

卒論 1

レーザー発振の原理

野村敬明

概要

本文ではレーザー発振の原理について半古典的な理論と完全に量子化された理論の両方について扱う。半古典的な理論では原子を量子力学的に扱い、電場は古典的に扱って考える。完全に量子化された理論では電場も量子化した場合を扱う。また、その準備として電磁場の量子化や放射、吸収遷移についても考察していく。

目次

1	イントロダクション	2
2	電磁場と原子の相互作用	3
2.1	電磁場の量子化	3
2.2	一般的な電磁場との相互作用	9
2.3	放射、吸収遷移の一般論	10
2.4	レーザーにおける相互作用	15
2.5	レーザーにおける遷移	17
2.6	共振器中の自然放射	19
3	レーザーの半古典論	22
3.1	密度行列	22
3.2	モデル	24
3.3	分極の導出	24
3.4	半古典的レーザー理論	28
3.5	強度と発振周波数の決定	29
4	完全に量子化されたレーザー理論と レーザー光の特性	33
4.1	モデル	33
4.2	方程式の導出	34
4.3	定常状態での光子数のふるまい	42
5	まとめ	47

1 イントロダクション

レーザーといえばまっすぐに進む光線を思いうかぶものである。しかし、LASER という言葉自体は「誘導放出による光の増幅」を意味する英語”Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation” の頭文字を集めて作られた用語であり、もともとは光線そのものよりもこの増幅現象を意味する。本文ではこの LASER 現象の原理について考察していく。

レーザーという用語ができる前にすでにメーザーという用語があった。メーザー：MESER はレーザーの L の Light を Microwave に変えたもので、始めは長波長の領域でしか電磁波の増幅が実現できなかったのでこの用語が用いられていた。この用語が始めにあったためレーザーも最初のうちは Optical MESER：光学メーザーなどと呼ばれていた。しかし、レーザーもメーザーもその原理自体はまったく同じでその名前が示す通り原子の誘導放射によって光を増幅させて発振させるというものである。

誘導放射を起こす原子の集団をレーザー媒質といい、その誘導放射によって入射光と同じ周波数で同じ方向に進行する光を増幅できる。しかし、本文で示すように誘導放射と同じ割合で誘導吸収が起こり光が吸収される過程も同時に起こってしまう。誘導吸収による損失よりも誘導放射による利得を大きくするにはレーザーで問題になる 2 つのエネルギー準位のうち高いエネルギーのほうの準位にある原子の方が低いエネルギーにある原子よりもレーザー媒質の中で多い必要がある。しかし本文で示すように原子は自然放射によって低いエネルギーに移るので熱平衡状態ではそのような状態は起こらない。このため、はじめはレーザー発振のようなことは起こらないと考えられていたときもあったようである。高いエネルギー準位にいる原子の方が多い状態を反転分布状態と呼ぶが、これを可能にするのがポンピングという操作である。ポンピング操作とはレーザー媒質に外から強い光を照射するなどして原子を励起する操作のことをいう。

次に問題になるのが反転分布を実現することができても誘導放射を引き起こす入射光がばらばらの方向にあったのでは増幅がうまく 1 方向にいかないということである。この問題はレーザー媒質を共振器に入れることで解決した。共振器とは簡単に言えば 2 枚の鏡を向かい合わせにしただけのものである。この鏡の反射によって共振器内に光の定在波を作りこの定在波をレーザー媒質で増幅することで 1 方向にレーザーを発振できるのである。

本文ではこの放射、吸収過程を考察するために電磁場を一般の場合と共振器中の場合に分けて量子化する。その後で放射、吸収過程について見ていく。本題のレーザーの原理については電場を古典的な波で扱った半古典的な理論と量子化された電場を用いた完全に量子化された理論の双方を見ていく。前者ではレーザー媒質中の原子の分極を、後者では発振されるレーザー光を詳しく見ていくことになる。

2 電磁場と原子の相互作用

レーザー光は原子による誘導放射を利用して増幅された光なので、レーザーを考察するためには原子と電磁場の相互作用を考える必要がある。電磁場は半古典的なレーザー理論では古典的な電場のみ考え、完全に量子化されたレーザー理論では電磁場は量子化して考える。ここではまず、電磁場の量子化を考え、その後原子との一般的な相互作用を考察し、それを用いて一般的な放射、吸収遷移について考察する。そこからレーザーを扱う上でどのように相互作用が近似されるか、またレーザーにおける遷移はどのように扱えるかを考察していく。

2.1 電磁場の量子化

ここでは電磁場の量子化について考察していく。量子化は一般的電磁場の場合と共振器中の電磁場の場合の両方について考える。

・一般的な場合

電磁場の量子化の際には真空中の自由電磁場を考える。

真空中の Maxwell 方程式は

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = 0 \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} = 0 \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.4)$$

ただし

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \quad , \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (2.5)$$

ϵ_0, μ_0 はそれぞれ真空中の誘電率と透磁率である。ここで磁束密度 \mathbf{B} に対しベクトルポテンシャル \mathbf{A} を

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.6)$$

で定義する。また、(1) 式より

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \right) = 0 \quad (2.7)$$

が得られる。これより

$$\mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} = -\nabla \phi \quad (2.8)$$

と表すことができる。 ϕ はスカラーポテンシャルである。

ここで、電場 \mathbf{E} と磁束密度 \mathbf{B} は次のゲージ変換

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \nabla\Lambda(\mathbf{r}, t) \quad (2.9)$$

$$\phi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \phi'(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t}\Lambda(\mathbf{r}, t) \quad (2.10)$$

に対して不変であることがわかる。ここで $\Lambda(\mathbf{r}, t)$ は任意のスカラー関数である。
このゲージ変換による任意性を除くためにゲージ固定を行う。ここではクーロンゲージ

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (2.11)$$

を課す。クーロンゲージの下ではスカラーポテンシャル ϕ はクーロンの法則

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int d^3\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \quad (2.12)$$

から求めることができる。しかし、レーザーを考える場合は電荷密度が存在しないとするので、 $\rho = 0$ である。したがって、 $\phi = 0$ として考えていけばよい。よって電場 \mathbf{E} は

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A} \quad (2.13)$$

と表される。また、Maxwell 方程式 (2.2) をベクトルポテンシャルで表すと

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{A} = 0 \quad (2.14)$$

となる。ここで、 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$ の関係とクーロンゲージの条件である $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ を用いて上式を変形させると

$$\nabla^2\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (2.15)$$

と、 $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ に対する波動方程式が得られる。ここで c は真空中の光速であり $c^2 = 1/\varepsilon_0\mu_0$ である。この波動方程式の一般解は

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \quad (2.16)$$

と書ける。ただし波動方程式より $\omega = c|\mathbf{k}|$ であり、 \mathbf{A}_0 は初期条件を満たすような定数ベクトルである。

ここで境界条件として一辺の長さが L の立方体 ($0 \leq x, y, z \leq L$) での周期境界条件

$$\mathbf{A}(x + L, y, z, t) = \mathbf{A}(x, y + L, z, t) = \mathbf{A}(x, y, z + L) = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad (2.17)$$

を課すことにする。すると

$$\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z) = \frac{2\pi}{L}(n_x, n_y, n_z) \quad (2.18)$$

となる。ここで n_x, n_y, n_z は 0 または任意の正負の整数を表す。
任意の $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ は一般解の重ね合わせ

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha=1}^2 \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k \varepsilon_0 V}} \mathbf{e}_{k\alpha} \{a_{k\alpha} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} + a_{k\alpha}^* e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\} \quad (2.19)$$

で表される。ここで $\alpha = 1, 2$ は電磁場の偏極の自由度を表すラベルであり、 $\mathbf{e}_{k\alpha}$ は電磁場の方向を表す単位ベクトル、 $V = L^3$ 、 $a_{k\alpha}$ は定数である。より一般的には $\mathbf{e}_{k\alpha}$ は複素数であるが、ここでは全て実数として扱う。

これより電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ は

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha=1}^2 i \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0 V}} \mathbf{e}_{k\alpha} \{a_{k\alpha} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} - a_{k\alpha}^* e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\} \end{aligned} \quad (2.20)$$

磁束密度 $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ は

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \nabla \times \mathbf{A} \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha=1}^2 i \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0 V}} \mathbf{e}_{k\alpha} (\mathbf{k} \times \mathbf{e}_{k\alpha}) \{a_{k\alpha} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} - a_{k\alpha}^* e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\} \end{aligned} \quad (2.21)$$

で与えられる。ここで、ハミルトニアン密度 \mathcal{H} は

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \quad (2.22)$$

で表される。これよりハミルトニアン H は

$$\begin{aligned} H &= \int d^3\mathbf{r} \mathcal{H} \\ &= (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \end{aligned} \quad (2.23)$$

で与えられる。(2.19),(2.20) の \mathbf{E}, \mathbf{B} を代入して、 $a_{k\alpha}, a_{k\alpha}^*$ の積の順序を保ちながら整理していくと

$$H = \frac{1}{2} \sum_{k,\alpha} \hbar\omega (a_{k\alpha}^* a_{k\alpha} + a_{k\alpha} a_{k\alpha}^*) \quad (2.24)$$

この形は量子力学で調和振動子のハミルトニアンを生成、消滅演算子で表したものと類似した形をしている。そこでこの式の $a_{k\alpha}, a_{k\alpha}^*$ を生成、消滅演算子として定義しなおせば電磁場を無数にある周波数モードを持った調和振動子を足し合わせたものとして量子化することができる。そこで

$a_{k\alpha}$ を演算子に定義しなおして、 $a_{k\alpha}^* \rightarrow a_{k\alpha}^\dagger$ として

$$[a_{k'\alpha'}, a_{k\alpha}^\dagger] = \delta_{kk'} \delta_{\alpha\alpha'} \quad (2.25)$$

および

$$[a_{k'\alpha'}, a_{k\alpha}] = [a_{k'\alpha}^\dagger, a_{k\alpha}^\dagger] = 0 \quad (2.26)$$

の交換関係を課してやる。そうすれば a, a^\dagger は消滅演算子と生成演算子となり、量子力学における調和振動子の場合と同様に扱うことができる。

また、数演算子も同様に $a_{k\alpha}^\dagger a_{k\alpha}$ で定義され、その固有状態は $|n_{k\alpha}\rangle$ で表される。この状態は k と α で表されるモードの光子が n 個あるという状態を表していて、もちろん

$$a_{k\alpha}^\dagger a_{k\alpha} |n_{k\alpha}\rangle = n_{k\alpha} |n_{k\alpha}\rangle \quad (2.27)$$

