Lamb shift

埼玉大学理学部物理学科

金子　史寛

2013 年 8 月 26 日

目次

1 Lamb shift 2

2 **相互作用下でのプロパゲーター** 3

2.1 相互作用下でのプロパゲーター 3

2.2 くりこみ 7

2.3 Counter term 9

3 Lamb shift **の公式** 11

3.1 二つの電子プロパゲーター 11

3.2 準備　時間並進不変な関数のフーリエ変換 12

3.3 導出 12

3.4 LambShift の loop グラフ 14

4 QED 1-loop **輻射補正** 16

4.1 真空偏極 16

4.2 電子の自己エネルギー 19

4.3 バーテックスの補正 21

5 LambShift **計算** 27

5.1 ラグランジアンとグラフ 27

5.2 低運動量の発散 28

5.3 高エネルギー部分の計算 30

5.4 低エネルギー部の計算 33

6 **まとめ** 35

付録 A **非相対論的な水素原子波動関数** 36

A.1 定義の確認 36

A.2 非相対論的な水素原子波動関数 37

概要

Lamb shift は、Dirac 方程式により求められた水素原子のエネルギー縮退準位 $2\mathrm{S}_{1/2}$ と $2\mathrm{P}_{1/2}$ の分裂である。ここでの目的は、Lamb shift を量子電気力学 (QED) で計算することを概観することである。まず初めに Lamb shift について簡単に述べ、それと QED の関係を指摘する。そこで、Lamb shift は、電子の伝搬を表す相互作用下での電子プロパゲーターを用いることで記述されることになる。よって次に相互作用下でのプロパゲーター、そこで現れる loop グラフについての発散の処理法などについて触れる。ついで Lamb shift に寄与する loop グラフをその相互作用下のプロパゲーターを使用することで求め、計算する。

最後に、現れる複数のグラフを高エネルギー部分と低エネルギー部分に分ける。そして高エネルギー部分のグラフのみから Lamb shift を推定し、低エネルギー部分の計算の概略を述べる。

1　Lamb shift

最初に Lamb shift とはなにかを説明し、それをいかに求めるのか簡単に見る。そして何が必要となるか述べる。

■Lamb shift とは　Lamb shift とは、Dirac 方程式により説明できない原子準位の分裂である。Dirac 方程式 (1928 年) によると水素様原子のエネルギー準位は、

$$
\begin{aligned}
E_{n,j} &= m\left[1-\frac{(Z\alpha)^2}{n^2+2\big(n-(j+1/2)\big)\left[\sqrt{(j+1/2)^2-(Z\alpha)^2}-(j+1/2)\right]}\right] \\
&= m\left\{1-\frac{(Z\alpha)^2}{2n^2}-\frac{(Z\alpha)^4}{2n^4}\left[\frac{n}{j+1/2}-\frac{3}{4}\right]+\dots\right\} \qquad (1.1) \\
&\qquad n:\ \text{主量子数} \quad j:\ \text{全角運動量}
\end{aligned}
$$

と n, j のみにより決まるのだが、実験によると $2\mathrm{S}_{1/2}$ と $2\mathrm{P}_{1/2}$ には、1060[MHz] 程度の分裂が 1947 年 W.E Lamb と R.C Retherford により観測された。相対論的な電子について方程式である Dirac 方程式では、記述できない効果が存在するのである。

Lamb shift は、以下の様に考えることにより説明される。

> Dirac 方程式によって記述されている系は、図 1 のように電子がまわっているものに対応している。しかし実際の電子は図 2 のように、場の量子論の高次の摂動によりフォトンを放出しまたそのフォトンを吸収するといった過程を伴いつつ回っているのである。Dirac 方程式では．このような粒子の生成消滅を扱えないため原子のエネルギー準位を正しく求めることができない。

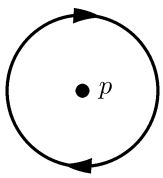


図 1　Dirac 方程式の記述

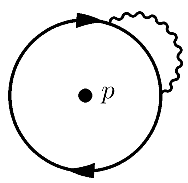


図 2　実際の電子

粒子の生成消滅は場の理論よって導入される。特に電磁相互作用についての場の理論、量子電気力学 (Quantam Electro Dynamics,QED) を使用して Lamb shift を説明する。

■QED での扱い

さきの Lamb shift の説明する直感的な考えは QED において、

> QED では、電子の運動はプロパゲーター (伝搬関数) により表される。したがって図 1 と図 2 の差異は、それぞれ対応する相互作用のもとでのプロパゲーターの差で記述することが可能である。それぞれの相互作用とは
>
> | | クーロン場 | QED 相互作用 |
> |---|---|---|
> | Dirac 方程式 (図 1) | あり | なし |
> | 実際の電子 (図 2) | あり | あり |
>
> である。

となる。以下この考えに基づき話を進める。実際、後の Section でこの二つのプロパゲーターの差を求めることにより準位差 δE が与えられることになる。

また、最終的には図 2 の仮想粒子による loop グラフを計算しなければならない。このときに光子の運動量はどんな値でも許されるから，計算すると発散が生じる。その発散を処理するために ”くりこみ” が必要となる。

2 相互作用下でのプロパゲーター

Sec.1 より相互作用下でのプロパゲーターが必要となったので，この Section でそれを導入する。まず、相互作用下でのプロパゲーターがいかに自由プロパゲーターで記述されるかみる。そしてそれに従い相互作用下でのプロパゲーターを計算する。最終的に、相互作用下のプロパゲーターは摂動展開を用いて自由なプロパゲーターを高次の項で補正して導出できる。その過程で loop グラフの計算が生じ、それによる発散を処理する方法 ” くりこみ ” について触れる。

2.1 相互作用下でのプロパゲーター

相互作用下でのプロパゲーターを導出する前に、自由なときのプロパゲーターと、そして表示 (Heisenberg 表示,Dirac 表示) について述べる。

2.1.1 自由なときのプロパゲーター

電子プロパゲーター $S(x-y)$ は、

$$S(x-y) = \langle 0|\mathrm{T}\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle \tag{2.1}$$

として定義され、これから

$$S(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{i(\not{p}+m)}{p^2-m^2+i\varepsilon}e^{-ip(x-y)} \tag{2.2}$$

$$S(p) = \frac{i}{\not{p}-m} \tag{2.3}$$

が従う。 式 (2.3) は、運動量表示の省略形である。

2.1.2 相互作用下

相互作用下で散乱振幅などを計算する時の前提。

1. 相互作用には $\exp(-\varepsilon|t|)$ という因子が掛かっている。
2. 場はすべて相互作用表示 (Dirac 表示) で書き直す。

1 は、断面積などの観測を行うときは，始終状態として自由な状態を見ることに対応している。相互作用が存在していると、場についての方程式が簡単な形には解けない。そのため自由場と同じ方程式を満たす相互作用表示を用いる。すると摂動論を適用するために都合の良い形になる。

2.1.3 表示

相互作用が存在する場合量子力学で使われている表示を場の量子論でも用いる。

- Heisenberg 表示

$$|a,t\rangle_H = |a,t=0\rangle_H \tag{2.4}$$
$$\psi^H(x) = e^{iHt}\psi(0,\boldsymbol{x})e^{-iHt} \tag{2.5}$$

- 相互作用表示 (Dirac 表示) $H = H_0 + H_{int}$ とわけて

$$|a,t\rangle_D = e^{iH_0t}e^{-iHt}\,|a,t=0\rangle_H \tag{2.6}$$
$$\psi^D(x) = e^{iH_0t}\psi(0,\boldsymbol{x})e^{-iH_0t} \tag{2.7}$$

通常 $\psi(x)$ とかかれればそれは、表示で言えば Heisenberg 表示である。Heisenberg 表示では、場 ψ に相互作用も含まれているので自由な場合と同様な式変形ができない。そこで Dirac 表示を用いる。Dirac 表示は場には相互作用が含まれていないので、自由場と同じようにあつかえる。その代わりに状態が相互作用により発展し、その時間発展を使用して S 行列が定義できる。

2.1.4 S 行列

Dirac 表示での時間推進演算子 $U(t',t)$ を場を用いて書き下す。

U を $|a,t_2\rangle_D = U(t_2,t_1)\,|a,t_1\rangle_D$ と定義すると上の Dirac 表示の定義から

$$e^{iH_0t_2}e^{-iHt_2}\,|a,0\rangle_H = U(t_2,t_1)e^{iH_0t_1}e^{-iHt_1}\,|a,0\rangle_H$$
$$\therefore\quad U(t_2,t_1) = e^{iH_0t_2}e^{-iH(t_2-t_1)}e^{-iH_0t_1} \tag{2.8}$$

と書ける。これより $\begin{cases} U(t_3,t_2)U(t_2,t_1) = U(t_3,t_1) \\ U(t_1,t_1) = 1 \end{cases}$ が従う。また $U(t_2,t_1)$ についての微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial t_2}U(t_2,t_1) = -iH_{int}(t_2)U(t_2,t_1) \tag{2.9}$$
$$H_{int}(t) = e^{iH_0t}H_{int}e^{-iH_0t} \tag{2.10}$$

も成り立つ。この微分方程式より、

$$\begin{aligned} U(t_2+\Delta t,t_1) &= \big(1-iH_{int}(t_2)\big)U(t_2,t_1) \\ \Delta t \ll t_2-t_1 \quad &\simeq e^{-iH_{int}(t_2)\Delta t}U(t_2,t_1) \end{aligned} \tag{2.11}$$

が成り立つが、$t_2 = t_{n+1} = (n+1)\Delta t$ としてこの式を n 回用いると

$$
\begin{aligned}
U(t_{n+1}, t_1) &= e^{-iH_{int}(t_n)\Delta t} U(t_n, t_1) \\
&= e^{-iH_{int}(t_n)\Delta t} e^{-iH_{int}(t_{n-1})\Delta t} \cdots \cdot e^{-iH_{int}(t_1)\Delta t} U(t_1, t_1) \\
&= \mathrm{T}\exp\left(-i\sum_{k=1}^{n} H_{int}(t_k)\Delta t\right) = \mathrm{T}\exp\left(-i\int_{t_1}^{t_2} dt\ H_{int}(t)\right)
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

を得る。散乱振幅は、$\langle \boldsymbol{p}_f | U(+\infty, -\infty) | \boldsymbol{p}_i \rangle$ であたえられるから、S 行列は,

$$
\mathrm{S} = \mathrm{T}\exp\left(-i\int d^4x\ \mathscr{H}_{int}(x)\right) \tag{2.13}
$$

$$
= 1 + (-i)\int d^4x\ \mathscr{H}_{int}(x) + \frac{-i}{2!}\int d^4x \int d^4y\ \mathscr{H}_{int}(x)\mathscr{H}_{int}(y) + \cdots \tag{2.14}
$$

となる。$\mathscr{H}_{int}(x)$ は Dirac 表示での相互作用ハミルトニアン密度で、積分区間は，全領域。$\mathscr{H}_{int}(x)$ に含まれる結合定数が小さければ摂動計算が使える。

2.1.5 相互作用下でのプロパゲーター

相互作用下での電子プロパゲーター $S'(x-y)$ は、

$$
S'(x-y) = \langle \Omega | \mathrm{T}\psi^H(x)\bar{\psi}^H(y) | \Omega \rangle \tag{2.15}
$$

$$
H\,|\Omega\rangle = 0 \quad \psi^H(x) = e^{-iHt}\psi(\boldsymbol{x})e^{iHt} \tag{2.16}
$$

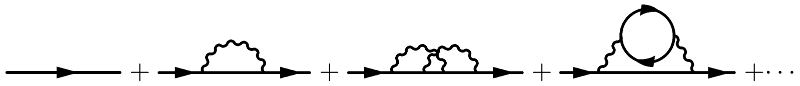
H の添字は，それが Heisenberg 表示であり、相互作用項に依存していることを示している。これを Dirac 表示の場かつ自由な時の真空 $H_0\,|0\rangle = 0$ にをもちいて書くと、

$$
S'(x-y) = \langle \Omega | \mathrm{T}\psi^H(x)\bar{\psi}^H(y) | \Omega \rangle = \frac{\langle 0 | \mathrm{T}\psi(x)\bar{\psi}(y)\mathrm{S} | 0 \rangle}{\langle 0 | \mathrm{S} | 0 \rangle} \tag{2.17}
$$

となる。ここで S は S 行列のことである。これに式 (2.14) を代入すると

$$
S'(x-y) = S(x-y) + (-i)\int d^4x\ \langle 0 | \mathrm{T}\mathscr{H}_{int}(x)\psi(x)\bar{\psi}(y) | 0 \rangle + \cdots \tag{2.18}
$$

と自由プロパゲーターを高次の摂動で補正することにより相互作用下のプロパゲーターを求められる。図で表すと



である。始、終の粒子は必ず電子であるが間の粒子は仮想的な粒子が生成消滅している。始、終の粒子を決めたとしても相互作用により間に様々な粒子が現れる。このような始、終の粒子が同じであるが相互作用により間に始、終粒子以外の粒子が現れるグラフを輻射補正グラフという。電子プロパゲーターの輻射補正グラフとは始、終の粒子が電子となっているグラフで上の第一項目以外のことを意味する。

この式を導出する。その導出は $\langle \Omega | \mathrm{T}\psi^H(x)\bar{\psi}^H(y) | \Omega \rangle$ で現れる量を以下のように書き変えることにより行われる。

$$
\boxed{
\begin{array}{ccc}
\psi^H(x),\ |\Omega\rangle & \Longrightarrow & \psi^D(x),\ |0\rangle \\
H\,|\Omega\rangle = 0 & & H_0\,|0\rangle = 0 \\
\psi^H(x) = e^{iHt}\psi(\boldsymbol{x})e^{-iHt} & & \psi^D(x) = e^{iH_0 t}\psi(\boldsymbol{x})e^{-iH_0 t}
\end{array}
}
$$

1) 書き換え $|\Omega\rangle, \langle\Omega| \to |0\rangle, \langle 0|$

まず、相互作用には $\exp(-\varepsilon|t|)$ という因子が掛かっているので、

$$|\Omega\rangle = U(0,-\infty)\,|0\rangle \tag{2.19}$$

が成り立つ。これの複素共役は $\langle\Omega| = \langle 0|\,U(-\infty,0)$ である。これでブラ、ケットの Ω が 0 に書き換えられた。しかし式 (2.17) を導出する上では S 行列がでてくるのであるからブラは、$U(-\infty,0)$ ではなく $U(\infty,0)$ で書いたほうが式 (2.19) との相性が良い。そこで、$t=\infty$ から に時間発展させる場合でも”同一”の状態 $|\Omega\rangle$(位相分の違いは許される) をあたえるから

$$\langle\Omega| = e^{i\delta}\,\langle 0|\,U(\infty,0) \qquad \delta: \text{実数} \tag{2.20}$$

またこの位相は、ブラについての式から、

$$\begin{aligned} |0\rangle = \langle\Omega|\,U(0,-\infty) &= e^{i\delta}\,\langle 0|\,U(\infty,0)U(-\infty,0) \\ e^{i\delta} &= \frac{1}{\langle 0|U(\infty,-\infty)|0\rangle} \end{aligned} \tag{2.21}$$

と表せる。以上より、相互作用下の基底状態 Ω は自由な基底状態 0 を用いて

$$\begin{cases} \langle\Omega| = \dfrac{\langle 0|\,U(\infty,0)}{\langle 0|\mathrm{S}|0\rangle} \\ |\Omega\rangle = U(0,-\infty)\,|0\rangle \end{cases} \tag{2.22}$$

と書き換えられる。

2) 書き換え $\psi^H \to \psi^D$

まずそれら二つの定義から

$$\psi^H(x) = e^{iHt}e^{-iH_0t}\psi^D(x)e^{iH_0t}e^{-iHt} \tag{2.23}$$

が成り立ち、前後の指数関数は，式 (2.8) より $U(t_1,t_2)$ で書けて

$$\psi^H(x) = U(0,t)\psi^D(x)U(t,0) \tag{2.24}$$

を得る。

3) **最終 Step** $\langle\Omega|\mathrm{T}\psi^H(x)\bar{\psi}^H(x)|\Omega\rangle \to \dfrac{\langle 0|\psi^D(x)\bar{\psi}^D(x)\mathrm{S}|0\rangle}{\langle 0|\mathrm{S}|0\rangle}$

簡単のため $x^0 > y^0$ の時のみを考える。1),2) の結果を $\langle\Omega|\mathrm{T}\psi^H(x)\bar{\psi}^H(x)|\Omega\rangle$ に代入すると、

$$\begin{aligned}
S'(x-y) &= \langle\Omega|\psi(x)\bar{\psi}(y)|\Omega\rangle \\
&= \frac{1}{\langle 0|\mathrm{S}|0\rangle}\langle 0|U(\infty,0)U(0,x^0)\psi^D(x)U(x^0,0)U(0,y^0)\bar{\psi}^D(y)U(y^0,0)U(0,-\infty)|0\rangle \\
&= \frac{1}{\langle 0|\mathrm{S}|0\rangle}\langle 0|U(\infty,x^0)\psi^D(x)U(x^0,y^0)\bar{\psi}^D(y)U(y^0,-\infty)|0\rangle \qquad (2.25)
\end{aligned}$$

を得る。この式の各関数の時間依存性を見ると左から

$$+\infty \ \to \ x^0 \ \to \ y^0 \ \to \ -\infty$$

と時間が前のものから順番に並んでいる。$y^0 > x^0$ の場合も同様な式が得られるからまとめて書けば

$$S'(x-y) = \frac{\langle 0|\mathrm{T}\psi^D(x)\bar{\psi}^D(x)\mathrm{S}|0\rangle}{\langle 0|\mathrm{S}|0\rangle} \qquad (2.26)$$

と式 (2.17) を得る。

2.1.6 プロパゲーターの計算

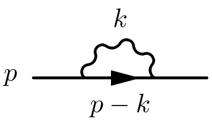
式 (2.17) を用いて相互作用下のプロパゲーターを書き下してみる。QED の相互作用は、

$$\mathscr{H}_{int}(x) = e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu A_\mu(x)\psi(x) \qquad (2.27)$$

