

群上の調和解析

学籍番号 05RP041

氏名 吉永 尊洸

2010 年 4 月 3 日

目次

1	Introduction	2
2	位相群と表現論	3
2.1	群と位相	3
2.2	局所コンパクト群と Haar 測度	9
2.3	位相群の表現	12
3	群上の調和解析	18
3.1	行列要素とその直交性	18
3.2	一般化された Fourier 変換	22
3.3	逆変換公式と Plancherel の公式	29
4	調和解析の例	31
4.1	T	31
4.2	R^n	33
4.3	$SU(2)$	35
4.4	$SL(2, C)$	42
5	まとめと展望	52
付録 A	準同型定理の証明	54
付録 B	Borel 測度	54
付録 C	Jacobi 多項式	55
付録 D	正則要素	56
付録 E	Weyl の積分公式	59
付録 F	指標 Θ の求め方	61

1 Introduction

群上の調和解析とは、我々の知っている Fourier 解析の一般化である [1]。そのことを理解するために、まず Fourier 級数と Fourier 積分の理論の類似性について認識する必要がある。まず、Fourier 級数展開について考える。 $f(x)$ を周期 2π の関数とすると、次のように展開できる。

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad (1.1)$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (1.2)$$

$f(x)$ が周期性をもたない関数の場合は、Fourier 積分の理論により次のように書ける。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda \quad (1.3)$$

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx \quad (1.4)$$

周期性を持たない関数を周期無限大の関数として見ることにより、両者の間の類似性はある程度は説明できるが、厳密ではない。この答えを与えるのが群の表現を用いた Fourier 解析である。周期 2π の周期関数は 1 次元トーラス $T = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上の関数と見なすことができ、周期無限大の関数は実数 $\mathbb{R}$ 上の関数である。したがって、Fourier 級数は T 上の、Fourier 変換は $\mathbb{R}$ 上の解析と見なすことができる。この T と $\mathbb{R}$ は、実は群という数学的対象になっており、その中でも局所コンパクト Abel 群と呼ばれるものになっている。局所コンパクト Abel 群となっているものはこれらだけではないので、他の局所コンパクト Abel 群に対しても同様の解析が期待できる。したがって、局所コンパクト Abel 群上で一般論ができれば、Fourier 級数と Fourier 変換の理論は“局所コンパクト Abel 群上の解析”という共通の枠組みで理解することが可能になる。つまり、Fourier 級数と Fourier 変換の理論は“局所コンパクト Abel 群上の解析”の特殊なケースなのである。

今の議論から、Fourier 級数と Fourier 変換の理論の背後にはより広い理論体系が潜んでいることが想像できる。これが本論文で議論していく群上の調和解析である。基本的には、 $T, \mathbb{R}$ 上の解析は次のように一般の群 G 上の解析に拡張される。

$$\begin{aligned} T, \mathbb{R} &\longrightarrow G \\ e^{inx}, e^{i\lambda x} &\longrightarrow G \text{ のユニタリー表現とその指標} \\ \text{Lebesgue 測度 } dx &\longrightarrow G \text{ 上の Haar 測度} \\ \mathbb{Z} \text{ 上の点測度, Lebesgue 測度 } d\lambda &\longrightarrow \hat{G} \text{ 上の Plancherel 測度} \end{aligned}$$

ここで、Haar 測度は群上の積分測度であり、 $\hat{G}$ は G のユニタリー双対と呼ばれるものである。本論文では、 G として局所コンパクト群という群まで取り扱うことのできる形式を構成していく。2 章では、群上の調和解析の理論を構成するために必要な数学的道具をそろえ、3 章で群上の調和解析の理論を構成する。4 章では、3 章までで構成した一般論を具体的な群に適用していく。

2 位相群と表現論

2.1 群と位相

我々が行いたいことは位相群上での調和解析である。位相群とは、大まかに言うと群の空間自体が位相空間になっている群のことである。したがって、まずは群と位相空間を定義し、それらから出てくる性質を調べなければならない。

2.1.1 群

まずは群の定義をする。

定義 (群)

集合 G が群であるとは、 G の任意の元 a, b に対して、積の演算 $c = ab$ が定義できて、

(1) 結合則

$$a(bc) = (ab)c \quad (2.1.1)$$

が成立する。

(2) 任意の $a \in G$ に対して

$$ea = ae = e \quad (2.1.2)$$

なる単位元 e が存在する。

(3) 任意の $a \in G$ に対して

$$a^{-1}a = a^{-1}a = e \quad (2.1.3)$$

なる逆元 a^{-1} が存在する。

特に、 $ab = ba$ が成り立つとき、 G を Abel 群 あるいは 可換群 という。

次に、群上の調和解析で必要になる群の知識を紹介していく。 G の空でない部分集合 H が G と同じ積で群となると、 H を G の部分群 であるという。また、

$$Ha = \{ha; h \in H\} \quad (2.1.4)$$

で定義される G の部分集合を H に関する 左剰余類 と呼ぶ。さらに、

$$aH = \{ah; h \in H\} \quad (2.1.5)$$

で定義される G の部分集合を H に関する 右剰余類 と呼ぶ。特に、すべての元 $a \in G$ に対して $Ha = aH$ が成り立つとき、 H を G の正規部分群 と呼ぶ。実際、 $h \in H, h' \in H$ としたとき、 $aha^{-1} = h'$ となっている。このとき左右の剰余類は一致し、 Ha と Hb の積を Hab とすることにより、剰余類全体は群をなす。この群を G の H を法とする 剰余群 と呼び、

$$G/H \quad (2.1.6)$$

と書く。実際に群をなしているか確かめる。 H を G の正規部分群とする。このとき G を H によって剰余類に分解することができる。

$$G = Hg_1 + Hg_2 + \cdots + Hg_m \quad (2.1.7)$$

ここで、 $g_i \in G$ ($i = 1, 2, \dots, m$), $g_1 = e$ で、 m は $(G \text{ の位数}) / (H \text{ の位数})$ である。今、二つの剰余類 Hg_i, Hg_j から任意の元をそれぞれ選んできて積をとる。 H が正規部分群であることから、

$$\begin{aligned} h_i g_i h_j g_j &= h_i g_i h_j g_i^{-1} g_i g_j \\ &= h_i h'_j g_i g_j \quad (g_i h_j g_i^{-1} = h'_j) \\ &= h_k g_i g_j \quad (h_k = h_i h'_j) \end{aligned}$$

となり、 Hg_i, Hg_j の積は $Hg_i g_j$ に属することがわかる。これより剰余類全体は群を形成する。

次に群および後に述べる群の表現で重要な役割を演じる写像を定義する。この写像は、以下で見るように群の積の演算を保つ写像である。

定義 (準同型写像) 二つの群を G, G' とする。写像 $f: G \rightarrow G'$ が

$$f(ab) = f(a)f(b) \quad (2.1.8)$$

を満たすとき、 f を 準同型写像 という。

このとき $f(a) = e$ となる G の元全体を f の 核(Kernel) といい、 $\text{Ker} f$ と書く。また、 $f(a)(a \in G)$ となる G' の元全体を f の 像(Image) といい、 $\text{Im} f$ あるいは $f(G)$ と書く。 $\text{Ker} f$ と $\text{Im} f$ に関して以下のことが成立する。

命題

- (1) $\text{Ker} f$ は G の正規部分群である
- (2) $\text{Im} f$ は G' の部分群である。

証明

- (1) $a, b \in \text{Ker} f$ とする。

$$f(ab) = f(a)f(b) = e \cdot e = e$$

より、 $ab \in \text{Ker} f$ である。また

$$f(e) = f(e)f(e)$$

より $f(e) = e$ であるので、 $e \in \text{Ker} f$ である。さらに

$$e = f(a^{-1}a) = f(a^{-1})f(a) = f(a^{-1})$$

より、 $a^{-1} \in \text{Ker} f$ である。以上より、 $\text{Ker} f$ は G の部分群である。

- (2) $a' = f(a), b' = f(b) \in \text{Im} f$ とする。ただし $a, b \in G$ である。

$$a'b' = f(a)f(b) = f(ab)$$

より $a'b' \in \text{Im} f$ である。また

$$f(e) = e$$

より $e \in \text{Im} f$, さらに

$$e = a'^{-1}a' = f(a^{-1})(a)$$

より、 $a'^{-1} = f(a^{-1})$ なので、 $a'^{-1} \in \text{Im} f$ となる。以上より $\text{Im} f$ は G' の部分群である。

また、 $\text{Ker} f = e$ のとき、 f を単射あるいは 1 対 1 と呼び、 $f(G) = G'$ のとき、 f を全射あるいは上への写像と呼ぶ。特に、 f が全単射、すなわち 1 対 1 で上への写像であるとき、 f を同型写像と呼ぶ。このとき G と G' は同型であるといい、

$$G \cong G' \quad (2.1.9)$$

と書く。

一般には f が準同型写像のとき、次の定理が成立する。

定理 (準同型定理)*¹

G, G' を群, $f : G \rightarrow G'$ を準同型写像とする。このとき

$$\text{Im} f \cong G / \text{Ker} f \quad (2.1.10)$$

が成立する。

G と G' の直積集合を

$$G \times G' = \{(g, g'); g \in G, g' \in G'\} \quad (2.1.11)$$

とする。これは、元の積を

$$(a, b)(a', b') = (aa', bb') \quad (2.1.12)$$

とすると群となる。この群を G と G' の直積群と呼び

$$G \times G' \quad (2.1.13)$$

と書く。また、 G の自己同型写像、すなわち $G \rightarrow G$ なる同型写像の全体を $\text{Aut}(G)$ と書き、 $\alpha : G' \rightarrow \text{Aut}(G)$ なる準同型写像を一つ固定する。ここで

$$(a, b)(a', b') = (a(\alpha(b)a'), bb') \quad (2.1.14)$$

で積を定めた直積集合を G と G' の半直積群といい

$$G \rtimes_{\alpha} G' \quad (2.1.15)$$

と書く。このとき $G \cong G \times \{e\}$ は正規部分群になる。

2.1.2 位相空間

この節では、現代数学を考える上で必要不可欠な位相とそれに関連した事柄を述べる。

定義 (位相空間)

X の部分集合を元としてもつ集合族

$$\mathcal{O} = \{O_{\lambda}; O_{\lambda} \subset X, \lambda \in \Lambda\} \quad (2.1.16)$$

が次の条件を満たすとき、 $\mathcal{O}$ を X の開集合系という。

- (1) $X, \emptyset \in \mathcal{O}$
- (2) $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \mathcal{O}$ ならば、 $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 \in \mathcal{O}$

*¹ 証明は付録 A 参照

(3) すべての $\Lambda_0 \subset \Lambda$ に対し, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda_0} \mathcal{O}_\lambda \in \mathcal{O}$

このような集合族 $\mathcal{O}$ を与えることを X に位相を導入するといい, 対 $(X, \mathcal{O})$ を 位相空間 と呼ぶ。

X のみで位相空間と呼ぶこともある。 $\mathcal{O}_\lambda$ は X の 開集合 であるという。つまり位相空間の定義は開集合を定義するものであるとも見ることができる。

定義 (閉集合)

$(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする。 X の部分集合 S の補集合が開集合, すなわち $X - S \in \mathcal{O}$ のとき, S を 閉集合 と呼ぶ。

次に近傍という概念を定義する。

定義 (近傍)*2

$(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする。点 $x \in X$ を含む X の部分集合 W で

$$x \in U \subset W$$

なる開集合 U が存在するとき, W を x の 近傍 と呼ぶ。また, その全体を x の 近傍系 と呼ぶ。

実は, 位相空間の定式化の方法は一通りではない。例えば, 閉集合系を与えるように定式化しても等価な理論が得られる。本論文で開集合系を与えるように位相空間を定式化した理由は, 次に述べる定義が一番簡潔になるからである。

定義 (連続写像)

以下簡単のために X のみで位相空間であると呼ぶことにする。 X, Y を位相空間とする。写像

$$f: X \rightarrow Y$$

が $x \in X$ で 連続 であるとは, $f(x)$ を含む Y の任意の開集合 V に対して, X の x を含むある開集合 U が存在して

$$f(U) \subset V$$

となることである。特に, f が X のすべての点で連続であるとき, f は X で連続あるいは単に連続であるという。

定義 (同相写像)

X, Y を位相空間とする。連続写像 $f: X \rightarrow Y$ が全単射であり, かつ逆写像 f^{-1} も連続なとき, f を 同相写像 と呼ぶ。このとき X と Y は同相あるいは 位相同型 であるといい

$$X \approx Y$$

と書く。

*2 近傍の定義から, 近傍はいつも”近い”というわけではないということに注意されたい。なぜならば, x を含む W はとても大きく取れることもでき, X 自身にも取ることができるからである。そうすると近傍の条件をみたすような開集合 U で, 我々の感覚でいう”大きい”ものも取れてしまう。

次に、ある位相空間と他の任意の空間（こちらは位相が導入されているかわからない）があるとき、開集合と連続写像によりある位相空間の情報、つまり位相を他の空間にコピーできることを見る。位相空間のこのような性質により我々は部分空間や直積、テンソル積といった概念を自然に使うことが許される。

定義 (誘導位相)

Y を位相空間とし、 X は位相が導入されているかは定かではない空間とする。このとき X の開集合を

$$f^{-1}(V) \quad (V \text{ は } Y \text{ の開集合})$$

と定めることにより X に位相が入り、かつ f は連続になる。このような位相を、 f による 誘導位相 と呼ぶ。特に、 X が位相空間 X の部分集合 S で、 f が X である場合は、

$$f: S \rightarrow X$$

を $f(x) = x \quad (x \in X)$ で定めることにより f の誘導位相を S に入れることができる。このような位相を 相対位相 と呼び、 S を X の 部分位相空間 と呼ぶ。

逆に、全射な写像 $f: X \rightarrow Y$ が与えられていて、 Y には位相が導入されていないとする。このとき、 Y の開集合 V を

$$f^{-1}(V) \text{ が } X \text{ の開集合}$$

となるものと定めると、 Y に位相が入り、かつ f は連続となる。このような位相も f による 誘導位相 と呼ぶ。

ここで、数学的に分類を行う上で重要な概念である同値関係について述べておく。同値関係は、例えば、リンゴが5個とみかんが5個あったとき、「5」という意味で同じとみなすという考えを抽象化したものである。

定義 (関係)

ある集合を X とする。集合 X における 関係 R は、 X^2 の部分集合である。点 $(a,b) \in X^2$ が R の元であるとき、 aRb と書くこともある。

定義 (同値関係)

集合を X とする。集合 X の元の間に、ある関係 $\sim$ が定義されていて、 $\forall a, b, c \in X$ に対して次の条件が満たされているとき、関係 $\sim$ を 同値関係 という。

- (1) $a \sim a$ (反射律)
- (2) $a \sim b \Rightarrow b \sim a$ (対称律)
- (3) $a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$ (推移律)

同値類 $[a]$ とは、 $x \sim a$ を満たすようなすべての X の元からなる。

$$[a] = \{x \in X; x \sim a\} \tag{2.1.17}$$

X の二つの同値類を $[a], [b]$ とする。 $[a], [b]$ に対して、 $[a] = [b]$ または $[a] \cap [b] = \emptyset$ が成立するので、集合 X に同値関係を入れることにより、互いに交わりを持たない同値類の集合に分割される。すべての同値類からなる集合を 商集合 と呼び、 $X/\sim$ と書く。 $[a]$ の任意の元を $[a]$ の 代表元 と呼ぶ。

位相空間の話に戻る。

定義 (商位相)

X を位相空間とする。 X に同値関係 $\sim$ があるとき,

$$f: X \rightarrow X/\sim$$

なる商空間への全射が得られる。このとき、商空間 $X/\sim$ に誘導位相を入れることができ、この位相を商位相と呼ぶ。

次に、二つの集合の直積を定義し、誘導位相の考え方をこの直積集合に適用する。

定義 (直積集合)

X, Y を二つの集合とする。 $a \in A, b \in B$ の組 (a, b) 全体の作る集合を、 A と B との直積といい

$$A \times B \quad (2.1.18)$$

と書く。 $(a, b), (a', b') \in A \times B$ ($a, a' \in A; b, b' \in B$) は、 $a = a', b = b'$ のとき、かつそのときに限って等しいとする。

定義 (直積位相空間)

X, Y を位相空間とし、 $X \times Y$ を X, Y の直積集合とする。二つの写像 $f_1: X \times Y \rightarrow X, f_2: X \times Y \rightarrow Y$ を $f_1(x, y) = x, f_2(x, y) = y$ で定める。このとき、 $(x, y) \in X \times Y$ の近傍系を

$$f_1^{-1}(U) \cap f_2^{-1}(V) \quad (U, V \text{ はそれぞれ } X, Y \text{ の開集合})$$

の形で表されるもの全体とすると、 $X \times Y$ は位相空間となり、 f_1, f_2 は連続となる。この $X \times Y$ を直積位相空間と呼ぶ。

この節の最後に、位相空間の連結性とコンパクト性について述べる。この二つの性質のあるなしで、位相空間、ひいては群の性質が大きく変わる。ゆえにこの二つの性質は位相群の性質を語る上で非常に重要である。

定義 (連結)

X を位相空間とする。 X が連結であるとは、空でない X の閉部分集合 A, B が存在して

$$X = A \cup B, \quad A \cap B = \emptyset$$

とならないことである。

この定義は我々の直観的な連結のイメージ (つながっている) と合致する。 X の部分集合 S に対しても、部分位相空間としてその連結性を考えることができる。

定義 (連結成分)

$x \in X$ を含む最大の連結部分集合を、 x を含む連結成分という。

定義 (局所連結)

x を含む任意の近傍 U に対して、ある

$$x \in V \subset U$$

なる近傍で、 U に含まれる連結成分で V を含むものがあるとき、 x で局所連結であるという。とくに、 X の各点で局所連結のとき、 X は局所連結であるという。

X の部分集合の族 $\{\mathcal{M}_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ が

$$X \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{M}_\lambda \quad (2.1.19)$$

を満たすとき, $\{\mathcal{M}_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ を X の被覆と呼ぶ。とくに各 $\mathcal{M}_\lambda$ が開集合のとき開被覆, λ が有限集合のとき有限被覆と呼ぶ。

定義 (コンパクト, 局所コンパクト)

X の任意の開被覆に対して, この細分として有限開被覆が取れるとき, X をコンパクトであるという。

また, X の各点にコンパクトな近傍が取れるとき, X を局所コンパクトであるという。

2.2 局所コンパクト群と Haar 測度

2.2.1 局所コンパクト群

群 G が位相空間であるものを考える。以下では, G の位相が次の公理を満たしているとする。

Hausdorff の公理 (第 2 分離公理, T_2 公理)

X を位相空間とする。相異なる 2 点 $a, b \in X$ に対して, それぞれの近傍 U, V で $U \cap V = \emptyset$ なるものが存在する。

この性質を持った位相空間を Hausdorff 空間と呼ぶ。以下, 位相空間といった場合にはこの Hausdorff 空間を意味すると理解しておく。

定義 (位相群)

群 G が位相空間であるとする。直積位相空間 $G \times G$ から G への写像, G から G のへの写像

$$(a, b) \mapsto ab, \quad a \mapsto a^{-1}$$

がそれぞれ連続であるとき, G を位相群と呼ぶ。すなわち, これは群演算が位相に関して連続であることを要求している。

定義 (局所コンパクト群)