の関係を満たす。

量子化によってハミルトニアンは

$$H = \sum_{k\alpha} \hbar\omega_k \left(a_{k\alpha}^\dagger a_{k\alpha} + \frac{1}{2} \right) \quad (2.28)$$

と数演算子で表され、ハミルトニアンの固有状態も光子数状態であり、固有値は $\sum_{k\alpha} \hbar\omega_k \left(n_{k\alpha} + \frac{1}{2} \right)$ である。このことは電磁場のエネルギーがさまざまな周波数モードを持った光子のエネルギーを足し合わせたものであることを示している。 a, a^\dagger も通常の調和振動子のときと同様に

$$a_{k\alpha}^\dagger |n_{k\alpha}\rangle = \sqrt{n_{k\alpha} + 1} |n_{k\alpha} + 1\rangle \quad (2.29)$$

$$a_{k\alpha} |n_{k\alpha}\rangle = \sqrt{n_{k\alpha}} |n_{k\alpha} - 1\rangle \quad (2.30)$$

と、 $|n_{k\alpha}\rangle$ に作用し、それぞれの作用は次の通りである。

$a_{k\alpha}$: k と α で表されるモードの光子を一個消滅させる。

$a_{k\alpha}^\dagger$: k と α で表されるモードの光子を一個生成させる。

一般的な電磁場の光子数状態は

$$|\{n_s\}\rangle = |n_1\rangle |n_2\rangle \dots |n_s\rangle \dots \quad (2.31)$$

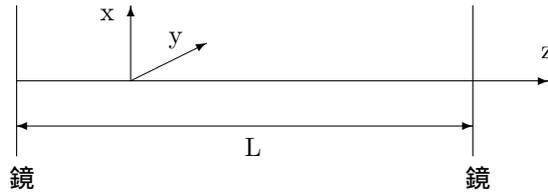
(ただし s は $k\alpha$ をまとめたもの) と無限個のモードを合わせた状態である。こうして電磁場はさまざまな周波数モードの光子の集まりとして量子化された。

・共振器中の電磁場の場合

レーザーを扱うときには共振器中で共振モードにある電場と原子の相互作用を考える。イントロダクションで述べたように発振されるレーザー光はこの共振モードにある光電場が原子の誘導放出に

よって増幅したものである。そこで、ここでは共振器中で共振モードにある電磁場の量子化を考えていく。後で相互作用のところでは述べるが、レーザーを考える上では相互作用はベクトルポテンシャルではなく電場を用いて考えていくので、共振器中を考えるときはベクトルポテンシャルは用いず、電場と磁場を直接量子化する。

イントロダクションでも述べたが、共振器は簡単に言うと2枚の鏡を向かい合わせにただけのものである(もちろんレーザー光を出力するためには片方はある程度透過する鏡でないといけないが)。



簡単な図は上のようなものであり光が鏡で反射されることが繰り返されることで共振器内に共振モードを持った定在波ができる。共振器の長さは L とし、 x, y, z 軸を上図のようにとる。共振モードでは z 軸方向に進行する光のみ考えるので電場や磁場の偏極方向は固定して考える。そこで、ここでは電場の偏極方向を x 軸にとる。また、そうすると磁場の偏極方向は y 軸となる。電場や磁場は1成分しか考えないので、ここではスカラー量として扱い、 $E(z, t), H(z, t)$ と記す。この条件の下で共振器中の電磁場を量子化していく。

今、電場が

$$E(z, t) = \sum_l q_l(t) \sqrt{\frac{2\Omega_l^2}{V\epsilon_0}} \sin(k_l z) \quad (2.32)$$

で表されるとする。ここで、 k_l, Ω_l は共振器中で共振モードにあるための条件を満たし、

$$k_l = \frac{l\pi}{L}, \quad \Omega_l = \frac{l\pi c}{L} \quad (2.33)$$

である。ただし l は整数。このとき、Maxwell 方程式 (2.2) を満たす磁場 H は

$$H(z, t) = \sum_l \dot{q}_l(t) \frac{\epsilon_0}{k_l} \sqrt{\frac{2\Omega_l^2}{V\epsilon_0}} \cos(k_l z) \quad (2.34)$$

と書ける。この電場と磁場よりハミルトニアン H は

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \int dV [ED + BH] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{l, l'} \int dV [q_l q_{l'} \frac{2\Omega_l \Omega_{l'}}{V} \sin(k_l z) \sin(k_{l'} z) + \dot{q}_l \dot{q}_{l'} \frac{\mu_0 \epsilon_0}{k_l k_{l'}} \frac{2\Omega_l \Omega_{l'}}{V} \cos(k_l z) \cos(k_{l'} z)] \\ &= \sum_l \frac{1}{2} (\Omega_l^2 q_l^2 + \dot{q}_l^2) \\ &= \sum_l \frac{1}{2} (\Omega_l^2 q_l^2 + p_l^2) \end{aligned} \quad (2.35)$$

と表される。ここで、 dv は共振器の体積についての積分である。計算を進めるにあたって、 \sin と \cos についての z 積分は $l = l'$ の場合のみ $L/2$ になり他は 0 になることと、 $\varepsilon_0\mu_0 = 1/c^2$, $ck_l = \Omega_l$ であることを用いた。また、

$$p_l \equiv \dot{q}_l \quad (2.36)$$

である。この形は調和振動子集まりのハミルトニアンを座標演算子と運動量演算子で表した場合と同様の形（ただし質量 = 1 となっている）をしている。よって q, p を演算子として定義しなおし

$$[q_{l'}, p_l] = i\hbar\delta_{ll'} \quad (2.37)$$

の交換関係を課してやれば、一般の場合と同様に電磁場を量子化することができる。また、

$$a_l = \sqrt{\frac{1}{2\hbar\Omega_l}}(\Omega_l q_l + ip_l) \quad (2.38)$$

$$a_l^\dagger = \sqrt{\frac{1}{2\hbar\Omega_l}}(\Omega_l q_l - ip_l) \quad (2.39)$$

を定義すればハミルトニアンは

$$H = \sum_l \hbar\Omega_l \left(a_l^\dagger a_l + \frac{1}{2} \right) \quad (2.40)$$

と表すことができ、 a_l, a_l^\dagger は

$$[a_l, a_{l'}^\dagger] = \delta_{ll'} \quad (2.41)$$

および

$$[a_l, a_{l'}] = [a_l^\dagger, a_{l'}^\dagger] = 0 \quad (2.42)$$

を満たし、一般の場合と同様に共振期中の電磁場系を生成、消滅演算子で表すことができる。ここで、この生成、消滅演算子は偏極のラベルを持っていないということ以外は一般の場合とまったく同じ作用をする。光子数状態も一般の場合と同様に定義できる。

また、電場と磁場を生成、消滅演算子で表すと

$$E(z, t) = \sum_l \sqrt{\frac{\hbar\Omega_l}{V\varepsilon_0}} (a_l^\dagger + a_l) \sin(k_l z) \quad (2.43)$$

$$H(z, t) = \sum_l i \sqrt{\frac{\hbar\Omega_l}{V\mu_0}} (a_l^\dagger - a_l) \cos(k_l z) \quad (2.44)$$

となる。完全に量子化されたレーザー理論を考える上では電場は上の生成、消滅演算子で表された形を用いる。磁場の方はレーザーを考える上では考えない。こうして一般の場合と共振モードの場合の電磁場を量子化することができたので、次に相互作用について考えていく。

2.2 一般的な電磁場との相互作用

電磁場を量子化したところで、次に相互作用について考察する。レーザーでは原子内の電子と自由電磁場との相互作用による放射、吸収遷移を扱う。まずは一般的な場合の自由電磁場と電子との相互作用について特に放射、吸収遷移に関わる場合を考えていく。また、ここでは電子も電磁場も量子力学的に考える。自由電磁場がないときの原子内の電子のハミルトニアンは運動量を \mathbf{p} 、ポテンシャルを $V(\mathbf{r})$ として

$$H_0^{atom} = \frac{1}{2m}\mathbf{p}^2 + V(\mathbf{r}) \quad (2.45)$$

と表される。ただし電子は量子力学的に考えているので $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$ である。一方、自由電磁場のハミルトニアンは一般の場合は

$$H_0^{EM} = \sum_s \hbar\omega_s (a_s^\dagger a_s + \frac{1}{2}) \quad (2.46)$$

と表しておく、ただし s は波数と偏極のラベルをまとめて書いたものである。一般に自由電場と相互作用する電子の全ハミルトニアンは H_0^{atom} において $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} + e\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ と置き換えて、自由電場のハミルトニアンを加えれば求められる。ただし $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ の \mathbf{r} は電子の座標である。よって全ハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m}(\mathbf{p} + e\mathbf{A}(\mathbf{r}, t))^2 + V(\mathbf{r}) + \sum_s \hbar\omega_s (a_s^\dagger a_s + \frac{1}{2}) \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{p}^2 + V(\mathbf{r}) + \sum_s \hbar\omega_s (a_s^\dagger a_s + \frac{1}{2}) \\ &\quad + \frac{e}{2m}\{\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{p}\} + \frac{e^2}{2m}\mathbf{A}^2(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (2.47)$$

で与えられる。この形から全ハミルトニアンは自由ハミルトニアン H_0 の部分と相互作用ハミルトニアン H_I の部分に分けられることがわかる。よってその二つの部分に分けて $H = H_0 + H_I$ とする。 H_0, H_I はそれぞれ

$$H_0 = H_0^{atom} + H_0^{EM} = \frac{1}{2}\mathbf{p}^2 + V(\mathbf{r}) + \sum_s \hbar\omega_s (a_s^\dagger a_s + \frac{1}{2}) \quad (2.48)$$

$$H_I = \frac{e}{2m}\{\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{p}\} + \frac{e^2}{2m}\mathbf{A}^2(\mathbf{r}, t) \quad (2.49)$$

ここで、相互作用ハミルトニアンをさらに放射、吸収遷移を扱うために適した形に変形させていく

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -i\hbar\{(\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla)\}$$

ここで、クーロンゲージの条件より $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ であるので右辺の括弧の中の第1項は消えるので

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{p} \quad (2.50)$$

となる。また、 $A^2(\mathbf{r}, t)$ の項は放射、吸収遷移には寄与しないので落とす。すると相互作用ハミルトニアンは

$$H_I = \frac{e}{m} \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} \quad (2.51)$$

