

# 卒論

埼玉大学物理学科 07RP028

中村考宏

2012年1月31日

## 目次

1	概要	3
2	クーロン散乱	3
2.1	微分散乱断面積の導入	3
2.2	クーロン場における正確な解	3
2.3	合流型超幾何関数	4
2.4	クーロン散乱の断面積	6
3	相対論でのクーロン散乱	8
3.1	ディラック方程式の導出	8
3.2	自由ディラック方程式の解	8
3.3	ボルン近似による散乱振幅	9
3.4	ボルン近似によるクーロン散乱	11
4	実験による検証	14
5	まとめと課題	16

## 1 概要

本論文ではまず非相対論の場合でクーロン場における散乱断面積を求める。次に相対論での場合の散乱断面積を求めるのであるが、ここではボルン近似を用いた。ここで求めた公式が非相対論的極限でどうなるか、実験での検証によりどういった場合に適用できるか、またどういう修正が加えられるかについて述べたものである。

## 2 クーロン散乱

### 2.1 微分散乱断面積の導入

### 2.2 クーロン場における正確な解

クーロンポテンシャルの働くシュレーディンガー方程式は正確な解が求めることができる。

クーロンポテンシャル

$$U_c(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} \quad (1)$$

がはたらく場合、時間に依存しないシュレーディンガーは

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} \right) \psi_c = E \psi_c \quad (2)$$

である。ここで

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E, \quad \eta = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v} \quad (3)$$

とおけば、シュレーディンガー方程式は

$$\left( \nabla^2 + k^2 - \frac{2\eta k}{r} \right) \psi_c = 0 \quad (4)$$

と書き換えることができる。さらに放物線座標

$$\begin{cases} \xi = r(1 - \cos\theta) \\ \zeta = r(1 + \cos\theta) \\ \phi = \phi \end{cases} \quad (5)$$

すなわち

$$\begin{cases} \xi + \zeta = 2r \\ \xi - \zeta = 2r \cos\theta \\ \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = \frac{\xi\zeta}{r^2} \end{cases} \quad (6)$$

に座標変換するとシュレーディンガー方程式は

$$\left[ \frac{4}{\xi + \zeta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \right\} + \frac{1}{\xi \zeta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + k^2 - \frac{4\eta k}{\xi + \zeta} \right] \psi_c = 0 \quad (7)$$

と表される。

この方程式は解析的に解くことができ、解は次のような形で表される。

$$\psi_c = e^{ikx} f(r - z) = e^{ik \frac{\xi - \zeta}{2}} f(\xi) \quad (8)$$

これを (7) 式に代入すると  $f$  の式として

$$\xi f''(\xi) + (1 - ik\xi) f'(\xi) - \eta k f(\xi) = 0 \quad (9)$$

となる。ここで

$$z = ik\xi, \quad a = -i\eta, \quad b = 1 \quad (10)$$

とおくと、(9) 式は

$$z \frac{d^2 f}{dz^2} + (b - z) \frac{df}{dz} - af = 0 \quad (11)$$

と書き換えることができる。これは合流型超幾何方程式であり、その解は合流型超幾何関数  $F(a|b|z)$  である。 $F(a|b|z)$  は

$$F(a|b|z) = 1 + \frac{a}{b} \frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)}{b(b+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots \quad (12)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n) \Gamma(b)}{\Gamma(a) \Gamma(b+n)} \frac{z^n}{n!} \quad (13)$$

である。したがって、シュレーディンガー方程式の解は  $A$  を定数として

$$\psi_c = A e^{ikz} F(-i\eta|1|ik\xi) \quad (14)$$

となる。

### 2.3 合流型超幾何関数

ここでは合流型超幾何関数の積分表示、およびその漸近形について論ずる。

まず (13) 式は

$$F(a|b|z) = (b-1)! \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{n!} z^n \frac{1}{b+n-1} \quad (15)$$

と書くことができる。

ここで複素積分

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c e^{t-t^n} dt = \frac{1}{(n-1)!} \quad (16)$$