であるから、二次の項までみると

$$\begin{aligned}
S'(x-y) &= \langle 0|\mathrm{T}\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle + (-i)\int d^4z\,\langle 0|\mathrm{T}\mathscr{H}_{int}(z)\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle \\
&\quad + \frac{(-i)^2}{2!}\int d^4z\int d^4w\,\langle 0|\mathrm{T}\mathscr{H}_{int}(z)\mathscr{H}_{int}(w)\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle \\
&= \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{i(\not{p}+m)}{p^2-m^2+i\varepsilon}e^{-ip(x-y)} + \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{i(\not{p}+m)}{p^2-m^2+i\varepsilon}\big(-i\Sigma(\not{p})\big)\frac{i(\not{p}+m)}{p^2-m^2+i\varepsilon}e^{-ip(x-y)} \qquad (2.28)
\end{aligned}$$

上で $-i\Sigma(\not{p})$ は、



$$-i\Sigma(\not{p}) = \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}(-ie\gamma^\mu)\frac{i(\not{p}-\not{k}+m)}{(p-k)^2-m^2+i\varepsilon}\frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2-i\varepsilon}(-ie\gamma^\nu) \qquad (2.29)$$

である。$-i\Sigma(\not{p})$ は上の図で両側の電子プロパゲーターを省いたもので、$p^2 = \not{p}^2$ であるから $\not{p}$ の関数である。このグラフは電子が自分自身と相互作用しているので、自己エネルギーグラフという。このグラフは $-i\Sigma(\not{p}) \sim \int d^4k\ 1/k^4$ により発散する。これは古典電磁気学で電荷を持つ点粒子が自分自身のクーロン場による相互作用では発散することように。そこでこの発散を処理し物理的な結果を得るための手続き**くりこみ**が必要となる。

2.2 くりこみ

くりこみでは、物理的な量は常に式 (2.29) のような自分自身と相互作用した結果としてあらわれる。そして理論にあらわれる量はその相互作用をする前の" 裸の量" であるから発散が生じてしまうと考える。よっ

て裸の量を物理的な量に定義しなおすことにより発散はなくなる。ただし、これは $-i\Sigma(\not{p}) \sim \int d^4k\ 1/k^4$ の $k \sim \infty$ の発散が取り除かれるが $k \sim 0$ での発散は残る。その発散については，後に考える。

■電子の波動関数と質量のくりこみ　ここでは、引き続き電子について考える。まずくりこみで物理量を再定義する時に用いる条件として、摂動とは関係のない厳密に成り立つ式 (LSZ reduction formula)

$$p^2 \sim m_{obs}^2 \qquad \int d^4x \,\langle\Omega|\mathrm{T}\psi^H(x)\bar{\psi}^H(y)|\Omega\rangle\, e^{ip(x-y)} \longrightarrow \frac{iZ_2(\not{p}+m)}{p^2-m_{obs}^2+i\varepsilon} \tag{2.30}$$

を用いる。m_{obs}^2 とは、止まっている 1 粒子状態のハミルトニアンの固有状態 $H\,|\mathbf{1}_{rest}\rangle = m_{obs}\,|\mathbf{1}\rangle$ である (対して m_b を裸の量とする)。この式を使うために摂動計算、式 (2.28) で下の図のように $-i\Sigma(\not{p})$ を余分にを付け加えて等比級数を作る。

$$\int d^4x \,\langle\Omega|\psi_b(x)\bar{\psi}_b(y)|\Omega\rangle\, e^{ip(x-y)} =$$

$$+\cdots$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{i}{\not{p}-m_b} + \frac{i}{\not{p}-m_b}\{-i\Sigma(\not{p})\}\frac{i}{\not{p}-m_b} + \frac{i}{\not{p}-m_b}\{-i\Sigma\}\frac{i}{\not{p}-m_b}\{-i\Sigma\}\frac{i}{\not{p}-m_b} + \cdots \\
&= \frac{i}{\not{p}-m_b-\Sigma(\not{p})}
\end{aligned} \tag{2.31}$$

ψ_b も m_b と同様に裸の量である。さらに $\Sigma(\not{p})$ を $\not{p} = m_b$ のまわりに展開する

$$\Sigma(\not{p}) = \Sigma(m_b) + \left.\frac{d\Sigma}{d\not{p}}\right|_{\not{p}=m} (\not{p}-m_b) + F(m_b)(\not{p}-m_b)^2 \tag{2.32}$$

$F(m_b)$ は 2 次以降の項も含まれている。このとき発散する項は 1 次の項までである。これは Sec.**??**での loop 計算の結果により示されるのだが、一般にループグラフでは外線の運動量について微分してゆくと発散がよくなる。式 (2.28) を $\not{p}$ で微分すると、分母の $(p-k)^2 - m^2$ の次数が上がり $k \sim \infty$ での積分の収束が良くなるためである。また第 2 項目の $\not{p} = m$ は $p^2 = m^2$ のことである ($\not{p}$ は 4×4 の行列)。

よって (2.30) を考慮して以下のように再定義する (電子と波動関数のくりこみ)。

$$m_{obs} = m_b + \delta m \qquad \delta m = \Sigma(m_b) \tag{2.33}$$

$$\psi_{ren}(x) = Z_2{}^{-1/2}\psi_b(x) \qquad Z_2{}^{-1} = 1 - \left.\frac{d\Sigma}{d\not{p}}\right|_{\not{p}=m_b} \tag{2.34}$$

実際これで発散が取り除かれているか式 (2.32), (2.31) を変形し、$\mathcal{O}(\alpha)$ $(\alpha = \frac{e^2}{4\pi})$ で確かめる。$\Sigma(\not{p})$ はバーテックスが 2 個あるので、一応 $\mathcal{O}(\alpha)$ である (Σ は発散している。Sec.4 でみるように発散するグラフはある正則化 (発散を取り除く) のもと計算する。そしてくりこみを行い、後にその正則化をはずし有限な結果を得る。よってどの段階でも発散は，あらわには現れない。そのため $\Sigma, \delta m, (Z_2^{-1}-1)$ も $\mathcal{O}(\alpha)$ である)。
$\mathcal{O}(\alpha)$ では、

$$(\not{p}-m_b)\left.\frac{d\Sigma}{d\not{p}}\right|_{\not{p}=m_b} \simeq (\not{p}-m_b-\delta m)\left.\frac{d\Sigma}{d\not{p}}\right|_{\not{p}=m_b} = (\not{p}-m_{obs})(1-Z_2{}^{-1}) \tag{2.35}$$

$$\Sigma(m_b) \simeq \Sigma(m_{obs}) \tag{2.36}$$

などが成り立つ。これから

$$\Sigma(\not{p}) \simeq \delta m + (1-Z_2^{-1})(\not{p}-m_{obs}) + Z_2^{-1}(\not{p}-m)^2 F(m_{obs}) \tag{2.37}$$

$$\frac{i}{\not{p}-m_b-\Sigma(\not{p})} = \frac{iZ_2}{(\not{p}-m_{obs})\{1-(\not{p}-m_{obs})F(m_{obs})\}} \tag{2.38}$$

Z_2 は波動関数のくりこみ、式 (2.34) によりなくなる。ゆえに、この再定義した ψ_{ren}, m_{obs} を使用することで発散は現れなくなる。

2.3 Counter term

さきの Section で導入したくりこみ計算は、発散を取り除けるが計算が少し面倒なのでより簡単なくりこみ計算法、相殺項 (counter term) を使用する方法を導入する。これは最初からラグランジアンを場、質量などをくりこまれたもので書いておき、その分余計にでてくる項 (相殺項) で発散をなくすというものである。
まず初めにそのラグランジアンを与え、そののちにいままで同様例として電子についてくりこみを取り上げ、いかに発散が消えるか見る。

2.3.1 QED **ラグランジアン**

QED ラグランジアンは,

$$\mathscr{L} = \bar{\psi}_b(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_b)\psi_b - \frac{1}{4}F_{b\mu\nu}F_b^{\mu\nu} - e_b\bar{\psi}_b\gamma^\mu\psi_b A_{b\mu} \tag{2.39}$$

であるが、ここで現れている場や質量はすべてくりこまれていない量である。さきのくりこみでは、このラグランジアンを用いて計算し、そののち適切に再定義して発散が消えることを見た。いまはそのくりこまれた量で書けば良いと分かっているので最初からくりこまれた量で計算をする。つまり、くりこまれた量は添字なしで書くことにすると、

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_n + \mathscr{L}_s \tag{2.40}$$

$$\mathscr{L}_n = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \tag{2.41}$$

$$\mathscr{L}_s = (Z_2 - 1)\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + \delta m Z_2\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}(Z_3 - 1)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - e(Z_2 - 1)\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \tag{2.42}$$

で計算を行う。まだ、フォトン A_μ や電荷 e についてのくりこみはやっていない。フォトン A_μ については、電子の場 ψ と同様にプロパゲーターを使用して行われ、電荷のくりこみは、バーテックスのくりこみと場のくりこみが打ち消すという過程が伴い行われる。しかしここではこの A_μ, e についてのくりこみには深く触れず、その結果

$$A^\mu(x) = Z_3^{-1/2}A_b^\mu(x) \tag{2.43}$$

$$e = Z_3^{1/2}e_b \tag{2.44}$$

のみを用いる。書き換えたラグランジアンをみるとすべてくりこまれた量で書いたため $\mathscr{L}_s$ という項が余分に現れている。この項は相殺項 (または、Substraction term) と呼ばれ、最終的に発散をうまく打ち消してくれる。このラグランジアン $\mathscr{L}$ を使用して相互作用下の電子プロパゲーターを計算する。そのときに $\mathscr{L}_s$ のすべての項は $\mathscr{L}_n$ の項 $e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi$ と同様に相互作用として取り扱われる。

2.3.2 **電子についての例**

相互作用可の電子プロパゲーターを計算するのであるから、式 (2.28) での計算に相互作用として新たに $\mathscr{L}_s$ を加えれば良い。$\mathscr{L}_n$ の相互作用からの寄与は式 (2.29) をくりこまれた量で書いたものである。$\mathscr{L}_s$ からの最

低次の寄与は,

$$
\begin{aligned}
&(-i)\int d^4z\,\langle 0|\mathrm{T}(-\mathscr{L}_s(z))\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle \\
&\quad=(-i)\int d^4z\,\langle 0|\mathrm{T}\big\{-(Z_2-1)\bar{\psi}(z)(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi(z)-\delta m Z_2\bar{\psi}(z)\psi(z)\big\}\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle \\
&\quad=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{i}{\not{p}-m}i\big\{(Z_2-1)(\not{p}-m)+\delta m Z_2\big\}\frac{i}{\not{p}-m}e^{-ip(x-y)}
\end{aligned}
\tag{2.45}
$$

よって最低次の寄与をまとめると

$$
-i\Sigma(\not{p})=-i\Sigma_{loop}(\not{p})+i\big\{(\not{p}-m)(Z_2-1)+\delta m Z_2\big\} \tag{2.46}
$$

$=$  $+$  (2.47)

となる。counter term は×印であらわす。$-i\Sigma_{loop}$ は式 (2.29) で与えられる $\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi$ からの寄与である。この式の左辺は有限であるので、発散を含む $-i\Sigma_{loop}$ を $\delta m, Z_2$ に比例する項が相殺 (counter) している形となっている。Sec2.2 のように $-i\Sigma$ を複数個つなげたグラフから等比級数を作ると相互作用により補正されたプロパゲーター $S'(x-y)$ は

$$
S'(x-y)=\frac{i}{\not{p}-m-\Sigma(\not{p})} \tag{2.48}
$$

となる。この式は (2.31) に対応しているがここでの m は観測量であって裸の量ではない。またくりこみのとき使用する条件、式 (2.30) はくりこまれた場を用いているので

$$
p^2\sim m^2 \qquad \int d^4x\,\langle\Omega|\mathrm{T}\psi^H(x)\bar{\psi}^H(y)|\Omega\rangle\,e^{ip(x-y)}\longrightarrow\frac{i(\not{p}+m)}{p^2-m^2+i\varepsilon} \tag{2.49}
$$

と Z_2 はキャンセルする。Sec2.2 のくりこみ方法からくりこみを行うときは，プロパゲーターの極の位置とその留数のみを使用した。よって条件式 (2.49) は以下のりこみ条件に置き換えられる。

くりこみ条件

- プロパゲーターの極は自由な時同様質量殻上
- そこでの留数は自由な時と同様 1 となる。

くりこみを行うときはこの条件を満たすようにすれば良い。ゆえに式 (2.48) についてこの条件を適用すれば、

$$
\begin{cases}\Sigma(m)=0\\ \left.\dfrac{d\Sigma}{d\not{p}}\right|_{\not{p}=m}=0\end{cases}\quad(2.50)\qquad\Rightarrow\qquad\begin{cases}\Sigma_{loop}(m)=\delta m Z_2\simeq\delta m\\ \left.\dfrac{d}{d\not{p}}\Sigma_{loop}\right|_{\not{p}=m}=Z_2-1\end{cases}\quad(2.51)
$$

を得る。これは式 (2.33),(2.34) と一致する。

同じ結果を得るのだが、先の方法はどのような形でくりこむべきか分からずに裸の量のままで計算していた。ゆえに、くりこみを行うときに少し複雑な式変形をともなっていた。しかしこの counter term を使用する方法ではくりこみはくりこみ条件によりくりこみ定数を決める、という代数計算を行えば良いので簡単である。また counter term は高次の計算も行いやすい。よって以下の計算ではすべて counter term を使用する。

3 Lamb shift の公式

ここでは、エネルギー準位のずれについての公式を導出する。
Sec.1 でも述べたように Lamb shift は、二つの異なる相互作用のもとでのプロパゲーターの差により生じた。ゆえに、まず二つのプロパゲーター S'(クーロン場 +QED 相互作用) と $S_{\mathscr{A}}$(クーロン場のみ) を導入する。そして、その差 $\delta S = S' - S_{\mathscr{A}}$ を摂動展開により計算し、エネルギー準位のずれについての公式を導出する。結果をさきに書いておくと、エネルギー準位のずれ δE_n は、(n は、準位を指定している)

$$\delta E_n = i \int \frac{d^3\boldsymbol{p'}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3} \bar{u}_n(\boldsymbol{p'}) \{-i\Sigma_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{p'}, \boldsymbol{p}; E_n)\} u_n(\boldsymbol{p}) \tag{3.1}$$

となる。$u_n(\boldsymbol{p})$ は、電子の波動関数。$\Sigma_{\mathscr{A}}$ は、電子のプロパゲーター S' を補正する 1-loop グラフに対応している。

3.1 二つの電子プロパゲーター

$S', S_{\mathscr{A}}$ ともに相互作用の元でのプロパゲーターであるから、式 (2.17) を使用して摂動計算できる。いま求めたいのは差 δS であるから、式 (2.17) を使用して二つのプロパゲーターを自由なプロパゲーターで書く必要はない。うまく全ハミルトニアンをわけて S' を $S_{\mathscr{A}}$ で書けば良いのである。

いま水素原子についてのラグランジアン密度は形式的に

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_{free} + \mathscr{L}_{int}^{ext} + \mathscr{L}_{int}^{QED} \tag{3.2}$$

$\mathscr{L}_{free}$: QED の自由な部分　$\mathscr{L}_{int}^{ext}$: 外場 (クーロン場) の相互作用　$\mathscr{L}_{int}^{QED}$: QED の相互作用

と書ける。S' はこのラグランジアンでのプロパゲーターであるが、ハミルトニアンを以下のように相互作用部分とそれ以外の部分に分ける。

$$H = H_0^e + H_{int} \tag{3.3}$$

$$H_0^e = H_{free} + H_{int}^{ext} \quad H_{int} = H_{int}^{QED} \tag{3.4}$$

そして、式 (2.17) を適用する時には

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \psi(x),\ |\Omega\rangle & \Longrightarrow & \psi_e(x),\ |0_e\rangle \\ H|\Omega\rangle = 0 & & H_0^e|0_e\rangle = 0 \\ \psi(x) = e^{iHt}\psi(\boldsymbol{x})e^{-iHt} & & \psi_e(x) = e^{iH_0^e t}\psi(\boldsymbol{x})e^{-iH_0^e t} \end{array}}$$

とする。$H_{free}|0\rangle = 0$ なる真空 $|0\rangle$ では書かない。このとき相互作用により補正されたプロパゲーター $S'(x, y)$ は、

$$S'(x, y) = \langle 0_e|\psi_e(x)\bar{\psi}_e(y)|0_e\rangle - i\int d^4z\, \langle 0_e|\mathrm{T}\mathscr{H}_{int}(z)\psi_e(x)\bar{\psi}_e(y)|0_e\rangle + \dots \tag{3.5}$$

となる。$\langle 0_e|\psi_e(x)\bar{\psi}_e(y)|0_e\rangle$ が $S_{\mathscr{A}}$ である。また、ここでの $\mathscr{H}_{int}(z)$ は $\psi_e(z)$ で書かれている。式 (3.5) を使用すると δS がループグラフ (式 (3.5) の第 2 項目以降) で書ける。そのときのループグラフでは電子の内線と

して $S_{\mathscr{A}}$ が現れる。そこでさらに H_0^e を

$$H_0^e = H_{free} + H_{int}^{ext} \tag{3.6}$$

とわけて上と同様に再度摂動論を適用することにより、$S_{\mathscr{A}}(x,y)$ は求められるので、δS が計算できる。

3.2 準備　時間並進不変な関数のフーリエ変換

外場 $\mathscr{A}$ は空間並進については不変ではないが時間並進不変なので、外場のみによって補正されたプロパゲーター $S_{\mathscr{A}}$ や、それを補正する自己エネルギーグラフ $\Sigma_{\mathscr{A}}$ の時間並進不変性が保たれる。そして δE_N についての公式、式 (3.1) を導出する過程では、$S_{\mathscr{A}}(x,y), S_{\mathscr{A}}(p',p)$ ではなく、$S_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};E_N)$ で話を進めるので上の変換を何回も用いる。よって、公式の導出の前に、時間並進不変な 2 変数関数 $f(x,y)=f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},x^0-y^0)$ のフーリエ変換について簡単に触れる。

時間部分のフーリエ変換は、

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};x^0-y^0) = \int \frac{dp^0}{2\pi} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};p^0)e^{-ip^0(x^0-y^0)} \tag{3.7}$$