となる。 $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ の形をあらわに書けば

$$H_I = \frac{e}{m} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 V}} \sum_s \sqrt{\frac{1}{\omega_s}} \left[(\mathbf{e}_s \cdot \mathbf{p}) a_s e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_s t)} + (\mathbf{e}_s \cdot \mathbf{p}) a_s^\dagger e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_s t)} \right] \quad (2.52)$$

である。この表示は電磁場については自由電磁場のハミルトニアンによる時間依存性を含んでいるが原子系については時間依存性を含んでいない。相互作用による遷移を考えるためには相互作用表示を用いた方が便利なので相互作用表示の相互作用ハミルトニアンを表しておく。相互作用表示では自由ハミルトニアンによる時間依存性はハミルトニアンを含む演算子に課して、相互作用ハミルトニアンによる時間依存性は状態に課すので上のハミルトニアンには原子の自由ハミルトニアンによる時間依存性を課す必要がある。よって相互作用表示の相互作用ハミルトニアン $H_I^{(I)}$ は

$$H_I^{(I)} = \exp \left[i \frac{H_0^{atom}}{\hbar} t \right] H_I \exp \left[-i \frac{H_0^{atoms}}{\hbar} t \right] \quad (2.53)$$

となる。また、時間依存性を除いたシュレディンガー表示の相互作用ハミルトニアン $H_I^{(s)}$ は

$$H_I^{(s)} = \frac{e}{m} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 V}} \sum_s \sqrt{\frac{1}{\omega_s}} \left[(\mathbf{e}_s \cdot \mathbf{p}) a_s e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + (\mathbf{e}_s \cdot \mathbf{p}) a_s^\dagger e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \right] \quad (2.54)$$

である。これらの表示の相互作用ハミルトニアンを用いて放射、吸収遷移の一般論を考えていく。

2.3 放射、吸収遷移の一般論

ここでは、原子のエネルギー準位間の放射、吸収遷移について一般的に考えていく。一般に原子内の電子はいくつもある不連続的なエネルギー準位のどれかの状態にいる。その電子が電磁場と相互作用すると準位間での遷移が起きるのである。原子が光子を1個放出してエネルギーが上の準位から下の準位に遷移する場合を放射遷移、逆に光子を1個吸収して下の準位から上の準位に遷移する場合を吸収遷移という。特に光子が原子に入射して相互作用し、状態の放射、吸収遷移を引き起こす過程をそれぞれ誘導放射、誘導吸収という。レーザーはこの誘導放射を利用して光子を増幅させるのである。

今、原子の2準位を考えて、エネルギーが高い方の準位の状態を $|u\rangle$ 、低い方の準位の状態を $|d\rangle$ とする。また、エネルギーはそれぞれ E_u, E_d とする。

状態	エネルギー
_____ $ u\rangle$	E_u
_____ $ d\rangle$	E_d

原子と電磁場を合わせた状態 $|\psi\rangle$ は

$$|\psi\rangle = |\alpha\rangle|n_1, \dots, n_s, \dots\rangle \quad (\alpha = u, d) \quad (2.55)$$

と表す。ただし状態は相互作用表示とする。これから放射、吸収遷移について計算していく。まずは吸収遷移の場合を考える。



吸収遷移では図のように入射光子によって下の準位の状態にあった電子が上の準位の状態に遷移する。この場合始状態 $|\psi_i\rangle$ と終状態 $|\psi_f\rangle$ はそれぞれ

$$|\psi_i\rangle = |d\rangle|n_1, \dots, n_s, \dots\rangle \quad (2.56)$$

$$|\psi_f\rangle = |u\rangle|n_1, \dots, n_s - 1_s, \dots\rangle \quad (2.57)$$

となる。これより平均遷移確率を求める。ただし、ここでの平均とは無限に長い時間での時間平均を意味する。

一般に始状態から終状態への単位時間当たりの平均遷移確率は摂動論の1次のオーダーで

$$W_{fi} = \sum_f \frac{2\pi}{\hbar^2} \delta(E_f - E_i) |\langle \psi_f | H_I^{(s)} | \psi_i \rangle|^2 \quad (2.58)$$

で求めることができる。ここで E_f, E_i はそれぞれ終状態、始状態のエネルギーであり、 \sum_f は終

状態についての和である。 $H_I^{(s)}$ は (2.54) のシュレディンガー表示の相互作用ハミルトニアン。また、デルタ関数の存在はエネルギーが保存されることを表している。

吸収遷移の場合について平均遷移確率 $W_{fi}^{(a)}$ を求める。そこで吸収遷移の場合の始状態と終状態 (2.56), (2.57) を (2.58) に代入すると、相互作用ハミルトニアンの中の消滅演算子を持つ項のみ残り

$$\langle \psi_f | H_I^{(s)} | \psi_i \rangle = \frac{e}{m} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 V}} \sum_{s'} \sqrt{\frac{n_{s'}}{\omega_{s'}}} \langle u | (\mathbf{e}_{s'} \cdot \mathbf{p}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} | d \rangle \delta_{ss'} \quad (2.59)$$

となる。ここで s' は入射光子の偏極と波数のラベルを合わせたもので s は終状態についてのもの。また、

$$\begin{aligned} E_f - E_i &= E_u - \hbar\omega_s - E_d \\ &= \hbar(\omega_{ud} - \omega_s) \end{aligned} \quad (2.60)$$

より、(ただし $\hbar\omega_{ud} = E_u - E_d$ とした。)

$$W_{fi}^{(a)} = \frac{2\pi}{\hbar^2} \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{\hbar}{2\varepsilon_0 V} \sum_s \frac{n_s}{\omega_s} |\langle u | (\mathbf{e}_s \cdot \mathbf{p}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} | d \rangle|^2 \delta(\omega_{ud} - \omega_s) \quad (2.61)$$

となる。ここで双極子近似 $e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \approx 1$ を用いて考えていくことにする。

そこで計算を進める前に近似の妥当性を考えてみる。 \mathbf{r} はだいたい原子の大きさのオーダーなので $\mathbf{r} \approx 10^{-10} m$ 、一方レーザーは可視光域で考えると波長 λ は $\lambda \approx 10^{-7} m$ のオーダーより波数は $k \approx 10^7 m^{-1}$ のオーダーである。よって $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \approx 10^{-3} \ll 1$ なのでこの近似は妥当だと考えられる。したがって、

$$W_{fi}^{(a)} = \frac{\pi}{\hbar\varepsilon_0 V} \left(\frac{e}{m}\right)^2 \sum_s \frac{n_s}{\omega_s} |\langle u | (\mathbf{e}_s \cdot \mathbf{p}) | d \rangle|^2 \delta(\omega_{ud} - \omega_s) \quad (2.62)$$

となる。ここでさらに $\langle u | (\mathbf{e}_s \cdot \mathbf{p}) | d \rangle$ を変形させる。その為の準備として次の計算を行う

$$\begin{aligned} [H_0^{atom}, x] &= H_0^{atom} x - x H_0^{atom} \\ &= \frac{1}{2m} (\mathbf{p}^2 x - x \mathbf{p}^2) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} x - x \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \\ &= -\frac{\hbar^2}{m} \frac{\partial}{\partial x} = -i \frac{\hbar}{m} p_x \end{aligned}$$

x, y に対しても同じように計算できるので、これを合わせると

$$[H_0^{atom}, \mathbf{r}] = -i \frac{\hbar}{m} \mathbf{p} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{p} = i \frac{m}{\hbar} [H_0^{atom}, \mathbf{r}] \quad (2.63)$$

となる。これを用いると

$$\begin{aligned} \langle u | (\mathbf{e}_s \cdot \mathbf{p}) | d \rangle &= \langle u | i \frac{m}{\hbar} \mathbf{e}_s \cdot (H_0^{atom} \mathbf{r} - \mathbf{r} H_0^{atom}) | d \rangle \\ &= (E_u - E_d) i \frac{m}{\hbar} \langle u | \mathbf{e}_s \cdot \mathbf{r} | d \rangle \\ &= i \omega_{ud} m \langle u | \mathbf{e}_s \cdot \mathbf{r} | d \rangle \end{aligned} \quad (2.64)$$

となる。さらに $\mathbf{e}_r = \mathbf{P}$ とすると

$$\langle u | (\mathbf{e}_s \cdot \mathbf{p}) | d \rangle = i \frac{m}{e} \omega_{ud} \langle u | \mathbf{e}_s \cdot \mathbf{P} | d \rangle \quad (2.65)$$

これを用いれば

$$W_{fi}^{(a)} = \frac{\pi}{\hbar\varepsilon_0 V} \sum_{k\alpha} n_{k\alpha} \frac{\omega_{ud}^2}{\omega_k} |\langle u | \mathbf{e}_{k\alpha} \cdot \mathbf{P} | d \rangle|^2 \delta(\omega_{ud} - \omega_k) \quad (2.66)$$

となる。ここで、 \mathbf{P} は双極子モーメント演算子であり、このように双極子モーメントがでてくることから双極子近似というのである。ここで、 \mathbf{k} の和について連続極限 $\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}$ をとる。そうすると

$$\begin{aligned} W_{fi}^{(a)} &= \frac{\pi}{\hbar\epsilon_0} \sum_{\alpha=1}^2 \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} n_{k\alpha} \frac{\omega_{ud}^2}{\omega} |\langle u | \mathbf{e}_{k\alpha} \cdot \mathbf{P} | d \rangle|^2 \delta(\omega_{ud} - \omega) \\ &= \frac{\pi}{(2\pi)^3 \hbar\epsilon_0} \frac{1}{c^3} \int d\omega \omega_{ud}^2 \omega \sum_{\alpha} n_{\omega\alpha} \int d\Omega |\langle u | \mathbf{e}_{\omega\alpha} \cdot \mathbf{P} | d \rangle|^2 \delta(\omega_{ud} - \omega) \end{aligned} \quad (2.67)$$

となる。ただし $\int d\Omega$ は立体角についての積分である。ここで偏極によって光子数が変化することはないと考えて、 $n_{\omega 1} = n_{\omega 2} = n_{\omega}$ とみなすことにする。また、光子の進行方向を z 軸にとり $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ の方向を x, y 軸にとれば偏極についての和と立体角についての積分を見積もることができて、

$$\sum_{\alpha} \int d\Omega |\langle u | \mathbf{e}_{\omega\alpha} \cdot \mathbf{P} | d \rangle|^2 = \frac{8\pi}{3} |\langle u | \mathbf{P} | d \rangle|^2 \quad (2.68)$$