と  $(1-z)^{-a}$  のベキ展開

$$(1-z)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} a(a+1)\cdots(a+n-1) \frac{z^n}{n!} \quad (17)$$

を用いると

$$F(a|b|z) = (b-1)! \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{n!} z^n \frac{1}{2\pi i} \int_c e^{t-n-b} dt \quad (18)$$

$$= (b-1)! \frac{1}{2\pi i} \int_c \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{n!} \left(\frac{z}{t}\right)^n e^{t-b} dt \quad (19)$$

$$= (b-1)! \frac{1}{2\pi i} \int_c \left(1 - \frac{z}{t}\right)^{-a} e^{t-b} dt \quad (20)$$

と複素積分で表すことができる。

ここで (20) は

$$\left| \frac{z}{t} \right| < 1$$

として  $(1-z/t)^{-a}$  が  $z$  のベキで展開できるとしていた。またこの時、特異点は  $t=0$  で、積分路は原点を囲む閉じた経路であった。今後は積分路を  $t=0, z$  を囲む閉じた経路とする。

ここでは、漸近形を考えるために図1の (a) の経路 C をとる。

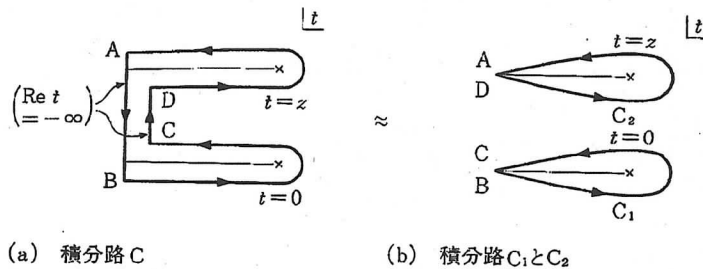


図1

ここで線分 AB、CD 上で  $\operatorname{Re} t = -\infty$  とすれば AB、CD 上の積分は被積分関数が 0 となる。その結果図1の (b) の積分路  $C_1$  と  $C_2$  からの寄与の和として表される。これらを各々  $W_1(a|b|z)$  と  $W_2(a|b|z)$  とかけば、

$$F(a|b|z) = W_1(a|b|z) + W_2(a|b|z) \quad (21)$$

となる。

また、 $W_1(a|b|z)$  は

$$W_1(a|b|z) = (b-1)! \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \left(1 - \frac{z}{t}\right)^{-a} e^{t-b} dt \quad (22)$$

であり、 $W_2(a|b|z)$  は

$$t = u + z \quad (23)$$

とすると

$$W_2(a|b|z) = (b-1)! \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{u^{-a} e^{u+z}}{(u+z)^{-a+b}} du \quad (24)$$

となる。

$W_1(a|b|z)$  と  $W_2(a|b|z)$  をホイットカー関数という。その漸近形は  $t/z$  のべきで展開して

$$W_1(a|b|z) = \frac{\Gamma(b)}{2\pi i} (-z)^{-a} \int_{C_1} \left(1 - \frac{t}{z}\right)^{-a} e^{t^{a-b}} dt \quad (25)$$

$$\underset{|z| \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} (-z)^{-a} g(a, a-b+1; -z) \quad (26)$$

$$W_2(a|b|z) = \frac{\Gamma(b)}{2\pi i} z^{a-b} e^z \int_{C_2} \left(1 + \frac{u}{z}\right)^{a-b} e^u u^{-a} du \quad (27)$$

$$\underset{|z| \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^z z^{a-b} g(1-a, b-a; z) \quad (28)$$

となる。ここで

$$g(a, b; z) = 1 + \frac{ab}{1!} \frac{1}{z} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!} \frac{1}{z^2} + \dots \quad (29)$$

である。

## 2.4 クーロン散乱の断面積

ここで (14) 式の定数  $A$  を

$$A = \Gamma(1+i\eta) e^{-\frac{1}{2}\pi\eta} \quad (30)$$

ととして

$$\psi_c = \Gamma(1+i\eta) e^{-\frac{1}{2}\pi\eta} e^{ikz} F(-i\eta|1|ik\xi) \quad (31)$$