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};p^0) = \int d(x^0-y^0) f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};x^0-y^0)e^{ip^0(x^0-y^0)} \tag{3.8}$$

$$= \int dx^0 f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};x^0-y^0)e^{ip^0(x^0-y^0)} \tag{3.9}$$

と時間並進不変な場合は、一つの変数についての変換でよい。そこで x,y についてのフーリエ変換を

$$f(x,y) = \int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} f(p',p)e^{-ip'x}e^{ipy} \tag{3.10}$$

と定義すると、時間並進不変な関数については式 (3.7) より

$$f(p',p) = \delta(p^{0\prime}-p^0) f(\boldsymbol{p'},\boldsymbol{p}\ ;p^0) \tag{3.11}$$

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};x^0-y^0) = \int \frac{d^3\boldsymbol{p'}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3} \int \frac{dp^0}{2\pi} f(\boldsymbol{p'},\boldsymbol{p}\ ;p^0)e^{i\boldsymbol{p'}\cdot\boldsymbol{x}}e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{y}}e^{-ip^0(x^0-y^0)} \tag{3.12}$$

となる。

3.3 導出

Section3.1 で、導入した二つのプロパゲーター S' と $S_{\mathscr{A}}$ をもちいて公式 (3.1) を導出する。

外場のみの補正を受けたプロパゲーター $S_{\mathscr{A}}$ は、外場が入った Dirac 方程式の Green 関数に対応していて、

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m + e\gamma^\mu\mathscr{A}_\mu)S_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};x^0-y^0) = i\delta^4(x-y) \tag{3.13}$$

時間についてフーリエ変換すると、

$$\gamma^0(E-\hat{H})S_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};E) = i\delta^3(x-y) \tag{3.14}$$

$$\hat{H} = \gamma^0(-i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla + m + e\gamma^\mu\mathscr{A}_\mu) \tag{3.15}$$

これを満たす $S_{\mathscr{A}}$ は、

$$S_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};E) = -i\sum_n\left(\frac{u_n(\boldsymbol{x})\bar{u}_n(\boldsymbol{y})}{E_n-E-i\varepsilon} - \frac{v_n(\boldsymbol{x})\bar{v}_n(\boldsymbol{y})}{E_n+E-i\varepsilon}\right) \tag{3.16}$$

u_n, v_n は、式 (3.13) の Dirac 方程式を満たす場 $\psi(x)$ をもちいて、

$$u_n(x) \equiv \langle 0|\psi(x)|n\rangle \tag{3.17}$$
$$v_n(x) \equiv \langle n|\psi(x)|0\rangle \tag{3.18}$$

であり、これも Dirac 方程式、式 (3.13) をみたし、そのハミルニアンの固有値 E_n の固有状態を $u_n(\boldsymbol{x})$ を

$$u_n(\boldsymbol{x}, t) = u_n(\boldsymbol{x})e^{-iE_n t} \tag{3.19}$$
$$v_n(\boldsymbol{x}, t) = v_n(\boldsymbol{x})e^{iE_n t} \tag{3.20}$$

としている。式 (3.16) は実際

$$\begin{aligned} -i\beta(E-\hat{H})\sum_n\left(\frac{u_n(\boldsymbol{x})\bar{u}_n(\boldsymbol{y})}{E_n-E-i\varepsilon}-\frac{v_n(\boldsymbol{x})\bar{v}_n(\boldsymbol{y})}{E_n+E-i\varepsilon}\right) &= i\beta\sum_n(u_n(\boldsymbol{x})\bar{u}_n(\boldsymbol{y})+v_n(\boldsymbol{x})\bar{v}_n(\boldsymbol{y})) \\ &= i\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \end{aligned} \tag{3.21}$$

と式 (3.15) を満たしている。最後に u_n, v_n が完全系をなすことを用いた。上と同様に外場だけでなく、全ラグランジアンにについての、完全なプロパゲーター $S'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; E)$ も式 (3.16) のような表式でかける。そのときは、場 ψ が満たす方程式が外場のみとは異なるので、それに対応する波動関数やエネルギー固有値も異なる。それを $U_n(\boldsymbol{x}), E'_n$ と書けば

$$S'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; E') = -i\sum_n\left(\frac{U_n(\boldsymbol{x})\bar{U}_n(\boldsymbol{y})}{E'_n-E-i\varepsilon}-\frac{V_n(\boldsymbol{x})\bar{V}_n(\boldsymbol{y})}{E'_n+E-i\varepsilon}\right) \tag{3.22}$$

となる。外場のみを考えたときのものからのプロパゲーターや波動関数のずれを考える。

$$\begin{aligned} &\delta S(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; E) = S'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; E) - S(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; E) \\ &\delta E_n = E'_n - \ E_n \qquad \delta u_n(\boldsymbol{x}) = U_n(\boldsymbol{x}) - u_n(\boldsymbol{x}) \end{aligned} \tag{3.23}$$

とずれを定義すると δS が最低次では、

$$\begin{aligned} \delta S(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; E) &= -i\sum_n\Bigg(\frac{\{u_n(\boldsymbol{x})+\delta u_n(\boldsymbol{x})\}\{\bar{u}_n(\boldsymbol{y})+\delta\bar{u}_n(\boldsymbol{y})\}}{E_n+\delta E_n-E-i\varepsilon}-\frac{u_n(\boldsymbol{x})\bar{u}_n(\boldsymbol{y})}{E_n-E-i\varepsilon} \\ &\qquad -\frac{\{v_n(\boldsymbol{x})+\delta v_n(\boldsymbol{x})\}\{\bar{v}_n(\boldsymbol{y})+\delta\bar{v}_n(\boldsymbol{y})\}}{E_n+\delta E_n+E-i\varepsilon}+\frac{v_n(\boldsymbol{x})\bar{v}_n(\boldsymbol{y})}{E_n+E-i\varepsilon}\Bigg) \\ &\simeq -i\sum_n\Bigg(\frac{u_n(\boldsymbol{x})\delta\bar{u}_n(\boldsymbol{y})}{E_n-E-i\varepsilon}+\frac{(-\delta E_n)u_n(\boldsymbol{x})\bar{u}_n(\boldsymbol{y})}{(E_n-E-i\varepsilon)^2} \\ &\qquad -\frac{v_n(\boldsymbol{x})\delta\bar{v}_n(\boldsymbol{y})}{E_n+E-i\varepsilon}-\frac{(-\delta E_n)v_n(\boldsymbol{x})\bar{v}_n(\boldsymbol{y})}{(E_n+E-i\varepsilon)^2}\Bigg) \end{aligned} \tag{3.24}$$

また補正されたプロパゲーター $S'(x, y)$ は、自己エネルギーグラフ $-i\Sigma_{\mathscr{A}}(z, w)$ をはさむことによっても得られ

$$S'(x, y) = S_{\mathscr{A}}(x, y) + \int d^4z \int d^4w S_{\mathscr{A}}(x, z)\big(-i\Sigma_{\mathscr{A}}(z, w)\big)S_{\mathscr{A}}(w, y) + \dots \tag{3.25}$$

時間からエネルギーへとフーリエ変換し、$S_{\mathscr{A}}$ についての展開、式 (3.16) を用いると

$$
\begin{aligned}
S'(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};E) &= S_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};E) + \int d^3\boldsymbol{z}\int d^3\boldsymbol{w} S_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z};E)\big\{-i\Sigma_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w};E)\big\}S_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y};E) + \dots \\
\delta S(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};E) &= S'(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};E) - S_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};E) \\
&= (-i)^2\sum_n\sum_m\int d^3\boldsymbol{z}\int d^3\boldsymbol{w}\left(\frac{u_n(\boldsymbol{x})\bar{u}_n(\boldsymbol{z})}{E_n - E - i\varepsilon} - \frac{v_n(\boldsymbol{x})\bar{v}_n(\boldsymbol{z})}{E_n + E - i\varepsilon}\right)\times \\
&\qquad \big\{-i\Sigma_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w};E)\big\}\left(\frac{u_n(\boldsymbol{w})\bar{u}_n(\boldsymbol{y})}{E_n - E - i\varepsilon} - \frac{v_n(\boldsymbol{w})\bar{v}_n(\boldsymbol{y})}{E_n + E - i\varepsilon}\right)
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

式 (3.24) は、$E = E_n$ の二次の極の項が δE_n に比例しているから、それと上の式を見較べて、$E = E_n$ の付近では、

$$
\begin{aligned}
-i\sum_n \frac{u_n(\boldsymbol{x})\bar{u}_n(\boldsymbol{y})}{(E_n - E - i\varepsilon)^2}(-\delta E_n) &= (-i)^2\sum_n \frac{u_n(\boldsymbol{x})\bar{u}_n(\boldsymbol{y})}{(E_n - E - i\varepsilon)^2}\times \\
&\qquad \int d^3\boldsymbol{z}\int d^3\boldsymbol{w}\ \bar{u}_n(\boldsymbol{z})\big\{-i\Sigma_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w};E_n)\big\}u_n(\boldsymbol{w})
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

波動関数は直交しているから、

$$
\begin{aligned}
\delta E_n &= i\int d^3\boldsymbol{z}\int d^3\boldsymbol{w}\ \bar{u}_n(\boldsymbol{z})\big\{-i\Sigma_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w};E_n)\big\}u_n(\boldsymbol{w}) \\
&= i\int\frac{d^3\boldsymbol{p'}}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\bar{u}_n(\boldsymbol{p}')\big\{-i\Sigma_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p};E_n)\big\}u_n(\boldsymbol{p})
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

を得る。

3.4 LambShift の loop グラフ

公式 (3.28) に現れた自己エネルギーグラフを書く。このグラフを書くためには，この系のラグランジアンを示さなければならないが、それはここでの目的ではない。ここでの目的は，それらのグラフが QED の 1-loop 輻射補正の形に一致することを図的に理解することである。ラグランジアンを使用した計算はには、Sec2.1.6 の自己エネルギーグラフの計算と同じであるから

その自己エネルギーグラフを書くと

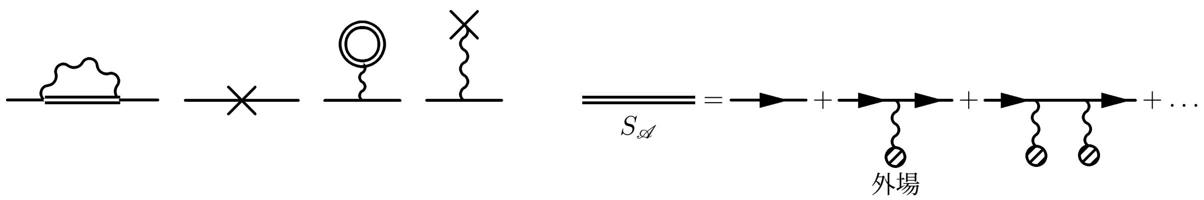
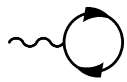


図 3　式 (3.28) のグラフ

となる。右側のグラフは外場によって補正された電子プロパゲーター $S_{\mathscr{A}}$。しかしグラフは通常の計算 (式 (2.28)) と同様であり、その計算で自由な電子プロパゲーターの部分を $S_{\mathscr{A}}$ に置き換えればよい。ただし、通常の電子の自己エネルギーグラフと異なるあたらしい loop グラフ $(-1)\displaystyle\int\frac{d^4q}{(2\pi^4)}\mathrm{Tr}\big\{S_{\mathscr{A}}(q,q+p'-p)(-ie\gamma^\nu)\big\}$

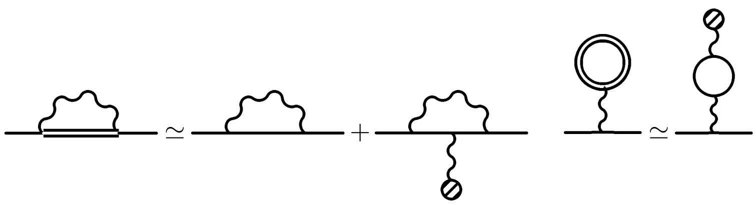
がある。 通常であればこのようなグラフは考えない。なぜなら



$$\longrightarrow \quad \langle 0|J^{\mu}(x)|0\rangle \tag{3.29}$$

であり、電荷のない真空中に電流がループしても何も寄与は生じないからである。しかし、いまは、$\langle 0_e|J^{\mu}(x)|0_e\rangle$ と外場が含まれている真空中をまわるので、寄与が生じる。$S_{\mathscr{A}}$ についてはその相互作用として $\bar{\psi}\gamma^{\mu}\mathscr{A}_{\mu}\psi$ をとる。$\mathscr{A}_{\mu}$ はクーロンポテンシャルつまり単なる和なので通常の電子プロパゲーターの補正、式 (2.28) とは異なるグラフが現れる。

いま、$Z\alpha \ll 1$ のとき図 3 のグラフは、



(3.30)

と近似される。これはちょうど QED の 1-loop 輻射補正のグラフとなっている。左から電子プロパゲーター、QED バーテックス、フォトンプロパゲーターの輻射補正となっている。ただし通常 QED の輻射補正と言った場合、外場との相互作用 $\bar{\psi}\mathscr{A}_{\mu}\gamma^{\mu}\psi$ ではなくフォトン場と相互作用 $\bar{\psi}\hat{A}_{\mu}\gamma^{\mu}\psi$ しているものを指す。しかし、結果的には外場と相互作用していても QED の場合と同じ形になる。よって QED の 1-loop グラフを計算することにより Lamb shift が計算できる。

4　QED 1-loop 輻射補正

Sec.3.4 から Lamb shift の計算は，QED の 1-loop 輻射補正を計算用いることにより行われることを示した。ゆえに、ここでは QED の 1-loop 輻射補正を計算する。ここでは，通常の QED のように外場による相互作用はないものとして計算し、後にここで計算したグラフが外場がある Lamb shift のグラフに一致することを見る。

4.1　真空偏極

Sec.2.3 で導入した相殺項を使用して光子プロパゲーターの補正を行う。このとき仮想粒子状態として電子、陽電子の対生成、対消滅が起きる。これが真空中で起きているとすると、もしそこに電荷をもつ粒子 A を置いたときその対生成、対消滅する (陽) 電子たちがその A の電荷により引きつけられる (反発する) 。そのため誘電体の偏極に似た状態になるので、真空偏極とよばれる。

4.1.1　QED ラグランジアン

真空偏極を計算するにあたり QED ラグランジアンを示す。

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_{int} + \mathscr{L}_s \tag{4.1}$$

$$\mathscr{L}_0 = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{4.2}$$

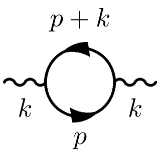
$$\mathscr{L}_{int} = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \tag{4.3}$$

$$\mathscr{L}_s = (Z_2-1)\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + \delta m Z_2\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}(Z_3-1)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - e(Z_2-1)\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \tag{4.4}$$

4.1.2　ループグラフ

ここでは、具体的に真空偏極を例にとりループグラフの計算法を説明する。

式 (2.17) と同様に補正されたフォトンプロパゲーターがかけるが、最低次は $\mathscr{L}_{int}$ の 2 次である。前後のフォトンプロパゲーターを省いたグラフを $\Pi^{\lambda\kappa}_{loop}$ と書くと



$$\Pi^{\lambda\kappa}_{loop}(k) = (-1)\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}\left(\frac{i(\not{p}+m)}{p^2-m^2+i\varepsilon}(-ie\gamma^\lambda)\frac{i(\not{p}+\not{k}+m)}{(p+k)^2-m^2+i\varepsilon}(-ie\gamma^\kappa)\right) \tag{4.5}$$

ループ計算では、まずプロパゲーターによる分母の項とトレースについては以下の処理をする。

- ファインマン積分
$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx\frac{1}{\big(Ax+(1-x)B\big)^2} \tag{4.6}$$

- トレース
奇数個の γ 行列のトレースは 0　　　　偶数個は $\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4\eta^{\mu\nu}$ から順次計算できる。

後で必要になるので p を 4 次元ではなく d 次元として、上の処理を施すと $\Pi^{\lambda\kappa}_{loop}$ は

$$
\begin{aligned}
\Pi^{\lambda\kappa}_{loop}(k) &= (-1)\ e^2 \int \frac{d^dp}{(2\pi)^d} \int_0^1 dx \frac{\mathrm{Tr}\big((\not p + m)\gamma^\lambda(\not p + \not k + m)\gamma^\kappa\big)}{\big[(p^2 - m^2)(1-x) + x\big\{(p+k)^2 - m^2\big\} + i\varepsilon\big]^2} \\
&= (-1)\ e^2 \int \frac{d^dp}{(2\pi)^d} \int_0^1 dx \frac{\mathrm{Tr}\big(\not p\gamma^\lambda(\not p + \not k)\gamma^\kappa + m^2\gamma^\lambda\gamma^\kappa\big)}{\big[(p+kx)^2 + x(1-x)k^2 - m^2 + i\varepsilon\big]^2}
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

となる。ここで $p' = p + kx$ と変数変換。すると分母は p' に関して偶関数であるから分子の p' の奇関数の部分は落としてよい。すると分子は

$$
\begin{aligned}
(\text{分子}) &= \mathrm{Tr}\big\{(\not p' - \not k x)\gamma^\lambda(\not p' + (1-x)\not k) + m^2\gamma^\lambda\gamma^\kappa\big\} \\
&= p'_\alpha p'_\beta \mathrm{Tr}\big(\gamma^\alpha\gamma^\lambda\gamma^\beta\gamma^\kappa\big) + m^2\mathrm{Tr}\big(\gamma^\lambda\gamma^\kappa\big) - x(1-x)k_\mu k_\nu \mathrm{Tr}\big(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\kappa\big)
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

γ 行列のトレースは d 次元では

$$
\mathrm{Tr}\big(\gamma^\mu\gamma^\nu\big) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu) = d\eta^{\mu\nu}
\tag{4.9}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\big(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\kappa\big) &= -\mathrm{Tr}\big(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\kappa\gamma^\lambda\big) + 2\eta^{\lambda\kappa}\mathrm{Tr}\big(\gamma^\mu\gamma^\nu\big) \\
&= \mathrm{Tr}\big(\gamma^\mu\gamma^\kappa\gamma^\nu\gamma^\lambda\big) - 2\eta^{\nu\kappa}\mathrm{Tr}\big(\gamma^\mu\gamma^\lambda\big) + 2d\eta^{\lambda\kappa}\eta^{\mu\nu}
\end{aligned}
$$