G が局所コンパクト空間, すなわち, 各点にコンパクトな近傍系がとれるとき, G を局所コンパクト群と呼ぶ。とくに, 各点に Euclid 空間のある開集合と同相な近傍が定義できるとき, 局所 Euclid 群と呼ばひ, 群演算が実解析的写像, すなわち C^∞ 級写像となるとき, Lie 群と呼ぶ。

局所コンパクト群に関して次の基本的な命題が成立する。

命題

G, G' を局所コンパクト群, H を G の閉部分群とする。

- (1) H に相対位相を入れると, H は局所コンパクト群となる。
- (2) H が正規部分群のとき, G/H に商位相を入れると局所コンパクト群となる。
- (3) $G \times G'$ に直積位相を入れると局所コンパクト群となる

ここで局所コンパクト群の例を挙げておく。

局所コンパクト Abel 群

実数の加法群 R , 乗法群 $R^\times = R - \{0\}$, 整数の加法群 Z , 1 次元トーラス $T = R/Z$, 有限 Abel 群 F などがある。とくに,

$$R^l \times T^m \times Z^n \times F \quad (2.2.1)$$

の形をしたものを基本 Abel 群という。 $l > 0$ または $n > 0$ のとき, これは非コンパクト群となる。

コンパクト群

m 次元トーラス T^m , 直交群 $O(n)$, ユニタリー群 $U(n)$, シンプレクティック群 $Sp(n)$, 特殊直交群 $SO(n)$, 特殊ユニタリー群 $SU(n)$, 例外型コンパクト単純 Lie 群などがある。

Lie 群

実一般線形群 $GL(n, R)$, 実特殊線形群 $SL(n, R)$, $O(n)$, $U(n)$, $Sp(n)$, 複素一般線形群 $GL(n, C)$, 複素特殊線形群 $SL(n, C)$, 複素直交群 $O(n, C)$, 複素シンプレクティック群 $Sp(n, C)$, 複素特殊直交群 $SO(n, C)$, 例外型 Lie 群, 運動群 $M(2)$, Heisenberg 群 H_n , アファイン群, $ax + b$ 群, 岩澤 AN 群などがある。

2.2.2 不変測度と不変積分

この節では, 我々の目的を達成するための G 上の測度を紹介する。そのような測度は Haar 測度と呼ばれる。

定義 (右移動, 左移動)

G を局所コンパクト群とする。 G の部分集合 E に対して, E の $x \in G$ における右移動および左移動を

$$Ex = \{hx; h \in E\}, \quad xE = \{xh; h \in E\} \quad (2.2.2)$$

と書く。

Haar 測度については次の定理が知られている。

定理 (Haar の定理)

G を局所コンパクト群, μ_R を G の正則 Borel 測度^{*3}とする。すべての μ_R -可測集合 E と $x \in G$ に対して

$$\mu_R(Ex) = \mu_R(E) \quad (2.2.3)$$

となるものが存在して, それらは正の定数倍を除いて一意である。この μ_R を 右不変 Haar 測度 と呼ぶ。逆に,

$$\mu_L(xE) = \mu_L(E) \quad (2.2.4)$$

となるものは 左不変 Haar 測度 と呼ぶ。

定理

μ を μ_R か μ_L のいずれかとする

- (1) $E \subset G$ が空でない開集合ならば, $\mu(E) > 0$
- (2) $E \subset G$ がコンパクトならば, $\mu(E) < \infty$

^{*3} Borel 測度については付録 B 参照

G 上のコンパクトな台を持つ複素数値連続関数の全体を $C_c(G)$ と書く。 $f \in C_c(G)$ の不変測度 μ_R, μ_L による積分を

$$\int_G f(x) dx_R, \quad \int_G f(x) dx_L \quad (2.2.5)$$

と書く。このとき、次の定理が成立する。

定理 (不変積分)

任意の $y \in G$ に対して

$$(1) \quad \int_G f(xy) dx_R = \int_G f(x) dx_R$$

$$(2) \quad \int_G f(yx) dx_L = \int_G f(x) dx_L$$

となる。

2.2.3 モジュラー関数

G を局所コンパクト群とする。 G の各元 y に対して、 $C_c(G)$ 上の積分を

$$I_y(f) = \int_G f(yx) dx_R \quad (2.2.6)$$

と定める。これは形から y に依存する関数であり、任意の G の元 z に対し

$$\int_G f(yxz) dx_R = \int_G f(yx) dx_R$$

となることから右不変積分であることが分かる。Haar の定理から、対応する右不変積分は正の定数倍を除いて一意に定まる。よって、次のような G 上の正值関数を定義できる。

定義 (モジュラー関数)

G を局所コンパクト群とする。ある G 上の正值関数 $\Delta_G : G \rightarrow \mathbf{R}_+^\times = \{x > 0\}$ が存在して

$$\int_G f(yx) dx_R = \Delta_G(y) \int_G f(x) dx_R \quad (2.2.7)$$

となる。この Δ_G をモジュラー関数と呼ぶ。

モジュラー関数についての性質を調べる。まず、単位元 $e \in G$ について

$$\begin{aligned} \int_G f(ex) dx_R &= \int_G f(x) dx_R \\ &= \Delta_G(e) \int_G f(x) dx_R \end{aligned}$$

であり、任意の元 $y, z \in G$ について

$$\begin{aligned} \int_G f(yzx) dx_R &= \Delta_G(yz) \int_G f(x) dx_R \\ &= \Delta_G(y) \int_G f(zx) dx_R \\ &= \Delta_G(y) \Delta_G(z) \int_G f(x) dx_R \end{aligned}$$

となっている。これより、モジュラー関数は連続で、任意の $x, y \in G$ に対して

$$\Delta_G(e) = 1 \quad (2.2.8)$$

$$\Delta_G(xy) = \Delta_G(x)\Delta_G(y) \quad (2.2.9)$$

満たすことがわかる。すなわち、 Δ_G は G から $\mathbf{R}_+^\times$ への準同型写像となる。

次に、モジュラー関数の定義から、 $\Delta_G(x)dx_R$ が左不変測度になっていることがわかる。これを確かめる。測度 $\Delta_G(x)dx_R$ の $f(yx)$ に対する積分を考えると

$$\begin{aligned} \int_G f(yx)\Delta_G(x)dx_R &= \int_G f(yx)\Delta_G(y^{-1}yx)dx_R \\ &= \Delta_G(y^{-1}) \int_G f(yx)\Delta_G(yx)dx_R \end{aligned}$$

式 (2.2.6) で $f(yx)$ を $f(yx)\Delta_G(yx)$ に置き換えると

$$\int_G f(yx)\Delta_G(yx)dx_R = \Delta_G(y) \int_G f(x)\Delta_G(x)dx_R$$

となるので

$$\begin{aligned} \int_G f(yx)\Delta_G(x)dx_R &= \Delta_G(y^{-1})\Delta_G(y) \int_G f(x)\Delta_G(x)dx_R \\ &= \int_G f(x)\Delta_G(x)dx_R \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

となる。よって、 $\Delta_G(x)dx_R$ が左不変測度になっていることがわかった。ちなみに、 dx_L が左不変測度のとき、 $\Delta_G(x^{-1})dx_L$ が右不変測度になる。

一般に右不変測度 dx_R と左不変測度 $\Delta_G(x)dx_R$ は等しくないが、これらが等しい群、つまり

$$\Delta_G \equiv 1 \quad (2.2.11)$$

となる群をユニモジュラーと呼ぶ。一般に Abel 群、コンパクト群、離散群はユニモジュラーである。

2.3 位相群の表現

2.3.1 表現の定義

この節では、 G を局所コンパクト群とする。

定義 (有界線形作用素)

$\mathcal{H}$ を複素 Hilbert 空間とする。作用素 $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ が

(1) $u \in \mathcal{H}$ に対して

$$\lim_{u \rightarrow 0} Au = 0 \quad (2.3.1)$$

(2) $(u, v \in \mathcal{H}, \alpha, \beta \in \mathbf{C})$ に対して

$$A(\alpha u + \beta v) = \alpha A(u) + \beta A(v) \quad (2.3.2)$$

を満たすとき、 A を有界線形作用素と呼び、その全体のつくる代数を $B(\mathcal{H})$ と書く。

定義 (表現)

写像 $T: G \rightarrow B(\mathcal{H})$ と $\mathcal{H}$ の組 $(T, \mathcal{H})$ が G の表現 であるとは, T が次の条件を満たすことである。

(1) $x, y \in G$ について

$$T(xy) = T(x)T(y) \quad (2.3.3)$$

(2) $e \in G$ について

$$T(e) = I \quad (2.3.4)$$

ただし, I は恒等作用素である。

(3) T は強連続, すなわちすべての $v \in \mathcal{H}$ に対して

$$x \mapsto T(x)v \quad (x \in G) \quad (2.3.5)$$

が G 上連続となる。

ここで, $\mathcal{H}$ を T の表現空間, $\mathcal{H}$ が無限次元のとき 無限次元表現, 有限次元のとき 有限次元表現 という。

G が有限群の場合は, 条件 (1), (2) のみ課せば表現となる。 G を位相群に格上げすることにより G に位相が入り, (3) の条件が加わる。以下, 表現に関する定義をいくつか述べる。

本論文ではほとんどの表現がユニタリーである。よって, 表現がユニタリーであるとはどういうことかについてまず定義する。

定義 (ユニタリー表現)

$(T, \mathcal{H})$ を G の表現とする。 $(T, \mathcal{H})$ がユニタリー であるとは, すべての $x \in G$ に対して $T(x)$ がユニタリー作用素となることである。すなわち

$$T^*(x)T(x) = T(x)T^*(x) = I \quad (x \in G) \quad (2.3.6)$$

ここで, $T^*(x)$ は $T(x)$ の双対作用素で, $\mathcal{H}$ の内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ を書けば

$$\langle T(x)u, v \rangle_{\mathcal{H}} = \langle u, T^*(x)v \rangle_{\mathcal{H}} \quad (u, v \in \mathcal{H}, x \in G) \quad (2.3.7)$$

を満たす。

定義 (ユニタリー同値)

$(T_1, \mathcal{H}_1), (T_2, \mathcal{H}_2)$ を G のユニタリー表現とする。 $(T_1, \mathcal{H}_1), (T_2, \mathcal{H}_2)$ がユニタリー同値 であるとは, 同型なユニタリー作用素 $A: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ が存在して

$$AT_1(x) = T_2(x) \quad (x \in G) \quad (2.3.8)$$

となることである。この A を 絡み作用素 と呼び, ユニタリー同値な表現を $T_1 \cong T_2$ と書く。

次に, 表現が可約か既約かを考える上で必要なものを定義していく。表現が既約であるとは, 大ざっぱにいうと, これ以上小さい表現に分割できないものである。

定義

$(T, \mathcal{H})$ を G の表現とする。 $\mathcal{H}$ の部分空間 $\mathcal{H}_0$ が T で 不変 であるとは

$$T(x)\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_0 \quad (2.3.9)$$

が成り立つことである。このとき, $\mathcal{H}_0$ を T の G 不変部分空間 と呼ぶ。

特に G 不変空間 $\mathcal{H}_0$ が空でない閉集合であるとき, $T(x)$ の $\mathcal{H}_0$ への制限を

$$T'(x)u = T(x)u \quad (u \in \mathcal{H}_0, x \in G) \quad (2.3.10)$$

とすれば, $(T', \mathcal{H}_0)$ は G の表現となる。これを $(T, \mathcal{H})$ の部分表現と呼び,

$$T' = T|_{\mathcal{H}_0} \quad (2.3.11)$$

と書く。今, $\mathcal{H}$ が

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{H}_\alpha \quad (2.3.12)$$

のように T の G 不変部分空間の Hilbert 空間の直和に分解されているとする。このとき

$$T_\alpha = T|_{\mathcal{H}_\alpha} \quad (2.3.13)$$

とすれば, 各 $(T_\alpha, \mathcal{H}_\alpha)$ は $(T, \mathcal{H})$ の部分表現となる。さらに $(T, \mathcal{H})$ は $\{(T_\alpha, \mathcal{H}_\alpha); \alpha \in \Lambda\}$ の直和であるといい

$$T = \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} T_\alpha \quad (2.3.14)$$

と書く。

定義 (既約, 可約)

G の表現 $(T, \mathcal{H})$ が既約であるとは, T の G 不変閉部分空間が $\mathcal{H}$ と $\{0\}$ のみしか存在しないことである。そうでないときは可約であるという。

また, 単に T の G 不変部分空間を考える場合には代数的既約あるいは代数的可約という。

定義 (巡回ベクトル)

$(T, \mathcal{H})$ を G の表現とする。 $v \in \mathcal{H}$ が巡回ベクトルであるとは, $\{T(x)v; x \in G\}$ の有限線形結合全体が $\mathcal{H}$ で稠密となることである。このような巡回ベクトルが存在する表現を巡回表現という。

$(T, \mathcal{H})$ が既約であれば, $\mathcal{H}$ のゼロでないすべての元が巡回ベクトルとなるので, $(T, \mathcal{H})$ は巡回表現である。巡回表現は必ずしも既約とは限らないが, $\mathcal{H}$ のすべてのゼロでない元が巡回ベクトルであれば既約となる。

今まで, 既約, 可約に関することについて定義をしてきたが, 実際に既約性を判定するには次の補題が非常に有効である。

定理 (Schur の補題)

$(T, \mathcal{H})$ を G のユニタリー表現とする。 T が既約となる必要十分条件は

$$AT(x) = T(x)A \quad (2.3.15)$$

を満たす $A \in \mathcal{H}$ は cI ($c \in \mathbb{C}$) に限られることである。

上の条件は, もとの Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ が実空間のときは, T が既約となる十分条件である。また, ユニタリー表現を有限次元表現に置き換えると, T が既約となる必要条件となる。

$(T, \mathcal{H})$ を G の表現とし, Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の双対空間, すなわち, $\mathcal{H}$ 上の連続線形汎関数の全体を $\mathcal{H}^*$ とする。これは再び Hilbert 空間となる。実際, Riesz の定理^{*4}より, 内積を

$$\langle \phi, \psi \rangle_{\mathcal{H}^*} = \langle v_\phi, v_\psi \rangle_{\mathcal{H}} \quad (2.3.16)$$

^{*4} $\forall \phi \in \mathcal{H}^*$ に対して, 一意にある $v_\phi \in \mathcal{H}$ が存在して $\phi(u) = \langle u, v_\phi \rangle_{\mathcal{H}}$ と書けるという定理である。

と定められる。今, $B(\mathcal{H}^*)$ を

$$(T^*(x)\phi)(u) = \phi(T(x^{-1})u) \quad (x \in G, \phi \in \mathcal{H}^*, u \in \mathcal{H}) \quad (2.3.17)$$

と定義する。このとき $(T^*, \mathcal{H}^*)$ は再び G の表現となり^{*5}, これを $(T, \mathcal{H})$ の 反傾表現 と呼ぶ。 T がユニタリーであれば T^* もユニタリーであり, T が既約であれば T^* も既約である。また

$$T \cong (T^*)^* \quad (2.3.18)$$

が成立する。

二つのユニタリー表現 $(T_1, \mathcal{H}_1)$ と $(T_2, \mathcal{H}_2)$ が与えられたとき, 二つの表現空間 $\mathcal{H}_1$ と $\mathcal{H}_2$ の直和 $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ およびテンソル積 $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ を考える。それぞれの内積を

$$\langle v_1 \oplus v_2, w_1 \oplus w_2 \rangle_{\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2} = \langle v_1, w_1 \rangle_{\mathcal{H}_1} + \langle v_2, w_2 \rangle_{\mathcal{H}_2} \quad (2.3.19)$$

$$\langle v_1 \otimes v_2, w_1 \otimes w_2 \rangle_{\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2} = \langle v_1, w_1 \rangle_{\mathcal{H}_1} \langle v_2, w_2 \rangle_{\mathcal{H}_2} \quad (2.3.20)$$

と定めることにより, これらの空間は再び Hilbert 空間となる。新しい表現を

$$(T_1 \oplus T_2)(g)(v \oplus w) = T_1(g)v \oplus T_2(g)w \quad (v \in \mathcal{H}_1, w \in \mathcal{H}_2, g \in G) \quad (2.3.21)$$

$$(T_1 \otimes T_2)(g)(v \otimes w) = T_1(g)v \otimes T_2(g)w \quad (v \in \mathcal{H}_1, w \in \mathcal{H}_2, g \in G) \quad (2.3.22)$$

と定義する。このとき, $(T_1 \oplus T_2, \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2)$ と $(T_1 \otimes T_2, \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$ をそれぞれ T_1, T_2 の 直和 および テンソル積 と呼ぶ。

ここで, 既約ユニタリー表現の全体を考える。同値関係を $\cong^{*6}$ とし, これによる同値類全体の集合が考えられる。これを $\hat{G}$ とし, G の ユニタリー双対 と呼ぶ。 G が与えられたときに $\hat{G}$ を求める問題は極めて難しい問題で, 今日でも盛んに研究されている。ここでは, 後に有用な結果をいくつか述べることに留める。

定理

局所コンパクト群の有限次元ユニタリー表現は既約ユニタリー表現の直和に分解される。

定理

コンパクト群の既約ユニタリー表現はすべて有限次元であり, 任意のユニタリー表現は既約ユニタリー表現の直和に分解される。連結なコンパクト群の $\hat{G}$ は完全に分類される。

定理

Abel 群の既約ユニタリー表現はすべて 1 次元であり, それらは指標に他ならない。

^{*5} まず

$$\begin{aligned} (T^*(xy)\phi)(u) &= \phi(T(y^{-1}x^{-1})u) \\ &= \phi(T(y^{-1})T(x^{-1})u) \\ &= (T^*(x)T^*(y)\phi)(u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (T^*(e)\phi)(u) &= \phi(T(e^{-1})u) \\ &= \phi(u) \end{aligned}$$

より

$$T^*(xy) = T^*(x)T^*(y), \quad T^*(e) = I$$

構成の仕方より, $x \mapsto T^*(x)\phi$ は G 上連続なので, $(T^*, \mathcal{H}^*)$ は G の表現である。

^{*6} これはユニタリー同値という意味であった。

2.3.2 正則表現

この節では、表現の例として正則表現を与える。正則表現は、大まかに言うと、群が与えられ非自明な表現を構成したいときに一番素直に構成できる表現である。この表現は、3章で述べる Peter-Weyl の定理に使われているので、コンパクト群上での調和解析において重要な役割を果たしている。まず、正則表現を述べる前に、もっと単純な表現の例を2つほど挙げておく。

自明な表現

G を任意の局所コンパクト群とし、 $\mathcal{H} = \mathbb{C}$ とする。

$$T(x)z = z \quad (x \in G, z \in \mathbb{C}) \quad (2.3.23)$$

としたとき、 $(T, \mathbb{C})$ を 自明な表現 と呼ぶ。これはユニタリー表現である。

恒等表現

$G = GL(n, \mathbb{F})$ とし、 $\mathcal{H} = \mathbb{C}$ とする。ここで、 $\mathbb{F}$ は $\mathbb{R}$ もしくは $\mathbb{C}$ のどちらかを表す。

$$T(x)v = xv \quad (2.3.24)$$

としたとき、 $(T, \mathbb{C}^n)$ を 恒等表現 と呼ぶ。 G は $\mathbb{C}^n$ へ推移的に作用することから、既約表現となる。

今から正則表現を構成していく。 G をユニモジュラーな局所コンパクト群とし、 $\mathcal{H} = L^2(G)$ 、すなわち G 上の2乗可積分関数の全体

$$L^2(G) = \{f : G \rightarrow \mathbb{C}; \|f\|_2^2 = \int_G |f(g)|^2 dg < \infty\} \quad (2.3.25)$$