となる。また、 ω についての積分を実行すれば

$$W_{fi}^{(a)} = \frac{\pi}{(2\pi)^3 \hbar\epsilon_0} \frac{\omega_{ud}^3 n_{\omega_{ud}}}{c^3} \frac{8\pi}{3} |\langle u | \mathbf{P} | d \rangle|^2 \quad (2.69)$$

さらに、 $|P_{ud}| \equiv \langle u | \mathbf{P} | d \rangle$ とすれば簡約にかけて

$$W_{fi}^{(a)} = \frac{1}{3\pi\hbar\epsilon_0} \frac{\omega_{ud}^3 n_{\omega_{ud}}}{c^3} |P_{ud}|^2 \quad (2.70)$$

となる。ここで単位体積あたりのエネルギー密度 $\rho(\omega)$ は

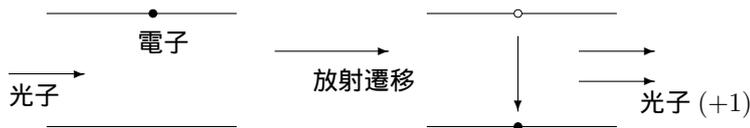
$$\rho(\omega) = n_{\omega} \hbar \frac{\omega^3}{\pi^2 c^3} \quad (2.71)$$

で与えられる。これより吸収遷移を起こす単位時間当たりの平均遷移確率は

$$W_{ud}^{(a)} = \frac{\pi}{3\epsilon_0 \hbar^2} |P_{ud}|^2 \rho(\omega_{ud}) \equiv B_{ud} \rho(\omega_{ud}) \quad (2.72)$$

となる。この B をアインシュタインの B 係数と呼ぶ。この結果については放射遷移について計算して後でそれと比べるとともに考察していくことにする。

そこで次に放射遷移について考える。



放射遷移では図のように入射光子と原子が相互作用することで上の準位の状態にいた電子が下の状態に遷移し、そのとき光子を1個放出する。放射遷移の場合、始状態 $|\psi_i\rangle$ と終状態 $|\psi_f\rangle$ はそれぞれ

$$|\psi_i\rangle = |d\rangle|n_1, \dots, n_s, \dots\rangle \quad (2.73)$$

$$|\psi_f\rangle = |u\rangle|n_1, \dots, n_s + 1_s, \dots\rangle \quad (2.74)$$

である。放出遷移の平均遷移確率 $W_{fi}^{(e)}$ を求めるためにこれらを (2.58) に当てはめると、相互作用ハミルトニアンの中で生成演算子を持つ項のみ残り

$$\langle \psi_f | H_I^{(s)} | \psi_i \rangle = \frac{e}{m} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 V}} \sum_{s'} \sqrt{\frac{n_{s'} + 1_{s'}}{\omega_{s'}}} \langle u | (\mathbf{e}_{s'} \cdot \mathbf{p}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} | d \rangle \delta_{ss'} \quad (2.75)$$

となる。ここで s' は入射光子の偏極と波数のラベルを合わせたもので s は終状態についてのもの。これは $n \rightarrow n+1, ik \cdot \mathbf{r} \rightarrow -ik \cdot \mathbf{r}$ となった他は (2.59) と同じである。また、この式は入射光子の偏極及びエネルギーと誘導放出により放出される光子の偏極とエネルギーが同じであることを示している。

平均遷移確率は双極子近似のもとで吸収遷移の場合とまったく同じようにしてとくことができ

$$\begin{aligned} W_{fi}^{(e)} &= \frac{\pi}{3\varepsilon_0 \hbar^2} |P_{ud}|^2 \rho(\omega_{ud}) + \frac{\omega_{ud}^3}{3\pi\varepsilon_0 \hbar c^3} |P_{ud}|^2 \\ &\equiv B_{du} \rho(\omega_{ud}) + A_{ud} \end{aligned} \quad (2.76)$$

となる。ここで $P_{ud} = P_{du}, \omega_{ud} = \omega_{du}$ であることを用いた。ここにでてきた A をアインシュタインの A 係数と呼ぶ。 A は始状態の光子が0個でも0にならずに残るので、自然放射する確率を表している。

ここで放射、吸収遷移について考察していく。

まず、放射、吸収遷移確率をみていくと (2.72), (2.76) より $B_{ud} = B_{du}$ なので誘導放射する確率と誘導放射する確率が等しいことがわかる。しかし放射の方は自然放射の項があるので、全体では放射する確率の方が高くなる。したがって熱平衡状態では電子は下の状態にいると考えられる。したがって誘導放出により光子を増加させるためには上の準位の状態が必要なので熱平衡状態ではない状態が必要となる。ゆえにレーザーを出力させるためには外から原子を励起させて上の準位の状態を増やすポンピングを行うのである。

次に (2.75) より入射光子と誘導放射で放出される光子の偏極とエネルギーは同じなので、ある特定のモードのみを増幅させていくことが可能になるのである。そのためにはある特定のモードと原子の集団が相互作用をして誘導放出を繰り返す必要がある。そのために必要なのが共振器である。共振器の共振モードで誘導放出をさせることで特定のモードが選べる。

ただ、ここでの計算を見ていくと遷移を起こすには入射光子のエネルギーが準位間のエネルギー差とまったく同じでなくてはいけないように見える。これは無限に長い時間による平均をとったため実際には不確定性原理より遷移にかかる時間が τ くらいとするとエネルギーの不確定性が少なくとも $\Delta E \sim \hbar/\Delta\tau$ くらいあるので、厳密に同じである必要はない。このゆらぎの半値幅程度の間で準位間のエネルギー差と入射光子のエネルギーが重なっていれば良いと考えられる。

2.4 レーザーにおける相互作用

ここでは相互作用を特にレーザーを扱う場合に対して考える。
 まずは相互作用ハミルトニアンを見直してみる。相互作用ハミルトニアン (2.52) は1モードのばあいを表すと

$$H_I = \frac{e}{m} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega V}} [(\mathbf{e} \cdot \mathbf{p}) a e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t} + (\mathbf{e} \cdot \mathbf{p}) a^\dagger e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\omega t}]$$

だった。ここで放射、吸収遷移を考えると始状態と終状態は

$$|\psi_i\rangle = |\alpha\rangle|n\rangle \quad (2.77)$$

$$|\psi_f\rangle = |\beta\rangle|n \pm 1\rangle \quad (2.78)$$

と書ける。ただし α, β は $n \pm 1$ で+のとき $\alpha = u, \beta = d$ で-のときはその逆とする。また、ここからは1モードで考えていくが、それで一般性は失われることはない。多モードの場合は単に1モードの結果をモードについて和をとれば良いだけである。
 ここで $H_I^{(s)}$ の遷移行列要素を見ると双極子近似の下では

$$\langle \psi_f | H_I^{(s)} | \psi_i \rangle = \frac{e}{m} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega V}} \langle \beta | \mathbf{e} \cdot \mathbf{p} | \alpha \rangle \{ \langle a \rangle e^{-i\omega t} + \langle a^\dagger \rangle e^{i\omega t} \} \quad (2.79)$$

ここで、 $\langle a^\dagger \rangle = \langle n \pm 1 | a^\dagger | n \rangle$ である。また、(2.65) を用いれば

$$\langle \psi_i | H_I | \psi_f \rangle = i \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega V}} \omega_{ud} \{ \mathbf{e} \cdot \mathbf{P}_{ud} \langle a \rangle e^{-i\omega t} - \mathbf{e} \cdot \mathbf{P}_{du} \langle a^\dagger \rangle e^{i\omega t} \} \quad (2.80)$$

となる。一方、双極子近似のもとで

$$\begin{aligned} \langle \psi_f | \mathbf{E} \cdot \mathbf{P} | \psi_i \rangle &= \langle \psi_f | -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \cdot \mathbf{P} | \psi_i \rangle \\ &= i \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}} \{ \mathbf{e} \cdot \mathbf{P}_{ud} \langle a \rangle e^{-i\omega t} - \mathbf{e} \cdot \mathbf{P}_{du} \langle a^\dagger \rangle e^{i\omega t} \} \end{aligned} \quad (2.81)$$

放射、吸収遷移を考える上では $\omega_{ud} \approx \omega$ のときを考えるので、相互作用ハミルトニアンは $H_I \approx -\mathbf{E} \cdot \mathbf{P} = -e\mathbf{E} \cdot \mathbf{r}$ としてよいと考えられる。レーザーを考えるときは電場 \mathbf{E} を直接考えた方が都合がいいので、相互作用ハミルトニアンは

$$H_I = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{P} \quad (2.82)$$

の形を用いる。

ここで、さらに相互作用ハミルトニアンをレーザーの場合に特化して考える。レーザー遷移を考えるときは共振器で共振モードにある電場と原子の相互作用を考える。その相互作用によってレーザーに関わる2準位の遷移を考えていく。まず、上の準位の状態 $|u\rangle$ と下の準位の状態 $|d\rangle$ を行列

で表して

$$|u\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |d\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.83)$$

とする。また、ハミルトニアンを

$$H = \begin{pmatrix} H_{uu} & H_{ud} \\ H_{du} & H_{dd} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle u|H|u\rangle & \langle d|H|u\rangle \\ \langle d|H|u\rangle & \langle d|H|d\rangle \end{pmatrix}$$

と書けば原子状態で行列要素をとった自由ハミルトニアンは

$$H_0 = \hbar \begin{pmatrix} \omega_u & 0 \\ 0 & \omega_d \end{pmatrix} + \hbar\Omega(a^\dagger a + \frac{1}{2}) \quad (2.84)$$

で表される。次に相互作用ハミルトニアンを考える。電場は共振器中で共振モードにある電場 (2.43) を用いる。P についての原子状態による対角要素は 0 になるので相互作用ハミルトニアンはシュレディンガー表示で

$$\begin{aligned} H_I^{(s)} &= -\wp E(z, t) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -\wp \sqrt{\frac{\hbar\Omega}{\varepsilon_0 V}} \sin(kz) (a^\dagger + a)(\sigma + \sigma^\dagger) \end{aligned} \quad (2.85)$$

と書くことができる。ただし、 $\wp = ex_{ud} = e\langle u|x|d\rangle$ であり

$$\sigma \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^\dagger \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.86)$$