さらにもう一回交換して γ^κ を先頭に出してトレースの巡回対称性を用いれば左辺にマイナスをかけたものが出てきて

$$
\mathrm{Tr}\big(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\kappa\big) = d\big(\eta^{\lambda\kappa}\eta^{\mu\nu} - \eta^{\nu\kappa}\eta^{\mu\lambda} + \eta^{\mu\kappa}\eta^{\nu\lambda}\big)
\tag{4.10}
$$

これで (4.8) が計算できるがこの式の第一項めはもっと簡単にできる。p' で積分してしまうのだから p' 依存性はもちろんなくなるが、それについている添字は残ること、そして次元に注目すると

$$
\int \frac{d^dp'}{(2\pi)^d}\ p'_\alpha p'_\beta \cdots = C\eta_{\alpha\beta} \int \frac{d^dp'}{(2\pi)^d}\ p'^2 \cdots \qquad C: \text{定数}
\tag{4.11}
$$

とかけるはずである。C は両辺で α, β を縮約することできまり $C = 1/d$。さらに

$$
\eta_{\alpha\beta}\gamma^\alpha\gamma^\lambda\gamma^\beta = -\eta_{\alpha\beta}\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\lambda + 2\eta_{\alpha\beta}\eta^{\beta\lambda}\gamma^\alpha = -(d-2)\gamma^\lambda
\tag{4.12}
$$

ゆえに

$$
\Pi^{\lambda\kappa}_{loop}(k) = (-1)\ e^2 \int \frac{d^dp'}{(2\pi)^d} \int_0^1 dx \frac{-(d-2)p'^2\eta^{\lambda\kappa} + dm^2\eta^{\lambda\kappa} - x(1-x)d(2k^\lambda k^\kappa - \eta^{\lambda\kappa}k^2)}{\big[p'^2 + x(1-x)k^2 - m^2 + i\varepsilon\big]^2}
\tag{4.13}
$$

ここでループ部分の積分を実行する。

- 次元正則化と counterterm
  いま loop 部分の運動量積分からの発散は $\mathscr{L}_s$ からでてくる counterterm により最終的に差し引かれるはずである。そこで適切な分だけ発散を差し引くためには、何らかの方法で運動量積分を実行しなければならない。そのための方法として、次元を d として積分を実行してしまう。それで運動量積分を有限にして、その結果からくりこみ条件にしたがい適切な量差し引く。最後に次元を 4 にもどして有限な結果を得る。この d 次元に次元をあげて運動量積分を有限にする方法のことを次元正則化という。式 (4.13) では、既に次元を d としてある。そしてこの d 次元の積分は、公式

$$\int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \frac{B - Cp^2}{(p^2 - A + i\varepsilon)^k} = i(-1)^k \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{\Gamma(k - \frac{n}{2})}{\Gamma(k)} \frac{B + \dfrac{CA}{-1 + (2k-2)/n}}{A^{k - \frac{n}{2}}} \tag{4.14}$$

を用いる。

この公式を用いて整理すると

$$\Pi^{\lambda\kappa}_{loop}(k) \quad = \quad -i(\eta^{\lambda\kappa} k^2 - k^\lambda k^\kappa)\Pi_{loop}(k^2) \tag{4.15}$$

$$\Pi_l(k^2) = 2d \frac{e^2}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma\bigl(2 - \frac{d}{2}\bigr) \int_0^1 dx \frac{x(1-x)}{\bigl[m^2 - x(1-x)k^2\bigr]^{2-d/2}} \tag{4.16}$$

いま d 考えているが最終的には 4 次元にするので、ε を微小量として $d = 4 - 2\varepsilon$ とする。すると $\Pi_l(k^2)$ は、

$$\Pi_{loop}(k^2) = 2(4 - 2\varepsilon) \frac{e^2}{(4\pi)^2} \frac{1 - \gamma\varepsilon + \varepsilon \ln 4\pi}{\varepsilon} \int_0^1 dx\ x(1-x)\bigl[1 - \varepsilon \ln\bigl(m^2 - x(1-x)k\bigr)\bigr] \tag{4.17}$$

ここで

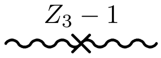
$$\Gamma(\varepsilon) = \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\varepsilon} \simeq \frac{1 - \gamma\varepsilon}{\varepsilon} \tag{4.18}$$

$$A^\varepsilon = e^{\varepsilon \ln A} \simeq 1 + \varepsilon \ln A \tag{4.19}$$

をもちいた。γ は Euler 定数。ε で展開しておくと、どこの項が発散するかが分がわかりやすくなる。

次にこの計算における式 (4.4) の $\mathscr{L}_s$ の最低次の寄与を考える。それは $Z_3 - 1$ に比例する項のみから生じ

$Z_3 - 1$



$$\frac{-i\eta_{\mu\lambda}}{k^2 + i\varepsilon}\Bigl[-i(\eta^{\lambda\kappa} - k^\lambda k^\kappa)(Z_3 - 1)\Bigr]\frac{-i\eta_{\kappa\nu}}{k^2 + i\varepsilon} \tag{4.20}$$

となる。

よって最低次での寄与をまとめると

$$\Pi^{\lambda\kappa}(k) = -i(\eta^{\lambda\kappa} - k^\lambda k^\kappa)\bigl\{\Pi_{loop}(k^2) + (Z_3 - 1)\bigr\} \tag{4.21}$$

そして式 (2.31) と同様に等比級数を作って

$$D'_{\mu\nu}(k) = \frac{-i\left(\eta_{\mu\nu} - \dfrac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)}{k^2 + i\varepsilon} + \frac{-i\left(\eta_{\mu\lambda} - \dfrac{k_\mu k_\lambda}{k^2}\right)}{k^2 + i\varepsilon}\left[-i(\eta^{\lambda\kappa} - \frac{k^\lambda k^\kappa}{k^2})k^2\Pi(k^2)\right]\frac{-i\left(\eta_{\kappa\nu} - \dfrac{k_\kappa k_\nu}{k^2}\right)}{k^2 + i\varepsilon} + \cdots \tag{4.22}$$

ここで $\left(\eta_{\lambda\kappa} - \dfrac{k_\lambda k_\kappa}{k^2}\right)\dfrac{k_\kappa k_\nu}{k^2} = \dfrac{k_\lambda k^\nu}{k^2} - \dfrac{k_\lambda k^2 k^\nu}{k^4} = 0$ より

$$D'_{\mu\nu}(k') = \frac{-i\left(\eta_{\mu\nu} - \dfrac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)}{k^2 + i\varepsilon}\bigl(1 - \Pi(k^2) + \Pi^2(k^2) + \Pi^3(k^2) + \cdots\bigr) = \frac{\eta_{\mu\nu} - \dfrac{k_\mu k_\nu}{k^2}}{\bigl(k^2 + i\varepsilon\bigr)\bigl(1 + \Pi(k^2)\bigr)} \tag{4.23}$$

プロパゲーターの極は、自由な時と同じ $k^2 = 0$ にあるので、

$$\Pi(0) = 0 \tag{4.24}$$

$$(Z_3 - 1) = -\Pi_{loop}(0) \tag{4.25}$$

であるから式 (4.17) よりくりこみ定数が

$$Z_3 - 1 = -2(4-2\varepsilon)\frac{e^2}{(4\pi)^2}\frac{1-\gamma\varepsilon+\varepsilon\ln 4\pi}{\varepsilon}\int_0^1 dx\ x(1-x)\left(1-\varepsilon\ln m^2\right) \tag{4.26}$$

$$\simeq -\frac{e^2}{12\pi^2}\frac{1}{\varepsilon} \tag{4.27}$$

すると

$$\Pi(k^2) = -\frac{e^2}{2\pi^2}\int_0^1 dx\ x(1-x)\ln\left[1-x(1-x)\left(\frac{k}{m}\right)^2\right] \tag{4.28}$$

$\varepsilon \to 0$ で有限な 1-loop 補正を得る。($((k/m)^2 > 4$ のとき log の中身が負になり実関数ではなくなるが、Lamb shift では、$k^2 \sim 0$ まわりのみ必要になるのでそれは考えない。)

4.2 電子の自己エネルギー

次に電子のプロパゲーターの 1-loop 補正を行う。つまり (2.29) の計算を行う。くりこみではループしている光子の運動量 k の $k \sim \infty$ からの発散は取り除けるが、低運動量 $k \sim 0$ からの発散は取り除けない。ここでは、ループしている光子プロパゲーターを

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2-\mu^2+i\varepsilon} \tag{4.29}$$

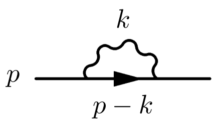
と最終的には $\mu \to 0$ とする前提で仮想質量 μ 加えて計算する。この低運動量からの発散をなくすために Lamb shift 計算時には

$$\frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2+i\varepsilon} = \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2-\mu^2+i\varepsilon} + \left(\frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2+i\varepsilon} - \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2-\mu^2+i\varepsilon}\right) \tag{4.30}$$

と分解するので、第二項をフォトンプロパゲーターとして計算も必要であるからここで行う。

4.2.1 通常の電子の自己エネルギーグラフの計算

低運動量での発散を防ぐためフォトンが仮想的な質量 μ を持つとして、



$$-i\Sigma_{loop}(\not{p}) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left(-ie\gamma^\mu\right)\frac{i\left(\not{p}-\not{k}+m\right)}{(p-k)^2-m^2+i\varepsilon}\left(-ie\gamma^\mu\right)\frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2+i\varepsilon} \tag{4.31}$$

を計算する。ループ計算であるから、真空偏極と同様にまず分母をファインマンパラメーターでまとめ、そののちに積分変数をずらし分母を偶関数にする。して計算する。

$$-i\Sigma_{loop}(\not{p}) = (-1)e^2\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\int_0^1 dx\frac{\gamma^\mu\left(\not{p}-\not{k}+m\right)\gamma_\mu}{\left[\left\{(p-k)^2-m^2+i\varepsilon\right\}x+(1-x)(k^2-\mu^2+i\varepsilon)\right]^2} \tag{4.32}$$

$$(\text{分母}) = \left[(k-xp)^2+x(1-x)(p^2-m^2)-(1-x)\mu^2-m^2x^2+i\varepsilon\right]^2$$

$k' = k - xp$ とおけば、分子の k' についての奇関数はキャンセルするので、

$$-i\Sigma_{loop}(\not{p}) = (-1)e^2\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\int_0^1 dx\frac{\gamma^\mu\left\{(1-x)\not{p}+m\right\}\gamma_\mu}{\left[k'^2+x(1-x)(p^2-m^2)-(1-x)\mu^2-m^2x^2+i\varepsilon\right]^2} \tag{4.33}$$

分子は、

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = d \qquad \gamma^\mu \not{a} \gamma_\mu = -(d-2)\not{a} \tag{4.34}$$

を用いて整理し、$d = 4 - 2\varepsilon$ として式 (4.14) の積分公式を用いると

$$\begin{aligned}
-i\Sigma_{loop}(\not{p}) &= -i\frac{e^2}{16\pi^2}\frac{1-\gamma\varepsilon+\varepsilon\ln 4\pi}{\varepsilon}\int_0^1 dx\Big[-(2-2\varepsilon)(1-x)\not{p}+(4-2\varepsilon)m\Big]\times \\
&\qquad\qquad \Big(1-\varepsilon\ln\big[m^2x^2+x(1-x)(m^2-p^2)+(1-x)\mu^2\big]\Big) \\
&= -i\frac{e^2}{16\pi^2}\frac{1-\gamma\varepsilon+\varepsilon\ln 4\pi}{\varepsilon}\Big(3m-(\not{p}-m)+\varepsilon(\not{p}-2m)+ \\
&\qquad 2\varepsilon\int_0^1 dx\big\{(1-x)(\not{p}-m)-(1+x)m\big\}\ln\big[m^2x^2+x(1-x)(m^2-p^2)+(1-x)\mu^2\big]\Big)
\end{aligned} \tag{4.35}$$

$\varepsilon \to 0$ で発散する項は、$3m$ と $\not{p}-m$ の項である。これは、$\Sigma_{loop}(\not{p})$ を $\not{p}=m$ のまわりで展開したときの最低次と 1 次の項が発散し、それ以外は有限であることを示している。式 (4.4) からの寄与は、第一項目と第二項目から生じそれを合わせると

$$-i\Sigma(\not{p}) = -i\Sigma_{loop}(\not{p}) - i\big\{\delta m Z_2 + (Z_2-1)(\not{p}-m)\big\} \tag{4.36}$$

ゆえに $-i\Sigma(\not{p})$ をはさむことによって得られる補正されたプロパゲーター S' は、

$$\begin{aligned}
S' &= \frac{i}{\not{p}-m} \;+\; \frac{i}{\not{p}-m}-i\Sigma(\not{p})\frac{i}{\not{p}-m} \;+\; \frac{i}{\not{p}-m}-i\Sigma(\not{p})\frac{i}{\not{p}-m}-i\Sigma(\not{p})\frac{i}{\not{p}-m} \;+\cdots \\
&= \frac{i}{\not{p}-m-\Sigma(\not{p})}
\end{aligned} \tag{4.37}$$

くりこみ条件より補正されたプロパゲーターも自由の同様に $\not{p}=m$ で極を持ち、そこでの留数は 1 であるので

$$\Sigma(m) = 0 \to \delta m = -\Sigma_{loop}(m) \tag{4.38}$$

$$\left.\frac{d\Sigma(\not{p})}{d\not{p}}\right|_{\not{p}=m} = 0 \to Z_2 - 1 = -\frac{d}{d\not{p}}\Sigma_{loop}(\not{p})\Big|_{\not{p}=m} \tag{4.39}$$

式 (4.35) より $p^2 = \not{p}^2$ に注意して、

$$\begin{aligned}
Z_2 - 1 &= -\frac{e^2}{16\pi^2}\frac{1-\gamma\varepsilon+\varepsilon\ln 4\pi}{\varepsilon} \\
&\qquad \times\left[-1+\varepsilon+2\varepsilon\int_0^1 dx\left\{(1-x)\ln\big(m^2x^2+(1-x)\mu^2\big)+\frac{2m^2x(1-x)(1+x)}{m^2x^2+(1-x)\mu^2}\right\}\right]
\end{aligned} \tag{4.40}$$

$$\begin{aligned}
\delta m Z_2 &\simeq \delta m \\
&= -\frac{e^2}{16\pi^2}\frac{1-\gamma\varepsilon+\varepsilon\ln 4\pi}{\varepsilon}\left[3m - m\varepsilon - 2m\varepsilon\int_0^1 dx(1+x)\ln\big(m^2x^2+(1-x)\mu^2\big)\right]
\end{aligned} \tag{4.41}$$

よって

$$\begin{aligned}
\Sigma(\not{p}) &= \Sigma_{loop}(\not{p}) + \delta m + (Z_2-1)(\not{p}-m) \\
&= \frac{e^2}{8\pi^2}\int_0^1 dx\Bigg(\big\{(1-x)(\not{p}-m)-(1+x)m\big\}\ln\left[\frac{m^2x^2+x(1-x)(m^2-p^2)+(1-x)\mu^2}{m^2x^2+(1-x)\mu^2}\right] \\
&\qquad\qquad -(\not{p}-m)\frac{2m^2x(1-x)(1+x)}{m^2x^2+(1-x)\mu^2}\Bigg)
\end{aligned} \tag{4.42}$$

を得る。p が on shell の場合 $\Sigma(m)=0$ であるから補正は寄与しない。このことは後に用いる。

4.2.2　Lamb shif に必要な自己エネルギーグラフ

Lamb shift では、フォトンプロパゲーターを $\dfrac{1}{k^2+i\varepsilon}-\dfrac{1}{k^2-\mu^2+i\varepsilon}$ と変形したものを用いるので、上の結果を用いてそれを求めておく。式 (4.35) より、この時の $-i\Sigma_{loop}(\not{p})$ は、

$$-i\Sigma_{loop}(\not{p}) = -i\frac{e^2}{8\pi^2}\int_0^1 dx\big\{(1-x)(\not{p}-m)-(1+x)m\big\}\times \ln\left[\frac{m^2x^2+x(1-x)(m^2-p^2)}{m^2x^2+x(1-x)(m^2-p^2)+(1-x)\mu^2}\right] \tag{4.43}$$

フォトンプロパゲーターを変形し運動量 μ で cut off してあるので、counter term で差し引く前でも運動量積分に関しては、有限になっている。このときの $\delta m, Z_2-1$ は、

$$\delta m = \frac{e^2}{8\pi^2}\int_0^1 dx(1+m)\ln\left[\frac{m^2x^2}{m^2x^2+(1-x)\mu^2}\right] \tag{4.44}$$

$$Z_2-1 = -\frac{e^2}{8\pi^2}\int_0^1 dx\left\{(1-x)\ln\left[\frac{m^2x^2}{m^2x^2+u^2(1-x)}\right]+\frac{2(1+x)(1-x)^2\mu^2}{x\big(m^2x^2+(1-x)\mu^2\big)}\right\} \tag{4.45}$$

となる。後 Lamb shift では、この counter term が必要となる。

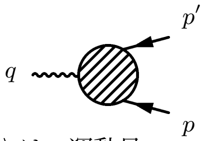
4.3　バーテックスの補正

いままでの輻射補正は，どちらもプロパゲーターに関するものであった。それらでは表せない独立な輻射補正としてバーテックスの補正がある。しかしバーテックスの補正の時のくりこみ条件を導出していない。まず形状因子を使用した一般的な議論を行いくりこみ条件を導出する。その後にループグラフを計算する。このループグラフは 5 個の γ 行列の積があらわれ計算が煩雑である。だが形状因子を利用した一般論からそのループ計算によりあらわれる項は 2 つに絞られることが示せるのでそれを計算の指針とする。

4.3.1　形状因子

形状因子とは、量子力学の散乱で標的が大きさを持っているときに使うものであった。そこで散乱断面積は (点粒子の断面積)×(形状因子) という形でかけた。これと同様に自由ではバーテックスは γ^μ と表されるが、相互作用下では、形状因子 F_1 を用いて $F_1\gamma^\mu$ などと表される。ただ、量子力学とは違う点はもう一つの形状因子 F_2 が存在することである。