とする。ここで dg は Haar 測度である。 $L^2(G)$ の内積を

$$\langle f, h \rangle_{\mathcal{H}} = \int_G f(g) \bar{h}(g) dg \quad (f, h \in L^2(G)) \quad (2.3.26)$$

と定めることにより、 $L^2(G)$ は Hilbert 空間となる。以下、一般の L^2 空間 $L^2(X)$ に対して、式 () のようにして入れる内積を 自然な内積 と呼ぶ。

$f \in L^2(G)$ に対して

$$(T_R(x)f)(g) = f(gx) \quad (g, x \in G) \quad (2.3.27)$$

$$(T_L(x)f)(g) = f(x^{-1}g) \quad (g, x \in G) \quad (2.3.28)$$

と定義する。このとき、 $(T_R, L^2(G))$ を 右正則表現、 $(T_L, L^2(G))$ を 左正則表現 と呼ぶ。これらは両方ユニタリー表現になっている。これを確かめる。

まず、右正則表現から確かめる。 $f \in L^2(G)$ に対して

$$\begin{aligned} \|T_R(x)f\|_2^2 &= \int_G |f(gx)|^2 dg \\ &= \int_G |f(g)|^2 dg \\ &= \|f\|_2^2 \end{aligned} \quad (2.3.29)$$

より, $T_R(x)$ ($x \in G$) はユニタリー作用素である。また, $x, y, g \in G$ に対して

$$\begin{aligned}(T_R(x)(T_R(y)f))(g) &= (T_R(y)f)(gx) \\ &= f(gxy) \\ &= (T_R(xy))(g)\end{aligned}\tag{2.3.30}$$

より

$$T_R(x)T_R(y) = T_R(xy) \quad (x, y \in G)\tag{2.3.31}$$

となる。また, 明らかに

$$T_R(e) = I\tag{2.3.32}$$

である。 $x \mapsto T_R(x)f$ の連続性は, $f \in C_c(G)$ のときは, その一様連続性から示される。 $f \in L^2(G)$ の場合は, $C_c(G)$ の要素で近似することにより示すことができる。よって, $(T_R, L^2(G))$ がユニタリー表現であることがわかった。

次に, 左正則表現について確かめる。 $T_L(x)$ ($x \in G$) がユニタリー作用素であることは右正則表現と同様にしてわかる。また, $x, y, g \in G$ に対して

$$\begin{aligned}(T_L(x)(T_L(y)f))(g) &= (T_L(y)f)(x^{-1}g) \\ &= f(y^{-1}x^{-1}g) \\ &= f((xy)^{-1}g) \\ &= (T_L(xy))(g)\end{aligned}\tag{2.3.33}$$

より

$$T_L(x)T_L(y) = T_L(xy) \quad (x, y \in G)\tag{2.3.34}$$

となる。残りも明らかに右正則表現と同様にしてわかるので, $(T_L, L^2(G))$ はユニタリー表現である。

一般に正則表現は無限次元で可約である。正則表現が既約となる必要十分条件は $G = \{e\}$ のときで, 有限次元表現となる必要十分条件は G が有限群となるときである。これらは正則表現の構成の仕方から直観的にはすぐわかるものである。

今まで, 右, 左正則表現両方を区別して考えてきたが, 実はこれらはユニタリー同値である。今

$$Af(g) = f(g^{-1}) \quad (g \in G)\tag{2.3.35}$$

なる A を定めると

$$\begin{aligned}(AT_R(x)f)(g) &= (T_R(x)f)(g^{-1}) \\ &= f(g^{-1}x) \\ &= Af(x^{-1}g) \\ &= ((T_L(x)A)f)(g)\end{aligned}\tag{2.3.36}$$

より, $A : L^2(G) \rightarrow L^2(G)$ は T_R と T_L の絡み作用素であることがわかる。したがって, T_R と T_L はユニタリー同値で

$$T_R \cong T_L\tag{2.3.37}$$

となる。

3 群上の調和解析

この章での目的は、全章で定義した局所コンパクト群について Fourier 変換, 逆変換公式, Plancherel の公式を構成することである。ここでは基本的な一般論をまとめるのみに留め, 具体的な計算については次章で行う。

3.1 行列要素とその直交性

まず, 行列要素を定義する。

定義 (行列要素)

G を局所コンパクト群でユニモジュラーとする。 $(T, \mathcal{H})$ を G のユニタリー表現とし, Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ での内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ と表す。 $v, w \in \mathcal{H}$ に対して

$$c_{v,w}(g) = \langle T(g)w, v \rangle_{\mathcal{H}} \quad (g \in G) \quad (3.1.1)$$

によって定まる G 上の関数を表現 T の v, w に対する行列要素と呼ぶ。3.1 節では, この行列要素が主要な役割を演じる。

3.1.1 2 乗可積分表現

まず重要な表現のクラスを定義する。

定義 (2 乗可積分表現)

すべての $v, w \in \mathcal{H}$ に対して, $c_{v,w}$ が G 上の 2 乗可積分関数となる, つまり $C_{v,w}(g) \in L^2(G)$ になるとき, T を 2 乗可積分表現 と呼ぶ。

2 乗可積分表現の基本的性質を述べていく。 $w \neq 0 \in \mathcal{H}$ を固定して, 作用素 $A_w : \mathcal{H} \rightarrow L^2(G)$ を $v \in \mathcal{H}$ に対して

$$(A_w(v))(g) = c_{v,w}(g) \quad (3.1.2)$$

と定義する。今, T と G の左正則表現 $(T_L, L^2(G))$ を考え, $(T_L(g)A_w(v))(x)$ ($x \in G$) を計算する。

$$\begin{aligned} (T_L(g)A_w(v))(x) &= T_L(g)c_{v,w}(x) \\ &= c_{v,w}(g^{-1}x) \\ &= \langle T(g^{-1}x)w, v \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \langle T(x)w, T(g)v \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= c_{T(g)v,w}(x) \\ &= (A_w(T(g)v))(x) \end{aligned}$$

これより,

$$A_w T(g) = T_L(g) A_w \quad (3.1.3)$$

であり, A_w は $(T_L, \mathcal{H})$ との絡み作用素となっている。もし T が既約であれば, w は巡回ベクトルとなり, A_w が単射であるとわかる。したがって, $(T, \mathcal{H})$ は $(T_L, L^2(G))$ の部分表現と同値になる。さらに, 作用素

$B_w : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ を $v \in \mathcal{H}$ に対して

$$B_w v = \int_G \overline{A_w(v)(g)} T(g) w dg \quad (3.1.4)$$

と定義する。既約表現を $(T, \mathcal{H})$ とし、任意の $v \in \mathcal{H}$ に対して $B_w(T(x)v)$ ($x \in G$) を計算する。 A_w と行列要素の定義に基づき計算を進めると

$$\begin{aligned} B_w(T(x)v) &= \int_G \overline{A_w(T(g)v)(g)} T(g) w dg \\ &= \int_G \overline{c_{T(x)v, w}} T(g) w dg \\ &= \int_G \overline{\langle T(x)v, T(g)w \rangle_{\mathcal{H}}} T(g) w dg \\ &= \int_G \overline{\langle v, T(x^{-1}g)w \rangle_{\mathcal{H}}} T(g) w dg \\ &= \int_G \overline{\langle v, T(x^{-1}g)w \rangle_{\mathcal{H}}} T(xx^{-1}g) w dg \\ &= \int_G \overline{\langle v, T(x^{-1}g)w \rangle_{\mathcal{H}}} T(x)T(x^{-1}g) w dg \end{aligned}$$

となる。 $T(x)$ は積分の外に出せ、不変積分の性質

$$\int_G \overline{\langle v, T(x^{-1}g)w \rangle_{\mathcal{H}}} T(x^{-1}g) w dg = \int_G \overline{\langle v, T(g)w \rangle_{\mathcal{H}}} T(g) w dg$$

を使うと、結局

$$B_w(T(x)v) = T(x)B_w v \quad (3.1.5)$$

となるので、Schur の補題より B_w は恒等作用素の正定数倍であることがわかる。すなわちある正定数 C_w が存在して

$$\langle c_{v_1, w}, c_{v_2, w} \rangle_{L^2(G)} = C_w \langle v_1, v_2 \rangle_{\mathcal{H}}$$

となる。

これらより、次の定理が成立する。

定理 (直交定理)

$(T, \mathcal{H})$ を既約 2 乗可積分表現とする。このとき、ある正数 $d(T)$ が存在し、すべての $v_1, v_2, w_1, w_2 \in \mathcal{H}$ に対して

$$\langle c_{v_1, w_1}, c_{v_2, w_2} \rangle_{L^2(G)} = \frac{1}{d(T)} \langle v_1, v_2 \rangle_{\mathcal{H}} \langle w_1, w_2 \rangle_{\mathcal{H}} \quad (3.1.6)$$

となる。同値でない 2 つの既約 2 乗可積分表現の行列要素は直交する。

$d(T)$ を 形式的次元 と呼ぶ。 G がコンパクト群のときは、すべての既約ユニタリー表現は有限次元表現であり、かつ 2 乗可積分表現となる。このとき表現の次元と形式的次元は一致する。 G がコンパクト群でないときは表現の次元と形式的次元は一致しない。

3.1.2 有限次元表現の指標

まず、有限次元表現の指標を定義する。

定義 (有限次元表現の指標)

G を局所コンパクト群とし, $(T, \mathcal{H})$ を有限次元表現とする。このとき, G 上の関数 χ_T を

$$\chi_T(g) = \text{Tr} T(g) = \sum_{i=1}^{d(T)} c_{e_i, e_i}(g) = \sum_{i=1}^{d(T)} \langle T(g)e_i, e_i \rangle_{\mathcal{H}} \quad (3.1.7)$$

と定義する。ここで, $d(T)$ は $\mathcal{H}$ の次元で, $\{e_i; 1 \leq i \leq d(T)\}$ は $\mathcal{H}$ の正規直交基底である。この χ_T を表現 T の指標と呼ぶ。

指標がトレースで書かれていることから, 明らかにこれは正規直交基底の取り方に依らない。指標について次の定理が成立する。

定理

T, T_i を有限次元表現とする。

(1) $T_1 \cong T_2$ ならば

$$\chi_{T_1} = \chi_{T_2} \quad (3.1.8)$$

(2) g が単位元 e のとき

$$\chi_T(e) = d(T) \quad (3.1.9)$$

(3) T がユニタリー表現のとき, χ_T は類関数

$$\chi_T(gxg^{-1}) = \chi_T(x) \quad (3.1.10)$$

(4) $T_1 \oplus T_2$ を T_1 と T_2 の直和とすると

$$\chi_{T_1 \oplus T_2} = \chi_{T_1} + \chi_{T_2} \quad (3.1.11)$$

(5) $T_1 \otimes T_2$ を T_1 と T_2 の直積とすると

$$\chi_{T_1 \otimes T_2} = \chi_{T_1} \chi_{T_2} \quad (3.1.12)$$

(6) T がユニタリー表現のとき

$$\chi_{T^*}(x) = \chi_T(x^{-1}) \quad (3.1.13)$$

いくつか確かめる。まず, (1) について, T_1 と T_2 の絡み作用素を A , T_1 と T_2 の表現空間をそれぞれ $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ とする。 $\mathcal{H}_1$ の基底を $\{e_i; 1 \leq i \leq d(T)\}$ としたとき, $\mathcal{H}_2$ の基底は $\{Ae_i; 1 \leq i \leq d(T)\}$ となることに注意すると

$$\begin{aligned} \chi_{T_1}(g) &= \sum_{i=1}^{d(T)} \langle T_1(g)e_i, e_i \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \sum_{i=1}^{d(T)} \langle A^{-1}T_2(g)Ae_i, e_i \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \sum_{i=1}^{d(T)} \langle T_2(g)Ae_i, Ae_i \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \chi_{T_2}(g) \end{aligned}$$

となる。(2) については, $\langle e_i, e_i \rangle_{\mathcal{H}} = 1$ より

$$\begin{aligned}\chi_T(e) &= \sum_{i=1}^{d(T)} \langle e_i, e_i \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= d(T)\end{aligned}$$

となる。(3) については, 表現の性質に則って計算し, T がユニタリー表現であることを使うと

$$\begin{aligned}\chi_T(gxg^{-1}) &= \sum_{i=1}^{d(T)} \langle T(gxg^{-1})e_i, e_i \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \sum_{i=1}^{d(T)} \langle T(g)T(x)T(g)^{-1}e_i, e_i \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \sum_{i=1}^{d(T)} \langle T(x)T(g)^*e_i, T(g)^*e_i \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \chi_T(x)\end{aligned}$$

となる。(6) について T がユニタリー表現であることより

$$\begin{aligned}\chi_{T^*}(x) &= \sum_{i=1}^{d(T)} \langle T^*(x)e_i, e_i \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \sum_{i=1}^{d(T)} \langle T(x^{-1})e_i, e_i \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \chi_T(x^{-1})\end{aligned}$$

となる。 T がユニタリー表現でないときは, (3), (6) は成立しないことに注意されたい。

G をコンパクト群に限る。指標の重要な性質として, 指標の直交性がある。コンパクト群の行列要素の直交関係 (3.1.6) から次の定理が得られる。

定理

T_i ($i = 1, 2$) をコンパクト群の有限次元既約ユニタリー表現とすると

$$\langle \chi_{T_1}, \chi_{T_2} \rangle_{L^2(G)} = \begin{cases} 1 & (T_1 \cong T_2) \\ 0 & (T_1 \text{ と } T_2 \text{ は非同値}) \end{cases} \quad (3.1.14)$$

定理

T, T_i ($i = 1, 2$) をコンパクト群の有限次元ユニタリー表現とすると

(1) T が既約である必要十分条件は

$$\langle \chi_T, \chi_T \rangle_{L^2(G)} = 1 \quad (3.1.15)$$

である。

(2) $T_1 \cong T_2$ である必要十分条件は

$$\chi_{T_1} = \chi_{T_2} \quad (3.1.16)$$

である。

G がコンパクト群でないときは, (2) は必要条件であることに注意されたい。

ところで, 有限次元表現 T (この場合はユニタリーである必要はない) に対して

$$\begin{aligned}
\chi_T(xy) &= \sum_{i=1}^{d(T)} \langle T(xy)e_i, e_i \rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \sum_{i=1}^{d(T)} \langle T(y)e_i, T(x)^*e_i \rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \sum_{i=1}^{d(T)} \sum_{k=1}^{d(T)} \langle T(y)e_i, e_k \rangle_{\mathcal{H}} \langle T(x)e_k, e_i \rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \sum_{i=1}^{d(T)} \sum_{k=1}^{d(T)} c_{e_i, e_k}(x) c_{e_k, e_i}(y)
\end{aligned} \tag{3.1.17}$$

が成立することがわかる。この結果と行列要素の直交関係を組み合わせる。 $*$ を G 上の 結合積

$$f * h(g) = \int_G f(x) h(x^{-1}g) dx = \int_G f(gx^{-1}) h(x) dx \tag{3.1.18}$$

と定義すると, 次の定理が得られる。

定理

$(T_1, \mathcal{H}_1)(T_2, \mathcal{H}_2)$ をコンパクト群の既約ユニタリー表現とすると

$$\chi_{T_1} * c_{T_2, v, w} = \begin{cases} \frac{1}{d(T_1)} c_{T_1, v, w} & (T_1 \cong T_2) \\ 0 & (T_1 \text{ と } T_2 \text{ は非同値}) \end{cases} \tag{3.1.19}$$

となる。

3.2 一般化された Fourier 変換

3.2.1 Peter-Weyl の定理

G をコンパクト群とし, G のユニタリー双対を $\hat{G}$ とする。既約ユニタリー表現のラベルを α とし, α に属する既約ユニタリー表現を $(T, \mathcal{H})$, この表現の次元を $d_\alpha = d(T_\alpha)$ とする。 G がコンパクト群のときは, 次の定理が成り立つことが知られている^{*7}。

定理 (Peter – Weyl)

G をコンパクト群, $(T, L^2(G))$ をその右または左正則表現とする。このとき, T は次の形に既約分解される。

$$T = \bigoplus_{\alpha \in \hat{G}} d(\alpha) T_\alpha \tag{3.2.1}$$

$$L^2(G) = \bigoplus_{\alpha \in \hat{G}} d(\alpha) \mathcal{H}_\alpha \tag{3.2.2}$$

ここで, nT は $T \oplus T \oplus \cdots \oplus T$ (n 個の直和) を意味し, $d(\alpha)$ を T_α の T における 重複度 と呼ぶ。

^{*7} 証明は, [3] を参照

今, $\mathcal{H}_\alpha$ の正規直交基底を $\{e_k^\alpha; 1 \leq k \leq d_\alpha\}$ とし, T_α の指標と行列要素を簡単のため

$$\chi_\alpha = \chi_{T_\alpha} \quad (3.2.3)$$

$$c_{i,j}^\alpha = c_{T_\alpha, e_i^\alpha, e_j^\alpha} \quad (3.2.4)$$

と書く。 $f \in L^2(G)$ を $c_{i,j}^\alpha$ で展開する。直交関係の式 (3.1.6) と式 (3.2.2) より

$$f(g) = \sum_{\alpha \in \hat{G}} d_\alpha \sum_{i=1}^{d_\alpha} \sum_{j=1}^{d_\alpha} \langle f, c_{i,j}^\alpha \rangle_{L^2(G)} c_{i,j}^\alpha(g)$$

$c_{i,j}^\alpha$ の定義に従って計算すると

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in \hat{G}} d_\alpha \sum_{i=1}^{d_\alpha} \sum_{j=1}^{d_\alpha} \langle f, c_{i,j}^\alpha \rangle_{L^2(G)} c_{i,j}^\alpha(g) &= \sum_{\alpha \in \hat{G}} d_\alpha \sum_{i=1}^{d_\alpha} \sum_{j=1}^{d_\alpha} \left(\int_G f(x) \overline{c_{i,j}^\alpha(x)} dx \right) c_{i,j}^\alpha(g) \\ &= \sum_{\alpha \in \hat{G}} d_\alpha \sum_{i=1}^{d_\alpha} \sum_{j=1}^{d_\alpha} \left(\int_G f(x) c_{j,i}^\alpha(x^{-1}) dx \right) c_{i,j}^\alpha(g) \\ &= \sum_{\alpha \in \hat{G}} d_\alpha \int_G f(x) \left(\sum_{i=1}^{d_\alpha} \sum_{j=1}^{d_\alpha} c_{i,j}^\alpha(g) c_{j,i}^\alpha(x^{-1}) \right) dx \end{aligned}$$

式 (3.1.17) と結合積の定義 (3.1.18) と指標の定義 (3.1.7) より

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in \hat{G}} d_\alpha \int_G f(x) \left(\sum_{i=1}^{d_\alpha} \sum_{j=1}^{d_\alpha} c_{i,j}^\alpha(g) c_{j,i}^\alpha(x^{-1}) \right) dx &= \sum_{\alpha \in \hat{G}} d_\alpha \int_G f(x) \chi_{T_\alpha}(gx^{-1}) dx \\ &= \sum_{\alpha \in \hat{G}} d_\alpha \chi_\alpha * f(g) \\ &= \sum_{\alpha \in \hat{G}} d_\alpha \int_G \text{Tr}(T_\alpha(gx^{-1})) f(x) dx \end{aligned}$$