となる。さらに

$$\psi_c = \Gamma(1+i\eta) e^{-\frac{1}{2}\pi\eta} e^{ikz} F(-i\eta|1|ik\xi) \quad (32)$$

$$\psi_{in} = \Gamma(1+i\eta) e^{-\frac{1}{2}\pi\eta} e^{ikz} W_1(-i\eta|1|ik\xi) \quad (33)$$

$$\psi_{sc} = \Gamma(1+i\eta) e^{-\frac{1}{2}\pi\eta} e^{ikz} W_2(-i\eta|1|ik\xi) \quad (34)$$

とすると、 $\psi_{in}$  と  $\psi_{sc}$  の漸近形は (26) 式と (28) 式を用いて

$$\psi_{in} \underset{|r-z| \rightarrow \infty}{\sim} e^{i\{kz + \eta \ln k(r-z)\}} \quad (35)$$

$$\psi_{sc} \underset{|r-z| \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{\eta}{k(r-z)} e^{i\{kr - \eta \ln k(r-z) + 2\sigma_0\}} \quad (36)$$

となる。ここで  $\sigma_0$  は  $\Gamma(1+i\eta)$  の偏角で

$$\frac{\Gamma(1+i\eta)}{\Gamma(1-i\eta)} = e^{2i\sigma} \quad (37)$$

さらに

$$r-z = r(1 - \cos \theta) = 2r \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (38)$$

なので、(36) 式は

$$\psi_{sc} = \frac{f_c(\theta)}{r} e^{i(kr - \eta \ln 2kr)} \quad (39)$$

とかける。ここで

$$f_c(\theta) = -\frac{\eta}{2k \sin^2 \frac{\theta}{2}} e^{-i\eta \ln(\sin^2 \frac{\theta}{2}) + 2i\sigma_0} \quad (40)$$

である。

$\psi_{in}$  と  $\psi_{sc}$  はそれぞれ入射波と散乱波と考えられる。なぜならそれぞれのフラックスを計算すると

$$\mathbf{j}_{in} \sim \frac{\hbar k}{m} \mathbf{e}_z \quad (41)$$

$$\mathbf{j}_{sc} \sim \frac{\hbar k}{m} \frac{|f_c(\theta)|^2}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (42)$$

となっており、それぞれ入射平面波と出ていく球面波のそれに対応するので  $\psi_{in}$  と  $\psi_{sc}$  はそれぞれ入射波と散乱波を解釈できる。したがって、クーロン散乱の微分断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_c(\theta)|^2 \quad (43)$$

$$= \left( \frac{\eta}{2k \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right)^2 \quad (44)$$

$$= \left( \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right)^2 \quad (45)$$

で与えられる。

### 3 相対論でのクーロン散乱

#### 3.1 ディラック方程式の導出

#### 3.2 自由ディラック方程式の解

ディラック方程式は

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + m\beta)\psi \quad (46)$$

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \quad (47)$$

である。その解を

$$\psi(t, \mathbf{x}) = w(\mathbf{p})e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} = w(\mathbf{p})e^{-iEt+i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \quad (48)$$

として、(46)式に代入すると

$$Ew(\mathbf{p}) = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + m)w(\mathbf{p}) \quad (49)$$

となる。ここで

$$w(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \varphi(\mathbf{p}) \\ \chi(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \quad (50)$$

とする。 $\varphi(\mathbf{p})$  と  $\chi(\mathbf{p})$  は 2 成分スピノルである。すると

$$E \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (51)$$

とかけ、固有値方程式を解くと

$$E = \pm\sqrt{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2 + m^2} \quad (52)$$

$$= \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \quad (53)$$

となる。正と負のエネルギーがでてきたが、 $E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$  のとき (51) 式より

$$\chi = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m} \varphi \quad (54)$$