■バーテックスの形状因子　バーテックスの補正の一般論を行うときはフォトンが一つあり、電子がはいってでてゆくすべての過程を考える必要がある。それは以下の式で表される。



$$\langle \boldsymbol{p}',\ s'|J^\mu(x)|\boldsymbol{p},\ s\rangle \tag{4.46}$$

$|p,\ s\rangle$ は、運動量 p、スピン s をもつ全ハミルトニアンの固有状態で J^μ は電磁カレントで Heisenbeg 表示であらわしたもの。これは、p, s でやってきて p', s' ででてゆくすべてのグラフ、つまり摂動のすべての効果が含まれているグラフを表している。これはローレンツ普遍性より以下の一般的な形に書ける。

$$\langle \boldsymbol{p}',\ s'|J^\mu(0)|\boldsymbol{p},\ s\rangle = e\frac{1}{\sqrt{2E_{p'}L^3}}\frac{1}{\sqrt{2E_pL^3}}\bar{u}_{s'}(\boldsymbol{p}')\Gamma^\mu(p',\ p)u_s(\boldsymbol{p}) \tag{4.47}$$

$\Gamma^\mu(p',p)$ は、4×4 の行列、$u_s(p)$ は Dirac のスピノール。場は

$$\psi(x)=\sum_{p,s}\frac{1}{\sqrt{2E_pL^3}}\left(a_{n,s}u_s(\boldsymbol{p}_n)e^{-ip_nx}+b^\dagger_{n,s}v_s(\boldsymbol{p}_n)e^{ip_nx}\right) \tag{4.48}$$

$$\boldsymbol{p}_n=\frac{2\pi}{L}(n_x,n_y,n_z)\qquad n_i=1,2,3,\cdots\quad(i=x,y,z) \tag{4.49}$$

と一辺が L の箱を用いた規格化をしている。運動量の添字 n は省略する。$\Gamma^\mu(p',p)$ は、4×4 の行列なので、16 個の独立な行列で展開できる。その行列として以下のようなローレンツ変換に対して明確な変換性を持つ行列を用いる。

$$\left\{\ 1,\ \gamma^\mu,\ [\gamma^\mu,\ \gamma^\nu]\ ,\ \gamma^5\gamma^\mu,\ \gamma^5\ \right\} \tag{4.50}$$

$\Gamma^\mu(p',p)$ は足を一つ持つから、以下の項に比例する可能性がある。

$$\begin{aligned}1&:p^\mu,p'^\mu\\ \gamma&:\gamma^\mu,p^\mu\not{p},p'^\mu\not{p},p^\mu\not{p}',p'^\mu\not{p}'\\ \left[\gamma^\rho,\gamma^\sigma\right]&:\left[\gamma^\mu,\not{p}\right],\left[\gamma^\mu,\not{p}'\right],\left[\not{p},\not{p}'\right]p^\mu,\left[\not{p},\not{p}'\right]p'^\mu\\ \gamma^5\gamma^\rho&:\gamma^5\gamma_\rho\varepsilon^{\rho\mu\nu\sigma}p_\nu p'_\sigma\\ \gamma^5&:\text{なし}\end{aligned} \tag{4.51}$$

$J^\mu(x)=e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ は、ベクトルとして変換するので、$\gamma_5\not{p}p^\mu,\ \gamma_5\gamma^\mu$ など、γ_5(擬スカラー) を含む項はない。しかし $\gamma^5\gamma_\rho\varepsilon^{\rho\mu\nu\sigma}p_\nu p'_\sigma$ は、$\varepsilon^{\rho\mu\nu\sigma}$ も擬スカラーであるからこの項も考えなければならない。そして、その比例係数は $p',\ p$ から作られるスカラー関数として与えられここでは $q^2=(p'-p)^2$ の関数であるとする ($p^{2\prime}=p^2=m^2$ であるから、p',p からつくられるスカラー関数は内積 $p'\cdot p$ を含むもの)。上の可能な項は $u_s(\boldsymbol{p})$ について成り立つ式

$$\left(\not{p}-m\right)u_s(\boldsymbol{p})=0\qquad \bar{u}_{s'}(\boldsymbol{p}')\left(\not{p}'-m\right)=0 \tag{4.52}$$

を用いると p^μ,p'^μ,γ^μ の項だけでよいことがわかる。例えば

$$p^\mu\not{p}u_s(\boldsymbol{p})=\frac{p^\mu}{m}u_s(\boldsymbol{p})\propto p^\mu \tag{4.53}$$

$$\left[\gamma^\mu,\not{p}\right]=2\gamma^\mu\not{p}-p_\nu\{\gamma^\nu,\gamma^\mu\}=2m\gamma^\mu-2p^\mu \tag{4.54}$$

$\gamma^5\gamma_\rho\varepsilon^{\rho\mu\nu\sigma}p_\nu p'_\sigma$ については、公式

$$\gamma^5\gamma_\rho\varepsilon^{\rho\mu\nu\sigma}=\frac{1}{6}i\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma+\gamma^\sigma\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma^\mu-\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\sigma-\gamma^\mu\gamma^\sigma\gamma^\nu-\gamma^\sigma\gamma^\nu\gamma^\mu\right) \tag{4.55}$$

を使用して同様に示せる。以上より式 (4.47) は F,H,G を q^2 の任意の関数として (形状因子)

$$\bar{u}_{s'}(\boldsymbol{p}')\Gamma(p',p)u_s(\boldsymbol{p})=\bar{u}_{s'}(\boldsymbol{p}')\left(\gamma^\mu F(q^2)-\frac{i}{2m}(p'+p)^\mu G(q^2)+\frac{(p-p')^\mu}{2m}H(q^2)\right)u_s(\boldsymbol{p}) \tag{4.56}$$

となるがさらにカレントの保存より、

$$\begin{aligned}0=\langle\boldsymbol{p}',\ s'|\partial_\mu J^\mu(x)|\boldsymbol{p},\ s\rangle&=\langle\boldsymbol{p}',\ s'|i\left[P_\mu\ ,\ J^\mu(x)\right]|\boldsymbol{p},\ ,s\rangle\\ &=i(p'-p)_\mu\langle\boldsymbol{p}',\ s'|J^\mu(x)|\boldsymbol{p},s\rangle\end{aligned} \tag{4.57}$$

式 (4.56) で $(p'-p)^\mu$ をかけると F,G の項は消えるが最後の項は消えないので $H(q^2)=0$ となる。

Gordon equality

$$\bar{u}_{s'}(\boldsymbol{p}')\gamma^\mu u_s(\boldsymbol{p}) = \bar{u}_{s'}(\boldsymbol{p}')\left(\frac{(p'+p)^\mu}{2m} + (p'-p)^\nu\frac{i\sigma^{\mu\nu}}{2m}\right)u_s(\boldsymbol{p}) \tag{4.58}$$

ここで、$\sigma^{\mu\nu} = i/2[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$。式 (4.56) はこの Gordon quality により $(p'+p)^\mu$ の項が $\sigma^{\mu\nu}$ の項で書ける。

まとめると

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{p}',\ s'|J^\mu(0)|\boldsymbol{p},\ s\rangle &= \frac{e}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{p'}2E_p}}\bar{u}_{s'}(\boldsymbol{p}')\Gamma^\mu(p',\ p)u_s(\boldsymbol{p}) &(4.59)\\ &= \frac{e}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{4E_{p'}E_p}}\bar{u}_{s'}(\boldsymbol{p}')\left(\gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu}}{2m}q^\nu F_2(q^2)\right)u_s(\boldsymbol{p}) &(4.60)\end{aligned}$$

途中、連続極限 $\sum_n = \int \frac{L^3}{(2\pi)^3}d^3\boldsymbol{k}$ のもとでの置き換え、$1/L^3 \to 1/(2\pi)^3$ をもちいた。

これを

$$\gamma^\mu = \frac{1}{2m}\left[2p^\mu - \{\gamma^\mu, \not p - m\}\right] \tag{4.61}$$

$$\bar{u}_{s'}(\boldsymbol{p})u_s(\boldsymbol{p}) = 2m\delta_{ss'} \tag{4.62}$$

を用いて，$q=0$ のときを考えると

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}'|J^\mu(x)|\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}\rangle &= \frac{e}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}\bar{u}_s(\boldsymbol{p})\frac{p^\mu}{m}u_s(\boldsymbol{p})F_1(0)\\ &= \frac{e}{(2\pi)^3}\frac{p^\mu}{E_p}\delta_{s's}F_1(0) &(4.63)\end{aligned}$$

また行列要素 $\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}'|J^\mu(x)|\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}\rangle$ は、カレントの保存から以下のように変形できる。

$\langle \boldsymbol{p}', \boldsymbol{s}'|J^\mu(x)|\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}\rangle = e^{-i(p'-p)x}\langle \boldsymbol{p}', \boldsymbol{s}'|J^\mu(0)|\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}\rangle$ より $\mu = 0$ としてこれを両辺空間部分を積分すると

$$\langle \boldsymbol{p}', \boldsymbol{s}'|Q|\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}\rangle = (2\pi)^{-3}\delta^3(\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p})\langle \boldsymbol{p}', \boldsymbol{s}'|J^0(0)|\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}\rangle \tag{4.64}$$

となる。Q は保存電荷であるから、右辺は $x^0 = 0$ で計算した。よって

$$\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}'|J^0(0)|\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}\rangle = (2\pi)^{-3}e\delta_{\boldsymbol{s}'\boldsymbol{s}} \tag{4.65}$$

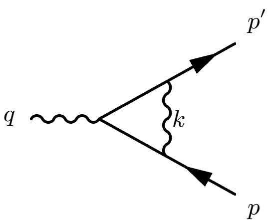
これと式 (4.63) を比べると、

$$F_1(0) = 1 \tag{4.66}$$

を得る。この式は、摂動などの近似とは関係なく成立する式である。よって、摂動計算でこの $F_1(q)$ を計算した時には、この式を満たしてなければならず、これがバーテックスのくりこみ定数を決める条件となる。

4.3.2 loop 計算

さきに導出した条件をもちいてバーテックスを補正する 1-loop グラフ計算する。そのグラフは、



$$\begin{aligned}-ie\Gamma_l^\mu(p', p) = \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{-i\eta^{\lambda\kappa}}{k^2-\mu^2+i\varepsilon}(-ie\gamma^\lambda)\frac{i(\not p' + \not k + m)}{(p'+k)^2 - m^2 + i\varepsilon}(-ie\gamma^\mu)\\ \times\frac{i(\not p + \not k + m)}{(p+k)^2 - m^2 + i\varepsilon}(-ie\gamma^\kappa) \qquad (4.67)\end{aligned}$$

である。ここで低運動量での発散を防ぐため、フォトンが仮想的な質量 μ をもつものとした。またここでの $\Gamma^\mu_l(p',p)$ は式 (4.59) の $\Gamma^\mu(p',p)$ のバーテックスを補正するループグラフからの寄与を示す ($\Gamma^\mu(p',p)$ は、始状態に運動量 p の電子、終状態に運動量 p' の電子と運動量 q の光子があるグラフの和であるからほかにも寄与する項がある。例えばまったく輻射補正を伴わない項や光子の部分に真空偏極を伴うものなど) このグラフも loop 計算であるので、ファイマンパラメーター、そして分母が積分変数の 2 乗になるように変数変換する。すると、

$$-ie\Gamma^\mu_l(p',p) = -e^3\int\frac{d^dk'}{(2\pi)^d}\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1 dz\delta(x+y+z-1)2!$$
$$\times\frac{\gamma^\kappa\big\{(1-y)\not{p}'-z\not{p}+m\big\}\gamma^\mu\big\{(1-z)\not{p}-y\not{p}'+m)\big\}\gamma_\kappa+\gamma^\kappa\not{k}'\gamma^\mu\not{k}'\gamma_\kappa}{\big[k'^2-(yp'+zp)^2-x\mu^2+i\varepsilon\big]^3} \tag{4.68}$$

外線は on shell の電子であるから $p'^2=p^2=m^2$ を用いた。分子の項に γ 行列が複数あるため、計算は煩雑になる。計算の方針は，Γ^μ_l を先の節で導出した一般形、式 (4.60) を目指して変形することである。以下の手順で行う。

1. 公式

$$\gamma^\mu\not{a}\gamma_\mu = -(d-2)\not{a} \tag{4.69}$$
$$\gamma^\mu\not{a}\not{b}\gamma_\mu = (d-4)\not{a}\not{b}+4a\cdot b \tag{4.70}$$
$$\gamma^\mu\not{a}\not{b}\not{c}\gamma_\mu = -2\not{c}\not{b}\not{a}-(d-4)\not{a}\not{b}\not{c} \tag{4.71}$$

   を用いて、両側の γ 行列の和をとってしまう。

2. 1. で生じた $\not{p}',\not{p}$ などは、$p'=p+q$ と on shell$\not{p}'=\not{p}=m$ を用いて質量にする。例えば

$$\not{p}\gamma^\mu\not{p} = (\not{q}-\not{p}')\gamma^\mu m = (\not{q}-m)\gamma^\mu m \tag{4.72}$$

   間に γ^μ があるので、その左側では，$\not{p}'=m$ は成り立つが $\not{p}=m$ は成り立たないことに注意。

3. 2 で、生じた $\not{q}$ は、

$$\not{q}\gamma^\mu\not{q} = -\not{q}\not{q}\gamma^\mu+2q^\mu\not{q} = -q^2\gamma^\mu \tag{4.73}$$
$$-2i(y+z)\sigma^{\mu\nu}q_\nu = -2(z\not{q}\gamma^\mu-y\gamma^\mu\not{q})+2\underbrace{(z-y)}_{\text{積分すると }0}q^\mu \tag{4.74}$$

   などを用いて、$\gamma^\mu,\sigma^{\mu\nu}q_\nu$ に比例する項に書き直す。

4. 2∼3 ですべての項が $\gamma^\mu,(p'+p)^\mu,\sigma^{\mu\nu}q_\nu$ のいずれかに比例する形に整理できる。そして最後に Gordon equality, 式 (4.58) より

$$(p'+p)^\mu = -i\sigma^{\mu\nu}q_\nu+2m\gamma^\mu \tag{4.75}$$

   と変形することで式 (4.60) の形になる。

また積分することを用いると途中計算が簡単になる。$\gamma^\kappa\not{k}'\gamma^\mu\not{k}'\gamma_\kappa$ の項は、式 (4.11) $\displaystyle\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}k_\alpha k_\beta = k^2\eta^{\alpha\beta}\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}$ より

$$\gamma^\kappa\not{k}\gamma^\mu\not{k}\gamma_\kappa = -\frac{d-2}{d}\gamma^\kappa\gamma^\mu\gamma_\kappa k^2 = \frac{(d-2)^2}{d}k^2\gamma^\mu \tag{4.76}$$

となる。この手順に従い計算をする。$\gamma^\kappa \not{k}' \gamma^\mu \not{k}' \gamma_\kappa$ 項以外の分子は,

$$
\begin{aligned}
\gamma^\kappa & \big\{(1-y)\not{p}' - z\not{p} + m\big\}\gamma^\mu\big\{(1-z)\not{p} - y\not{p}' + m\big\}\gamma_\kappa \\
&= -(d-2)m^2\gamma^\mu + 4m\big\{(1-y)p'^\mu - zp^\mu + (1-z)p^\mu - yp'^\mu\big\} \\
&\quad + m(d-4)\big\{(1-y)\not{p}'\gamma^\mu - z\not{p}\gamma^\mu + \gamma^\mu(1-z)\not{p} - y\gamma^\mu\not{p}'\big\} \\
&\quad -2\big\{(1-z)\not{p} - y\not{p}'\big\}\gamma^\mu\big\{(1-y)\not{p}' - z\not{p}\big\} - (d-4)\big\{(1-y)\not{p}' - z\not{p}\big\}\gamma^\mu\big\{(1-z)\not{p} - y\not{p}'\big\} \qquad (4.77) \\
&= -(d-2)m^2\gamma^\mu + 4m\big\{(1-y-z)(p'+p)^\mu + (z-y)(p'-p)^\mu\big\} \\
&\quad + m(d-4)\big\{2m(1-y-z)\gamma^\mu + z\not{q}\gamma^\mu - y\gamma^\mu\not{q}\big\} \\
&\quad -2\big\{(1-y-z)m - (1-z)\not{q}\big\}\gamma^\mu\big\{(1-y-z)m + (1-y)\not{q}\big\} - (d-4)\big\{(1-y-z)m + z\not{q}\big\}\gamma^\mu\big\{(1-y-z)m - y\not{q}\big\} \qquad (4.78) \\
&= \big\{-(d-2)m^2 + 2m^2(d-4)(1-y-z) - 2(1-y-z)^2m^2 - (d-4)(1-y-z)^2m^2\big\}\gamma^\mu \\
&\quad + 4m\big\{(1-y-z)(p'+p)^\mu + 0\big\} \qquad \leftarrow (z-y)\text{ の積分より } 0 \\
&\quad + m(d-4)(y+z)(z\gamma^\mu\not{q} - y\not{q}\gamma^\mu) - 2m(1-y-z)\big\{[\gamma^\mu,\not{q}] + z\not{q}\gamma^\mu - y\gamma^\mu\not{q}\big\} \\
&\quad + \big\{2(1-y)(1-z) + (d-4)zy\big\}\not{q}\gamma^\mu\not{q} \qquad (4.79) \\
&= \big[-(d-2)m^2 - 2(1-y-z)^2m^2 + (d-4)m^2(1-y-z)(1+y+z) - 2(1-y)(1-z)q^2 - (d-4)zyq^2\big]\gamma^\mu \\
&\quad + 4m(1-y-z)(p'+p)^\mu + m\left(-2m(1-y-z)\big\{1 - \frac{1}{2}(y+z)\big\} - \frac{1}{2}(d-4)(y+z)^2\right)[\gamma^\mu,\not{q}] \qquad (4.80) \\
&= \big[-(d-2)m^2 - 2(1-y-z)^2m^2 - 2(1-y)(1-z)q^2 + 8m^2(1-y-z) + (d-4)\big\{m^2\big(1-(y+z)^2\big) - zyq^2\big\}\big]\gamma^\mu \\
&\quad - m\big\{2(1-y-z)(y+z) - (d-4)(y+z)^2\big\}i\sigma^{\mu\nu}q_\nu \qquad (4.81)
\end{aligned}
$$