以上より, Peter-Weyl の定理は次の定理と同値になる。

定理

$f \in L^2(G)$ は

$$f(g) = \sum_{\alpha \in \hat{G}} d_\alpha \sum_{i=1}^{d_\alpha} \sum_{j=1}^{d_\alpha} \langle f, c_{i,j}^\alpha \rangle_{L^2(G)} c_{i,j}^\alpha(g) \quad (3.2.5)$$

$$= \sum_{\alpha \in \hat{G}} d_\alpha \chi_\alpha * f(g) \quad (3.2.6)$$

$$= \sum_{\alpha \in \hat{G}} d_\alpha \int_G \text{Tr}(T_\alpha(gx^{-1})) f(x) dx \quad (3.2.7)$$

と展開される。ここで, 各級数は $L^2(G)$ で収束する。

次節以降, この行列要素, 指標, 表現を用いた展開を, 一般の局所コンパクト群へ拡張していく。

3.2.2 作用素値 Fourier 変換

定義 (作用素値 Fourier 変換) G をユニモジュラーな局所コンパクト群とし, $(T, \mathcal{H})$ を G のユニタリー表現とする。コンパクトな台を持つ連続関数 $f \in C_c(G)$ に対して, $\mathcal{H}$ 上の作用素 $T(f)$ を

$$T(f) = \int_G f(g)T(g)dg \quad (3.2.8)$$

と定義する。この $T(f)$ を f の作用素値 Fourier 変換 と呼ぶ。

この $T(f)$ について少し補足する。まず, A を線形作用素としたとき, この作用素ノルムを

$$\|A\| = \sup_{v \neq 0} \left(\frac{\langle Av, Av \rangle_{\mathcal{H}}}{\langle v, v \rangle_{\mathcal{H}}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (v \in \mathcal{H}) \quad (3.2.9)$$

と定義する。 $T(g)$ はユニタリー作用素なので, 式 (3.2.9) に $T(g)$ を代入すると $\|T(g)\| = 1$ となることがわかる。これより $T(f)$ の作用素ノルムを評価すると

$$\begin{aligned} \|T(f)\| &= \sup_{v \neq 0} \left(\frac{\langle T(f)v, T(f)v \rangle_{\mathcal{H}}}{\langle v, v \rangle_{\mathcal{H}}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sup_{v \neq 0} \left(\frac{\langle \int_G f(g)T(g)dg v, \int_G f(g')T(g')dg' v \rangle_{\mathcal{H}}}{\langle v, v \rangle_{\mathcal{H}}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sup_{v \neq 0} \left(\int_G \int_G f(g)\bar{f}(g') \frac{\langle T(g)v, T(g')v \rangle_{\mathcal{H}}}{\langle v, v \rangle_{\mathcal{H}}} dg dg' \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \int |f(g)|dg \\ &= \|f\|_{L^1(G)} \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

となる。ここで, $\|f\|_{L^1(G)}$ は

$$\|f\|_{L^1(G)} = \int_G |f(g)|dg \quad (3.2.11)$$

となる。つまり, $T(f)$ は $f \in L^1(G)$ に対しても定義できる。しかし, これは Fourier 変換に対しては $f \in L^1(G)$ でも定義できると言っているだけで, Fourier 逆変換は一般には $L^1(G)$ より f のクラスを制限しなければ定義できないことに注意する。

$T(f)$ の行列要素は

$$\langle T(f)w, v \rangle_{\mathcal{H}} = \int_G f(g)\langle T(g)w, v \rangle_{\mathcal{H}} \quad (v, w \in \mathcal{H}) \quad (3.2.12)$$

と書ける。

$f, h \in L^1(G)$ とし, f, h の結合積を式 (3.1.18) のように定義する。

$$\tilde{f}(g) = \bar{f}(g^{-1}) \quad (g \in G) \quad (3.2.13)$$

としたとき, 次の命題が成立する。

命題

(1) $f, h \in L^1(G)$ に対して

$$T(f * h) = T(f)T(h) \quad (3.2.14)$$

(2) $f, h \in L^1(G)$ に対して

$$T(\tilde{f}) = T(f)^* \quad (3.2.15)$$

証明

(1) $f, h \in L^1(G)$ に対して

$$\begin{aligned} T(f * h) &= \int_G f * h(x) T(x) dx \\ &= \int_G \left(\int_G f(y) h(y^{-1}x) dy \right) T(x) dx \\ &= \int_G f(y) \left(\int_G h(y^{-1}x) T(yy^{-1}x) dx \right) dy \\ &= \int_G f(y) T(y) \left(\int_G h(y^{-1}x) T(y^{-1}x) dx \right) dy \\ &= \int_G f(y) T(y) dy \int_G h(x) T(x) dx \\ &= T(f) T(h) \end{aligned}$$

(2) $T(f)$ の行列要素から求める。 $v, w \in \mathcal{H}$ に対して

$$\begin{aligned} \langle T(\tilde{f})w, v \rangle_{\mathcal{H}} &= \left\langle \int_G \tilde{f}(g) T(g) dg w, v \right\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \int_G \tilde{f}(g^{-1}) \langle T(g)w, v \rangle_{\mathcal{H}} dg \\ &= \int_G \tilde{f}(g^{-1}) \langle w, T(g^{-1})v \rangle_{\mathcal{H}} dg \\ &= \left\langle w, \int_G f(g^{-1}) T(g^{-1}) dg v \right\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \langle w, T(f)v \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \langle T(f)^* w, v \rangle_{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

となるので、式 (3.2.15) が成立する。

3.2.3 スカラー値 Fourier 変換

G をユニモジュラーな局所コンパクト群とし、 $(T, \mathcal{H})$ を G のユニタリー表現とする。ここでは、 $\mathcal{H}$ を可分な Hilbert 空間とし、その正規直交基底を $e_1, e_2, e_3, \dots$ とする。可分な Hilbert 空間とは、高々可算無限個の基底で張られる Hilbert 空間のことである。まず、Fourier 変換を考えるための重要な作用素のを定義する。

定義 (Hilbert – Schmidt 作用素)

有界線形作用素 $A \in B(\mathcal{H})$ が

$$\|A\|_{HS}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|Ae_i\|_{\mathcal{H}}^2 < \infty \quad (3.2.16)$$

を満たすとき、Hilbert – Schmidt 作用素 といい、その全体を $B_{HS}(\mathcal{H})$ と書く。

これは $\|\cdot\|_{HS}$ をノルムとして、ノルム空間になる。

定義 (トレースクラス)

A を Hilbert-Schmidt 作用素とする。

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} \langle Ae_j, e_i \rangle_{\mathcal{H}} < \infty \quad (3.2.17)$$

を満たすとき, A を **トレースクラス** の作用素と呼ぶ。このとき

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle Ae_i, e_i \rangle_{\mathcal{H}} \quad (3.2.18)$$

とする。

これらの定義は基底によらない。実際 U をユニタリー作用素として新たな基底を $\{Ue_i\}$ とすれば

$$\begin{aligned} \|A\|_{HS} &= \sum_{i=1}^{\infty} \|Ae_i\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle Ae_i, Ae_i \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle A^* Ae_i, e_i \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \mathrm{Tr}(A^* A) \\ &= \mathrm{Tr}(U^* A^* AU) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle U^* A^* AUe_i, e_i \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle AUe_i, AUe_i \rangle_{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(A) &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle Ae_i, e_i \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \mathrm{Tr}(U^* AU) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle AUe_i, Ue_i \rangle_{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

である。 A が Hilbert-Schmidt 作用素となる必要十分条件は, $A^* A$ がトレースクラスとなるときである。このとき,

$$\|A\|_{HS} = \mathrm{Tr}(A^* A) \quad (3.2.19)$$

である。

次に, 局所コンパクト群に対して, 我々の知っている Fourier 変換に対応するものを定義する。

定義 (スカラー値 Fourier 変換)

$f \in L^1(G)$ に対して, $T(f)$ がトレースクラスであるとする。このとき

$$\hat{f}(T) = \mathrm{Tr}(T(f)) \quad (3.2.20)$$

を T による f の **スカラー値 Fourier 変換** と呼ぶ。

$\text{Tr}(A)$ が基底の取り方に依らないことから, $\hat{f}(T)$ が T を含む同値類の代表元に依らないことがわかる。これを示す。今, $(T_1, \mathcal{H}_1), (T_2, \mathcal{H}_2)$ がユニタリー同値であるとする。このとき, 絡み作用素

$$A : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$$

が存在して, $AT_1(g) = T_2(g)A$ ($g \in G$) となる。したがって, $\{e_i\}$ が $\mathcal{H}_1$ の正規直交基底のとき, $\{Ae_i\}$ が $\mathcal{H}_2$ の正規直交基底になることより

$$\begin{aligned} \text{Tr}(T_1(f)) &= \sum_{i=1}^{\infty} \left\langle \int_G f(g) T_1(g) dg e_i, e_i \right\rangle_{\mathcal{H}_1} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \left\langle \int_G f(g) A^{-1} T_2(g) A dg e_i, e_i \right\rangle_{\mathcal{H}_1} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \left\langle \int_G f(g) T_2(g) dg Ae_i, Ae_i \right\rangle_{\mathcal{H}_2} \\ &= \text{Tr}(T_2(f)) \end{aligned}$$

となる。

命題

$f \in L^1(G)$ に対して, $T(f)$ がトレースクラスであるとする。このとき

$$f^y(g) = f(y^{-1}gy) \quad (3.2.21)$$

とすれば, $f^y \in L^1(G)$ となり

$$\hat{f}(T) = (\hat{f}^y)(T) \quad (3.2.22)$$

が成立する。

証明

$y \in G$ に対して,

$$T^y(g) = T(ygy^{-1}) \quad (3.2.23)$$

と定める。今, $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ を $Au = T(y^{-1})u$ とすれば

$$\begin{aligned} T^y(g)u &= T(ygy^{-1})u \\ &= T(y)T(g)T(y^{-1})u \\ &= T(y)T(g)Au \\ &= T(y)AA^{-1}T(g)Au \end{aligned}$$

任意の $u \in \mathcal{H}$ に対して式 (3.2.23) が成立しているので, $T(y)A = \mathbf{1}$ であり

$$T^y(g)u = A^{-1}T(g)Au$$

となるので, $AT^y(g) = T(g)A$ となる。ゆえに A は絡み作用素であり, $T \cong T^y$ となる。したがって

$$\begin{aligned}
\hat{f} &= \text{Tr}(T(f)) \\
&= \text{Tr}(T^y(f)) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \left\langle \int_G f(g) T^y(g) dg e_i, e_i \right\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \left\langle \int_G f(g) T(ygy^{-1}) dg e_i, e_i \right\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \left\langle \int_G f(yy^{-1}gyy^{-1}) T(ygy^{-1}) dg e_i, e_i \right\rangle_{\mathcal{H}}
\end{aligned}$$

G はユニモジュラーであることから, 右, 左ともに不変なので

$$\begin{aligned}
\hat{f} &= \sum_{i=1}^{\infty} \left\langle \int_G f(yy^{-1}gyy^{-1}) T(ygy^{-1}) dg e_i, e_i \right\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \left\langle \int_G f(y^{-1}gy) T(g) dg e_i, e_i \right\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \left\langle \int_G f^y(g) T(g) dg e_i, e_i \right\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \text{Tr}(T(f^y)) \\
&= (\hat{f}^y)(T)
\end{aligned}$$

となる。

T が有限次元表現のときは

$$\text{Tr}(T(g)) = \chi_T(g) \quad (g \in G) \quad (3.2.24)$$

より, $f \in L^1(G)$ に対して, $T(f)$ はトレースクラスの作用素となる。実際, $\hat{f}$ を計算するときに和と積分の順序を入れ替えることができるので, スカラー値 Fourier 変換は

$$\hat{f}(T) = \int_G f(g) \chi_T(g) dg \quad (3.2.25)$$

となり, 指標を用いて書くことができる。では, T が無限次元表現のときはどうなるだろうか。この問題に考えるためには, 今までの数学的道具だけでは足りない。次節で T が無限次元表現の場合に拡張する。

3.2.4 不変超関数と指標

G を局所コンパクト群, $(T, \mathcal{H})$ を G のユニタリー表現とする。本論文では Lie 環については述べない。したがって G 上の微分はあると認めて話を進める。

まず, G 上の超関数, ならびに不変超関数を定義する。これは, $\mathbf{R}$ 上の超関数の一般化である。

定義 (G 上の超関数)

$C_c^\infty(G)$ を G 上のコンパクトな台を持つ無限回微分可能な関数の全体とする。 $C_c^\infty(G)$ 上の連続線形汎関数

$$F : C_c^\infty \rightarrow \mathbf{R} \quad (3.2.26)$$

を G 上の Schwartz の超関数^{*8}と呼ぶ。特に G 上の超関数 F が

$$F(f) = F(f^y) \quad (3.2.27)$$

を満たすとき, F を 不変超関数 と呼ぶ。

例として, G 上の Dirac のデルタ関数

$$f \mapsto f(e) \quad (3.2.28)$$

を考える。明らかに $f^y(e) = f(y^{-1}ey) = f(e)$ なので, $F(f) = F(f^y)$ となり, 不変超関数であることがわかる。

次章で局所コンパクト群の具体例として $SL(2, C)$ を考えるので, この節の残りでは G は $SL(2, C)$ とする。 $G = SL(2, C)$ に対して, 次の定理が知られている。

定理

$G = SL(2, C)$ とする。すべての $T \in \hat{G}$ に対して $f \in C_c^\infty$ であれば, $T(f)$ はトレースクラス的作用素となり

$$f \mapsto \hat{f}(T) = \text{Tr}(T(f)) \quad (3.2.29)$$

は G 上の超関数となる。

定理

$G = SL(2, C)$ とする。 G 上の不変超関数 $f \mapsto \hat{f}(T)$ に対して, G 上の局所可積分関数 Θ_T が存在して

$$\hat{f}(T) = \text{Tr}(T(f)) = \int_G f(g) \Theta_T(g) dg \quad (3.2.30)$$

となる。このような Θ_T を有限次元の場合に倣い T の 指標^{*9}と呼ぶ。

式 (3.2.29), (3.2.30) が全節での問題の解答である。

3.3 逆変換公式と Plancherel の公式

この節では G をユニモジュラーな局所コンパクト群で Type ^{*10}とし, G の Haar 測度は固定しておく。以下では, Fourier 変換に対する逆変換公式と Plancherel の公式について述べる。

3.3.1 逆変換公式と Plancherel 測度

まず, Fourier 変換に対する逆変換公式について述べる。

定理 (逆変換公式)

G をユニモジュラーな局所コンパクト群で Type とし, G のユニタリー双対を $\hat{G}$ とする。 $\hat{G}$ に対し適当な正測度 μ が存在し, $f \in C_c^\infty$ に対して

$$f(e) = \int_{\hat{G}} \hat{f}(T) d\mu(T) = \int_{\hat{G}} \text{Tr}(T(f)) d\mu(T) \quad (3.3.1)$$

^{*8} この超関数という言葉の英語は Distribution といい, 直訳すると「分布」である。これは, なぜこのような言葉にされたかという
と, 超関数は「測度の一般化」という意味合いを持っているからである。このことから, 超関数はもはや関数ではなく積分測度のよ
うなものである。ちなみに, 超関数には別の定義も存在し, こちらは佐藤超関数, 英語では Hyperfunction と呼ぶ。

^{*9} 大域的指標とも呼ばれる。

^{*10} この節の定理の証明がうまくいくための条件ぐらいと思って差し支えない。

となる。この μ を **Plancherel 測度** と呼ぶ。

この定理から $\hat{f}$ の逆変換公式を導出する。 $f(x)$ を $f_g(x) = f(xg)$ に置き換えると式 (3.3.1) の左辺は

$$f_g(e) = f(g)$$

式 (3.3.1) の右辺の $T(f)$ は

$$\begin{aligned} T(f_g) &= \int_G f_g(x) T(x) dx \\ &= \int_G f(xg) T(x) dx \\ &= \int_G f(x) T(xg^{-1}) dx \\ &= T(f) T(g^{-1}) \end{aligned}$$

となるので、 $\hat{f} \in C_c^\infty(G)$ に対して $\hat{f}$ の逆変換公式

$$f(g) = \int_{\hat{G}} \text{Tr}(T(f) T(g^{-1})) d\mu(T) \quad (g \in G) \quad (3.3.2)$$

を得る。

3.3.2 Plancherel の公式

逆変換公式で、 f を $f * \tilde{f}$, $\tilde{f}(g) = \bar{f}(g^{-1})$ と置き換える。結合積の性質などから

$$\begin{aligned} f * \tilde{f}(e) &= \int_G f(g) \tilde{f}(g^{-1}) dg \\ &= \int_G f(g) \bar{f}(g) dg \\ &= \int_G |f(g)|^2 dg \\ &= \|f\|_{L^2(G)}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f * \tilde{f}(T) &= \text{Tr}(T(f * \tilde{f})) \\ &= \text{Tr}(T(f) T(\tilde{f})) \\ &= \text{Tr}(T(f) T(f)^*) \\ &= \|T(f)\|_{HS}^2 \end{aligned}$$

となる。したがって、 $L^2(G)$ を $C_c^\infty(G)$ で近似することにより、次の定理を得る。

定理 (Plancherel の公式)

$f \in L^2(G)$ に対して

$$\|f\|_{L^2(G)}^2 = \int_G \|T(f)\|_{HS}^2 d\mu(T) \quad (3.3.3)$$

となる。

4 調和解析の例

この章では、具体的な例について述べる。対象とする群は

- (1) T (1次元トーラス群)
- (2) R^n (n 次元加法群)
- (3) $SU(2)$ (2次元特殊ユニタリー群)
- (4) $SL(2, C)$ (2次元複素特殊線形群)

の4つである。(1), (2) はそれぞれ Fourier 級数展開と Fourier 積分であり, (3) は non-Abel なコンパクト群, (4) は non-Abel な局所コンパクト群の例となっている。

4.1 T

4.1.1 群の定義

$$T \cong R/Z \quad (4.1.1)$$

であり、位相群 R の $2\pi Z$ による商群である。これは

$$U(1) = \{e^{i\theta}; 0 \leq \theta < 2\pi\} \quad (4.1.2)$$

$$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}; 0 \leq \theta < 2\pi \right\} \quad (4.1.3)$$

とも同型である。

4.1.2 Haar 測度

$d\theta$ を Lebesgue 測度とする。Haar 測度 dg は $d\theta$ の正定数倍であるが、

$$\int_T dg = 1 \quad (\text{積分範囲は } 0 \leq \theta < 2\pi) \quad (4.1.4)$$

を満たすように正規化すると

$$dg = \frac{1}{2\pi} \quad (4.1.5)$$

となる。

4.1.3 ユニタリー双対

まず、既約ユニタリー表現を見つける。 $\mathcal{H} = C$ とし、各 $n \in Z$ に対して

$$T_n(e^{i\theta})v = e^{in\theta}v \quad (v \in \mathcal{H}) \quad (4.1.6)$$

とすると, (T_n, C) は既約ユニタリー表現となる。^{*11}これより, ユニタリー双対は

$$\hat{G} = \{T_n; n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z} \quad (4.1.7)$$

