\mu \frac{\partial L_\nu}{\partial (\partial^\mu \nu')} - \frac{\partial L_\nu}{\partial \nu'} = 0$$

$$i\gamma_\mu \partial^\mu \nu' - \widehat{M}_\nu \nu' = 0$$

これが、ディラックラグランジアンと違いマジョラナラグランジアンに $\frac{1}{2}$ がついている理由です。また、ディラック方程式では

$$\bar{\Psi} \Psi^c \rightarrow \Psi^\dagger e^{-i\alpha} \gamma_0 \Psi e^{i\alpha} = \bar{\Psi} \Psi$$

一方マジョラナの質量項は

$$\bar{\Psi}_L \Psi_R^c = \bar{\Psi}_L (\Psi_c)^c = \Psi_L^\dagger \gamma_0 C (\Psi^\dagger \gamma_0)^T \text{ となり位相変換の不変性が破れる。}$$

3.5 混合質量項とシーソー機構

マジョラナ質量項で ν_R の項を N_R と の項に書き換えます。それにより

$$-L'_{hybrid} = \bar{\nu}_L M_D N_R + \frac{1}{2} \bar{\nu}_L M_L (\nu_L)^c + \frac{1}{2} \overline{(N_R)^c} M_R N_R + \text{h.c}$$

ここでは $\nu_R \rightarrow N_R$ としています。

$$\text{また、 } \bar{\nu}_L M_D N_R = \overline{(N_R)^c} M_D^T (\nu_L)^c$$

さらにこのラグランジアンをさらに簡単に書くために

$$-L'_{hybrid} = \frac{1}{2} [\overline{\nu_L} \quad \overline{(N_R)^c}] \begin{pmatrix} M_L & M_D \\ M_D^T & M_R \end{pmatrix} \begin{bmatrix} (\nu_L)^c \\ N_R \mu \end{bmatrix} + h.c$$

M_i は 3×3 行列なので上の質量行列は 6×6 行列です。これをクォークと同様の手法で対角化します。

$$\begin{pmatrix} V & R \\ S & U \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} M_L & M_D \\ M_D^T & M_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V & R \\ S & U \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \widehat{M}_\nu & 0 \\ 0 & \widehat{M}_N \end{pmatrix}$$

ここで $\widehat{M}_\nu \equiv \text{Diag} \{m_1, m_2, m_3\}$, $\widehat{M}_N \equiv \text{Diag} \{M_1, M_2, M_3\}$

また 3×3 行列は以下の性質を示します。

$$VV^\dagger + RR^\dagger = SS^\dagger + UU^\dagger = 1$$

$$V^\dagger V + S^\dagger S = R^\dagger R + U^\dagger U = 1$$

$$VS^\dagger + RU^\dagger = V^\dagger R + S^\dagger U = 0$$

よって

$$-L'_{hybrid} = \frac{1}{2} [\overline{\nu_L} \quad \overline{(N_R)^c}] \begin{pmatrix} \widehat{M}_\nu & 0 \\ 0 & \widehat{M}_N \end{pmatrix} \begin{bmatrix} (\nu_L)^c \\ N_R \end{bmatrix} + h.c$$

ここで、 $\nu'_L = V^\dagger \nu_L + S^\dagger (N_R)^c$, $N'_R = R^T (\nu_L)^c + U^T N_R$

$(\nu'_L)^c = C \overline{\nu'_L}^T$, $(N'_R)^c = C \overline{N'_R}^T$ として

$$\nu' = \begin{bmatrix} \nu'_L \\ (N'_R)^c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\nu_L)^c \\ N'_R \end{bmatrix} = (\nu_1 \nu_2 \nu_3 N_1 N_2 N_3)$$

ここで混合ラグランジアンは対角化され

$$-L'_{hybrid} = \frac{1}{2} \overline{\nu'} \begin{pmatrix} \widehat{M}_\nu & 0 \\ 0 & \widehat{M}_N \end{pmatrix} \nu' = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (m_i \overline{\nu'_i} \nu'_i + M_i \overline{N'_i} N'_i)$$

運動量項のラグランジアンは

$$L_{kinetic} = i \overline{\nu_L} \gamma_\mu \partial^\mu \nu_L + i \overline{N_R} \gamma_\mu \partial^\mu N_R = \frac{1}{2} \overline{\nu'} \gamma_\mu \partial^\mu \nu'$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (\overline{\nu'_i} \gamma_\mu \partial^\mu \nu'_i + \overline{N'_i} \gamma_\mu \partial^\mu N'_i)$$

また cc 相互作用は、 $\nu_L = V \nu'_L + R (N'_R)^c$ をつかい

$$L_{cc}^l = \frac{g}{\sqrt{2}} (\overline{e \mu \tau})_L \gamma^\mu \left[V \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}_L + R \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix}_L \right] W_\mu^- + h.c$$

4 参考図書

- 「Neutrinos in Particle Physics, Astronomy and Cosmology」
(Zhi-Zhong Xing ,Shun Zhou 著)