となる。式 (4.60) の $F_1(q^2), F_2(q^2)$ のこの loop からの寄与は、前に掛かる因子に注意して、

$$
\begin{aligned}
F_1^{loop}(q^2) = -ie^2 \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1 dz\ & \frac{\delta(x+y+z-1)2!}{\big[k^2 - (y+z)^2m^2 + yzq^2 - x\mu^2 + i\varepsilon\big]^3} \\
\times\Bigg[m^2\big\{(1-y-z)(6+y+z) - (d-2)\big\} & - 2(1-y)(1-z)q^2 - \frac{1}{d}(d-2)^2k^2 \\
& + (d-4)\big\{m^2(1-(y+z)^2) - zyq^2\big\}\Bigg] \qquad (4.82)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_2^{loop}(q^2) = -ie^2 \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1 dz\ & \frac{\delta(x+y+z-1)2!}{\big[k^2 - (y+z)^2m^2 + yzq^2 - x\mu^2 + i\varepsilon\big]^3} \\
& \times\Big[-2m^2\big\{2(1-y-z)(y+z) - (d-4)(y+z)^2\big\}\Big] \qquad (4.83)
\end{aligned}
$$

Lamb shift に寄与する部分は, $q^2 \sim 0$ となるので、そのまわりの F_1, F_2 を求める。

F_2^{loop} は、積分が簡単に実行できる。式 (4.14) の積分公式を用い、低運動量の発散もないので $\mu \to 0$ として

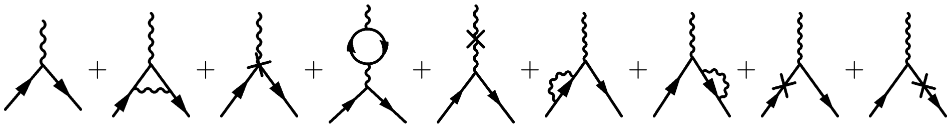
$$
\begin{aligned}
F_2^{loop}(0) &= -ie^2 \times i\int_0^1 dy\int_0^{1-y} dz(-1)^3\frac{1}{(4\pi)^{d/2}}\frac{\Gamma(3-d/2)}{\Gamma(3)}\frac{-2m^2\big\{2(1-y-z)(y+z) - (d-4)(y+z)^2\big\}}{(y+z)^2m^2} \\
&= \frac{\alpha}{\pi}\int_0^1 dy\int_0^{1-y} dz\left(\frac{1}{y+z} - 1\right) = \frac{\alpha}{2\pi} \qquad (4.84)
\end{aligned}
$$

を得る。

■F_1^{loop} の計算

F_1^{loop} は運動量の積分は発散を含むので、くりこみを行う必要がある。その時式使用するは，式 (4.66) である。1-loop のオーダーで F_1 を書き下すと

$$F_1(q^2) =$$



(4.85)

$$= 1 + F_1^{loop}(q^2) + (Z_2 - 1) - \Pi(q^2) \tag{4.86}$$

いま始終状態の電子は質量殻上にあるので電子の自己エネルギーグラフは寄与しない (式 (4.42) より)。$\Pi(q^2)$ は式 (4.28) で与えられている。ゆえに式 (4.66),(4.82) と式 (4.14) の積分公式より

$$F_1^{loop}(0) = -(Z_2 - 1) \tag{4.87}$$

$$\begin{aligned} Z_2 - 1 = &\frac{e^2}{8\pi^2}(1 + \varepsilon \ln 4\pi - \gamma\varepsilon) \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dz \\ &\times \left[\frac{-m^2 - (1-y-z)^2 m^2 + 4m^2(1-y-z)}{(y+z)^2 m^2 + (1-y-z)^{\mu^2}} + \frac{(1-2\varepsilon)}{\varepsilon}\big(1 - \varepsilon \ln\big\{(y+z)^2 m^2 + (1-y-z)\mu^2\big\}\big) \right] \end{aligned} \tag{4.88}$$

を得る。この Z_2 は式 (4.40) と同一のものであり実際上記の式で極限 $\varepsilon \to 0$ をとると

$$Z_2 \sim \frac{e^2}{16\pi^2}\frac{1}{\varepsilon} \tag{4.89}$$

と発散部分が式 (4.40) と一致する。よって

$$\begin{aligned} F_1(q^2) = &1 - \Pi(q^2) \\ &- \frac{e^2}{16\pi^2} \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dz \left(\frac{-2m^2 - 2(1-y-z)^2 m^2 - 2(1-y)(1-z)q^2 + 8m^2(1-y-z)}{(y+z)^2 m^2 - yzq^2 + (1-y-z)\mu^2} \right. \\ &\left. - \frac{-2m^2 - 2(1-y-z)^2 m^2 + 8m^2(1-y-z)}{(y+z)^2 m^2 + (1-y-z)\mu^2} - 2\ln\left[\frac{(y+z)^2 m^2 - yzq^2 + (1-y-z)\mu^2}{(y+z)^2 m^2 (1-y-z)\mu^2} \right] \right) \end{aligned} \tag{4.90}$$

4.3.3 Lamb shift に必要な部分

Lamb shift は式 (3.30) のグラフにより計算される。それらのグラフは，そこにバーテックスの補正、真空偏極グラフが含まれているので式 (4.59) の $\Gamma^\mu(p', p)$ を使用して計算できる。そして Lamb shift に必要な部分は、$q^2/m^2 \ll 1$ の部分であることが後に示される。ゆえに次に先の節で得られた $\Gamma^\mu(p', p)$ を $q^2 \sim$ まわりで $\mathcal{O}(q^2/m^2)$ までテイラー展開する。

■$F_2(q^2)$ のテイラー展開

このオーダーでは，式 (4.84) から

$$F_2(q^2) \simeq \frac{e^2}{8\pi} \tag{4.91}$$

となる。式 (4.60) では F_2 は質量 m で割ってあるのでこの項までしか寄与しない。

■$F_1(q^2)$ **のテイラー展開**

まず、$\Pi(q^2)$ は式 (4.28) より

$$\Pi(q^2) = \Pi(0) + \Pi'(0)q^2 = \frac{e^2}{60\pi^2}\left(\frac{q}{m}\right)^2 \tag{4.92}$$

である。そのほかの部分を F^{ver} とすると

$$F^{ver}(0) = 0 \tag{4.93}$$

$$\left.\frac{dF^{ver}}{dq^2}\right|_{q^2=0} = \frac{e^2}{16\pi^2}\int_0^1 dy \int_0^{1-y} dz \left[\frac{2(1-y-z)}{(y+z)^2m^2+(1-y-z)\mu^2} - \frac{2yzm^2\left\{(2-y-x)^2-4(1-y-x)\right\}}{\left[(y+z)^2m^2+(1-y-z)\mu^2\right]^2}\right] \tag{4.94}$$

この積分は実行可能である。低運動量による発散に注意しながら

よって

$$F_1(q^2) \simeq 1 - \frac{e^2}{24\pi^2}\left(\frac{q}{m}\right)^2\left[\ln\left(\frac{\mu}{m}\right)^2 + \frac{2}{5} + \frac{3}{4}\right] \tag{4.95}$$

を得る。

5 LambShift 計算

以上導出した結果をもちいて実際に準位のずれを計算する。まず用いるラグランジアンと計算すべきループグラフ図 3 を書き下す

5.1 ラグランジアンとグラフ

水素原子のラグランジアン密度は、

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_{free} + \mathscr{L}_{int}^{ext} + \mathscr{L}_{int}^{QED} + \mathscr{L}_{counter} \tag{5.1}$$

$$\mathscr{L}_{free} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{5.2}$$

$$\mathscr{L}_{int}^{ext} = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\mathscr{A}_\mu \tag{5.3}$$

$$\mathscr{L}_{int}^{QED} = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \tag{5.4}$$

$$\mathscr{L}_{counter} = (Z_2-1)\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + \delta m Z_2\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}(Z_3-1)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - (Z_2-1)e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu - \frac{1}{2}(Z_3-1)\mathscr{F}_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - (Z_2-1)e\mathscr{A}_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \tag{5.5}$$

ここで、$\mathscr{F}^{\mu\nu} = \partial^\mu\mathscr{A}^\nu - \partial^\nu\mathscr{A}^\mu$ である。外場の項は $F^{\mu\nu} \to F^{\mu\nu} + \mathscr{F}^{\mu\nu}$ の置き換えによって得られる。$\mathscr{A}_\mu$ は、演算子ではなく単なる数であるから $\mathscr{F}^{\mu\nu}\mathscr{F}_{\mu\nu}$ のような項は考えなくてよい。それは、散乱振幅などは、

$$\lim_{t_1,t_0\to\infty}\frac{\langle\beta|\exp\{-i\hat{H}(t_1-t_0)\}|\alpha\rangle}{\langle 0|\exp\{-i\hat{H}(t_1-t_0)\}|0\rangle} \tag{5.6}$$

と定義されているので、単なる数はキャンセルしてしまうためである。これを用いて $-i\Sigma_{\mathscr{A}}$ を導出する。

式 (2.17) と Section3.1 から、$\mathscr{H}_{int} = -\mathscr{L}_{int}^{QED} - \mathscr{L}_{counter}$ で、

$$
\begin{aligned}
S'(x,y) &= \langle 0_e|\psi_e(x)\bar{\psi}_e(y)|0_e\rangle - i\int d^4z\,\langle 0_e|\mathrm{T}\mathscr{H}_{int}(z)\psi_e(x)\bar{\psi}_e(y)|0_e\rangle \\
&\quad + \frac{(-i)^2}{2!}\int d^4z d^4w\,\langle 0_e|\mathrm{T}\mathscr{H}_{int}(z)\mathscr{H}_{int}(w)\psi_e(x)\bar{\psi}_e(y)|0_e\rangle + \ldots \qquad (5.7)\\
&= S_{\mathscr{A}}(x,y) + \int d^4z\int d^4w S_{\mathscr{A}}(x,z)\big(-i\Sigma_{\mathscr{A}}(z,w)\big)S_{\mathscr{A}}(w,y) + \ldots \\
-i\Sigma_{\mathscr{A}}(z,w) &= (-ie\gamma^\mu)D_{\mu\nu}(z-w)S_{\mathscr{A}}(z-w)(-ie\gamma^\nu) \\
&\quad +\delta^4(z-w)\Big[i(Z_2-1)\big(i\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial z^\mu}-m\big) + i\delta m + (-ie\gamma^\mu)(Z_2-1)\mathscr{A}_\mu(z)\Big] \\
&\quad +\delta^4(z-w)(-1)\int d^4u\mathrm{Tr}\big\{S_{\mathscr{A}}(u,u)(-ie\gamma^\nu)\big\}D_{\mu\nu}(u-w)(-ie\gamma^\nu) \\
&\quad -i(Z_3-1)\delta^4(z-w)\int d^4u\mathscr{F}^{\alpha\beta}(u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}D_{\mu\beta}(z-u)(-ie\gamma^\mu) \qquad (5.8)\\
\delta E_N &= i\int d^3\boldsymbol{z}\int d^3\boldsymbol{w}\;\bar{u}_N(\boldsymbol{z})\big\{-i\Sigma_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w};E_N)\big\}u_N(\boldsymbol{w}) \qquad (5.9)
\end{aligned}
$$

運動量空間では、

$$
\begin{aligned}
-i\Sigma_{\mathscr{A}}(p',p) &= (-ie\gamma^\mu)\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2+i\varepsilon}S_{\mathscr{A}}(p'-k,p-k)(-ie\gamma^\nu) \\
&\quad + (2\pi)^4\delta^4(p'-p)\;i\big[(Z_2-1)(\not{p}-m)+\delta m Z_2\big] + (-ie\gamma^\mu)(Z_2-1)\mathscr{A}_\mu(p'-p) \\
&\quad + (-ie\gamma^\mu)\frac{-i\eta_{\mu\nu}}{(p-p')^2-i\varepsilon}(-1)\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}\big\{S_{\mathscr{A}}(q,q+p'-p)(-ie\gamma^\nu)\big\} \\
&\quad + (-ie\gamma^\mu)\frac{-i}{(p'-p)^2+i\varepsilon} - i(Z_3-1)\big[(p-p')^2\eta_{\mu\nu}-(p'-p)_\mu(p'-p)_\nu\big]\mathscr{A}^\nu(p'-p) \qquad (5.10)\\
S_{\mathscr{A}}(p',p) &= (2\pi)^4\delta^4(p'-p)\frac{i(\not{p}+m)}{p^2-m^2+i\varepsilon} + \frac{i(\not{p}'+m)}{p'^2-m^2+i\varepsilon}\big(-ie\gamma^\mu\mathscr{A}_\mu(p'-p)\big)\frac{i(\not{p}+m)}{p^2-m^2+i\varepsilon} + \ldots
\end{aligned}
$$

$$
\delta E_N = i\int d^3\boldsymbol{p}'\int d^3\boldsymbol{p}\;\bar{u}_N(\boldsymbol{p}')\big\{-i\Sigma_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p};E_N)\big\}u_N(\boldsymbol{p}) \qquad (5.11)
$$

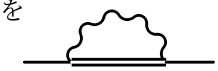
となる。QED の場合と異なる箇所は、電子プロパゲーター $S_{\mathscr{A}}$ で伝搬するときは運動量が保存しないところである。そのため途中各点で空間積分が実行できず最終的に自己エネルギーグラフは、一つの運動量の関数ではなく 2 つの運動量の関数になる。フーリエ変換も空間の 2 変数について独立に行わなければならず計算はすこし面倒である。

5.2 低運動量の発散

$(Z\alpha) \ll 1$ の原子であれば Sec3.4 で述べたように QED の 1-loop 輻射補正の計算に一致する。しかし 4 で見たように電子の自己エネルギーグラフとバーテックスの補正グラフには、低運動量の発散があった。そこでは、その発散を防ぐために一時的に光子に仮想的な質量 μ をもたせてその発散を回避していた。最終的な結果にそのような質量依存性は、含まれてはならない。そこで、この仮想的な質量の依存性を消去するために外場の高次の項も含めて計算する。

5.2.1　光子プロパゲーターの分解

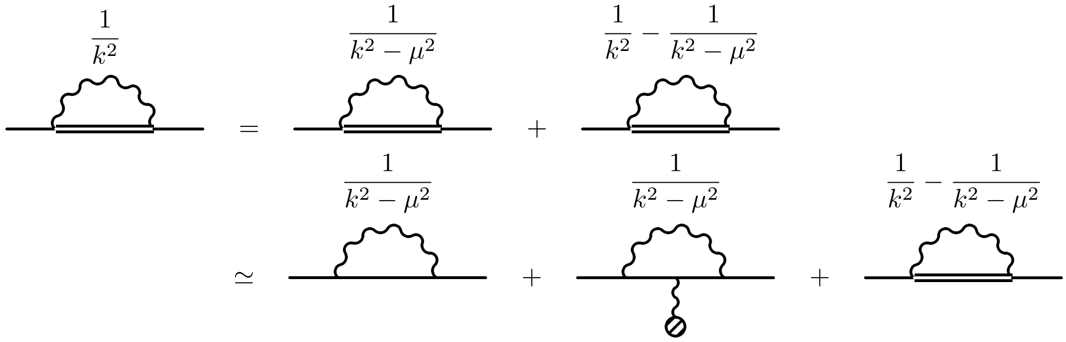
問題となっているグラフは右のグラフであり、これを外場の一次までとると低運動量の発散が残ってしまう。そこでフォトンプロパゲーターを $(Z\alpha)^2 m \ll \mu \ll (Z\alpha)m$ を用いて、



$$\frac{1}{k^2+i\varepsilon} = \frac{1}{k^2-\mu^2+i\varepsilon} + \left(\frac{1}{k^2+i\varepsilon} - \frac{1}{k^2-\mu^2+i\varepsilon}\right) \tag{5.12}$$

$(Z\alpha)^2 m \sim$ 束縛エネルギー
$(Z\alpha)m \sim$ 電子の運動量

と分解するすると第一項目は運動量の下限を μ に、第二項目は運動量の上限を μ としているので、



となる。そして、最初の二項の高エネルギー部分のグラフによる低運動量の発散が第三項目の低エネルギー部分のグラフにより結果的にキャンセルすることになる。この分解に伴いこのグラフに対応する counter term も分解される。つまり

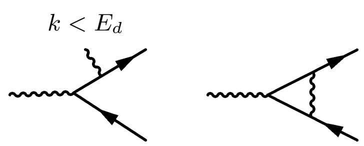
$$Z_2\left(\frac{1}{k^2}\right) \;\Rightarrow\; Z_2\left(\frac{1}{k^2-\mu^2}\right) + Z_2\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2-\mu^2}\right) \tag{5.13}$$

右辺第 2 項目は、式 (4.45) に対応する。δm の項も同様である。

5.2.2　外場のない QED の場合

外場のない QED では低運動量の発散は以下のように処理していた。

■外場のない QED の場合



左側のグラフはでていく電子が途中で運動量 $k < E_d$ (E_d は測定器の観測できるエネルギーの下限値) の光子を放出している。この場合そのような光子は測定器にはかからない。よって左図のような二つのグラフは測定器では区別できないので、この二つのグラフは常にセットで考えなければならない。

そしてこの二つのグラフの和は有限となる。

■Lamb shift の場合

Lamb shift の場合そのようなキャンセルはできない。Lamb shift を与える式 (3.28) から、計算すべきものは自己エネルギーグラフであり、上の場合のような外線を含まないためである。

5.3 高エネルギー部分の計算

式 (5.10) を外場を一次までとったときそれが Sec4 で求めた loop グラフの計算に一致することを確かめる。そして Sec4 で求めた結果をもちいて高エネルギー部分の計算を行う。結果は $\mu \to 0$ による発散が残る。この計算結果とその発散は低エネルギー部分の計算からキャンセルすること、そして物理量の次元を考えることにより Lamb shift を見積もることができる。