と定義している。また、 σ, σ^\dagger は $\sigma|u\rangle = |d\rangle$, $\sigma^\dagger|d\rangle = |u\rangle$ と作用し、 σ は上の準位の状態を下の準位の状態に、 σ^\dagger はその逆に状態を変えることがわかる。

全ハミルトニアンは

$$H = \hbar \begin{pmatrix} \omega_u & 0 \\ 0 & \omega_d \end{pmatrix} + \hbar\Omega(a^\dagger a + \frac{1}{2}) + \hbar g(a + a^\dagger)(\sigma + \sigma^\dagger) \quad (2.87)$$

と表せる。ただし

$$g = -\wp \sqrt{\frac{\Omega}{\hbar\varepsilon_0 V}} \sin(kz) \quad (2.88)$$

である。相互作用ハミルトニアンを詳しく見ていくと

$$(a + a^\dagger)(\sigma + \sigma^\dagger) = a\sigma + a\sigma^\dagger + a^\dagger\sigma + a^\dagger\sigma^\dagger$$

というような項がでてくる。それぞれの項を見ていくと、 $a\sigma$ は上から下に遷移して光子を吸収、 $a^\dagger\sigma^\dagger$ は下から上に遷移して光子を放出する過程に寄与しエネルギーを保存しない遷移を起こす。

したがってこれらは落として考えていく。このことは $H_I^{(s)}$ を相互作用表示にしたときに回転波近似を行ったことに相当する。実際に見ていくと

$$\begin{aligned}
H_I^{(I)} &= \hbar g \exp[i\Omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})t](a + a^\dagger) \exp[-i\Omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})t] \\
&\quad \times \exp\left[i\begin{pmatrix} \omega_u & 0 \\ 0 & \omega_d \end{pmatrix}t\right] \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \exp\left[-i\begin{pmatrix} \omega_u & 0 \\ 0 & \omega_d \end{pmatrix}t\right] \\
&= \hbar g [ae^{-i\Omega t} + a^\dagger e^{i\Omega t}] [\sigma e^{-i\omega t} + \sigma^\dagger e^{i\omega t}] \\
&= \hbar g [a\sigma e^{-i(\Omega+\omega)t} + a\sigma^\dagger e^{-i(\Omega-\omega)t} + a^\dagger\sigma e^{i(\Omega-\omega)t} + a^\dagger\sigma^\dagger e^{i(\Omega+\omega)t}]
\end{aligned} \tag{2.89}$$

ただし $\omega = \omega_u - \omega_d$ 。回転波近似の下では $\Omega + \omega$ が \exp に入っている項は $\Omega - \omega$ が \exp に入っている項よりはるかに速く振動するので問題にならないと考えて落とす。よって回転波近似をしてやれば確かに $a\sigma, a^\dagger\sigma^\dagger$ を含む項は落ちる。結局、相互作用ハミルトニアンは相互作用表示で

$$H_I^{(I)} = \hbar g [a\sigma^\dagger e^{-i(\Omega-\omega)t} + a^\dagger\sigma e^{i(\Omega-\omega)t}] \tag{2.90}$$

の形になる。レーザーを考える上ではこの相互作用ハミルトニアンを用いて準位間の遷移を扱っていく。

2.5 レーザーにおける遷移

相互作用を求めたので、今度はレーザー遷移について考えていく。相互作用により原子と電磁場を合わせた状態は

$$|u, n\rangle \longleftrightarrow |d, n+1\rangle$$

の間で遷移する。そこで原子と場の状態ベクトルを相互作用表示で

$$|\psi(t)\rangle = c_{un}(t)|u, n\rangle + c_{dn+1}(t)|d, n+1\rangle \tag{2.91}$$

と置く。ここで $c_{un}(t), c_{dn+1}(t)$ はそれぞれ $|u, n\rangle, |d, n+1\rangle$ という状態をとる確率振幅である。ここで、確率振幅の満たす運動方程式を考える。

相互作用表示でシュレディンガー方程式は $|\dot{\psi}\rangle = (i\hbar)^{-1} H_I^{(I)} |\psi\rangle$ より

$$\begin{aligned}
|\dot{\psi}(t)\rangle &= \dot{c}_{un}(t)|u, n\rangle + \dot{c}_{dn+1}(t)|d, n+1\rangle \\
&= -ig[a\sigma^\dagger e^{-i(\Omega-\omega)t} + a^\dagger\sigma e^{i(\Omega-\omega)t}] \\
&\quad \times [c_{un}(t)|u, n\rangle + c_{dn+1}(t)|d, n+1\rangle]
\end{aligned} \tag{2.92}$$

これを $\langle un|$ で射影すると c_{un} の運動方程式

$$\dot{c}_{un}(t) = -ig\sqrt{n+1} \exp[-i(\Omega-\omega)t] c_{dn+1}(t) \tag{2.93}$$

が得られる。同様に $\langle d, n+1 |$ で射影すると c_{dn+1} の運動方程式

$$\dot{c}_{dn+1}(t) = -ig\sqrt{n+1} \exp[-i(\Omega - \omega)t] c_{un}(t) \quad (2.94)$$

が得られる。次に運動方程式の解を考える。初期条件が

$$c_{un}(0) = 0, \quad c_{dn+1}(0) = 1 \quad (2.95)$$

のとき (2.94) を形式的に積分すると

$$c_{un}(t) = -ig\sqrt{n+1} \int_0^t dt' c_{dn+1}(t') \exp[-i(\Omega - \omega)t'] \quad (2.96)$$

ここで時間に依存した場合の 1 次の摂動として $c_{dn+1}(t') = 1$ を代入して積分すると

$$c_{un}^{(1)}(t) = -ig\sqrt{n+1} \left(\frac{\exp[-i(\Omega - \omega)t] - 1}{-i(\Omega - \omega)} \right) \quad (2.97)$$

これより吸収の確率は摂動の 1 次で

$$|c_{un}^{(1)}(t)|^2 = g^2(n+1)t^2 \left(\frac{\sin^2[(\Omega - \omega)\frac{t}{2}]}{[(\Omega - \omega)\frac{t}{2}]^2} \right) \quad (2.98)$$

となり、時間とともに振動することがわかる。逆に初期条件が

$$c_{un}(0) = 1, \quad c_{dn+1}(0) = 0 \quad (2.99)$$

の場合も同様に摂動の 1 次で考えて、放射の確率は

$$|c_{dn+1}^{(1)}(t)|^2 = g^2(n+1)t^2 \left(\frac{\sin^2[(\Omega - \omega)\frac{t}{2}]}{[(\Omega - \omega)\frac{t}{2}]^2} \right) \quad (2.100)$$

となる。共鳴時 $\omega = \Omega$ のときは厳密に解くことができる。運動方程式 (2.94) を時間微分して (2.95) を用いると

$$\ddot{c}_{un}(t) = -g^2(n+1)c_{un}(t) \quad (2.101)$$

この一般解は

$$c_{un}(t) = A \sin(g\sqrt{n+1}t) + B \cos(g\sqrt{n+1}t) \quad (2.102)$$

である。ただし A, B は積分定数。この解と (2.94) から

$$c_{dn+1}(t) = iA \sin(g\sqrt{n+1}t) - iB \cos(g\sqrt{n+1}t) \quad (2.103)$$

である。(2.96)の初期条件のときは $A = i, B = 0$ となり

$$c_{un}(t) = -i \sin(g\sqrt{n+1}t) \quad (2.104)$$

$$c_{dn+1}(t) = \cos(g\sqrt{n+1}t) \quad (2.105)$$

また、(2.100)の初期条件のときは $A = 0, B = 1$ となり

$$c_{un}(t) = \cos(g\sqrt{n+1}t) \quad (2.106)$$

$$c_{dn+1}(t) = -i \sin(g\sqrt{n+1}t) \quad (2.107)$$

となる。この結果は定数 g がどの共振モードか、あるいはどの準位間を考えるかによって異なる点を除けば二準位間の遷移を考える上で一般的に成り立つので、後のレーザーの計算でも用いる。

2.6 共振器中の自然放射

最後に共振器中での自然放射について考える。自然放射の場合は単に1つのモードだけが選ばれるメカニズムはないので多モードで計算する必要がある。よって相互作用表示での相互作用ハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H_I^{(I)} &= \hbar \sum_s g_s \{ \sigma a_s^\dagger \exp[i(\Omega_s - \omega)t] + \sigma^\dagger a_s \exp[-i(\Omega_s - \omega)t] \} \\ &= \sum_s H_{I_s}^{(I)} \end{aligned} \quad (2.108)$$

になる。また、相互作用表示での原子と場の系の状態は

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{\xi=u,d} \sum_{n_1} \sum_{n_2} \cdots \sum_{n_s} \cdots c_{\xi, n_1, n_2, \dots, n_s, \dots} |\xi, n_1, n_2, \dots, n_s, \dots\rangle \quad (2.109)$$

と書ける。次に確率振幅 $c_{\xi, n_1, n_2, \dots, n_s, \dots}$ の運動方程式を求める。そのためには相互作用表示のシュレディンガー方程式 $|\dot{\psi}\rangle = H_I^{(I)} |\psi\rangle$ を $|\xi, n_1, n_2, \dots, n_s, \dots\rangle$ で射影すれば良い。実行すると

$$\begin{aligned} \dot{c}_{\xi, n_1, n_2, \dots, n_s, \dots}(t) &= -\frac{i}{\hbar} \sum_{m_1} \sum_{m_2} \cdots \sum_{m_r} \cdots \sum_{\zeta=u,d} \\ &\times \langle \xi, n_1, n_2, \dots, n_s, \dots | \sum_r H_{I_r}^{(I)} | \zeta, m_1, \dots, m_r, \dots \rangle \\ &\times c_{\zeta, m_1, \dots, m_r, \dots}(t) \end{aligned} \quad (2.110)$$

となるが、ここで、

$$\begin{aligned} &\sum_r \langle \xi, n_r | H_{I_r} | \zeta, m_r \rangle \langle n_1, \dots, n_{r-1}, n_{r+1}, \dots | m_1, \dots, m_{r-1}, m_{r+1}, \dots \rangle \\ &= \sum_r \langle \xi, n_r | H_{I_r} | \zeta, m_r \rangle \delta_{n_1 m_1}, \dots, \delta_{n_{r-1} m_{r-1}}, \delta_{n_{r+1} m_{r+1}}, \dots \end{aligned} \quad (2.111)$$