となる。 T はコンパクトなので, すべての T_n は 2 乗可積分表現である。

4.1.4 行列要素と指標

既約ユニタリー表現は 1 次元表現であるので, 行列要素と指標は一致する。したがって両方を同時に書く。 1 を $\mathcal{H}$ の基底に取る。行列要素は

$$\langle T_n(e^{i\theta})1, 1 \rangle_{\mathcal{H}} = e^{in\theta} \quad (4.1.8)$$

となる。指標はこれと等しく

$$\chi_{T_n}(e^{i\theta}) = e^{in\theta} \quad (4.1.9)$$

となる。

行列要素 (指標) の直交関係は

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\theta} e^{-im\theta} d\theta = \begin{cases} 1 & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases} \quad (4.1.10)$$

となる。

4.1.5 Fourier 変換

$f \in C_c(T)$ に対して, スカラー値 Fourier 変換は

$$\begin{aligned} \hat{f}(T_n) &= \text{Tr}(T_n(f)) \\ &= \int_{\mathbf{T}} f(g) \chi_{T_n}(g) dg \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{in\theta} d\theta \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

となる。これは, Fourier 係数に一致する。^{*12}

4.1.6 逆変換公式と Plancherel 測度

Fourier 級数の理論より, Plancherel 測度は

$$d\mu(T_n) = 1 \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (4.1.12)$$

^{*11} 例えば, $\forall \theta, \phi$ に対して

$$\begin{aligned} T_n(e^{i\theta} e^{i\phi})v &= T_n(e^{i(\theta+\phi)})v \\ &= e^{in(\theta+\phi)}v \\ &= e^{in\theta} e^{in\phi}v \\ &= T_n(e^{i\theta})T_n(e^{i\phi})v \end{aligned}$$

となることから $T_n(e^{i\theta} e^{i\phi}) = T_n(e^{i\theta})T_n(e^{i\phi})$ がわかる。表現の定義の残りも同様に確かめられる。

^{*12} 通常のものとは指数の肩の符号が逆であるが本質的な違いはない。

となる。したがって, $f \in C_c(T)$ に対して $\hat{f}(n) = \hat{f}(T_n) = \text{Tr}(T_n(f))$ と書くと, 逆変換公式は

$$\begin{aligned} f(e^{i\theta}) &= \int_{n \in \mathbf{Z}} \text{Tr}(T_n(f)T_n(e^{-i\theta}))d\mu(T_n) \\ &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n)e^{-in\theta} \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

となり, Fourier 級数の理論の逆変換公式と一致する。

4.1.7 Plancherel の公式

$f \in L^2(T)$ に対して

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n \in \mathbf{Z}} |\hat{f}(n)|^2 \quad (4.1.14)$$

となり, Fourier 級数の理論の Parseval の公式と一致する。

4.2 $\mathbf{R}^n$

4.2.1 群の定義

加法群 $\mathbf{R}$ の n 個の直積群で

$$\mathbf{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n); x_i \in \mathbf{R}, 1 \leq i < n\} \quad (4.2.1)$$

である。 $\mathbf{R}^n$ は局所コンパクト群でもある。 $x, y \in \mathbf{R}^n$ に対して, 内積を

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (4.2.2)$$

と定める。

4.2.2 Haar 測度

dx_i を i 番目の $\mathbf{R}$ の Lebesgue 測度とする。 Haar 測度 dg は

$$dg = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} dx = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} dx_1 dx_2 \cdots dx_n \quad (4.2.3)$$

と正規化しておく。

4.2.3 ユニタリー双対

まず, 既約ユニタリー表現を見つける。 $\mathcal{H} = C$ とし, 各 $\xi \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$T_\xi(x)v = e^{i\langle x, \xi \rangle} v \quad (v \in \mathcal{H}) \quad (4.2.4)$$

とすると, (T_ξ, C) は既約ユニタリー表現となる。^{*13}これより, ユニタリー双対は

$$\hat{G} = \{T_\xi; \xi \in \mathbf{R}^n\} \cong \mathbf{R}^n \quad (4.2.5)$$

となる。

4.2.4 行列要素と指標

既約ユニタリー表現は 1 次元表現であるので, 行列要素と指標は一致する。したがって両方を同時に書く。
1 を $\mathcal{H}$ の基底に取る。行列要素は

$$\langle T_\xi(x)1, 1 \rangle_{\mathcal{H}} = e^{i\langle x, \xi \rangle} \quad (4.2.6)$$

となる。指標はこれと等しく

$$\Theta_{T_\xi}(x) = e^{i\langle x, \xi \rangle} \quad (4.2.7)$$

となる。

4.2.5 Fourier 変換

$f \in C_c^\infty(T)$ に対して, スカラー値 Fourier 変換は

$$\begin{aligned} \hat{f} &= \text{Tr}(T_\xi(f)) \\ &= \int_G f(g) \Theta_{T_\xi}(g) dg \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbf{R}^n} f(x) e^{i\langle x, \xi \rangle} dx \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

となる。これは, Fourier 変換に一致する。^{*14}

4.2.6 逆変換公式と Plancherel 測度

Fourier 積分の理論より, Plancherel 測度は

$$d\mu(T_\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} d\xi \quad (4.2.9)$$

となる。したがって, $f \in C_c^\infty(T)$ に対して $\hat{f}(\xi) = \hat{f}(T_\xi) = \text{Tr}(T_\xi(f))$ と書くと, 逆変換公式は

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{\mathbf{R}^n} \text{Tr}(T_\xi(f) T_\xi(-x)) d\mu(T_\xi) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbf{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{-i\langle x, \xi \rangle} d\xi \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

となり, Fourier 級数の理論の逆変換公式と一致する。

^{*13} 例えば, $\forall x, y$ に対して

$$\begin{aligned} T_\xi(xy)v &= e^{i\langle x+y, \xi \rangle} v \\ &= e^{i\langle x, \xi \rangle} e^{i\langle y, \xi \rangle} v \\ &= T_\xi(x) T_\xi(y) v \end{aligned}$$

となることから $T_\xi(xy) = T_\xi(x) T_\xi(y)$ がわかる。表現の定義の残りの同様に確かめられる。

^{*14} 通常のものとは指数の肩の符号が逆であるが本質的な違いはない。

4.2.7 Plancherel の公式

$f \in L^2(\mathbf{R}^n)$ に対して

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbf{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \quad (4.2.11)$$

となり, Fourier 積分の理論の Parseval の公式と一致する。

4.3 $SU(2)$

4.3.1 群の定義

$SU(2)$ は 2 次の複素正方行列 A で, $A^* A = I, \det A = 1$ となるものの全体である。

$$SU(2) = \left\{ g = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}; |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \alpha, \beta \in \mathbf{C} \right\} \quad (4.3.1)$$

また, S^3 を三次元球面

$$S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4); x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1, x_i \in \mathbf{R}, 1 \leq i \leq 4\} \quad (4.3.2)$$

とすれば,

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3, x_4) &\rightarrow \begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & -x_3 + ix_4 \\ x_3 + ix_4 & x_1 - ix_2 \end{pmatrix} \\ \alpha &= x_1 + ix_2, \quad \beta = x_3 - ix_4 \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

は S^3 と $SU(2)$ の位相同型を与える。

$SU(2)$ の部分群を

$$A = \left\{ a_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & i \sin(\theta/2) \\ i \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}; 0 \leq \theta \leq 4\pi \right\} \quad (4.3.4)$$

$$K = \left\{ k_\theta = \begin{pmatrix} e^{\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-\theta/2} \end{pmatrix}; 0 \leq \theta \leq 4\pi \right\} \quad (4.3.5)$$

とすると, Cartan 分解

$$G = KAK$$

$$= \left\{ k_\phi a_\theta k_\psi = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) e^{i(\phi+\psi)/2} & i \sin(\theta/2) e^{i(\phi-\psi)/2} \\ i \sin(\theta/2) e^{-i(\phi-\psi)/2} & \cos(\theta/2) e^{-i(\phi+\psi)/2} \end{pmatrix}; 0 < \theta < \pi, 0 \leq \phi < 2\pi, 0 \leq \psi < 4\pi \right\} \quad (4.3.6)$$

となる。 (ϕ, θ, ψ) を Euler 角 と呼び, $\alpha = \cos(\theta/2) e^{i(\phi+\psi)/2}, \beta = -i \sin(\theta/2) e^{i(\phi-\psi)/2}$ を Cayley-Klein のパラメータ と呼ぶ。

また, Pauli 行列 を

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.3.7)$$

とすると, $SU(2)$ の部分群 A, K の元 a_θ, k_θ と Cartan 分解 $G = KAK$ の元 $g = k_\phi a_\theta k_\psi$ は

$$a_\theta = e^{i\theta\sigma_1/2} \quad (4.3.8)$$

$$k_\theta = e^{i\theta\sigma_3/2} \quad (4.3.9)$$

$$g = e^{i\phi\sigma_3/2} e^{i\theta\frac{\sigma_1}{2}} e^{i\psi\frac{\sigma_3}{2}} \quad (4.3.10)$$

と書けることもわかる。^{*15} $\sigma_1/2, \sigma_3/2$ はそれぞれ x, z 軸まわりの回転の generator なので, a_θ, k_θ はそれぞれ x, z 軸まわりの回転の行列であることが見て取れる。

4.3.2 Haar 測度

$SU(2) \cong S^3$ を用いて, R^4 の極座標を

$$\begin{cases} x_1 = \cos \theta & (0 \leq \theta \leq \pi) \\ x_2 = \sin \theta \cos \phi & (0 \leq \phi \leq \pi) \\ x_3 = \sin \theta \sin \phi \cos \psi & (0 \leq \psi \leq 2\pi) \\ x_4 = \sin \theta \sin \phi \sin \psi \end{cases} \quad (4.3.11)$$

とする。Jacobian は $\sin^2 \theta \sin \phi$ と求まるので, $SU(2)$ の正規化された Haar 測度は

$$dg = \frac{1}{2\pi^2} \sin^2 \theta \sin \phi d\theta d\phi d\psi \quad (4.3.12)$$

と書ける。(4.3.11) は

$$G_0 = \{(\cos \theta, \pm \sin \theta, 0, 0); \phi = 0, \pi, 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

では ϕ が任意の値を動けるので一意ではないが, このような集合は測度 0 なので無視することができる。また, Cartan 分解にしたがって Euler 座標を

$$\begin{cases} x_1 = \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi+\psi}{2} \\ x_2 = \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\phi+\psi}{2} \\ x_3 = \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\phi-\psi}{2} \\ x_4 = \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi-\psi}{2} \end{cases} \quad (4.3.13)$$

とすれば, Jacobian は $-\frac{1}{8} \sin \theta$ と求まるので, 正規化された Haar 測度は

$$dg = \frac{1}{16\pi^2} \sin \theta d\theta d\phi d\psi \quad (4.3.14)$$

と書ける。

4.3.3 ユニタリー双対

$\mathcal{H}_l (l = 0, 1, 2, \dots)$ を z_1, z_2 の l 次の斉次多項式 $f(z_1, z_2)$ の全体 V_l とする。

$$\mathcal{H}_l = V_l = \text{Span}_{\mathbf{C}} \{z_1^l, z_1^{l-1} z_2, \dots, z_1 z_2^{l-1}, z_2^l\} \quad (4.3.15)$$

$$= \left\{ \sum_{k=0}^l c_k z_1^k z_2^{l-k}; c_k \in \mathbf{C}, 0 \leq k \leq l \right\} \quad (4.3.16)$$

V_l の内積は次のように定める。

$$\left\langle \sum_{k=0}^l c_k z_1^k z_2^{l-k}, \sum_{k=0}^l d_k z_1^k z_2^{l-k} \right\rangle = \sum_{k=0}^l k!(l-k)! c_k \bar{d}_k \quad (4.3.17)$$

このとき $\mathcal{H}_l$ は $l+1$ 次元 Hilbert 空間となる。

^{*15} (4.3.8), (4.3.9) を Taylor 展開をすると, 単位行列に比例する項と Pauli 行列に比例する項が出てくる。それらをまとめると (4.3.4), (4.3.5) の形に帰着できる。

ここで

$$(T_l(g)f)(z_1, z_2) = f((z_1, z_2)g) = f(\alpha z_1 + \bar{\beta} z_2, -\beta z_1 + \bar{\alpha} z_2) \quad (4.3.18)$$

とすると, 各 T_l は既約ユニタリー表現となる。以下, T_l のユニタリー性と既約性を示す。

まず, ユニタリー性について。

$$S = \{(az_1 + bz_2)^l; a, b \in \mathbb{C}\} \quad (4.3.19)$$

の元 f, h について

$$\langle T_l(g)f, T_l(g)h \rangle = \langle f, h \rangle \quad (4.3.20)$$

示せば十分である。これは, $T_l(g)$ が線形作用素であるため, S の任意の元について (4.3.20) を示せば H_l の任意の元に対しても (4.3.20) を示したことになるからである。

$$f(z_1, z_2) = (az_1 + bz_2)^l = \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} a^k b^{l-k} z_1^k z_2^{l-k} \quad (4.3.21)$$

$$h(z_1, z_2) = (cz_1 + dz_2)^l = \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} c^k d^{l-k} z_1^k z_2^{l-k} \quad (4.3.22)$$

とすると

$$\begin{aligned} \langle f, h \rangle &= \sum_{k=0}^l \binom{l}{k}^2 k!(l-k)! (a\bar{c})^k (b\bar{d})^{l-k} \\ &= l!(a\bar{c} + b\bar{d}) \end{aligned} \quad (4.3.23)$$

となる。一方

$$\begin{aligned} (T_l(g)f)(z_1, z_2) &= (a(\alpha z_1 + \bar{\beta} z_2) + (-\beta z_1 + \bar{\alpha} z_2))^l \\ &= ((a\alpha - b\beta)z_1 + (a\bar{\beta} + b\bar{\alpha})z_2)^l \end{aligned}$$

同様に

$$(T_l(g)h)(z_1, z_2) = ((c\alpha - d\beta)z_1 + (c\bar{\beta} + d\bar{\alpha})z_2)^l$$

より, (4.3.23) を援用して

$$\begin{aligned} \langle T_l(g)f, T_l(g)h \rangle &= l!((a\alpha - b\beta)(c\alpha - d\beta) + (a\bar{\beta} + b\bar{\alpha})(c\bar{\beta} + d\bar{\alpha}))^l \\ &= l!(a\bar{c} + b\bar{d}) \\ &= \langle f, h \rangle \end{aligned}$$

となるので, (4.3.20) が確かめられ, T_l がユニタリーであることが示された。

次に既約性について。Schur の補題を用いて示す。今, 線形作用素

$$A : \mathcal{H}_l \rightarrow \mathcal{H}_l$$

が

$$AT_l(x) = T_l(x)A \quad (x \in G) \quad (4.3.24)$$

を満たしているとする。 $\mathcal{H}_l$ の正規直交基底として

$$e_k(z) = e_k(z_1, z_2) = \frac{1}{\sqrt{(l/2+k)!(l/2-k)!}} z_1^{l/2-k} z_2^{l/2+k} \quad (4.3.25)$$

をとると、この基底は (4.3.18) より

$$\begin{aligned} (T_l(k_\theta e_m))(z) &= e_m(e^{i\theta/2} z_1, e^{-i\theta/2} z_2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{(l/2+k)!(l/2-k)!}} (e^{i\theta/2} z_1)^{l/2-m} (e^{-i\theta/2} z_2)^{l/2+m} \\ &= e^{-im\theta} e_m(z) \end{aligned} \quad (4.3.26)$$

となるので、 $T_l(k_\theta)$ の固有ベクトルである。したがって、(4.3.24) で $x = k_\theta$ とし、 e_m に作用させれば

$$T_l(k_\theta) A e_m = A T_l(k_\theta) e_m = e^{-im\theta} A e_m \quad (4.3.27)$$

となり、 $A e_m$ も $T_l(k_\theta)$ の固有ベクトルである。したがって、 $A e_m$ は e_m の定数倍でなければならない。その比例係数を c_m とする。

$$A e_m = c_m e_m \quad (4.3.28)$$

次に、 $e_{l/2}$ に $T_l(a_\theta)$ を作用させ

$$\begin{aligned} T_l(a_\theta) e_{l/2} &= \frac{1}{\sqrt{l!}} (-i \sin(\theta/2) z_1 + \cos(\theta/2) z_2)^l \\ &= \sum d_m(\theta) e_m \end{aligned} \quad (4.3.29)$$

の形で書く。ただし、 $d_m(\theta)$ は e_m で展開したときの展開係数であり、恒等的に 0 にはならない。よって、(4.3.24) で $x = a_\theta$ とし、 $e_{l/2}$ に作用させれば

$$\begin{aligned} T_l(a_\theta) A e_{l/2} &= c_{l/2} T_l(a_\theta) e_{l/2} \\ &= \sum d_m(\theta) e_m \end{aligned} \quad (4.3.30)$$

一方で

$$\begin{aligned} A T_l(a_\theta) e_{l/2} &= A \sum d_m(\theta) e_m \\ &= \sum c_m d_m(\theta) e_m \end{aligned} \quad (4.3.31)$$

となるので、(4.3.30), (4.3.31) を比較して

$$c_m = c_{l/2} \quad (m = -l/2, -l/2 + 1, \dots, l/2 - 1) \quad (4.3.32)$$

となることがわかる。これより $A = c_{l/2} \mathbf{1}$ となり、 A はスカラー作用素である。よって、Schur の補題より T_l は既約である。

以上より、 T_l が既約ユニタリー表現であることがわかった。

さらに、後で出てくる指標の性質を用いると、 G のすべての既約ユニタリー表現は T_l のいずれかと同値であることもわかる。^{*16} 以上より、 G のユニタリー双対 $\hat{G}$ は

$$\hat{G} = \{T_l; l = 0, 1, 2, \dots\} \quad (4.3.33)$$

となる。 G はコンパクトであるので、これらは 2 乗可積分表現である。

^{*16} 4.3.5 で示す。

4.3.4 行列要素

行列要素

$$\langle T_l(a_\theta)e_n, e_m \rangle_{\mathcal{H}_l} \quad (4.3.34)$$

を計算する。ただし, $\mathcal{H}_l$ の正規直交基底 e_m は (4.3.25) で与えられている。

$$\begin{aligned} (T_l(a_\theta)e_n)(z_1, z_2) &= \frac{1}{\sqrt{(l/2+n)!(l/2-n)!}} \\ &\times (\cos(\theta/2)z_1 + i\sin(\theta/2)z_2)^{l/2-n} (i\sin(\theta/2)z_1 + \cos(\theta/2)z_2)^{l/2+n} \end{aligned} \quad (4.3.35)$$

計算を進めると, 次のように書ける。

$$\langle T_l(a_\theta)e_n, e_m \rangle_{\mathcal{H}_l} = P_{mn}^{l/2}(\cos \theta) \quad (4.3.36)$$

ただし

$$\begin{aligned} P_{ij}^k(x) &= P_{k+i}^{(j-i, -j-i)}(x) \\ &\times \left(\frac{(k+j)!(k-j)!}{(k+i)!(k-i)!} \right)^{-1/2} 2^i (-1)^{(j-i)/2} (1-x)^{(j-i)/2} (1+x)^{-(i+j)/2} \end{aligned} \quad (4.3.37)$$

であり, $P_k^{(i,j)}(x)$ は Jacobi 多項式^{*17}

$$P_k^{(i,j)}(x) = \frac{(-1)^k}{2^k k!} (1-x)^{-i} (1+x)^{-j} \frac{d^k}{dx^k} ((1-x)^{i+k} (1+x)^{j+k}) \quad (4.3.38)$$