5.3.1 QED 輻射補正グラフとの一致

式 (5.10) で外場を一次までとると式 (5.11) をもちいて、

$$\begin{aligned}
-i\Sigma_{\mathscr{A}}(p',p) \simeq\ & (2\pi)^4\delta^4(p'-p)(-ie\gamma^\mu)\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2-\mu^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{p}-\not{k}+m)}{(p-k)^2-m^2+i\varepsilon}(-ie\gamma^\nu) \\
&+(2\pi)^4\delta^4(p'-p)\ i\big[(Z_2-1)(\not{p}-m)+\delta m Z_2\big] \\
&+(-ie\gamma^\mu)\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2-\mu^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{p}'-\not{k}+m)}{(p'-k)^2-m^2+i\varepsilon}(-ie\gamma^\lambda\mathscr{A}_\lambda(p'-p))\frac{i(\not{p}-\not{k}+m)}{(p-k)^2-m^2+i\varepsilon}(-ie\gamma^\nu) \\
&+(-ie\gamma^\mu)(Z_2-1)\mathscr{A}_\mu(p'-p) \\
&+(-ie\gamma^\mu)\frac{-i\eta_{\mu\nu}}{(p-p')^2-i\varepsilon}(-1)\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}\bigg\{\frac{i(\not{q}+m)}{q^2-m^2+i\varepsilon}(-ie\gamma^\lambda\mathscr{A}_\lambda(p'-p))\frac{i(\not{p}+\not{p}'-\not{p}+m)}{(q+p'-p)^2-m^2+i\varepsilon}(-ie\gamma^\nu)\bigg\} \\
&+(-ie\gamma^\lambda)\frac{-i}{(p'-p)^2+i\varepsilon}-i(Z_3-1)\big[(p-p')^2\eta_{\lambda\mu}-(p'-p)_\lambda(p'-p)_\mu\big]\mathscr{A}^\mu(p'-p)
\end{aligned}\tag{5.14}$$

となる。式 (3.1) より δE_N は $\Sigma_{\mathscr{A}}$ を水素原子の波動関数 $u_N(\boldsymbol{p})$ ではさんだものであるが、いまその $u_N(\boldsymbol{p})$ が

$$u_N(\boldsymbol{p}) \simeq \sum_\sigma u(\boldsymbol{p},\sigma)[f_N(\boldsymbol{p})]_\sigma \tag{5.15}$$

$$(\not{p}-m)u(\boldsymbol{p},\sigma)=0 \quad [f_N(\boldsymbol{p})]_\sigma : 2\ \text{成分のシュレディンガー方程式の解} \tag{5.16}$$

と近似できるから、式 (4.42) より電子の自己エネルギーに関する項は寄与しない。
よって

$$-i\Sigma_{\mathscr{A}}(p',p) = -ie\mathscr{A}_\mu(p'-p)\Gamma_1^\mu(p',p) \tag{5.17}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_1^\mu(p',p) =\ & (-ie\gamma^\lambda)\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2-\mu^2+i\varepsilon}\frac{i(\not{p}'-\not{k}+m)}{(p'-k)^2-m^2+i\varepsilon}\ \gamma^\mu\ \frac{i(\not{p}-\not{k}+m)}{(p-k)^2-m^2+i\varepsilon}(-ie\gamma^\nu) \\
&+\gamma^\mu(Z_2-1) \\
&+(-ie\gamma^\lambda)\frac{-i\eta_{\mu\nu}}{(p-p')^2-i\varepsilon}(-1)\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}\bigg\{\frac{i(\not{q}+m)}{q^2-m^2+i\varepsilon}\ \gamma^\mu\ \frac{i(\not{p}+\not{p}'-\not{p}+m)}{(q+p'-p)^2-m^2+i\varepsilon}(-ie\gamma^\nu)\bigg\} \\
&+\gamma^\lambda\frac{-i}{(p'-p)^2+i\varepsilon}-i(Z_3-1)\big[(p-p')^2\eta_{\lambda\mu}-(p'-p)_\lambda(p'-p)_\mu\big]
\end{aligned}\tag{5.18}$$

と Sec.4 真空偏極とバーテックスの補正グラフと一致する。1-loop オーダーの式 (4.47) の $\Gamma^\mu(p',p)$ を用いれば、

$$\begin{aligned}
\Gamma^\mu(p',p) &= \gamma^\mu+\Gamma_1^\mu(p',p) \\
&= F_1(q^2)\gamma^\mu+F_2(q^2)\frac{i\sigma^{\mu\nu}}{2m}q^\nu
\end{aligned}\tag{5.19}$$

となる。ここでエネルギー変化分を与える式 (3.1) を改めて書き直すと

$$\delta E_N = i\int \frac{d^3\boldsymbol{p'}}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\bar{u}_N(\boldsymbol{p}')\big\{-i\Sigma_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p};E_N)\big\}u_N(\boldsymbol{p}) \tag{5.20}$$

であった。必要な自己エネルギーは p' と p の関数で表されたものではなく $\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p},E_N$ であり、それは、式 (3.11) から

$$\Sigma_{\mathscr{A}}(p',p) = \delta(p^{0\prime}-p^0)\Sigma_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p},p^0) \tag{5.21}$$

のことである。さらに　$u_N(\boldsymbol{p})$ は水素原子波動関数であるから、その典型的な運動量 $p\sim(Z\alpha)m$ のまわりでしか主に値を持たない。ゆえに $\dfrac{q}{m}=\dfrac{p'-p}{m}\sim Z\alpha$ である。以上より自己エネルギー $-i\Sigma_{\mathscr{A}}$ は

$$-i\Sigma_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p},E_N) = -ie\mathscr{A}(\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p})\Gamma_1^{\mu}(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p},E_N) \tag{5.22}$$

$$\Gamma_1^{\mu}(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p},E_N) \simeq \frac{2\alpha^2}{3m^2}(\boldsymbol{p'}^2-\boldsymbol{p})^2\left[\ln\left(\frac{\mu}{m}\right)^2+\frac{2}{5}+\frac{3}{4}\right]\gamma^{\mu}+\frac{\alpha}{2\pi}\frac{i\sigma^{\mu\nu}}{2m}q_{\nu} \tag{5.23}$$

となる。Γ_1^{μ} については $q/m\sim Z\alpha\ll 1$ より Sec.4.3.3 の結果を適用した。まとめると

$$\begin{aligned}\delta E_N = \int \frac{d^3\boldsymbol{p'}}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\ \bar{u}_N(\boldsymbol{p}')\bigg\{&\frac{2\alpha^2}{3m^2}(\boldsymbol{p'}-\boldsymbol{p})^2\left[\ln\left(\frac{\mu}{m}\right)^2+\frac{2}{5}+\frac{3}{4}\right]\gamma^{\mu}\\ &+\frac{\alpha}{2\pi}\frac{i\sigma^{\mu\nu}}{2m}q_{\nu}\bigg\}u_N(\boldsymbol{p})\times e\mathscr{A}(\boldsymbol{p'}-\boldsymbol{p})_{\mu}\end{aligned} \tag{5.24}$$

となる。

5.3.2 **見積り**

式 (5.24) から Lamb shift を次元解析を用いて見積もることができる。その前に式 (5.24) を数値を入れて計算しやすいように変形する。見積もる上では主要な項 $\ln(\mu/m)^2$ のみを考慮する。

いままでは一般的な外場 $\mathscr{A}_{\mu}$ を仮定していたが、ここからはクーロンポテンシャル $\mathscr{A}_0$ として取り扱う。まず、式 (5.15) から

$$\bar{u}_N(\boldsymbol{p'})\gamma^0 u_N(\boldsymbol{p}) \simeq f_N^{\dagger}(\boldsymbol{p'})f_N(\boldsymbol{p}) \tag{5.25}$$

が成り立つ。δE_N は

$$\delta E_N = \frac{2\alpha^2}{3m^2}\ln\left(\frac{\mu}{m}\right)^2\int \frac{d^3\boldsymbol{p'}}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\ f_N^{\dagger}(\boldsymbol{p'})(\boldsymbol{p'}-\boldsymbol{p})^2 e\mathscr{A}(\boldsymbol{p'}-\boldsymbol{p})_0 f_N(\boldsymbol{p}) \tag{5.26}$$

となる。さらに座標表示に移ると

$$\delta E_N = -\frac{2\alpha^2}{3m^2}\ln\left(\frac{\mu}{m}\right)^2\int d^3\boldsymbol{x} f_N^{\dagger}(\boldsymbol{x})\big(Ze\delta^3(\boldsymbol{x})\big)f(\boldsymbol{x}) = -\frac{2Z^4\alpha^5 m}{3\pi n^3}\ln\left(\frac{\mu}{m}\right)^2\delta_{l,0} \tag{5.27}$$

となる。途中

$$\nabla^2\mathscr{A}_0 = -Ze\delta^3(\boldsymbol{x}) \tag{5.28}$$

$$f_{n,j,l,m}(0)_{\sigma} = 2\left(\frac{Z\alpha m}{n}\right)^{3/2}\ \delta_{l,0}\ \delta_{\sigma,m}\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \tag{5.29}$$

n： 主量指数　　j： 全角運動量　　m： 全角運動量の Z 成分

l： 軌道角運動量　　σ： スピン

一つ目の式は静的なクーロンポテンシャルであることから従う。2 つ目の式は添字がややこしい。これは $f_N(\boldsymbol{x})$ が単なるシュレディンガー方程式の解ではなく 2 成分の解となっているため、スピンや全角運動量も考えなければならないためである。式 (5.27) は $\mu \to 0$ で発散するがこの高エネルギーと低エネルギーに分けて計算する方法が正しければこの発散はなくなるはずである。よって低エネルギーの計算から

$$-\frac{2Z^4\alpha^5 m}{3\pi n^3}\ln\left(\frac{B}{\mu}\right)^2 \tag{5.30}$$

の形の項が自己エネルギーグラフの計算から出てくるはずである。log の中身は無次元量であること、そしてこれは低エネルギー領域から生じる項であることから、

$$B \sim (\text{束縛エネルギー}) = 13.6[\text{eV}] \tag{5.31}$$

であると推測される。よって Lamb shift は

$$\delta E_{n,l} \simeq -\frac{2Z^4\alpha^5 m}{3\pi n^3}\ln(Z\alpha)^4 \tag{5.32}$$

と見積もれる。実際に $n=2, l=0$ の 2s 状態については

$$\begin{aligned}\delta E_{2,0} &= \frac{2\times\left(\frac{1}{137}\right)^5\times 0.511[\text{MeV}]}{3\times 3.14\times 2^3}\times 4\ln(137) = 5.5\times 10^{-6}[\text{eV}] && (5.33)\\ &= 1.3\times 10^3[\text{MeV}]\times 2\pi\hbar && (5.34)\end{aligned}$$

となる。$l \neq 0$ の状態に対してはこの見積りでは変化はないので実際の $2S_{1/2}, 2L_{1/2}$ の準位差とこの見積りの結果をくらべると

$$\begin{aligned}&\text{実際} \qquad \delta E(2S_{1/2}-2L_{1/2}) = 1051[\text{Mhz}]\times 2\pi\hbar && (5.35)\\ &\text{見積り} \qquad \delta E(2S_{1/2}-2L_{1/2}) = 1300[\text{Mhz}]\times 2\pi\hbar && (5.36)\end{aligned}$$

と 20% のずれがあるが、Lamb shift の大部分がこの $\mu \to 0$ で生じる見かけ上の発散に関連する部分で占められていることがわかる。

5.3.3 高エネルギー部分からの寄与

式 (5.24) をもう少し整理して、低エネルギーの部分からの寄与の計算に移る。まず式 (5.24) の $\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p}$ に比例する項については、式 (5.27) から

$$[\delta E_N]_{F_1} = -\frac{2Z^4\alpha^5 m}{3\pi n^3}\left[\ln\left(\frac{\mu}{m}\right)^2+\frac{2}{5}+\frac{3}{4}\right]\delta_{l,0} \tag{5.37}$$

これは形状因子 $F_1(q^2)$ による項である。残りの項は $F_2(q^2)$ による項は式 (5.27) を導出した方法と同様にして整理する。まず、座標表示にうつり

$$\begin{aligned}[\delta E_N]_{F_2} &= -i\frac{\alpha}{8m\pi}\int d^3\boldsymbol{x}\,\Big(\bar{u}_N(\boldsymbol{x})[\gamma^\mu,\gamma^\nu]u_N(\boldsymbol{x})\Big)\partial_\nu e\mathscr{A}_\mu(\boldsymbol{x}) && (5.38)\\ &= -i\frac{\alpha}{16m\pi}\int d^3\boldsymbol{x}\,\Big(\bar{u}_N(\boldsymbol{x})[\gamma^\mu,\gamma^\nu]u_N(\boldsymbol{x})\Big)e\mathscr{F}_{\mu\nu}(\boldsymbol{x}) && (5.39)\end{aligned}$$

静的なクーロン場の時

$$[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\mathscr{F}_{\mu\nu} = 2[\gamma^i,\gamma^0]\partial_i\mathscr{A}_0 \tag{5.40}$$

これと式 (5.15) から

$$
\begin{aligned}
[\delta E_N]_{F_2} &= -i\frac{\alpha}{8m\pi}\int d^3\boldsymbol{x}\ \Big(\bar{u}_N(\boldsymbol{x})[\gamma^i,\gamma^0]u_N(\boldsymbol{x})\Big)\partial_i e\mathscr{A}_0(\boldsymbol{x}) \\
&= \frac{\alpha}{8m\pi}\int d^3\boldsymbol{x}\ \Big\{-(f_N^\dagger f_N)\nabla^2\mathscr{A}_0(\boldsymbol{x}) + 2if_N^\dagger(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\sigma}\cdot(\nabla e\mathscr{A}_0)\times\nabla f_N(\boldsymbol{x})\Big\} \qquad (5.41)
\end{aligned}
$$

を得る。u_N を f_N に書き換える二つ目の式の計算は少し煩雑である。以上より高エネルギー部の寄与をまとめると

$$
\begin{aligned}
[\delta E_N]_h = \frac{2\alpha}{3\pi m}&\left(\ln\left(\frac{\mu}{m}\right)^2 + \frac{2}{5}\right)\int d^3\boldsymbol{x}\ f_N^\dagger(\boldsymbol{x})e\nabla^2\mathscr{A}_0(\boldsymbol{x})f_N(\boldsymbol{x}) \\
&+ \frac{i\alpha}{4\pi m^2}\int d^3\boldsymbol{x}\ f_N^\dagger(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\sigma}\cdot\big\{\nabla(e\mathscr{A}_0(\boldsymbol{x}))\times\nabla f_N(\boldsymbol{x})\big\} \qquad (5.42)
\end{aligned}
$$

となる。

5.4 低エネルギー部の計算

これから低エネルギー部の計算を概観する。Sec.5.2.1 で導入したように、低エネルギーで計算すべきグラフは電子プロパゲーターの補正グラフであった。そしてその光子プロパゲーターは運動量 μ でカットオフされたものを使用する。まずこのグラフの電子プロパゲーターは $S_{\mathscr{A}}$ で外場によって補正されているグラフであるから式 (3.16) が適用できる (低エネルギー領域なので外場の一次まででではなくすべての次数考えなければならない)。この式の分母に注目すると、量子力学の 2 次の摂動論の分母に似ていることに気がつく。実際式変形をしていくと、この自己エネルギーグラフを量子力学の摂動論で扱ったときの式の形に一致することが示される。

そののちに低エネルギーと近似して高エネルギー部の発散をキャンセルしていることをあらわに見と取れるように式変形をする。

5.4.1 量子力学の摂動論との一致

量子力学の摂動論をとの対応をみる。そのためには自己エネルギーグラフの表式として座標とエネルギーを用いた式 (5.9) の $-i\Sigma_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};E_N)$ を用いると良い。それは式 (5.8) より

$$
\begin{aligned}
-i\Sigma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};E_N) &= \int dx^0 - i\Sigma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};x^0-y^0)e^{-iE_N(x^0-y^0)} \qquad (5.43) \\
&= (-ie\gamma^\mu)\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4} - i\eta_{\mu\nu}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k^2-\mu^2}\right)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}S_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};E_N-k^0)(-ie\gamma^\nu) \\
&\quad + i(Z_2-1)\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\gamma^0\big(E-(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+m\beta+e\mathscr{A}_0-e\alpha_i\mathscr{A}^i)\big)+i\delta m \qquad (5.44)
\end{aligned}
$$

となる。Sec.5.2.1 で述べたように計算すべきは電子プロパゲーターの補正グラフのみである。そして第二項目は Dirac 方程式となっているので $u_N(\boldsymbol{x})$ に作用するとゼロとなるから

$$
\begin{aligned}
[\delta E_N]_l &= i\int d^3\boldsymbol{x}\int d^3\boldsymbol{y}\ \bar{u}_N(\boldsymbol{x})\big\{-i\Sigma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};E_N)\big\}u_N(\boldsymbol{y}) \\
&= i\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\int d^3\boldsymbol{x}\int d^3\boldsymbol{y}\ \bar{u}_N(\boldsymbol{x})(-ie\gamma^\mu)S_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};E_N-k^0) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \times(-i\eta_{\mu\nu})\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k^2-\mu^2}\right)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}(-ie\gamma^\nu)u_N(\boldsymbol{y}) \\
&\quad -i\delta m\int d^3\boldsymbol{x}\int d^3\boldsymbol{y}\ \bar{u}_N(\boldsymbol{x})u_N(\boldsymbol{y})
\end{aligned}
\tag{5.45}
$$

式 (3.16) より $S_{\mathscr{A}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};E_N-k^0)$ を変形しておくと

$$
\begin{aligned}
[\delta E_N]_l = +\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}&\int d^3\boldsymbol{x}\int d^3\boldsymbol{y}\ \bar{u}_N(\boldsymbol{x})(-ie\gamma^\mu)\sum_M\left(\frac{u_M(\boldsymbol{x})\bar{u}_M(\boldsymbol{y})}{E_M-E_N+k^0-i\varepsilon}-\frac{v_M(\boldsymbol{x})\bar{v}_M(\boldsymbol{y})}{E_M+E_N-k^0-i\varepsilon}\right) \\
&\qquad\qquad \times(-i\eta_{\mu\nu})\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k^2-\mu^2}\right)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}(-ie\gamma^\nu)u_N(\boldsymbol{y}) \\
-i\delta m&\int d^3\boldsymbol{x}\int d^3\boldsymbol{y}\ \bar{u}_N(\boldsymbol{x})u_N(\boldsymbol{y})
\end{aligned}
\tag{5.46}
$$