となるので

$$w(\mathbf{p}) = N \begin{pmatrix} \varphi \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m} \varphi \end{pmatrix} \quad (55)$$

となる。 $N$  は規格化定数で

$$N = \sqrt{\frac{E + m}{2E}} \quad (56)$$

で与えられる。

ここで  $\mathbf{p}$  の方向を  $z$  方向にとり ( $\mathbf{p} = (0, 0, p)$ )、 $\varphi$  として  $\sigma_z$  の固有関数をとると解は



$$\psi_{\uparrow}^{(+)} = \sqrt{\frac{E+m}{2E}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\sigma_z p}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-iEt+i\mathbf{p}\mathbf{x}} \quad (57)$$

$$\psi_{\downarrow}^{(+)} = \sqrt{\frac{E+m}{2E}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{\sigma_z p}{E+m} \end{pmatrix} e^{-iEt+i\mathbf{p}\mathbf{x}} \quad (58)$$

また、負のエネルギー解は

$$\psi_{\uparrow}^{(-)} = \sqrt{\frac{E+m}{2E}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\sigma_z p}{-E+m} \\ 0 \end{pmatrix} e^{iEt+i\mathbf{p}\mathbf{x}} \quad (59)$$

$$\psi_{\downarrow}^{(-)} = \sqrt{\frac{E+m}{2E}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{\sigma_z p}{-E+m} \end{pmatrix} e^{iEt+i\mathbf{p}\mathbf{x}} \quad (60)$$

となる。ただし  $E = \sqrt{p^2 + m^2}$  である。

### 3.3 ボルン近似による散乱振幅

外場のあるときの場合のディラック方程式は  $i\partial^\mu \rightarrow i\partial^\mu - eA^\mu$  の置き換えを行って

$$\{\gamma^\mu(i\partial_\mu - eA_\mu) - m\}\psi = 0 \quad (61)$$

と書ける。

ここでグリーン関数

$$\Delta_{ret} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4p \frac{e^{ipx}}{p^2 - m^2} \quad (62)$$

を導入する。これはクラインゴルドン演算子  $K_x = \square + m$  を用いると

$$K_x \Delta_{ret} = -\delta^4(x) \quad (63)$$

となる性質がある。

ここで波動関数を入射波と散乱波に分ける。

$$\psi = \psi_{in} + \psi_{sc} \quad (64)$$

入射波は自由なディラック方程式を満たすので、(61) 式は

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi_{sc} = e\gamma^\mu A_\mu \psi \quad (65)$$

とかける。ここで

$$S_{ret}(x) = (i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\Delta_{ret} \quad (66)$$

を導入すると形式解は

$$\psi_{sc} = \int d^4x' S_{ret}(x-x') e^{\gamma^\mu A_\mu(x')} \quad (67)$$

となる。なぜなら

$$(\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi_{sc} = \int d^4x' (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) S_{ret}(x-x') e^{\gamma^\mu A_\mu(x')} \psi(x') \quad (68)$$

$$= \int d^4x' \{-\square + m\} \Delta_{ret}(x-x') e^{\gamma^\mu A_\mu(x')} \psi(x') \quad (69)$$

$$= \int d^4x' \delta^4(x-x') e^{\gamma^\mu A_\mu(x')} \psi(x') \quad (70)$$

$$= e^{\gamma^\mu A_\mu(x)} \psi(x) \quad (71)$$

となるからである。したがって  $\psi$  は

$$\psi(x) = \psi_{in}(x) + \int d^4x' S_{ret}(x-x') e^{\gamma^\mu A_\mu(x')} \quad (72)$$

となる。またエネルギーは保存量なので

$$\psi_{in}(x) = e^{-iEt} \psi_{in}(\mathbf{x}), \quad \psi(x) = e^{-iEt} \psi(\mathbf{x}) \quad (73)$$