である。これは $i = j = 0$ のとき Legendre 多項式 である。

一般の g に対する行列要素は Cartan 分解を利用し, (4.3.26) を用いると

$$T_l^{mn}(g) \equiv \langle T_l(g)e_n, e_m \rangle_{\mathcal{H}_l} = e^{-i(m\phi+n\psi)} P_{mn}^{l/2}(\cos \theta) \quad (4.3.39)$$

となる。

行列要素の直交関係は

$$\int_G T_l^{mn}(g) \bar{T}_{l'}^{m'n'}(g) dg = \frac{1}{l+1} \delta_{nn'} \delta_{mm'} \delta_{ll'} \quad (4.3.40)$$

である。これは本質的には $P_{mn}^{l/2}$ の直交関係

$$\frac{1}{2} \int_0^\pi P_{mn}^{l/2}(\cos \theta) P_{m'n'}^{l'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{1}{l+1} \delta_{ll'} \quad (4.3.41)$$

に他ならない。特に, $m = n = 0$ のときは Legendre 多項式の直交関係が得られる。

^{*17} Jacobi 多項式の性質については付録 C にまとめた。

4.3.5 指標

定義から計算するよりも簡単に計算できる方法で計算する。これは、指標が類関数であることを利用する方法^{*18}である。

まず、任意の $g \in SU(2)$ はユニタリー変換 U により次の形に帰着できることを利用する。

$$Ug(\theta, \phi, \psi)U^{-1} = g(\theta') \quad (4.3.42)$$

ただし、 θ, ϕ, ψ は Euler 角である。つまり、任意の $SU(2)$ 回転は一つの軸まわりの回転に帰着できる。^{*19}これと指標が類関数であるという性質から

$$\begin{aligned} \chi_{T_l}(g) &= \chi_{T_l}(UgU^{-1}) \\ &= \chi_{T_l}(k_\theta) \end{aligned} \quad (4.3.43)$$

となることがわかる。これは簡単に計算できて^{*20}

$$\chi_{T_l}(k_\theta) = \frac{\sin((l+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \quad (4.3.44)$$

と求まる。したがって

$$\chi_{T_l}(g) = \Theta_{T_l}(g) = \frac{\sin((l+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \quad (4.3.45)$$

となる。

ところで、類関数 f に対しての積分を考える。 R^4 の極座標で考えると

$$\int_G f(x)dx = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(x) \sin^2 \theta \sin \phi d\theta d\phi d\psi$$

ϕ, ψ については積分し、まとめると

$$\int_G f(x)dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{4\pi} f(k_\theta)(\sin(\theta/2))^2 d\theta \quad (4.3.46)$$

となる。これを用いると、指標の直交性関係が

$$\begin{aligned} \langle \chi_{T_m}, \chi_{T_n} \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{4\pi} \sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{(m+1)\theta}{2}\right) d\theta \\ &= \begin{cases} 1 & (n=m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases} \end{aligned} \quad (4.3.47)$$

と確かめられる。

最後に 4.3.3 節で残されていた T_l の同値性の証明をする。 T を G の既約ユニタリー表現とし、各 T_l ($l = 0, 1, 2, \dots$) とはユニタリー同値でないと仮定する。 G はコンパクト群より、 T は有限次元表現であり、その指標を χ とする。 χ は類関数なので $\chi(k_\theta)$ は偶関数となり、よって

$$\zeta(\theta) = \chi(k_{2\theta}) \sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \quad (4.3.48)$$

^{*18} より詳しくは付録 D 参照

^{*19} 具体的な計算は付録 D 参照

^{*20} 具体的な計算は付録 D 参照

は周期 2π の奇関数になる。 $\zeta(\theta)$ の Fourier sine 係数を計算するが、式 (4.3.46) を用いると

$$\begin{aligned}\langle \zeta, \sin n\theta \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \zeta(\theta) \sin n\theta d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} \chi(\theta) \sin(\theta/2) \sin(n\theta/2) d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} \chi(\theta) \chi_{T_{n-1}}(k_\theta) (\sin(\theta/2))^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2} \langle \chi, \chi_{T_{n-1}} \rangle = 0\end{aligned}$$

となり, Fourier sine 係数がすべて 0 となる。しかしそうであるとする $\zeta \equiv \chi \equiv 0$ となり矛盾する。以上より T はある T_l とユニタリー同値でなければならない。

4.3.6 Fourier 変換

まず, 作用素値 Fourier 変換は, $f \in C^\infty(G)$ に対して

$$T_l(f) = \int_G f(g) T_l(g) dg$$

であったので, この行列要素は

$$\begin{aligned}T_l^{ij} &= \langle T_l(f) e_j, e_i \rangle \\ &= \int_G f(g) \langle T_l(g) e_j, e_i \rangle dg \\ &= \langle f, \bar{T}_l^{ij} \rangle_{L^2(G)}\end{aligned}\tag{4.3.49}$$

となる。これより, スカラー値 Fourier 変換は

$$\hat{f}(T_l) = \sum_{k=-l/2}^{l/2} \int_G f(g) T_l^{kk}(g) dg = \int_G f(g) \chi_{T_l}(g) dg\tag{4.3.50}$$

となる。

4.3.7 逆変換公式と Plancherel 測度

まず, Plancherel 測度 $d\mu(T_l)$ は

$$d\mu(T_l) = l + 1 \quad (l = 0, 1, 2, \dots)\tag{4.3.51}$$

となる。 $L^2(G)$ の正規直交基底は, 行列要素の直交関係と Peter-Weyl の定理より

$$\{\sqrt{l+1} \bar{T}_l^{ij}; i, j = -l/2, -l/2+1, \dots, l/2\}\tag{4.3.52}$$

となる。ここで,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(T_l(f)T_l(g^{-1})) &= \sum_{i,j=-l/2}^{l/2} T_l^{ij}(f)T_l^{ji}(g^{-1}) \\
&= \sum_{i,j=-l/2}^{l/2} \langle f, \bar{T}_l^{ij} \rangle_{L^2(G)} \bar{T}_l^{ij}(g) \\
&= \frac{1}{l+1} \sum_{i,j=-l/2}^{l/2} \langle f, \sqrt{l+1} \bar{T}_l^{ij} \rangle_{L^2(G)} \sqrt{l+1} \bar{T}_l^{ij}(g)
\end{aligned}$$

となるので, これと式 (4.3.51) から

$$f(g) = \sum_{l=0,1,2,\dots} (l+1) \mathrm{Tr}(T_l(f)T_l(g^{-1})) \quad (4.3.53)$$

となる。

4.3.8 Plancherel の公式

$f \in L^2(G)$ に対して

$$\|f\|_{L^2(G)}^2 = \sum_{l=0,1,2,\dots} (l+1) \|T_l(f)\|_{HS}^2 \quad (4.3.54)$$

となる。

4.3.9 Clebsch-Gordan の公式

4.3.5 節で, $T_l(l=0,1,2,\dots)$ の指標を計算したが, その結果を使うと

$$\begin{aligned}
\chi_{T_l \otimes T_{l'}}(k_\theta) &= \chi_{T_l}(k_\theta) \chi_{T_{l'}}(k_\theta) \\
&= \sum_{m=-l/2}^{l/2} e^{im\theta} \sum_{n=-l'/2}^{l'/2} e^{in\theta} \\
&= \sum_{p=|l-l'|}^{l+l'} \sum_{q=-p/2}^{p/2} e^{iq\theta} \\
&= \sum_{p=|l-l'|}^{l+l'} \chi_{T_p}(k_\theta)
\end{aligned} \quad (4.3.55)$$

となる。これは表現 $T_l \otimes T_{l'}$ が

$$T_l \otimes T_{l'} = T_{l+l'} \oplus T_{l+l'-1} \oplus \dots \oplus T_{|l-l'|} \quad (4.3.56)$$

と直和分解することを意味している。この分解公式を **Clebsch – Gordan** の分解公式 と呼ぶ。

4.4 $SL(2, \mathbb{C})$

4.4.1 群の定義

$SL(2, \mathbb{C})$ は 2 次の複素正則行列で行列式が 1 となるものの全体である。

$$SL(2, \mathbb{C}) = \left\{ g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}; \alpha\delta - \beta\gamma = 1, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C} \right\} \quad (4.4.1)$$

部分群を

$$K = SU(2) \quad (4.4.2)$$

$$T = \left\{ t_a = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}; a \in \mathbf{C}^\times \right\} \quad (4.4.3)$$

$$A = \left\{ a_u = \begin{pmatrix} e^u & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix}; u \in \mathbf{R} \right\} \quad (4.4.4)$$

$$N = \left\{ n_z = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; z \in \mathbf{C} \right\} \quad (4.4.5)$$

$$\bar{N} = \left\{ \bar{n}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix}; z \in \mathbf{C} \right\} \quad (4.4.6)$$

$$B = T\bar{N} = \left\{ b = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a^{-1} \end{pmatrix}; a \in \mathbf{C}^\times, b \in \mathbf{C} \right\} \quad (4.4.7)$$

$$M = \left\{ m_\theta = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}; 0 \leq \theta < 2\pi \right\} \quad (4.4.8)$$

とする。このとき

$$M = K \cap T \quad (4.4.9)$$

$$T = AM = MA \quad (4.4.10)$$

$$G = KAN(= KMAN) = KNA = KAK \quad (4.4.11)$$

$$G = KAN\bar{N}(= KMAN\bar{N}) = K\bar{N}A \quad (4.4.12)$$

がわかる。このとき $G = KMAN = KMAN\bar{N}$ を G の 岩澤分解 と呼ぶ。この分解に伴う各元の分解を

$$g = k(g)t(g)n(g) = k(g)m(g)a(g)n(g) \quad (4.4.13)$$

$$g = k(g)t(g)\bar{n}(g) = k(g)m(g)a(g)\bar{n}(g) \quad (4.4.14)$$

と書くことにする。また

$$w = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.4.15)$$

とすると, Bruhat 分解

$$G = NB \cup wB \quad (4.4.16)$$

が成立し, NB は G の稠密な開集合となる。

$K, M, N, \bar{N}$ はユニモジュラーであるが, $B = T\bar{N}$ はユニモジュラーではない。 B のモジュラー関数は

$$\Delta \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a^{-1} \end{pmatrix} = \text{mod}(a)^{-2} \quad (4.4.17)$$

となる。

4.4.2 Haar 測度

K の Haar 測度を dk とし

$$\int_K dk = 1 \quad (4.4.18)$$

と正規化しておく。 A, N の Haar 測度をそれぞれ Lebesgue 測度 $du, dz = dx dy$ とする。岩澤分解 $G = KNA$ を使うと, G の Haar 測度は

$$dg = \frac{d\beta d\gamma d\delta}{\text{mod}(\delta)} = dk dz du = dk dx dy dz \quad (4.4.19)$$

であり, $G = KAN$ のときは

$$dg = e^{2u} dk dudz \quad (4.4.20)$$

である。また, T の Haar 測度は

$$dt = \frac{1}{2\pi} dud\theta \quad (4.4.21)$$

と正規化しておく。

4.4.3 ユニタリー双対

まず, 既約ユニタリー表現をもとめる。

1. 始めに, 有限次元表現でユニタリーとなる表現があるか考察する。 $SU(2)$ の場合と同様に, 表現空間 $\mathcal{H}$ を z_1, z_2 の 1 次斉次多項式の全体 V_l とする。各 T_l ($l = 0, 1, 2, \dots$) に対して

$$\left(T_l \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \right) (z_1, z_2) = f(\alpha z_1 + \gamma z_2, \beta z_1 + \delta z_2) \quad (4.4.22)$$

とすると, (T_l, V_l) は既約表現となる。しかし, T_0 は自明な表現でユニタリーとなるが, 他はユニタリーでない。よって, 有限次元の場合は, 既約ユニタリー表現としては T_0 のみがとれる。

2. 次に, 主系列表現という表現^{*21}を定義する。 $\mathcal{H} = L^2(C) = L^2(C, d\alpha)$ とし, 自然な内積を入れる。今, $C^\times$ の指標を π とすると, $\alpha \in C^\times$ の極座標表示が

$$\alpha = \left(\frac{\alpha}{|\alpha|} \right) |\alpha| \quad (4.4.23)$$

となることに注意して

$$\pi_{n,s}(\alpha) = \left(\frac{\alpha}{|\alpha|} \right)^n |\alpha|^{is} \quad (4.4.24)$$

と書ける。ただし

$$s \in \mathbf{R}, \quad n \in \mathbf{Z} \quad (4.4.25)$$

である。このとき, $f \in L^2(C)$ に対して

$$(T_{n,s}(g)f)(x) = (\text{mod}(\gamma x + \delta))^{-1} \pi(\gamma x + \delta) f\left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right) \quad (4.4.26)$$

$$x \in C, \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

とすると, $T_{n,s}(g)$ は $\gamma x + \delta = 0$ となる 1 次元集合を除いて定義される。この 1 次元集合は測度ゼロなのでノルムには効いてこず

$$\begin{aligned} \|T_{n,s}(g)f\|_2^2 &= \int_C \text{mod}(\gamma x + \delta)^{-2} \left| f\left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right) \right|^2 dx \\ &= \int_C |f(x)|^2 dx = \|f\|_2^2 \end{aligned} \quad (4.4.27)$$

となる。したがって, $T_{n,s}(g)f$ が再び $L^2(C)$ の元となることがわかり, ユニタリーになっていることもわかる。さらに, 表現の定義を満たしていることもわかり, 既約であることもわかるので, $(T_{n,s}, L^2(C))$ は既約ユニタリー表現となる。この表現を 主系列表現 と呼ぶ。

^{*21} より詳しくは [2] 参照

3. 次に、 G の部分群の簡単な表現から G の表現を構成する誘導の方法を述べる。この方法の特別な場合が直前に述べた主系列表現となる。誘導表現には 3 つの構成法があり、それぞれ誘導様式、非コンパクト様式、コンパクト様式と呼ぶ。これら 3 つはユニタリー同値となる。Abel 群 T の表現、すなわち指標 $\pi \in \hat{T}$ を出発点とする。この表現を B の表現に拡張する。

$$\pi_B(x) = \pi(a)^{-1}, \quad x = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a^{-1} \end{pmatrix} \in B \quad (4.4.28)$$

このとき π_B は B の 1 次元既約ユニタリー表現になる。この π_B をさらに G の表現へ拡張する。

(a) 誘導様式

G 上の関数空間 $C_\pi(G)$ を

$$C_\pi(G) = \{f : G \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ は } f(gb) = \Delta_B(b)^{1/2} \pi_B(b) f(g) \ (b \in B, g \in G) \text{ を満たす連続関数} \} \quad (4.4.29)$$

とし、内積を

$$\langle f, h \rangle = \int_K f(k) \bar{h}(k) dk \quad (4.4.30)$$

と定める。この内積で完備化した Hilbert 空間を $\mathcal{H}_\pi$ とする。

$f \in \mathcal{H}_\pi$ に対して

$$(T^\pi(x)f)(g) = f(x^{-1}g) \quad (g, x, \in G) \quad (4.4.31)$$

と定めると、 $(T^\pi, \mathcal{H}_\pi)$ は G のユニタリー表現となる。このとき

$$T^\pi = \text{Ind}_B^G(\pi_B) \quad (4.4.32)$$

と書き、 T^π を π_B からの誘導表現と呼ぶ。

(b) 非コンパクト様式

Bruhat 分解 (4.4.16) に注目する。すると、 G 上の連続関数は稠密な開集合 NB 上で決定される。したがって、 $f \in C_\pi(G)$ は本質的に N で決まってしまう。そこで誘導様式を N に制限したものを考える。これを非コンパクト様式と呼ぶ。実際、 $f \in \mathcal{H}_\pi$ に対して

$$Af(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.4.33)$$

と定めると、 $Af \in L^2(C) \cong L^2(N)$ となり、さらに

$$A : \mathcal{H}_\pi \rightarrow L^2(C) \quad (4.4.34)$$

が絡み作用素であることがわかる。したがって

$$T_\pi(g) = AT^\pi(g)A^{-1} \quad (g \in G) \quad (4.4.35)$$

と定めることにより、 $(T_\pi, L^2(C))$ は $(T^\pi, \mathcal{H}_\pi)$ とユニタリー同値な表現となる。

T_π がどのような作用素になるか具体的にみる。

$$f \in \mathcal{H}_\pi, \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad (4.4.36)$$

とすると,

$$\begin{aligned}
T^\pi(g)Af(x) &= (T^\pi(g)f)\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= f\left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= f\left(\begin{pmatrix} \alpha & \alpha x + \beta \\ \gamma & \gamma x + \delta \end{pmatrix}\right) \\
&= f\left(\begin{pmatrix} 1 & \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (\gamma x + \delta)^{-1} & x \\ 0 & \gamma x + \delta \end{pmatrix}\right) \\
&= (\text{mod}(\gamma x + \delta))^{-1}\pi(\gamma x + \delta)f\left(\begin{pmatrix} 1 & \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

となるので, $F \in L^2(C)$ に対して

$$(T_\pi(g)F)(x) = (\text{mod}(\gamma x + \delta))^{-1}\pi(\gamma x + \delta)F\left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right) \quad (4.4.37)$$

となる。したがって, 主系列表現は誘導表現の非コンパクト様式であったことがわかる。

(c) コンパクト様式

岩澤分解 $G = KAN = KB$ に注目する。この場合 $f \in C_c(G)$ は本質的に K で決まってしまう。そこで誘導様式を K に制限したものを考える。これをコンパクト様式と呼ぶ。 K 上の関数空間 $C_\pi(K)$ を

$$C_\pi(K) = \{f : K \rightarrow \mathbf{C}; f \text{ は } f(km) = \pi_B(m)f(k) \ (m \in M, k \in K) \text{ を満たす連続関数} \} \quad (4.4.38)$$

とし, 内積を

$$\langle f, k \rangle = \int_K f(k)\bar{h}(k)dk \quad (4.4.39)$$

で定義する。この内積で完備化した Hilbert 空間を $\tilde{\mathcal{H}}_\pi$ とする。

$f \in \tilde{\mathcal{H}}_\pi$ に対して

$$(\tilde{T}^\pi(g)f)(k) = \Delta_B(t(g^{-1}k))^{1/2}\pi_B(n(g^{-1}k))f(k(g^{-1}k)) \quad (4.4.40)$$

$$g^{-1}k = k(g^{-1}k)t(g^{-1}k)n(g^{-1}k) \quad (4.4.41)$$

と定めると, $(\tilde{T}^\pi, \tilde{\mathcal{H}}_\pi)$ はユニタリー表現となる。絡み作用素 $A : \mathcal{H}_\pi \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}_\pi$ を

$$Af(k) = f(k) \quad (4.4.42)$$

で定めると, $(\tilde{T}^\pi, \tilde{\mathcal{H}}_\pi)$ と $(T^\pi, \mathcal{H}_\pi)$ はユニタリー同値な表現となる。

4. 主系列表現 $T_{n,s}$ で $\pi_{0,s}$ の s が実数でないとき, $T_{0,s}$ はユニタリー表現とならない。しかし, $C_\pi(C)$ を完備化する内積を変えることによりユニタリー表現とすることができる。 $s = iw$ ($0 < w < 2$) のとき, $C_\pi(C)$ の内積を

$$\langle f, h \rangle = \int_C \int_C \frac{f(z)\bar{h}(\zeta)}{|z - \zeta|^{2-w}} dz d\zeta \quad (4.4.43)$$