量子力学の摂動論と比べるために k^0 積分を実行する。これは留数定理を使用することで簡単に実行できる。

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}dk^0\ \frac{1}{k^2-\mu^2+i\varepsilon}\ \frac{1}{E_M-E_N+k^0-i\varepsilon} \\
&\qquad = \oint dk^0\ \frac{1}{\big\{k^0-(\sqrt{\boldsymbol{k}^2+\mu^2}-i\varepsilon)\big\}\big\{k^0-(-\sqrt{\boldsymbol{k}^2+\mu^2}+i\varepsilon)\big\}}\ \frac{1}{k^0-(E_N-E_M+i\varepsilon)} \\
&\qquad = -\frac{-i\pi}{\sqrt{\boldsymbol{k}^2+\mu^2}}\ \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{k}^2+\mu^2}-E_N+E_M-i\varepsilon}
\end{aligned}
\tag{5.47}
$$

さらに

$$
\Gamma^\rho_{MN}(\boldsymbol{k})\equiv\int d^3\boldsymbol{y}\ e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{y}}\bar{u}_M(\boldsymbol{y})\gamma^\rho u_N(\boldsymbol{y}) \tag{5.48}
$$

$$
\tilde{\Gamma}^\rho_{MN}(\boldsymbol{k})\equiv\int d^3\boldsymbol{y}\ e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{y}}\bar{v}_M(\boldsymbol{y})\gamma^\rho u_N(\boldsymbol{y}) \tag{5.49}
$$

を用いると

$$
\begin{aligned}
[\delta E_N]_l = \int\frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}\ \Bigg\{& i\eta^{\mu\nu}\sum_M(-ie)^2\Gamma^{\mu*}_{MN}(\boldsymbol{k})\Gamma^\nu_{MN}(\boldsymbol{k}) \\
&\times\left(\frac{i\pi}{|\boldsymbol{k}|}\ \frac{1}{E_M-E_N+|\boldsymbol{k}|-i\varepsilon}-\frac{i\pi}{\sqrt{\boldsymbol{k}^2+\mu^2}}\ \frac{1}{E_M-E_N+\sqrt{\boldsymbol{k}^2+\mu^2}-i\varepsilon}\right) \\
&-(-ie)^2\tilde{\Gamma}^{\mu*}_{MN}(\boldsymbol{k})\tilde{\Gamma}^\nu_{MN}(\boldsymbol{k})\times\left(\frac{i\pi}{|\boldsymbol{k}|}\ \frac{1}{E_M+E_N+|\boldsymbol{k}|-i\varepsilon}-\frac{i\pi}{\sqrt{\boldsymbol{k}^2+\mu^2}}\ \frac{1}{E_M+E_N+\sqrt{\boldsymbol{k}^2+\mu^2}-i\varepsilon}\right) \\
&-\delta m\int d^3\boldsymbol{x}\ \bar{u}_N(\boldsymbol{x})u_N(\boldsymbol{x})\Bigg\}
\end{aligned}
\tag{5.50}
$$

を得る。第 1 項目を見ると分母は 中間状態 (フォトンと電子) − 始状態 (電子のエネルギー) $= E_M+\boldsymbol{k}-E_N$ であり、分子は 始状態と中間状態で相互作用をはさんだ行列要素 $=\Gamma^*(\boldsymbol{k})\Gamma(\boldsymbol{k})$ が来ている。第 2 項目は中間状態として陽電子を含んだもので確かに量子力学の摂動論の形に一致する。

いま $u_N(x) = u_N(\boldsymbol{x})e^{-iE_N x^0}$ であることを思い出せば、カレント,$J^\mu_{MN}(x) = e\bar{u}_M(x)\gamma^\mu u_N(x)$ の保存,$\partial_\mu J^\mu_{MN}(x) = 0$ より、

$$i\frac{\partial}{\partial x^0}\big(e\bar{u}_M(\boldsymbol{x})\gamma^0 u_N(\boldsymbol{x})e^{-i(E_N-E_M)x^0}\big)\Big|_{x^0=0} = -i\partial_i\big(e\bar{u}_M(\boldsymbol{x})\gamma^i u_N(\boldsymbol{x})\big) \tag{5.51}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
k_i\Gamma^i_{MN}(\boldsymbol{k}) &= k_i\int d^3\boldsymbol{y}\ e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{y}}\bar{u}_M(\boldsymbol{y})\gamma^i u_N(\boldsymbol{y}) \\
&= i\int d^3\boldsymbol{y}\ (\partial_i e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{y}})\bar{u}_M(\boldsymbol{y})\gamma^i u_N(\boldsymbol{y}) \\
&= -i\int d^3\boldsymbol{y}\ e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{y}}\partial_i(\bar{u}_M(\boldsymbol{y})\gamma^i u_N(\boldsymbol{y})) \\
&= i\int d^3\boldsymbol{y}\ e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{y}}\partial_0\big[\bar{u}_M(\boldsymbol{y})\gamma^0 u_N(\boldsymbol{y})e^{-i(E_N-E_M)x^0}\big]_{x^0=0} = (E_N - E_M)\Gamma^0_{MN}(\boldsymbol{k})
\end{aligned} \tag{5.52}$$

を得る。$\tilde{\Gamma}^\mu(\boldsymbol{k})$ についても同様にして

$$k_i\tilde{\Gamma}^i_{MN}(\boldsymbol{k}) = (E_N + E_M)\tilde{\Gamma}^0_{MN}(\boldsymbol{k}) \tag{5.53}$$

を得る。またこれらから以下の 2 つの関係式を得る。

$$\sum_M\left[|\Gamma^0_{MN}(\boldsymbol{k})|^2 + |\tilde{\Gamma}^0_{MN}(\boldsymbol{k})|^2\right] = 1 \tag{5.54}$$

$$\sum_M\left[|\Gamma^0_{MN}(\boldsymbol{k})|^2(E_M - E_N) - |\tilde{\Gamma}^0_{MN}(\boldsymbol{k})|^2(E_M + E_N)\right] = 0 \tag{5.55}$$

これらにより、δE_N の表式を整理でき高エネルギー部の発散をキャンセルすることが示せる。

6 まとめ

ここで確認したことは、

1. 仮想粒子の効果によりプロパゲーターが自由のものからずれることにより、Lamb shift が生じる。
2. 仮想粒子が作るループを計算するためにくりこみで紫外発散をキャンセル必要がある。
3. ループ計算は QED の輻射補正の結果を用いることができる。

とまとめられる。

最低次での Lamb shift 計算を達成するためには、低エネルギー部の計算を完全に行い高エネルギー部と合わせると全体で発散がキャンセルすることを具体的に示す必要がある。そこを確かめられれば、あとは具体的に数値を代入すると $2S$ と $2P_{1/2}$ との準位さが計算できる。その結果のみを記すと、

$$2S - 2P_{1/2} = h \times 1052.19[\mathrm{Mhz}]$$

となる。

Lamb shift は電子の異常磁気能率と同様に高次の項も含めて計算することで QED の正しさの検証に使われた。Francis M.Pipkin,in *Quantum Electro dynamics*,ed.by T. Kinoshita, world Scientific(1990):p. 755 によると

$$\text{実験}\quad 1057.845(9)[\text{MHz}],\qquad \text{理論}\quad 1057.866(11)\ [\text{Mhz}]$$

とある。括弧は誤差を表している。また最近では muon atom を用いたラムシフトは陽子半径の測定に用いられている。

付録 A　非相対論的な水素原子波動関数

ここでは、Lamb shift 計算時に現れる水素原子波動関数 $u_N(x)$ についてその定義の確認と本文中で用いた関係式を導出する。特に $Z\alpha \ll 1$ のときに水素原子波動関数が質量殻上の波動関数とシュレディンガー方程式の波動関数の積でかけるという式 (5.15) を導出することを目的とする。

A.1　定義の確認

■定義

本文中で用いられている水素原子波動関数 $u_N(x), v_N(x)$ は以下の式で定義されている

$$u_N(x) \equiv \langle 0_e|\psi_e(x)|N_e\rangle \qquad \text{(付録 A.1)}$$

$$v_N(x) \equiv \langle N_e|\psi_e(x)|0_e\rangle \qquad \text{(付録 A.2)}$$

u_N, v_N はそれぞれ電子、陽電子の波動関数。ここで添字の e は Sec3.1 で導入した外場 $\mathscr{A}$ の元での量であることを示している。$|N_e\rangle$ は、一粒子固有状態。

■u_N, v_n が満たす方程式

場 ψ_e は

$$(i\partial_\mu\gamma^\mu - m - e\mathscr{A}_\mu\gamma^\mu)\psi_e = 0 \qquad \text{(付録 A.3)}$$

を満たすので、波動関数 u_N, v_N は、

$$\begin{cases} (i\partial_\mu\gamma^\mu - m - e\mathscr{A}_\mu\gamma^\mu)u_N = 0 \\ (i\partial_\mu\gamma^\mu - m - e\mathscr{A}_\mu\gamma^\mu)v_N = 0 \end{cases} \qquad \text{(付録 A.4)}$$

を満たす。

■u_N, v_N の完全性、直交性

ここでの相互作用項 $e\bar{\psi}\gamma^\mu\mathscr{A}_\mu\psi$ は時間微分を含まない。よって正準量子化により得られる場についての同時刻反交換関係は，自由の場合と同じで

$$\{\psi_\alpha(\boldsymbol{x},t), \psi^\dagger_\beta(\boldsymbol{y},t)\} = i\delta_{\alpha\beta}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \qquad \text{(付録 A.5)}$$

となる。ここで添字 α, β はスピノールの足である。この式と 1 粒子状態の完全性 $\sum_N |N_e\rangle\langle N_e| = \mathbf{1}$ から u_N, v_N の完全性

$$\sum_N u_N(\boldsymbol{x},t)u^\dagger_N(\boldsymbol{y},t) + \sum_N v_N(\boldsymbol{x},t)v^\dagger_N(\boldsymbol{y},t) = \delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \qquad \text{(付録 A.6)}$$

を得る。この和は 1 粒子状態の完全性からきているので、離散的な状態から連続的な状態すべてわたる。また

この式と式 (付録 A.4) から定常状態の波動関数について以下の規格直交性が (途中は省くが) 導かれる

$$\int u_M^\dagger(\boldsymbol{x})u_N(\boldsymbol{x})d^3\boldsymbol{x} = \int v_M^\dagger(\boldsymbol{x})v_N(\boldsymbol{x})d^3\boldsymbol{x} = \delta_{NM} \tag{付録 A.7}$$

$$u_N(\boldsymbol{x},t) = e^{-iE_Nt}u_N(\boldsymbol{x}) \quad v_N(\boldsymbol{x},t) = e^{-iE_Nt}v_N(\boldsymbol{x}) \tag{付録 A.8}$$

ここでのポイントは，式 (付録 A.6) により、つまり場 ψ の反交換関係により u_N, v_N が都合良く規格化されていることである。

A.2 非相対論的な水素原子波動関数

この付録の目的である $Z\alpha \ll 1$ 水素原子波動関数が質量殻上の波動関数とシュレディンガー方程式の波動関数の積でかけるという式

$$u_N(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \left(1 - i\dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla}{2m}\right)f_N(\boldsymbol{x}) \\ \left(1 + i\dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla}{2m}\right)f_N(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \tag{付録 A.9}$$

$$\underline{\text{運動量表示}}: \ u_N(\boldsymbol{p}) = \sum_\sigma u(\boldsymbol{p},\sigma)f_N(\boldsymbol{p})_\sigma \quad (\not{p} - m)u(\boldsymbol{p},\sigma) = 0$$

を示す。これは u_N についての Dirac 方程式 (付録 A.4) を γ 行列として Weyl 表示を使用することで導出される。まず Weyl 表示について確認する。

A.2.1 Weyl 表示

Weyl 表示は、

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \tag{付録 A.10}$$

$$\sigma^i : \text{Pauli 行列 } (i = 1,2,3)$$

である。通常は非相対論的極限をとるときには Pauli 表示かつ以下のように波動関数を 2 成分に分けておく

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad u_N(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f_N(\boldsymbol{x}) \\ g_N(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \tag{付録 A.11}$$

すると Dirac 方程式 $E_Nu_N(\boldsymbol{x}) = \gamma^0(-i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla + m + e\gamma^0\mathscr{A}_0)u_N(\boldsymbol{x})$ から

$$\begin{pmatrix} m - E_N + e\mathscr{A}_0 & -i\sigma\cdot\nabla \\ -i\sigma\cdot\nabla & -m - E_N + e\mathscr{A}_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_N(\boldsymbol{x}) \\ g_N(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{付録 A.12}$$

$$\Rightarrow \ -i\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla f_N = (m + E_N - e\mathscr{A}_0)g_N$$

$$(m + E_N - e\mathscr{A}_0) \sim 2m, \ -i\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla = \sigma\cdot\boldsymbol{p} \sim Z\alpha m, \quad \Rightarrow g_N \ll f_N \tag{付録 A.13}$$

が導かれ最終的に f_N は水素原子中シュレディンガー方程式に高次の項 (スピン軌道相互作用など) を付け加えた方程式を満たすことになる。しかしここでは波動関数を

$$u_N(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} f_N(\boldsymbol{x}) + ig_N(\boldsymbol{x}) \\ f_N(\boldsymbol{x}) - ig_N(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \tag{付録 A.14}$$

と式 (付録 A.11) の波動関数とは別のとり方をするので Weyl 表示を使用する。するとこの波動関数のとり方でも $g_N \ll f_N$ となり、f_N がシュレディンガー方程式を満たすことになる。

A.2.2 導出

Weyl 表示を使用して式 (付録 A.10) を導出する。Dirac 方程式は、

$$\begin{pmatrix} m & i\sigma\cdot\nabla + e\mathscr{A}_0 - E_N \\ -i\sigma\cdot\nabla + e\mathscr{A}_0 - E_N & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_N + ig_N \\ f_N - ig_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (付録 A.15)$$

であり、これから

$$\begin{cases} (\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla)g_N = (E_N - m - e\mathscr{A}_0)f_N & (1) \\ (\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla)f_N = -(E_N + m - e\mathscr{A}_0)g_N & (2) \end{cases} \qquad (付録 A.16)$$

を得る。これは非相対論的であるとき

$$\begin{aligned} &E - m \sim 束縛エネルギー \propto (Z\alpha)^2 m \sim e\mathscr{A}_0 \\ &\nabla \sim 運動量 \sim Z\alpha m \end{aligned}$$

となるから式 (付録 A.16)(1) は

$$(Z\alpha)mg_N \simeq (Z\alpha)^2 mf_N \quad \to \quad g_N \ll f_N \qquad (付録 A.17)$$

と式 (付録 A.13) と 似た結果を得る。また (2) より、

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla)f_N = 2mg_N + \mathcal{O}\big((Z\alpha)^2 m\big)\times g_N \quad \Rightarrow \quad g_N \simeq -\frac{\sigma\cdot\nabla}{2m}f_N \qquad (付録 A.18)$$

であるからこれを再び式 (付録 A.16)(1) に代入すると

$$\left(-\frac{\nabla^2}{2m} + e\mathscr{A}_0\right)f_N = (E - m)f_N \qquad (付録 A.19)$$

シュレディンガー方程式を得る。

ゆえに $Z\alpha \ll 1$ のとき式 (付録 A.14) に式 (付録 A.18) を代入すると

$$u_N(\boldsymbol{x}) \simeq \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \left(1 - i\dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla}}{2m}\right)f_N(\boldsymbol{x}) \\ \left(1 + i\dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla}}{2m}\right)f_N(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \qquad (付録 A.20)$$

となる。これを運動量表示すると

$$\begin{aligned} u_N(\boldsymbol{p}) = \int d^3\boldsymbol{x}\ e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}u_N(\boldsymbol{x}) &\simeq \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \left(1 + \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{2m}\right)f_N(\boldsymbol{p}) \\ \left(1 - \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{2m}\right)f_N(\boldsymbol{p}) \end{pmatrix} \\ &= \sum_\sigma \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \left(1 + \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{2m}\right)\chi_\sigma \\ \left(1 - \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{2m}\right)\chi_\sigma \end{pmatrix}[f_N(\boldsymbol{p})]_\sigma \end{aligned} \qquad (付録 A.21)$$

ここで、χ は 2 成分スピノールで

$$\chi_{1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \chi_{-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{付録 A.22}$$

であり、$[f_N(\boldsymbol{p})]_\sigma$ はシュレディンガー方程式を満たす 1 成分波動関数である。

そして、

$$u(\boldsymbol{p},\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \left(1 + \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{2m}\right)\chi_\sigma \\ \left(1 - \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{2m}\right)\chi_\sigma \end{pmatrix} \quad \underline{(\not{p} - m)u(\boldsymbol{p},\sigma) = 0} \tag{付録 A.23}$$

が成り立つ。実際、いま Weyl 表示であるから

$$\begin{aligned}
\not{p}u(\boldsymbol{p},\sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & p^0 + \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} \\ p^0 - \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(1 + \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{2m}\right)\chi_\sigma \\ \left(1 - \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{2m}\right)\chi_\sigma \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \left(\sqrt{m^2+\boldsymbol{p}^2} + \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} - \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{2m}\sqrt{m^2+\boldsymbol{p}^2} - \dfrac{\boldsymbol{p}^2}{2m}\right)\chi_\sigma \\ \left(\sqrt{m^2+\boldsymbol{p}^2} - \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} + \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{2m}\sqrt{m^2+\boldsymbol{p}^2} - \dfrac{\boldsymbol{p}^2}{2m}\right)\chi_\sigma \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \left(m + \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{2}\right)\chi_\sigma \\ \left(m - \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{2}\right)\chi_\sigma \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\boldsymbol{p}^2) \simeq mu(\boldsymbol{p},\sigma)
\end{aligned} \tag{付録 A.24}$$

参考文献

1. Steven Weinberg, The Quantum Theory of Fields Volume 1, Cambridge University Press,(1994)
2. Michael E. Peskin, Daniel V. Schroeder, An Introduction to Quantum Field Theory, Addison Wesley,(1995)
3. Franz Gross, Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory,Wiley-Interscience Publication(1999)
4. 川村 嘉春, 相対論的量子力学, 裳華房 (2012)

謝辞

指導教員の佐藤丈准教授にはゼミなどを通じて様々なご指導をいただきました。
研究室の先輩方には貴重な時間をさいてもらい、この卒論に関して相談にのってもらいました。
同期 5 人は議論する、たわいもない会話をするなど楽しい時間を提供してくれました。
この場をかりて、お礼申し上げます。