である。ただし  $E = \sqrt{k^2 + m^2}$  である。

したがって、外場が時間によらない場合

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \psi_{in}(x) + e \int dx'^4 \left( S_{ret}(x-x') e^{iE(t-t')} \gamma^\mu A_\mu \psi(x) \right) \\ &= \psi_{in}(x) + e \int dx'^3 \left( \int dt' S_{ret}(x-x') e^{iE(t-t')} \right) \gamma^\mu A_\mu \psi(x) \end{aligned} \quad (74)$$

となる。

ここで、 $\Delta_{ret}$  を積分表示に示にもどすと  $S_{ret}(x)$  は

$$S_{ret}(x) = (i\gamma^\mu \partial_\mu + m) \frac{1}{(2\pi)^2} \int dp^4 \frac{e^{ipx}}{p^2 - m^2} \quad (75)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int dp^4 (-\gamma^\mu p_\mu + m) \frac{e^{ipx}}{p^2 - m^2} \quad (76)$$

したがって  $t'$  積分の部分は

$$\int dt' S_{ret}(x-x') e^{iE(t-t')} \quad (77)$$

$$= \int dt' \frac{1}{(2\pi)^4} \int dp^4 (-\gamma^\mu p_\mu + m) \frac{e^{ip(x-x')}}{p^2 - m^2} e^{iE(t-t')} \quad (78)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int dp^4 (-\gamma^0 p_0 + \boldsymbol{\gamma} \mathbf{p} + m) \frac{e^{-ip(x-x')}}{p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m^2} \delta(p_0 + E) \quad (79)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int dp^3 (\gamma^0 E + \boldsymbol{\gamma} \mathbf{p} + m) \frac{e^{-ip(x-x')}}{E^2 - |\mathbf{p}|^2 - m^2} \quad (80)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} (\gamma^0 E - i\boldsymbol{\gamma} \nabla + m) \int dp^3 \frac{e^{-ip(x-x')}}{k^2 - |\mathbf{p}|^2} \quad (81)$$

となる。さらに

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{e^{-ip(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}}{k^2 - |\mathbf{p}|^2} = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \quad (82)$$

なので  $\psi(\mathbf{x})$  は

$$\psi(\mathbf{x}) = \psi_{in} - \frac{e}{4\pi} \int d^3x' (\gamma^0 E' - i\gamma\nabla + m) \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \gamma^\mu A_\mu \psi(\mathbf{x}) \quad (83)$$

となる。ここで  $|\mathbf{x}|$  が大きいとき

$$|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| \sim r - \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'}{r} \quad (84)$$

で近似できる。ここで  $|\mathbf{x}| = r$  としている。さらに  $\mathbf{k}_f = k\mathbf{x}/r$  とかけば

$$\frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \sim \frac{e^{ikr} e^{-ik_f \mathbf{x}'}}{r} \quad (85)$$

となるので  $|\mathbf{x}|$  が大きいときの  $\psi(\mathbf{x})$  の漸近形は

$$\psi(\mathbf{x}) = \psi_{in} - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{e}{4\pi} \int d^3x' (\gamma^0 E' - i\gamma\nabla + m) e^{-ik_f \mathbf{x}'} \gamma^\mu A_\mu \psi(\mathbf{x}) \quad (86)$$

$$= \psi_{in} - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{e}{4\pi} (\gamma^0 E' - \gamma \mathbf{k}_f + m) \int d^3x' e^{-ik_f \mathbf{x}'} \gamma^\mu A_\mu \psi(\mathbf{x}) \quad (87)$$

となる。したがって、散乱振幅は

$$f(\theta) = -\frac{e}{4\pi} (\gamma^0 E' - \gamma \mathbf{k}_f + m) \int d^3x' e^{-ik_f \mathbf{x}'} \gamma^\mu A_\mu \psi(\mathbf{x}) \quad (88)$$

または、 $(k_f)^\mu = (\sqrt{k^2 + m^2}, \mathbf{k}_f)$  とかくと

$$f(\theta) = -\frac{e}{4\pi} (\gamma^\mu (k_f)_\mu + m) \int d^3x' e^{-ik_f \mathbf{x}'} \gamma^\mu A_\mu \psi(\mathbf{x}) \quad (89)$$