を用いると、

$$\dot{c}_{\xi n_1 \dots n_s \dots}(t) = -\frac{i}{\hbar} \sum_{\zeta} \sum_r \sum_m \langle \xi, n_r | H_{I_r} | \zeta, m_r \rangle c_{\zeta n_1, \dots, n_r, \dots} \quad (2.112)$$

である。次に $\langle \xi, n_r | H_{I_r} | \zeta, m_r \rangle$ を考える。

$$\langle \xi | \sigma | \zeta \rangle = \delta_{\xi d} \delta_{\zeta u}, \quad \langle \xi | \sigma^\dagger | \zeta \rangle = \delta_{\xi u} \delta_{\zeta d} \quad (2.113)$$

より、相互作用ハミルトニアン of あらわな形を代入すると

$$\begin{aligned} \dot{c}_{\xi n_1 \dots n_s \dots}(t) = & -i \sum_r g_r \{ \sqrt{n_r} \exp[i(\Omega_r - \omega)t] \delta_{\xi d} c_{u n_1, \dots, n_r-1, \dots} \\ & + \sqrt{n_r + 1} \exp[-i(\Omega_r - \omega)t] \delta_{\xi u} c_{d n, \dots, n_r+1, \dots} \} \end{aligned} \quad (2.114)$$

が得られる。ここで、時刻 $t = 0$ で原子は上の状態 $|u\rangle$ にあり電磁場のどのモードにも光子は存在しないとする。このとき

$$c_{\xi, 0_1, 0_2, \dots}(0) \equiv c_{\xi\{0\}}(0) = 1 \quad (2.115)$$

で他は全て 0 になる。相互作用して時間がたつと

$$c_{d, 0_1, 0_2, \dots, 1_s, \dots}(t) \equiv c_{d\{1_s\}}(t) \quad (2.116)$$

は 0 でなくなるようになる。これらの確率振幅に対する運動方程式は

$$\dot{c}_{u\{0\}}(t) = -i \sum_r g_r \exp[-i(\Omega_r - \omega)t] c_{b, \{1_r\}} \quad (2.117)$$

$$\dot{c}_{d\{1_s\}}(t) = -i g_s \exp[i(\Omega_s - \omega)t] c_{u\{0\}} \quad (2.118)$$

(2.119) を形式的に積分して (2.118) に代入すると

$$\dot{c}_{u\{0\}}(t) = - \sum_r g_r^2 \int_0^t dt' \exp[-i(\Omega_r - \omega)(t - t')] c_{u\{0\}}(t') \quad (2.119)$$

となることがわかる。ここで、電場の周波数モードは密に分布しているとして連続極限を取る。

$$\sum_r \rightarrow \int d\Omega D(\Omega) \quad (2.120)$$

$D(\Omega)$ は終状態のモード密度で

$$D(\Omega) = \frac{V\Omega^2}{\pi^2 c^3} \quad (2.121)$$

時間積分はだいたい原子の状態の寿命程度のオーダーの時間間隔で積分する。そのオーダーはだいたい 10^{-7} である。一方 ω, Ω のオーダーはだいたい 10^{14} くらいなので積分したときに $D(\Omega), g(\Omega)$ はほとんど変化しないと考えられる。よって

$$\dot{c}_{u\{0\}}(t) = -g^2(\omega)D(\omega) \int_0^\infty d\Omega \int_0^t dt' \exp[-i(\Omega - \omega)(t - t')] c_{u\{0\}}(t') \quad (2.122)$$

また、

$$\int_0^\infty d\Omega e^{-i\Omega(t-t')} = \pi\delta(t-t') - \mathfrak{R} \frac{i}{t-t'} \quad (2.123)$$

である。 \mathfrak{R} は主値積分で、この項は誤差とみなして計算の中に入れてないようにする。そうすると、
結局

$$\dot{c}_{u\{0\}}(t) = -\frac{1}{2}\gamma_u c_{u\{0\}}(t) \quad (2.124)$$

$$\gamma_u = 2\pi g^2(\omega)D(\omega) \quad (2.125)$$

である。

(2.125) を積分すると $|c_{u\{0\}}(t)|^2 = e^{-\gamma_u t}$ となる。このことは光子が存在しないときでも上の状態 $|u\rangle$ が寿命 $\tau = \frac{1}{\gamma_u}$ で指数関数的に崩壊することを表す。したがってレーザーの方程式を考えるとときにはレーザー遷移とは別に、この自然放射による減衰を加える必要がある。

これでレーザーに関わってくる原子と電磁場の相互作用については大体述べたのでつぎのセクションからは実際にレーザーについて考察していく。

3 レーザーの半古典論

ここでは半古典的にレーザーを考察する。半古典的とは原子については量子力学的に考え、電磁場は古典的な電場のみ考えるという意味である。具体的なモデルとしては共振器中にあるレーザー媒質を原子の集団として扱い、これが共振モードにある古典的な電場と相互作用するというものを考える。

計算の手法としては密度行列を用いるので始めに密度行列について簡単にふれ、これを用いて巨視的な分極の集団平均を求めていく。そうして求めた分極を Maxwell 方程式に当てはめることでレーザー電場についての自己無撞着的な方程式を導出する。そして、この方程式を用いてレーザー電場の強度と発振周波数が求められることを示していく。また、ここでの計算は全て1モードで考える。

3.1 密度行列

レーザーの理論ではレーザー媒質として原子の集団を扱う。そのような場合には集団の完全な量子力学的な状態を知るのとは不可能なので密度行列が有用な手段となる。そこで、ここでは密度行列について簡単にふれていく。

密度行列は密度演算子

$$\hat{\rho} = \sum_{\psi} P_{\psi} |\psi\rangle\langle\psi| \quad (3.1)$$

を適当な基底で行列要素をとり行列化したものである。ここで、 P_{ψ} は考えている系が $|\psi\rangle$ という量子力学的状態を取る統計的な確率であり、和はその統計的な分布についての和である。系の状態が完全にわかっているときは和はとらず、このときを純粋状態という。また、どの状態を取るかの統計的な分布しかわかっていないときを混合状態という。例えば2準位系の平衡状態で状態が $|a\rangle$ をとるか $|b\rangle$ をとるか統計力学的な確率しかわかっていないと場合を考えてみると、 $|a\rangle$ をとるか $|b\rangle$ をとるかの統計力学的確率は

$$\frac{\exp\left[-\frac{E_a}{k_B T}\right]}{Z}, \quad \frac{\exp\left[-\frac{E_b}{k_B T}\right]}{Z}, \quad Z = \exp\left[-\frac{E_a}{k_B T}\right] + \exp\left[-\frac{E_b}{k_B T}\right]$$

なので(平衡状態なので重ね合わせ状態は考えない) この場合の密度演算子は

$$\hat{\rho} = \frac{\exp\left[-\frac{E_a}{k_B T}\right]}{Z} |a\rangle\langle a| + \frac{\exp\left[-\frac{E_b}{k_B T}\right]}{Z} |b\rangle\langle b|$$

となる。

密度行列を用いる利点は系の完全な量子力学的状態がわかっていなくてもあるていど統計的な性質がわかっているれば運動方程式をたてて計算できることにある。

密度行列に対する運動方程式は統計的な分布が時間変化しないとして、シュレディンガー表示で表すと

$$\begin{aligned}
\dot{\rho} &= \sum_{\psi} P_{\psi} \{ |\dot{\psi}\rangle\langle\psi| + |\psi\rangle\langle\dot{\psi}| \} \\
&= -\frac{i}{\hbar} \sum_{\psi} P_{\psi} \{ H|\psi\rangle\langle\psi| - |\psi\rangle\langle\psi|H \} \\
&= \frac{1}{i\hbar} [H, \rho]
\end{aligned} \tag{3.2}$$

となる。特に相互作用表示では

$$\rho^{(t)} = e^{i\frac{H_0}{\hbar}t} \rho e^{-i\frac{H_0}{\hbar}t} \tag{3.3}$$

$$\dot{\rho}^{(t)} = \frac{1}{i\hbar} [H_I^{(t)}, \rho^{(t)}] \tag{3.4}$$

である。ただし $H_I^{(t)}$ は相互作用表示の相互作用ハミルトニアン。

このように統計的な分布 P_{ψ} が時間変化しないならこれについて詳しい知識がなくても密度演算子の運動方程式がたてることができる。

また、密度演算子を用いて物理量の集団平均を求めることができる。集団平均とは量子力学的な平均に加えて統計的な平均も行うということである。ある物理量 O に対する演算子を \hat{O} とすると集団平均 $\langle O \rangle$ は密度演算子を用いて

$$\langle O \rangle = \text{tr}\{\hat{\rho}\hat{O}\} \tag{3.5}$$

で求められる。tr は適当な完全系の基底でのトレースを取ることを表す。これを詳しく見ていく。まず、 $\langle\psi'|\psi\rangle = \delta_{\psi\psi'}$ となるような基底 $|\psi'\rangle$ でトレースをとると

$$\begin{aligned}
\langle O \rangle &= \text{tr}\{\hat{\rho}\hat{O}\} \\
&= \sum_{\psi'} \langle\psi'|\sum_{\psi} P_{\psi}|\psi\rangle\langle\psi|\hat{O}|\psi'\rangle \\
&= \sum_{\psi} P_{\psi} \langle\psi|\hat{O}|\psi\rangle
\end{aligned} \tag{3.6}$$

となる。これより $\langle \hat{O} \rangle$ は

$\langle O \rangle = \sum_{\psi} (\psi \text{をとる確率}) \times (\psi \text{状態での } O \text{ の量子力学的期待値})$ を表す。また、 $\hat{O}|i\rangle = O_i|i\rangle$ となる基底 $|i\rangle$ でトレースをとると

$$\begin{aligned}
\langle O \rangle &= \text{tr}\{\hat{\rho}\hat{O}\} \\
&= \sum_i \langle i|\sum_{\psi} P_{\psi}|\psi\rangle\langle\psi|\hat{O}|i\rangle \\
&= \sum_i \sum_{\psi} P_{\psi} |\langle i|\psi\rangle|^2 O_i
\end{aligned} \tag{3.7}$$

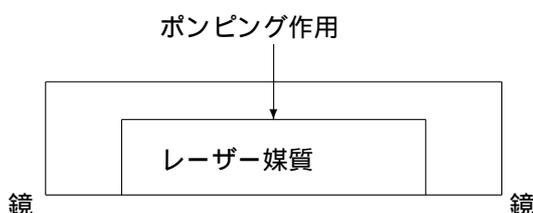
である。この場合は

$\langle O \rangle = \sum_i \sum_{\psi} (\psi \text{をとる確率}) \times (\psi \text{状態での } O \text{ の量子力学的期待値})$