と定義して, 完備化すれば, $T_{0,iw}$ は既約ユニタリー表現となることが知られている。この表現を補系列表現と呼ぶ。

以上から, G のユニタリー双対 $\hat{G}$ は

$$\hat{G} = \{I\} \cup \{T_{0,s}, s \geq 0\} \cup \{T_{n,s}, n \in \mathbf{Z}, n > 0, s \in \mathbf{R}\} \cup \{T_{0,iw}, 0 < w < 2\} \quad (4.4.44)$$

となる。

4.4.4 行列要素

L^2 Fourier 解析に影響する, すなわち, Plancherel 測度がゼロでない既約ユニタリー表現は主系列表現 $T_{n,s} (n \in \mathbf{Z}, n > 0, s \in \mathbf{R})$ のみである。よって, 主系列表現の行列要素のみ考える。

$T_{n,s}$ の表現空間は $L^2(K) = L^2(SU(2))$ である。したがって, $L^2(K)$ の正規直交基底は

$$\{e_l^{mn} = \sqrt{l+1} T_l^{mn}; m, n = -l/2, -l/2+1, \dots, l/2, l = 0, 1, 2, \dots\} \quad (4.4.45)$$

ととればよい。ここで, T_l^{mn} は $SU(2)$ の表現の行列要素である。 $T_{n,s}$ をこの基底に作用させると

$$\begin{aligned} T_{n,s}(k) e_l^{mn}(k') &= e_l^{mn}(k^{-1}k') \\ &= \sqrt{l+1} T_l^{mn}(k^{-1}k') \\ &= \sqrt{l+1} \langle T_l^*(k) T_l(k') e_n, e_m \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \sqrt{l+1} \langle T_l(k') e_n, T_l(k) e_m \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \sqrt{l+1} \sum_p \langle T_l(k') e_n, e_p \rangle \langle e_p, T_l(k) e_m \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \sum_p \bar{T}_l^{pm} e_l^{pn}(k') \end{aligned} \quad (4.4.46)$$

となる。よって, Cartan 分解 $G = KTK = KAK$ に従って

$$g = ka_u k' \quad (k, k' \in K, a_u \in A) \quad (4.4.47)$$

とすれば, 行列要素は, 式 (4.4.46) の結果より

$$\begin{aligned} \langle T_{n,s}(g) e_l^{mn}, e_{l'}^{m'n'} \rangle &= \langle T_{n,s}(ka_u k') e_l^{mn}, e_{l'}^{m'n'} \rangle \\ &= \langle T_{n,s}(a_u) T_{n,s}(k') e_l^{mn}, T_{n,s}(k^{-1}) e_{l'}^{m'n'} \rangle \\ &= \sum_{p,q} \bar{T}_l^{pm}(k') \bar{T}_{l'}^{m'q}(k) \langle T_{n,s}(a_u) e_l^{pn}, e_{l'}^{qn'} \rangle \\ &= \sum_p \bar{T}_l^{pm}(k') \bar{T}_{l'}^{m'p}(k) \langle T_{n,s}(a_u) e_l^{pn}, e_{l'}^{pn'} \rangle \end{aligned} \quad (4.4.48)$$

となる。ただし, 最右辺は, $M \subset K$ 上での積分の直交性を用いた。これより, 式 (4.4.48) の中の $T_{n,s}(a_u)$ の行列要素

$$\langle T_{n,s}(a_u) e_l^{pn}, e_{l'}^{pn'} \rangle \quad (4.4.49)$$

がわかればすべての計算が完了する。

式 (4.4.49) を計算する。誘導表現のコンパクト様式の定義から, $x \in SU(2)$ に対して

$$T_{n,s}(a_u) e_l^{pn}(x) = \Delta_B(t(a_u^{-1}x))^{1/2} \pi_B(t(a_u^{-1}x)) e_l^{pn}(k(a_u^{-1}x)) \quad (4.4.50)$$

となる。ここで, $t(\cdot), k(\cdot)$ は $G = KTN$ に従って引数の部分を分解したという意味である。 $SU(2)$ の Cartan 分解 (4.3.6) を使うと

$$k(a_u^{-1}x) = k(a_u^{-1}k_\phi a_\theta k_\psi) = k_\phi a_{\theta'} k_\psi \quad (4.4.51)$$

$$\tan \frac{\theta'}{2} = e^{2u} \tan \frac{\theta}{2} \quad (4.4.52)$$

$$t(a_u x) = t_\alpha, \quad \alpha = e^{-u} \cos \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{-1} \quad (4.4.53)$$

となる。したがって, $SU(2)$ の場合の結果と合わせれば,

$$\begin{aligned} \langle T_{n,s}(a_u) e_l^{pn}, e_{l'}^{pn'} \rangle &= \sum_p \bar{T}_l^{pm}(k') \bar{T}_{l'}^{m'p} (l+1)^{1/2} (l'+1)^{1/2} \\ &\quad \frac{1}{2} \int_0^\pi e^{-(is/2-1)t} \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{2(is/2-1)} \left(\cos \frac{\theta'}{2} \right)^{-2(is/2-1)} \\ &\quad \times P_{pn}^{l/2}(\cos \theta') P_{pn'}^{l'/2}(\cos \theta) \sin \theta d\theta \end{aligned} \quad (4.4.54)$$

となる。

4.4.5 指標

$T_{n,s}$ の指標 $\Theta_{T_{n,s}}$ を求める。しかし, $\Theta_{T_{n,s}}$ は無限次元表現より, 対角和を取る方法では求められない。したがって, 付録 E, 付録 F の結果を用いて指標を求める。具体的には $f \in C_c^\infty(G)$ に対する作用素値 Fourier 変換

$$T_{n,s}(f) : L^2(SU(2)) \rightarrow L^2(SU(2)) \quad (4.4.55)$$

の積分核を求めることで計算できる。

$G = KTN = KMAN$ の分解に従って, G の元を

$$g = k(g)m(g)a(g)n(g) = k(g)m_{\theta(g)}a_{u(g)}n(g) \quad (4.4.56)$$

と書くことにすると, $\phi \in SU(2)$ に対して

$$\begin{aligned} (T_{n,s}(f)\phi)(k) &= \int_G f(g) T_{n,s}(g) \phi(k) dg \\ &= \int_G f(g) e^{-(is+2)u(g^{-1}k)} e^{-in\theta(g^{-1}k)} \phi(k(g^{-1}k)) dg \\ &= \int_G f(g) e^{-(is+2)u(g)} e^{-in\theta(g)} \phi(k(g)) dg \\ &= \int_{KMAN} f(kn^{-1}a_u^{-1}m_\theta^{-1}k'^{-1}) e^{-(is+2)u} e^{-in\theta} \phi(k') e^{2u} dk' \frac{1}{2\pi} d\theta du dn \end{aligned}$$

となる。ここで

$$n_z^{-1} a_u^{-1} = a_u^{-1} a_u n_z^{-1} a_u^{-1} = a_u^{-1} n_{e^{2u}z}^{-1} \quad (4.4.57)$$

を用いて上の式を変形すると

$$(T_{n,s}(f)\phi)(k) = \int_K \left(\int_{MAN} f(km_\theta a_u n k'^{-1}) e^{(is+2)u} e^{in\theta} \frac{1}{2\pi} d\theta du dn \right) \phi(k') dk' \quad (4.4.58)$$

となり、積分核を用いた表示が得られた。したがって、 $T_{n,s}(f)$ のトレースは (付録 F.3) より、式 (4.4.58) で ϕ を除いて $k' = k$ としたものであることがわかるので

$$\mathrm{Tr}(T_{n,s}(f)) = \int_K \left(\int_{MAN} f(km_\theta a_u n k'^{-1}) e^{(is+2)u} e^{in\theta} \frac{1}{2\pi} d\theta du dn \right) dk \quad (4.4.59)$$

となる。ここで

$$F_f^T(t) = e^{2u} \int_{KN} f(ktnk^{-1}) dk dn \quad (t \in T) \quad (4.4.60)$$

なる関数を導入し、 $\pi_{n,s} \cong \pi_{-n,-s}$ 、 $\pi_{-n,-s}(t) = \pi_{n,s}(t^{-1})$ の性質を利用すると、式 (4.4.59) は

$$\mathrm{Tr}(T_{n,s}(f)) = \frac{1}{2} \int_T (\pi_{n,s}(t) + \pi_{n,s}(t^{-1})) F_f^T(t) dt \quad (4.4.61)$$

となる。

式 (4.4.61) を Weyl の積分公式 (付録 E.3) と比較できる形まで変形する。 $KN \cong G/T$ であり

$$n_z t_\alpha n_z^{-1} = t_\alpha n_{z(\alpha^{-2}-1)} \quad (4.4.62)$$

であることに注意すると、 $F_f^T(t)$ は $t \in T'$ 、すなわち ± 1 でない T の元に対して

$$F_f^T(t) = D_T(t) \int_{G/T} f(gt g^{-1}) dg \quad (4.4.63)$$

と書ける。ただし、 $t = t_\alpha = a_u m_\theta$ に対して

$$\begin{aligned} D_T(t) &= (e^{u+i\theta} - e^{-(u+i\theta)})(e^{u-i\theta} - e^{-(u-i\theta)}) \\ &= |e^u e^{i\theta} - e^{-u} e^{-i\theta}|^2 \\ &= |\alpha - \alpha^{-1}|^2 \end{aligned} \quad (4.4.64)$$

である。したがって、 T' が T で稠密であることに注意して

$$\mathrm{Tr}(T_{n,s}(f)) = \frac{1}{2} \int_T (\pi_{n,s}(t) + \pi_{n,s}(t^{-1})) \left(D_T(t) \int_{G/T} f(gt g^{-1}) dg \right) dt \quad (4.4.65)$$

となる。

一方、Weyl の積分公式 (付録 E.3)

$$\int_G f(g) dg = \frac{1}{2} \int_T |D_T(t)|^2 \left(\int_{G/T} f(gt g^{-1}) dg \right) dt \quad (4.4.66)$$

に注目する。 $\Theta_{T_{n,s}}(g)$ は共役類の上で一定であるので、 G/T の積分の外に出すことができる。

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(T_{n,s}(f)) &= \int_G f(g) \Theta_{T_{n,s}}(g) dg \\ &= \frac{1}{2} \int_T |D_T(t)|^2 \Theta_{T_{n,s}}(t) \left(\int_{G/T} f(gt g^{-1}) dg \right) dt \end{aligned} \quad (4.4.67)$$

式 (4.4.65) と式 (4.4.67) を比較すると

$$\Theta_{T_{n,s}}(t) = \frac{\pi_{n,s}(t) + \pi_{n,s}(t^{-1})}{D_T(t)} \quad (t \in T') \quad (4.4.68)$$

となる。ここで、付録 D より、 G の正則要素全体 G' は

$$G' = \bigcup_{\alpha \in C, \alpha \neq \pm 1} G_{t_\alpha} \quad (4.4.69)$$

であるので、指標はこの G' 上で完全に決定され

$$\Theta_{T_{n,s}}(g) = \begin{cases} \frac{\pi_{n,s}(t) + \pi_{n,s}(t^{-1})}{D_T(t)} & (g \in G_{t_\alpha}, \alpha \neq \pm 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \quad (4.4.70)$$

となる。

4.4.6 Fourier 変換

4.4.5 節から、 $f \in C_c^\infty(G)$ に対してスカラー値 Fourier 変換は

$$\hat{f}(T_{n,s}) = \text{Tr}(T_{n,s}(f)) = \int_{MA} e^{i(su+n\theta)} F_f^T(a_u m_\theta) \frac{1}{2\pi} d\theta du \quad (4.4.71)$$

となる。

4.4.7 逆変換公式と Plancherel 測度

4.4.6 節でのスカラー値 Fourier 変換 (4.4.71) に注目すると、 $F_f^T(a_u m_\theta)$ の $MA \cong T \times R$ 上の Fourier 変換と見なせる。 T, R それぞれについては 4.1, 4.2 節で理論を構築できているので、 MA 上の逆変換公式は T, R それぞれの逆変換公式を合わせるだけでよい。

$$F_f^T(a_u m_\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr}(T_{n,s}(f)) e^{-i(su+n\theta)} ds \quad (4.4.72)$$

$SU(2)$ の場合と同様に、 $SL(2, C)$ の場合にも $f(e)$ を F_f^T の微分で表す公式が存在して、それは

$$(2\pi)^2 f(e) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) F_f^T(a_u m_\theta) \Big|_{u=\theta=0} \quad (4.4.73)$$

となることが知られている [2]。

式 (4.4.73) に式 (4.4.72) を代入すれば

$$(2\pi)^2 f(e) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr}(T_{n,s}(f)) (n^2 + s^2) ds$$

となるので、逆変換公式は

$$f(e) = \frac{1}{16\pi^3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr}(T_{n,s}(f)) (n^2 + s^2) ds \quad (4.4.74)$$

$$= \frac{1}{8\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr}(T_{n,s}(f)) (n^2 + s^2) ds \quad (4.4.75)$$

となり、Plancherel 測度は

$$d\mu(T) = \begin{cases} \frac{1}{8\pi^3} (n^2 + s^2) ds & (T \cong T_{n,s}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \quad (4.4.76)$$

となることがわかる。

$f(g)$ に対する逆変換公式は, 式 (4.4.74) で $T_{n,s}(f)$ を $T_{n,s}(f)T_{n,s}(g^{-1})$ に置き換えればよい。

$$f(g) = \frac{1}{16\pi^3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr}(T_{n,s}(f)T_{n,s}(g^{-1}))(n^2 + s^2)ds \quad (4.4.77)$$

4.4.8 Plancherel の公式

$f \in L^2(G)$ に対して

$$\|f\|_{L^2(G)}^2 = \frac{1}{16\pi^3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \|\text{Tr}(T_{n,s}(f))\|_{HS}^2 (n^2 + s^2) ds \quad (4.4.78)$$

となる。

5 まとめと展望

本論文では, Fourier 解析を群上の解析と見なすことでより統一的な見方ができることを示し, さらに解析を行う群を局所コンパクト群にまで拡張した理論を構成した。このことにより, Fourier 級数と Fourier 積分の理論の類似性が明確になり, また, Fourier 級数と Fourier 積分の理論は, より広い群上の調和解析の理論のごく狭い一部に過ぎないということも明らかになった。

群上の調和解析の手法は, 曲がった, もしくはコンパクトな余剰空間をもつ素粒子模型の構築に応用できる可能性がある。曲がった空間の座標を群 G の元 g に対応させると, Fourier 変換によって運動量がわかる。したがって運動量の固有状態を作ることができ, 遷移振幅などの量を計算することができる。したがって, 余剰空間として曲がった空間を採用した場合に, 群上の調和解析の手法により意味のある物理量を計算することができ, 現実世界に対して何らかの示唆を与えられる可能性があるのである。

しかし, この応用は一筋縄ではいかない。なぜならば, 群上の調和解析の理論では, Fourier 変換と逆変換の対称性が見えにくくなっているからである。Fourier 変換と逆変換の間に対称性がないと, 量子力学で知っているように, 位置と運動量の対応関係をきちんとつけることができない (互いに Fourier 変換で移ることができるという描像を作れない) 可能性がある。群上の調和解析の枠組では, 作用素値 Fourier 変換とスカラー値 Fourier 変換の二つが存在する。これらを Fourier 変換として採用しようとするのであるが, スカラー値 Fourier 変換を採用すると明らかに逆変換との対称性は見えなくなる。作用素値 Fourier 変換を採用したとしても対称性は見えない。つまり, どちらも逆変換との対応がよく見えない。コンパクト群では, 表現の行列要素が展開の基底になっており, その意味で逆変換との対応が見えるが, 局所コンパクト群ではこの対応関係があることも明確ではない。したがって, 曲がった空間にこの理論を適用した場合は, 通常の Fourier 解析と同程度に気軽に使うことができない。Fourier 級数と Fourier 積分の場合は, 局所コンパクト Abel 群上での解析だったため, 1 次元表現のみしか持たなかった。したがって, 表現と指標が一致し, いかなる場合でも Fourier 変換と逆変換が対称な形になっていたのである。この非対称性が曲がった空間の特徴と捉えることもできるが, 物理で応用できる形に落とし込むことが今後の課題である。

しかし, 多種多様な空間について Fourier 解析を実行できるというのは大きな利点である。一度手法を確立すれば, 多くの模型を構築することができ, 比較, 淘汰を行いやすくなる。さらに, 素粒子物理以外でも応用の可能性は十分あると思われる。したがって, 群上の調和解析の理論は, 物理に対して多くの応用を期待できる汎用性の高い枠組みであると考えられる。

謝辞

指導教官である佐藤丈准教授には、卒業研究だけでなく、学部時代を通じて大変お世話になりました。様々な講義、輪講により、素粒子物理学関連に対する知識、興味を深めさせていただきました。本論文作成にあたり、多くの指導、助言をいただき感謝しています。谷井義彰教授には輪講、講義でお世話になったことへの感謝をこの場を借りて申し上げます。

また、本論文論文作成のための輪講では、PDの小池正史氏には多くの貴重な意見をいただき感謝しています。同じくPDの野村敬明氏と甲田昌也氏には、輪講等で大変お世話になりました。特に野村氏には、日頃からあらゆる議論に付きあってもらい大変感謝しています。その他の素粒子論研究室の皆さんとも、公私共に充実した日々を送れたことを感謝しています。

最後に、本論文作成にあたって気遣いや励ましをくれた家族、友人に感謝したいと思います。

付録 A 準同型定理の証明

ここでは、準同型定理 (2.1.10) の証明を行う。写像 $\varphi : G/\text{Ker } f \rightarrow \text{Im } f$ を次のように定める。

$$\varphi([a]) = f(a) \quad (\text{付録 A.1})$$

f は準同型写像より、準同型性は示せた。

単射性について。今

$$\varphi([e]) = f(e) \quad (\text{付録 A.2})$$

$$\varphi([a]) = f(a) \quad (a \neq e) \quad (\text{付録 A.3})$$

とする。 $[a]$ の中に e が入ってこなければよいが、 G は一般に、正規部分群である $\text{Ker } \varphi$ を用いて

$$G = (\text{Ker } \varphi)e + (\text{Ker } \varphi)a + (\text{Ker } \varphi)a' + \cdots \quad (\text{付録 A.4})$$

と分解できるので、 $[a]$ の中に e は入ってこない。よって φ は単射である。

全射性について。 $a' \in \text{Im } f$ を考えると、ある $\hat{a} \in G$ が存在して

$$a' = f(\hat{a}) \quad (\text{付録 A.5})$$

と書ける。今、 $\hat{a}$ は $z \in \text{Ker } f$ を用いて

$$\hat{a} = za \quad (\text{付録 A.6})$$

と書ける。ただし a は $\hat{a}$ の代表元である。したがって

$$\begin{aligned} a' &= f(za) \\ &= f(z)f(a) \\ &= f(a) \\ &= \varphi([a]) \end{aligned} \quad (\text{付録 A.7})$$

より、どんな $a' \in \text{Im } f$ を持ってきても対応する $[a]$ が存在する。よって φ は全射である。

以上より、 φ は同型写像であることがわかるので、準同型定理が成立する。

付録 B Borel 測度

ここでは、Borel 測度の定義を紹介する。ここでの定義は [6] に従った。まず、測度を定義する必要があるが、測度を定義するために加法族という集合族を定義する。

定義 (加法族)