となる。

さらにここで、積分の中の  $\psi(\mathbf{x})$  を  $z$  方向の入射平面波

$$\psi_{in}(\mathbf{x}) = u(k_i) e^{ikz} \quad (90)$$

で近似する。この近似をボルン近似という。すると

$$f(\theta) = -\frac{e}{4\pi} (\gamma^\mu (k_f)_\mu + m) \int d^3x' e^{-ik_f \mathbf{x}'} \gamma^\mu A_\mu u(k_i) e^{ikz'} \quad (91)$$

となる。

### 3.4 ボルン近似によるクーロン散乱

ここでは、電子が原子核によって散乱される場合を考える。クーロンポテンシャルのみ働いているとすれば

$$eA^0 = -\frac{Ze^2}{r}, \quad \mathbf{A} = 0 \quad (92)$$

なので (91) にこれを代入すると、

$$f(\theta) = -\frac{Ze^2}{4\pi} (\gamma^\mu (k_f)_\mu + m)\beta \int d^3x' \frac{e^{i(k_i - k_f)x'}}{r'} u(k_i) \quad (93)$$

となる。ここで  $k_i = (0, 0, k)$  である。

さらに

$$\begin{aligned} (\gamma^\mu (k_f)_\mu + m)\beta &= (\gamma^0 E - \gamma k_f + m)\beta \\ &= E + \alpha \cdot k_f + \beta m \\ &= H(k_f) + E \end{aligned} \quad (94)$$

$$\int d^3x' \frac{e^{i(k_i - k_f)x'}}{r'} = \frac{4\pi}{|k_i - k_f|^2} \quad (95)$$

$$= \frac{\pi}{k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \quad (96)$$

を用いると

$$f(\theta) = -\frac{Ze^2}{4k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} (H(k_f) + E) u(k_i) \quad (97)$$

となる。したがって微分散乱断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 \quad (98)$$

$$= \left( \frac{Ze^2}{4k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right)^2 u^\dagger(k_i) (H(k_f) + E)^2 u(k_i) \quad (99)$$

$$= \left( \frac{Ze^2}{4k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right)^2 2E u^\dagger(k_i) (H(k_f) + E) u(k_i) \quad (100)$$

となる。ここで  $u(k_i)$  はスピンの向きを決めれば具体的な形が決まり計算できる。しかし、入射粒子は偏極していないとすると、スピン上向きの場合とスピン下向きの場合との平均値をとるので

$$u^\dagger(k_i) (H(k_f) + E) u(k_i) = \frac{1}{2} \left\{ u_\uparrow^\dagger(k_i) (H(k_f) + E) u_\uparrow(k_i) + u_\downarrow^\dagger(k_i) (H(k_f) + E) u_\downarrow(k_i) \right\} \quad (101)$$

を計算することになる。  $u_\uparrow(k_i)$  と  $u_\downarrow$  は、(57) 式と (58) 式のものを用いる。

非常に面倒な計算の後

$$\frac{1}{2} \left\{ u_\uparrow^\dagger(k_i) (H(k_f) + E) u_\uparrow(k_i) + u_\downarrow^\dagger(k_i) (H(k_f) + E) u_\downarrow(k_i) \right\} \quad (102)$$

$$= \frac{1}{E} (k(k_f)_z + m^2 + E^2) \quad (103)$$

$$= \frac{1}{E} (k^2 \cos \theta - k^2 + 2E^2) \quad (104)$$

$$= \frac{2}{E} \left( E^2 - k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (105)$$

と求まる。これを (100) 式に代入して

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{Ze^2}{4k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right)^2 \times 4 \left( E^2 - k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (106)$$

$$= \frac{Z^2 e^4}{4k^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left( E^2 - k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (107)$$

となる。ここで  $k/E = v$  で速度を導入して上式を書き直すと

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 e^4}{4m^2 v^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} (1 - v^2) \left( 1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (108)$$