を意味する。これは結局のところ (3.6) の場合と同じことを表している。トレースは完全系であればどんな基底でも良いので場合に合わせて都合の良い基底を選ぶ。
レーザーではこれを用いて双極子モーメントや光子数の平均を求める。

3.2 モデル

ここではレーザー光の発振方向の長さが L の共振器中に原子が一様に分布したレーザー媒質が入っているという状況を考える。原子を励起させるポンピングは一定の割合でされているとして定常状態での原子の状態の分布でポンピングの強さを表す。媒質の原子は簡単のため2準位だけのエネルギー準位を持っているとして考えるが、得られる結果は一般的なものである。



次の節から、このモデルにおける媒質の分極を考えていく。

3.3 分極の導出

ここでは密度演算子を用いて分極を求める。
半古典的なレーザー理論では光子数状態は考えずに原子の状態だけを考える。また、原子の状態は簡単のため2準位のみを考える。レーザー遷移に関わる状態以外の状態への減衰まで扱った理論は次の章で見ていく。の原子の2準位は上の状態を $|a\rangle$ 、下の状態を $|b\rangle$ として

$$\begin{array}{l} \text{-----} |a\rangle \quad \text{エネルギー} \quad \hbar\Omega_a \\ \\ \text{-----} |b\rangle \quad \text{エネルギー} \quad \hbar\Omega_b \end{array}$$

この原子の N 個の集団を考える。原子は共振器中で互いに区別できないとしてまず1つの原子について見ていく。この系の1原子にて対する密度演算子を

$$\hat{\rho} = \sum_l P_l |\psi^{(l)}\rangle \langle \psi^{(l)}| \tag{3.8}$$

で定義する。また、

$$|\psi^{(l)}\rangle = c_a^{(l)} |a\rangle + c_b^{(l)} |b\rangle \tag{3.9}$$

である。ここで、 l は原子の状態について統計的にしかわからない知識に対するラベルで、 P_l は $|\psi^{(l)}\rangle$ という状態を取る統計的確率である。また、 $c_a^{(l)}, c_b^{(l)}$ は $|\psi^{(l)}\rangle$ という状態においてそれぞれ $|a\rangle, |b\rangle$ をとる確率振幅。ここでは統計的な分布は位置や時間によらないとして考え、詳細については求めない。密度行列 ρ は基底を $|a\rangle, |b\rangle$ に選び

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{aa} & \rho_{ab} \\ \rho_{ba} & \rho_{bb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_l P_l |c_a^{(l)}|^2 & \sum_l P_l c_a^{(l)} c_b^{(l)*} \\ \sum_l P_l c_b^{(l)} c_a^{(l)*} & \sum_l P_l |c_b^{(l)}|^2 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

で与えられる。これを見ればわかるように対角要素 ρ_{aa}, ρ_{bb} はそれぞれ原子が $|a\rangle, |b\rangle$ 状態である確率を表す。また、非対角要素 ρ_{ab}, ρ_{ba} は双極子モーメントに比例することが後でわかる。密度演算子の運動方程式は前節 (3.2) の場合をもちいる。ハミルトニアンは半古典的な場合を考えて

$$H = H_{atom} + H_I \quad (3.11)$$

$$H = -\mathbf{P} \cdot \mathbf{E}(t) \quad (3.12)$$

において電場 \mathbf{E} は古典的な電場とする。また、 $\mathbf{P} = e\mathbf{r}$ は双極子演算子である。さらに、簡単のため電場の偏極は 1 方向のみ考えて $\mathbf{P} \cdot \mathbf{E}(t) \rightarrow PE(t)$ で考える。レーザーで問題になるのは共振器中で共振モードにある電場なのでこうしても問題ないと考えられる。ここで、密度行列に対する運動方程式は成分で見ると

$$\dot{\rho}_{\alpha\beta} = \frac{1}{i\hbar} \langle \alpha | \left[H \sum_{\xi=a,b} |\xi\rangle \langle \xi| \rho - \rho \sum_{\xi=a,b} |\xi\rangle \langle \xi| H \right] | \beta \rangle \quad (3.13)$$

である。ただし、 $\alpha, \beta = a$ または b である。この運動方程式を成分ごとに求めるためにハミルトニアン H の行列要素を求めると、 $H_{atom}|a(b)\rangle = \hbar\omega_{a(b)}|a(b)\rangle$ で双極子モーメントは対角要素をとると 0 より

$$(H_{atom})_{aa} = \langle a | H_{atom} | a \rangle = \hbar\Omega_a \quad (3.14)$$

$$(H_{atom})_{bb} = \langle b | H_{atom} | b \rangle = \hbar\Omega_b \quad (3.15)$$

$$(H_I)_{ab} = \langle a | H_{atom} | b \rangle = -P_{ab}E \quad (3.16)$$

$$(H_I)_{ba} = \langle b | H_{atom} | a \rangle = -P_{ba}E \quad (3.17)$$

であり、他の要素は全て 0 になる。これより密度行列の運動方程式を成分毎に考えていく。

・非対角成分

非対角成分の運動方程式は (3.13) より、

$$\frac{\partial \rho_{ab}}{\partial t} = -i\Omega \rho_{ab} - i \frac{P_{ab}E}{\hbar} (\rho_{aa} - \rho_{bb}) \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial \rho_{ba}}{\partial t} = i\Omega \rho_{ba} + i \frac{P_{ba}E}{\hbar} (\rho_{aa} - \rho_{bb}) \quad (3.19)$$

となる。ただし $\Omega = \Omega_a - \Omega_b$ である。しかし、実際の原子は準位の重ね合わせの状態にあるときは $|a\rangle$ か $|b\rangle$ のどちらかの状態に遷移しようとする。よって、非対角成分の運動方程式には現象論的に緩和定数 γ を加える必要がある。したがって、理論に用いる運動方程式は

$$\frac{\partial \rho_{ab}}{\partial t} = -i\Omega \rho_{ab} - \gamma \rho_{ab} - i \frac{P_{ab}E}{\hbar} (\rho_{aa} - \rho_{bb}) \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial \rho_{ba}}{\partial t} = i\Omega \rho_{ba} - \gamma \rho_{ba} + i \frac{P_{ba}E}{\hbar} (\rho_{aa} - \rho_{bb}) \quad (3.21)$$

である。次に電場 $E(t)$ を光の進行方向を z 軸にとってフーリエ分解して

$$E(z, t) = E^{(\omega)} e^{-i(\omega t - kz)} + E^{(-\omega)} e^{i(\omega t - kz)} \quad (3.22)$$

とする。また、ここで

$$\rho_{ba}^{(-\omega)} \equiv \rho_{ba} e^{-i\omega t}, \quad \rho_{ab}^{(\omega)} \equiv \rho_{ab} e^{i\omega t} \quad (3.23)$$

と定義する。ここで、(3.22),(3.23) を (3.20),(3.21) に代入して、 $\Omega + \omega$ が \exp に入っている項を消す回転波近似をすると

$$\frac{\partial \rho_{ab}^{(\omega)}}{\partial t} = -i\Omega \rho_{ab}^{(\omega)} - \gamma \rho_{ab}^{(\omega)} - i \frac{P_{ab} E^{(\omega)} e^{ikz}}{\hbar} (\rho_{aa} - \rho_{bb}) \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial \rho_{ba}^{(-\omega)}}{\partial t} = i\Omega \rho_{ba}^{(-\omega)} - \gamma \rho_{ba}^{(-\omega)} + i \frac{P_{ba} E^{(-\omega)} e^{-ikz}}{\hbar} (\rho_{aa} - \rho_{bb}) \quad (3.25)$$

と、フーリエ成分に対する方程式になる。次に対角成分の運動方程式について考えていく

・対角成分

対角成分の運動方程式は (3.13) より、

$$\frac{\partial \rho_{aa}}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} (-EP_{ab}\rho_{ba} + EP_{ba}\rho_{ab}) \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial \rho_{bb}}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} (-EP_{ba}\rho_{ab} + EP_{ab}\rho_{ba}) \quad (3.27)$$

となる。しかし、励起状態 $|a\rangle$ にある原子は緩和して下の準位 $|b\rangle$ に遷移しようとするので、緩和定数 Γ を現象論的に加える必要がある。他の状態への減衰を考えるとこれは別の緩和定数も考える必要があるがここでは考えない。また、再び (3.22),(3.23) を代入し、回転波近似を実行すると運動方程式は

$$\frac{\partial \rho_{aa}}{\partial t} = -\Gamma \rho_{aa} - \frac{i}{\hbar} (-E^{(\omega)} P_{ab} \rho_{ba}^{(-\omega)} e^{ikz} + E^{(-\omega)} P_{ba} \rho_{ab}^{(\omega)} e^{-ikz}) \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial \rho_{bb}}{\partial t} = \Gamma \rho_{bb} - \frac{i}{\hbar} (-E^{(-\omega)} P_{ba} \rho_{ab}^{(\omega)} e^{-ikz} + E^{(\omega)} P_{ab} \rho_{ba}^{(-\omega)} e^{ikz}) \quad (3.29)$$

と変形できる。この先はこの式を用いる。ここで、(3.28),(3.29) 式の和をとると

$$\frac{\partial(\rho_{aa} + \rho_{bb})}{\partial t} = 0 \quad (3.30)$$

と、 $|a\rangle, |b\rangle$ のどちらかの状態にいる確率は保存されていることがわかる。よって

$$\rho_{aa} + \rho_{bb} = 1 \quad (3.31)$$

である。また、今度は (3.28),(3.29) 式の差をとると、

$$\frac{\partial(\rho_{aa} - \rho_{bb})}{\partial t} = -2\Gamma \rho_{aa} + \frac{2i}{\hbar} (E^{(\omega)} P_{ab} \rho_{ba}^{(-\omega)} e^{ikz} - E^{(-\omega)} P_{ab} \rho_{ab}^{(\omega)} e^{-ikz}) \quad (3.32)$$