集合を X , B を X の部分集合の族とする。

$$B = \{A_n; A_n \subset X, n = 1, 2, \dots\} \quad (\text{付録 B.1})$$

次の (1) ~ (3) の条件を満たすとき、 B を X 上の加法族 (もしくは σ -代数) と呼ぶ。

$$(1) \quad \emptyset \in B$$

$$(2) \quad A \in B \implies A^c \in B$$

$$(3) \quad A_n \in B \ (n \geq 1) \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in B$$

(1), (2) から $X \in B$ が言え, (2), (3) から $A_n \in B \implies \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in B$ が言える。

次に測度を定義する。測度とは, 大ざっぱに言うと, ある範囲の集合に非負の実数もしくは ∞ を対応させる集合関数のことである。正確には上で定義した加法族を用いて定義される。

定義 (測度)

B を X 上の加法族とする。 μ が (X, B) 上の測度であるとは, 次の (1), (2) が成立することである。

(1) 各 $A \in B$ に対し, $0 \leq \mu(A) \leq \infty$ となる $\mu(A)$ が対応し, $\mu(\emptyset) = 0$ となる。

(2) $A_n \in B \ (n \geq 1), A_i \cap A_j \ (i \neq j) \implies \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ (完全加法性)

このとき, (X, B) を可測空間, (X, B, μ) を測度空間という。

A を任意の X の部分集合族とする。このとき A を含む最小の加法族が存在し, それは $\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B$ で与えられる。ただし, $\mathcal{B}$ は A を含む加法族全体である。これを $B[A]$ と表し, A から生成される加法族と呼ぶ。

以上で Borel 測度を定義する準備ができた。

定義 (Borel 測度)

X を位相空間, O_X を X の開集合全体とし, $B_X = B[O_X]$ を O_X から生成される加法族とする。 B_X を Borel 集合族, B_X の元を Borel 集合と呼び, (X, B_X) の測度を Borel 測度と呼ぶ。

付録 C Jacobi 多項式

Jacobi 多項式の性質についてまとめておく。

(1) ロドリゲの公式

$w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta \ (\alpha, \beta > -1, -1 \leq x \leq 1)$ を重み関数とする。

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{1}{w(x)} \frac{d^n}{dx^n} [w(x)(1-x^2)^n] \quad (\text{付録 C.1})$$

$$= \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta}] \quad (\text{付録 C.2})$$

(2) 直交関係

$$\int_{-1}^1 w(x) P_n^{(\alpha, \beta)*}(x) P_m^{(\alpha, \beta)}(x) dx = w_n \delta_{nm} \quad (\text{付録 C.3})$$

ただし

$$w_n = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \quad (\text{付録 C.4})$$

$$= \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1} \frac{(n+\alpha)!(n+\beta)!}{n!(n+\alpha+\beta)!} \quad (\alpha, \beta \text{ が } 0 \text{ 以上の整数のとき}) \quad (\text{付録 C.5})$$

(3) 漸化式

$$\begin{aligned}
2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) &= (2n+\alpha+\beta+1) \\
&\times \{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)x + (\alpha^2 - \beta^2)\}P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \\
&- 2(n+\alpha)(n+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)
\end{aligned}
\tag{付録 C.6}$$

ただし

$$P_0^{(\alpha,\beta)}(x) = 1 \tag{付録 C.7}$$

$$P_1^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2}\{(\alpha+\beta+2)x + (\alpha-\beta)\} \tag{付録 C.8}$$

(4) Jacobi の微分方程式

$$(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2} + \{\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x\}\frac{du}{dx} + n(n+\alpha+\beta+1)u = 0 \tag{付録 C.9}$$

Sturm-Liouville 型で書くと

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1} \frac{du}{dx} \right] + n(n+\alpha+\beta+1)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta u = 0 \tag{付録 C.10}$$

付録 D 正則要素

まず, 正則要素について簡単に説明する。 G を群, $G_x = \{gxg^{-1}; g \in G\}$ を各共役類とする。

$$G = \bigcup_{x \in G} G_x \tag{付録 D.1}$$

この上での指標を考える。まず, 指標が類関数であるという性質

$$\Theta_T(gxg^{-1}) = \Theta_T(x) \tag{付録 D.2}$$

から各共役類上で指標は一定の値をとる。したがって, 各共役類 G_x の上での Θ_T の形がわかれば十分である。さらに, 指標が局所可積分関数であるという性質^{*22}から, Θ_T は G_x のある稠密な開集合 G'_x 上で完全に決定される。

$$G' = \bigcup_{x \in G} G'_x \tag{付録 D.3}$$

としたときの, G' の元を 正則要素 と呼ぶ。

$SU(2)$ の場合の正則要素全体は, 固有値が ± 1 でない G の元の全体になる。

$$G' = \bigcup_{0 < \theta < 4\pi} G_{k_\theta} \tag{付録 D.4}$$

4.3.5 節の議論はこの結果が背景にあり, 実際に証明するには 4.3.5 節で考えたように, 任意の $SU(2)$ 回転がユニタリー変換により一つの軸周りの回転に帰着できることを示せば十分である。付録 D では, このことについても具体的に計算を実行して確かめる。

^{*22} 例えば, $SL(2, \mathbb{C})$ に関しては式 (3.2.20) を見るとわかる。

まず, 任意の $SU(2)$ の元 g は式 (4.3.3) より

$$g = \begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & -x_3 + ix_4 \\ x_3 + ix_4 & x_1 - ix_2 \end{pmatrix} \quad (\text{付録 D.5})$$

である。 g の固有値を λ , 固有ベクトルを v とすると

$$gv = \lambda v \quad (\text{付録 D.6})$$

これが非自明な解を持つことから

$$\det(\lambda \mathbf{1} - g) = 0 \quad (\text{付録 D.7})$$

となる。これを解くと

$$\lambda = x_1 \pm i\sqrt{1 - x_1^2} \quad (\text{付録 D.8})$$

式 (付録 D.8) は絶対値をとると $|\lambda| = 1$ となるので, 固有値は

$$\lambda_{\pm} = e^{\pm \frac{1}{2}w} \quad (\text{付録 D.9})$$

ととれる。

$\lambda = \lambda_+$ のとき, $v = (v_1, v_2)$ とすると, 式 (付録 D.6) に代入して

$$v_2 = i \frac{\sqrt{1 - x_1^2} + x_2}{x_3 - ix_4} v_1 \quad (\text{付録 D.10})$$

となる。規格化すると, 位相因子を $e^{i\alpha}$ として

$$v_1 = \frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{2\sqrt{1 - x_1^2}}} \sqrt{\frac{x_3^2 + x_4^2}{\sqrt{1 - x_1^2} + x_2}} \quad (\text{付録 D.11})$$

となるので, 固有ベクトルを v_1 とすると

$$v_1 = \frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{2\sqrt{1 - x_1^2}}} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{x_3^2 + x_4^2}{\sqrt{1 - x_1^2} + x_2}} \\ -i(x_3 + ix_4) \sqrt{\frac{\sqrt{1 - x_1^2} - x_2}{x_3^2 + x_4^2}} \end{pmatrix} \quad (\text{付録 D.12})$$

となる。 $\lambda = \lambda_-$ の場合も同様にして, 固有ベクトルを v_2 とすると, 位相因子を $e^{i\beta}$ として

$$v_2 = \frac{e^{i\beta}}{\sqrt{2\sqrt{1 - x_1^2}}} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{x_3^2 + x_4^2}{\sqrt{1 - x_1^2} + x_2}} \\ i(x_3 + ix_4) \sqrt{\frac{\sqrt{1 - x_1^2} - x_2}{x_3^2 + x_4^2}} \end{pmatrix} \quad (\text{付録 D.13})$$

と求まる。以上より, g を対角的にするユニタリー行列 U は

$$U = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{1 - x_1^2}}} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{x_3^2 + x_4^2}{\sqrt{1 - x_1^2} - x_2}} e^{i\alpha} & \sqrt{\frac{x_3^2 + x_4^2}{\sqrt{1 - x_1^2} + x_2}} e^{i\beta} \\ -i(x_3 + ix_4) \sqrt{\frac{\sqrt{1 - x_1^2} - x_2}{x_3^2 + x_4^2}} e^{i\alpha} & i(x_3 + ix_4) \sqrt{\frac{\sqrt{1 - x_1^2} + x_2}{x_3^2 + x_4^2}} e^{i\beta} \end{pmatrix} \quad (\text{付録 D.14})$$

となる。ただし、位相因子は $\det U = 1$, $U_{12}^* = U_{21}$ を満たすように

$$e^{i\alpha} = \frac{x_3 + ix_4}{\sqrt{x_3^2 + x_4^2}} \quad (\text{付録 D.15})$$

$$e^{i\beta} = \frac{x_3^2 + x_4^2}{i(x_3 + ix_4)^2} \quad (\text{付録 D.16})$$

と決まる。以上より任意の $SU(2)$ の元 g は、適当なユニタリー変換 U によって

$$UgU^{-1} = k_w \quad (\text{付録 D.17})$$

となることが直接示せた。

次に、式 (4.3.44) を示す。

$$\begin{aligned} \chi_{T_l}(k_\theta) &= \sum_{k=-l/2}^{l/2} e^{-ik\theta} \\ &= \sum_{k=-l/2}^{l/2} (\cos k\theta - i \sin k\theta) \end{aligned}$$

$\sin$ の項は $k \rightarrow -k$ の置き換えで消えるので

$$\begin{aligned} \chi_{T_l}(k_\theta) &= \sum_{k=-l/2}^{l/2} \cos k\theta \\ &= \begin{cases} 1 + 2(\cos \theta + \cdots + \cos(l\theta/2)) & (l : \text{even}) \\ 2(\cos(\theta/2) + \cdots + \cos(l\theta/2)) & (l : \text{odd}) \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{付録 D.18})$$

となる。

l が even のとき、分母分子に $\sin(\theta/2)$ を掛け、積和の公式を用いると

$$\begin{aligned} \chi_{T_l}(k_\theta) &= \frac{1}{\sin(\theta/2)} (\sin(\theta/2) + 2 \sin(\theta/2) \cos \theta + \cdots + 2 \sin(\theta/2) \cos(l\theta/2)) \\ &= \frac{1}{\sin(\theta/2)} (\sin(\theta/2) + \sin(3\theta/2) - \sin(\theta/2) + \cdots + \sin((l+1)\theta/2) - \sin((l-1)\theta/2)) \\ &= \frac{\sin((l+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \end{aligned}$$

l が odd のときも同様にして

$$\begin{aligned} \chi_{T_l}(k_\theta) &= \frac{1}{\sin(\theta/2)} (2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) + \cdots + 2 \sin(\theta/2) \cos(l\theta/2)) \\ &= \frac{1}{\sin(\theta/2)} (\sin \theta + \sin(3\theta/2) - \sin \theta + \cdots + \sin((l+1)\theta/2) - \sin((l-1)\theta/2)) \\ &= \frac{\sin((l+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \end{aligned}$$

となる。以上より

$$\chi_{T_l}(k_\theta) = \frac{\sin((l+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \quad (\text{付録 D.19})$$

が成立することが示せた。

また, $SL(2, C)$ の場合の正則要素全体は

$$G' = \bigcup_{\alpha \in C, \alpha \neq \pm 1} G_{t_\alpha} \quad (\text{付録 D.20})$$

となる。 $SL(2, C)$ についても, $SU(2)$ の場合とまったく同様にやり方で直接計算できる。

付録 E Weyl の積分公式

4.3 節では, 指標の直交性や Peter-Weyl の定理を用いて逆変換公式と Plancherel 測度を計算した。これは $SU(2)$ がコンパクトであることが本質であり, 一般の非コンパクト群には適用できない。付録 E ではさらに一般の場合に適用できる公式を紹介する。実際, 4.4 節ではこの枠組みを用いる。

定理 (Weyl の積分公式)

G を単連結なコンパクト半単純 Lie 群, T を G の極大トーラス, Δ^+ を (G, T) の正ルート, ρ を正ルートの和の半分, $W(G, T)$ を (G, T) の Weyl 群とする^{*23}。このとき

$$\int_G f(x) dx = \frac{1}{|W(G, T)|} \int_T \left(\int_G f(gt g^{-1}) dg \right) |D_T(t)|^2 dt \quad (\text{付録 E.1})$$

$$D_T(t) \xi_\rho(t) \prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - \xi_{-\alpha}(t)) \quad (t \in T) \quad (\text{付録 E.2})$$

となる。

G がコンパクト群でないとき, Cartan 部分群が $H_1, H_2, \dots, H_r$ のように複数存在し, この中のコンパクトな Cartan 部分群が極大トーラス T である。このとき, 式 (付録 E.1) は次のように変更を受ける。

$$\int_G f(x) dx = \sum_{i=1}^r \frac{1}{|W(G, H_i)|} \int_{H_i} \left(\int_G f(gh_i g^{-1}) dg \right) |D_{H_i}(t)|^2 dh_i \quad (\text{付録 E.3})$$

また, G/H_i には適当な G 不変測度が存在し, これを dg_i とすれば

$$\int_G f(gh_i g^{-1}) dg = \int_{G/H_i} f(gh_i g^{-1}) dg_i \quad (\text{付録 E.4})$$

とも書ける。

Weyl の積分公式を $SU(2)$ の場合に適用する。 $SU(2)$ の正ルートは 1, 極大トーラスは K , Weyl 群の位数は 2 であるので, 式 (付録 E.1) は

$$\int_G f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{4\pi} |e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}|^2 \left(\int_G f(x k_\theta x^{-1}) dx \right) \frac{dk_\theta}{4\pi} \quad (\text{付録 E.5})$$

となる。次に, $f \in C^\infty(G)$ に対して

$$F_f^K(\theta) = (e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}) \int_G f(x k_\theta x^{-1}) dx \quad (\text{付録 E.6})$$

と置くと, 式 (付録 E.5) は

$$\int_G f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{4\pi} (e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}) F_f^K(\theta) \frac{dk_\theta}{4\pi} \quad (\text{付録 E.7})$$

^{*23} Lie 群や Lie 代数については [4] を参照

となる。ここで、指標が共役類上で一定であることより、Fourier 変換の計算の途中で Θ_{T_i} を F の外に出すことができる。

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(T_l(f)) &= \hat{f}(T_l) \\ &= \int_G f(g) \Theta_{T_l}(g) dg \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{4\pi} (e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}) \Theta_{T_l}(k_\theta) F_f^K(\theta) \frac{dk_\theta}{4\pi}\end{aligned}$$

式 (4.3.45) を代入し $l+1$ を掛けると

$$\begin{aligned}(l+1)\mathrm{Tr}(T_l(f)) &= -(l+1) \frac{1}{2} \int_0^{4\pi} (e^{i(l+1)\theta/2} - e^{-i(l+1)\theta/2}) F_f^K(\theta) \frac{dk_\theta}{4\pi} \\ &= i \int_0^{4\pi} \frac{d}{d\theta} (e^{i(l+1)\theta/2} + e^{-i(l+1)\theta/2}) F_f^K(\theta) \frac{dk_\theta}{4\pi}\end{aligned}\quad (\text{付録 E.8})$$

となる。式 (付録 E.8) で $\sum_{l=0}^{\infty}$ を実行する。 $l=0$ の項は 0 になること、および関数の Fourier 係数の和はその関数の 0 での値になることに注意すると

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{\infty} (l+1)\mathrm{Tr}(T_l(f)) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} i \int_0^{4\pi} \frac{d}{d\theta} e^{in\theta/2} F_f^K(\theta) \frac{dk_\theta}{4\pi} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{i} \int_0^{4\pi} e^{in\theta/2} \frac{d}{d\theta} F_f^K(\theta) \frac{dk_\theta}{4\pi} \\ &= \frac{1}{i} \frac{d}{d\theta} F_f^K(\theta) \Big|_{\theta=0}\end{aligned}\quad (\text{付録 E.9})$$

となる。一方、式 (付録 E.6) を直接微分すると

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\theta} F_f^K(\theta) \Big|_{\theta=0} &= \frac{i}{2} (e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2}) \int_G f(x k_\theta x^{-1}) dx \\ &\quad + (e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}) \frac{d}{d\theta} \int_G f(x k_\theta x^{-1}) dx \Big|_{\theta=0} \\ &= if(e)\end{aligned}\quad (\text{付録 E.10})$$

となる。式 (付録 E.9) と式 (付録 E.10) を比べると、逆変換公式

$$\sum_{l=0}^{\infty} (l+1)\mathrm{Tr}(T_l(f)) = f(e)\quad (\text{付録 E.11})$$

が得られる。

一般の G に対して、Fourier 逆変換公式を得るには、次の道具を揃えればよい。

- (1) Weyl の積分公式
- (2) 指標 Θ の式
- (3) $f(e)$ を f の共役類上の積分 F_f の微分で表す公式

(2) に関して、付録 F で局所コンパクト群にも指標を求めることのできる定理を与える。

付録 F 指標 Θ の求め方

局所コンパクト群のユニタリー表現は、一般には無限次元表現である。したがって対角和をとる通常の方法ではうまく指標を求められないことが多い。局所コンパクト群の場合は、トレースクラスの作用素 $T(f)$ の積分核表示を求め、次の命題を使って指標を計算する。

命題

X を C^∞ なコンパクト多様体^{*24}とし、その上の測度 $d\mu$ が適当な座標に関して、Lebesgue 測度に C^∞ 関数を掛けた形をしているとする。各 $K(x, y) \in C(X \times X)$ に対して、積分作用素を

$$T_K f(x) = \int_X K(x, y) f(y) d\mu(y) \quad (\text{付録 F.1})$$

と定義する。このとき次の (1) ~ (3) が成立する。

- (1) $T_K \in B(L^2(X, d\mu))$, すなわち

$$T_K : L^2(X, d\mu) \rightarrow L^2(X, d\mu) \quad (\text{付録 F.2})$$

は有界線形作用素となる。

- (2) $K \in C^\infty(X \times X)$ のとき、 T_K はトレースクラスであり、そのトレースは

$$\text{Tr}(T_K) = \int_X K(x, x) d\mu(x) \quad (\text{付録 F.3})$$

で与えられる。

- (3) $K \in L^2(X \times X, d\mu \times d\mu)$ のとき、 $\Phi(K) = T_K$ とし

$$\Phi : L^2(X \times X, d\mu \times d\mu) \rightarrow B_{HS}(L^2(X, d\mu)) \quad (\text{付録 F.4})$$

と定めれば、 Φ は等長同型を与える。特に

$$\|T_K\|_{HS}^2 = \int_X \int_X |K(x, y)|^2 d\mu(x) d\mu(y) \quad (\text{付録 F.5})$$

となる。

4.4 節では、この命題を用いて指標を求める。

^{*24} 多様体とは、大ざっぱに言って、局所的に滑らかに座標変換ができるような曲がった空間のことである。多様体については [5] 参照。

参考文献

- [1] 河添健『群上の調和解析』(朝倉書店, 2000)
- [2] A.Knapp, Representation Theory of Semisimple Lie Groups :An Overview Based on Examples, Princeton Univ. Press (1992)
- [3] 小林俊行、大島利雄『リー群と表現論』(岩波書店, 2005)
- [4] Howard Georgi, Lie Algebras In Particle Physics: from Isospin To Unified Theories,Westview Press(1999)
- [5] 中原幹夫『理論物理学のための幾何学とトポロジー I』(ピアソン・エデュケーション, 2000)
- [6] 折原明夫『測度と積分』(装華房, 1997)