となり微分散乱断面積が求まった。

ここで高速  $c$  を補い、 $\beta = v/c$  で表すと

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 e^4}{4m^2 v^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} (1 - \beta^2) \left( 1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (109)$$

となる。第 1 項目はラザフォード散乱の断面積で、第 2 項目はローレンツ収縮である。第 3 項目はスピンの影響によるものである。これは、クラインゴールドン方程式からボルン近似で同様のことを求めると、この項が出てこないことによりわかる。また、非相対論的な極限  $\beta \rightarrow 0$  をとれば、ラザフォード散乱の断面積と等しいことが容易にわかる。

## 4 実験による検証

改めて先ほど求めた式を書く。

$$\frac{d\sigma_{rel}}{d\Omega} = \frac{Z^2 e^4}{4m^2 v^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} (1 - \beta^2) \left( 1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (110)$$

改めて、 $d\sigma \rightarrow d\sigma_{rel}$  と書いた。

ここではこの式での断面積が実験でどのようになっているか述べる。まず Bartlett と Watson による結果を示す。

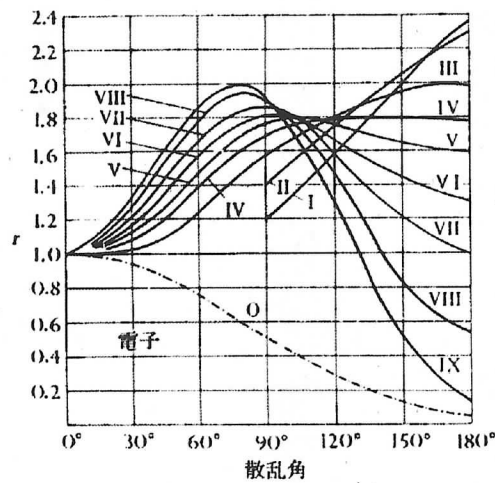


図 2

上の図は水銀 ( $Z=80$ ) による電子の散乱の断面積およびエネルギーの関係を表している。

曲線 I-IX はそれぞれ、0.046, 0.086, 0.145, 0.232, 0.314, 0.463, 0.666, 1.28,  $3.35mc^2$  のエネルギーの曲線である。

曲線 0 はエネルギー  $3.35mc^2$  の場合の (110) 式の値である。

横軸は散乱角で縦軸の  $r$  は

$$\frac{d\sigma_c}{d\Omega} = \frac{Z^2 e^4}{4m^2 v^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} (1 - \beta^2) \quad (111)$$

との比をとっている。つまり、実験での断面積を  $\sigma_{ex}$  とすれば  $r$  は曲線 I-IX について

$$r = \frac{d\sigma_{ex}}{d\sigma_c}$$

曲線 0 について

$$r = \frac{d\sigma_{rel}}{d\sigma_c} = 1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

の値をとっている。

グラフを見てすぐにわかるのは、曲線 IX と 0 を比べると明らかに実験値と理論値には隔たりがあることである。これは (110) 式がこの場合成立しないことを意味する。

こういった困難は Mott により解決されており、補正項を加え以下のように修正すればよい。

$$\left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \rightarrow \left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{Z\pi\beta}{137} \sin \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2}\right)\right) \quad (112)$$

ここに加えられた補正項には  $\frac{Z}{137}$  という項がある。Z が小さいと補正項は小さく無視できるが、この実験では Z=80 と無視できないほど大きいためにこのような結果になった考える。

したがって Z が小さい場合は、補正項を無視した式 (110) で近似できると考える。これを確認するため、異なるいくつかの原子核で実験した Bueckner と Van der Graaf と Feshbach の行った実験をみる。これは補正項が加わった式

$$\frac{d\sigma_{\text{補正}}}{d\Omega} = \frac{Z^2 e^4}{4m^2 v^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} (1 - \beta^2) \left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{Z\pi\beta}{137} \sin \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2}\right)\right) \quad (113)$$

の値と実験値を比較している実験である。結果は下の表にまとめられている。

Energy (MeV)	20°	30°	40°	50°	
Nucleus: aluminum					
1.49		1.01	0.97	1.04	Z=13
1.81		1.02	0.96	0.97	
2.00		0.95	0.97	1.02	
2.27	1.11	1.26	1.52	1.64	
Nucleus: copper					
1.49		0.97	0.88	1.12	Z=29
1.81		0.96	1.09	1.07	
2.00		1.05	0.96	0.96	
2.27		1.15	1.06		
Nucleus: silver					
1.27			0.93		Z=47
1.49		0.97	1.03	1.02	
1.81		0.97	1.02	1.03	
2.00		1.01	1.06	1.07	
Nucleus: gold and platinum					
1.49				1.08	Z=78
1.81				1.09	
2.00			1.10	1.00	

図 3

これは図表の数値は先ほど同じように実験値と補正項が加えられた式 (113) の値との比である。これを見ると補正項を加えた理論と実験値はかなりよくあっていることがわかる。

ここで、求めた式 (110) が Z の違いによりどうなるか調べる。

そこで図表の結果で 1.49, 1.81, 2.00 MeV のエネルギーで 50° の散乱角の値について実験値と式 (110) との比をとるため

$$(\text{図 3 の実験値}) \times \frac{1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{Z\pi\beta}{137} \sin \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2}\right)}{1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \quad (114)$$

を計算すればよい。これを下表にまとめた。

縦軸は実験値式 (110) との比である。これを見ると確かに Z が小さいほどボルン近似は近似がよくなる傾向にあることがわかる。

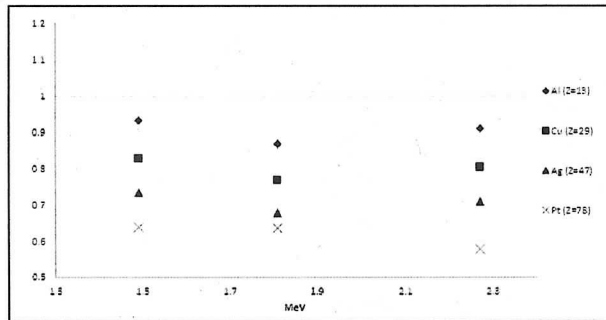


図 4

## 5 まとめと課題

今回クーロン場における散乱断面積を量子力学では厳密解を求め、相対論的量子力学ではボルン近似で求めた。また、非相対論的な極限では量子力学での結果と一致することを確認した。さらにボルン近似で求めた式に対して検証を行い  $Z$  が小さい場合に有効な式であることがわかった。また  $Z$  が小さければ有効なので電子-電子の散乱断面積の計算に用いることができるかもしれない。これを計算してみるのが 1 つの課題である。また、相対論的な場合でもクーロン場における厳密解を求めることができる。Mott はこれを用いて式 (113) の導出したようである。したがってこの式の導出が 2 つ目の課題してあげられる。また、3 つ目として逆にどうしてボルン近似ではこの補正項が抜けてしまったかである。ここでの導出計算は各々がどのような物理的な状態に対応するかのような仮定を持ち込んだかきちんと議論していない。こう言った所に補正項が抜けてしまった原因が見つかるかもしれない。

## 謝辞

卒業論文を作成するにあたり、指導教官である佐藤丈准教授から、丁寧かつ熱心なご指導を賜りました。ここに感謝の意を表します。

## 参考文献

- [1] 笹川辰也 「散乱理論」 裳華房 (2010)
- [2] 西嶋和彦 「相対論的量子力学」 培風館 (1994)
- [3] モット, マッセイ著 高柳和夫訳 「衝突の理論 (上・II)」 吉岡書店 (1975)
- [4] 猪木慶治 河合光 「量子力学 II」 講談社 (2011)
- [5] Walter Greiner 「Relativistic Quantum Mechanics」 Springer (2000)
- [6] R. J. Van De Graaff, W. W. Buechner, H. Feshbach. Phys. Rev. 69,9,10 (1946)