となる。

次に定常状態の場合を考える。

定常状態では時間変化は 0 より (3.24),(3.25),(3.32) の左辺を 0 としたものを用いる。

それらと (3.31) を連立させて $\rho_{ab}^{(\omega)} = (\rho_{ba}^{(-\omega)})^*$, $\rho_{aa} - \rho_{bb}$ について解くと

$$\rho_{ab}^{(\omega)} = \frac{(\Omega - \omega + i\gamma) \frac{P_{ab}E^{(\omega)}}{\hbar} e^{ikz}}{(\Omega - \omega)^2 + \gamma^2 + \frac{\gamma}{\Gamma} \left| \frac{2P_{ab}E^{(-\omega)}}{\hbar} \right|^2} \quad (3.33)$$

$$\rho_{aa} - \rho_{bb} = -\frac{(\Omega - \omega)^2 + \gamma^2}{(\Omega - \omega)^2 + \gamma^2 + \frac{\gamma}{\Gamma} \left| \frac{2P_{ab}E^{(-\omega)}}{\hbar} \right|^2} \quad (3.34)$$

となる。これを用いて定常状態における双極子モーメントの集団平均を計算する。原子は共振器の中で互いに区別できず、原子集団の中における 1 原子の状態は密度行列で表された。N 原子による巨視的な双極子モーメントの集団平均は 1 原子に対する双極子モーメントの集団平均を N 倍すれば良い。よって巨視的な双極子モーメントの集団平均、すなわち媒質の分極は

$$\begin{aligned} P_N &= N \operatorname{tr}\{\hat{\rho}P\} \\ &= N \sum_{\alpha=a,b} \langle \alpha | \hat{\rho} P | \alpha \rangle \\ &= N \sum_{\alpha=a,b} \sum_{\beta=a,b} \langle \alpha | \hat{\rho} | \beta \rangle \langle \beta | P | \alpha \rangle \\ &= N(P_{ba}\rho_{ab} + P_{ab}\rho_{ba}) \end{aligned} \quad (3.35)$$

となり、先に述べたように密度行列の非対角成分に比例する。

この式に (3.23),(3.33) を代入して整理していくと

$$\begin{aligned} P_N &= N[P_{ab}\rho_{ba}^{(-\omega)} e^{i\omega t} + P_{ba}\rho_{ab}^{(\omega)} e^{-i\omega t}] \\ &= \frac{N}{\hbar} \left[\frac{(\Omega - \omega - i\gamma) |P_{ab}|^2 E^{(-\omega)} e^{i(\omega t - kz)}}{(\Omega - \omega)^2 + \gamma^2 + \frac{\gamma}{\Gamma} \left| \frac{2P_{ab}E^{(-\omega)}}{\hbar} \right|^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\Omega - \omega + i\gamma) |P_{ab}|^2 E^{(\omega)} e^{-i(\omega t - kz)}}{(\Omega - \omega)^2 + \gamma^2 + \frac{\gamma}{\Gamma} \left| \frac{2P_{ab}E^{(-\omega)}}{\hbar} \right|^2} \right] \end{aligned} \quad (3.36)$$

となる。これを良く見ると、

$$P_N = P_N^{(\omega)} e^{-i(\omega t - kz)} + P_N^{(-\omega)} e^{i(\omega t - kz)} \quad (3.37)$$

という形になっていることがわかる。これより媒質中に電場と同じ周波数で振動する巨視的な双極子の分極が生じることがわかる。また、

$$P_N^{(\omega)} = \varepsilon_0 \chi E^{(\omega)}, \quad P_N^{(-\omega)} = \varepsilon_0 \chi^* E^{(-\omega)} \quad (3.38)$$

とすれば

$$\chi = \frac{(\Omega - \omega + i\gamma)}{(\Omega - \omega)^2 + \gamma^2 + \frac{\gamma}{\Gamma} \left| \frac{2P_{ab}E^{(-\omega)}}{\hbar} \right|^2} \frac{N|P_{ab}|^2}{\varepsilon_0 \hbar} \quad (3.39)$$

であり、 χ は複素感受率である。これをさらに $\chi = \chi' + i\chi''$ と実部と虚部にわけると

$$\begin{aligned} \chi' &= \frac{\Omega - \omega}{(\Omega - \omega)^2 + \gamma^2 + \frac{\gamma}{\Gamma} \left| \frac{2P_{ab}E^{(-\omega)}}{\hbar} \right|^2} \frac{N|P_{ab}|^2}{\varepsilon_0 \hbar} \\ \chi'' &= \frac{\gamma}{(\Omega - \omega)^2 + \gamma^2 + \frac{\gamma}{\Gamma} \left| \frac{2P_{ab}E^{(-\omega)}}{\hbar} \right|^2} \frac{N|P_{ab}|^2}{\varepsilon_0 \hbar} \end{aligned} \quad (3.40)$$

である。

これらの結果を用いて次に半古典的レーザー理論を考える。

3.4 半古典的レーザー理論

半古典的なレーザー理論では電磁場は古典的な電場と磁場で扱うので、電場と磁場に対する方程式としてはレーザー媒質中での Maxwell 方程式を用いる。媒質中での Maxwell 方程式は分極を含んだ場合で

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = 0 \quad (3.41)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} = \mathbf{j} \quad (3.42)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (3.43)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.44)$$

である。ここで、

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M}, \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad (3.45)$$

\mathbf{P} は分極を表し、 ρ は電荷密度、 \mathbf{M} は磁化を表す。ただしここでは電荷密度と磁化は存在しないとして考える。また、平衡状態を考える上では分極の媒質中の位置による変化はほとんどないと考えられるので $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$ とする。また、前節と同じように電波と分極をスカラーで考えて電場は空間的には z にのみ依存するとする。これらのことを用いると Maxwell 方程式から媒質中での波動方程式

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad (3.46)$$

が得られる。この波動方程式の分極 P を電場 E によって前節で求めたように量子力学的に得られた分極と同じとすることで電場に対する自己無撞着的な方程式が得られる。これからその方程式を

求めていく。まず電場 E を共振器中で共振モードにある定在波で考え

$$E(z, t) = [E^{(\omega)} e^{-i(\omega t - kz)} + E^{(-\omega)} e^{i(\omega t - kz)}] \sin(k_m z) \quad (3.47)$$

と前節のようにフーリエ分解する。ただし注意として共振モードの周波数 $\omega_m = ck_m$ と発振周波数 ω は異なる。また、 P も前節で見たように電場と同じ周波数 ω で振動するはずなので同様にフーリエ分解して

$$P(z, t) = [P^{(\omega)} e^{-i(\omega t - kz)} + P^{(-\omega)} e^{i(\omega t - kz)}] \sin(k_m z) \quad (3.48)$$

とする。(3.47),(3.48) を波動方程式に代入する。ここで $P^{(\omega)}, P^{(-\omega)}$ は時間的にゆっくりと変化するとして $\frac{\partial^2 E^{(\omega)}}{\partial t^2}, \frac{1}{\omega} \frac{\partial E^{(\omega)}}{\partial t}, \frac{\partial^2 P^{(\omega)}}{\partial t^2}, \frac{\partial P^{(\omega)}}{\partial t}$ の項は落とす。

また、 $\omega_m^2 \approx \omega_m \omega$ と近似して

$$\frac{dE^{(\omega)}}{dt} = i[(\omega_m - \omega) - iC]E^{(\omega)} = i\frac{\omega}{2\varepsilon_0}P^{(\omega)} \quad (3.49)$$

という方程式が得られる。ただし $C = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ であり電場の損失を表す。この方程式がレーザー電場の満たすべき半古典的な方程式となる。

ここでさらに、前節と同じように $P^{(\omega)} = \varepsilon_0 \chi E^{(\omega)} = \varepsilon_0 (\chi' + i\chi'')E^{(\omega)}$ として方程式に代入する。また、

$$E^{(\omega)} = |E^{(\omega)}| e^{i\phi}$$

として方程式を実部と虚部にわけると

$$\frac{d|E^{(\omega)}|}{dt} + (C + \frac{\omega}{2}\chi'')|E^{(\omega)}| = 0 \quad (3.50)$$

$$\frac{d\phi}{dt} + \omega_m - \omega - \frac{\omega}{2}\chi' = 0 \quad (3.51)$$

の2式が得られる。この2式のうち(3.50)は電場の強度を決め、(3.51)は発振周波数を決める。ここで、特に定常状態の場合について考えていく。定常状態では時間微分は0になるので、上の2式は

$$C + \frac{\omega}{2}\chi'' = 0 \quad (3.52)$$

$$\omega + \frac{\omega}{2}\chi' = \omega_m \quad (3.53)$$

となる。この2式から定常状態における強度と発振周波数を求める。

3.5 強度と発振周波数の決定

定常状態の強度と発振周波数は(3.52),(3.53)から求めることができるが、そのためには χ' と χ'' について考える必要がある。 χ' と χ'' は3.2節と同じ方法で求めることができるが、ここではより一般

的な場合を考え ρ_{aa}, ρ_{bb} 定常状態で $\rho_{aa,0}, \rho_{bb,0}$ という分布に落ち着くとする。このとき (3.28),(3.29) の緩和項はそれぞれ、

$$-\Gamma(\rho_{aa} - \rho_{aa,0}), \quad -\Gamma(\rho_{bb} - \rho_{bb,0}) \quad (3.54)$$

に変わる。また、電場も共振器中の場合を考えて $E^{(\omega)}e^{\pm kz} \rightarrow E^{(\omega)} \sin(k_m z)$ と変える。このとき (3.28),(3.29) 式はそれぞれ

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{aa}}{\partial t} &= -\Gamma(\rho_{aa} - \rho_{aa,0}) \\ &\quad - \frac{i}{\hbar} (-E^{(\omega)} P_{ab} \rho_{ba}^{(-\omega)} e^{ikz} + E^{(-\omega)} P_{ba} \rho_{ab}^{(\omega)} e^{-ikz}) \sin(k_m z) \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{bb}}{\partial t} &= -\Gamma(\rho_{bb} - \rho_{bb,0}) \\ &\quad - \frac{i}{\hbar} (-E^{(-\omega)} P_{ba} \rho_{ab}^{(\omega)} e^{-ikz} + E^{(\omega)} P_{ab} \rho_{ba}^{(-\omega)} e^{ikz}) \sin(k_m z) \end{aligned} \quad (3.56)$$

となる。この2式の差をとれば

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho_{aa} - \rho_{bb})}{\partial t} &= -\Gamma(\rho_{aa} - \rho_{bb}) - \Gamma(\rho_{aa} - \rho_{bb})_0 \\ &\quad - \frac{2i}{\hbar} (-E^{(\omega)} P_{ab} \rho_{ba}^{(-\omega)} e^{ikz} + E^{(-\omega)} P_{ba} \rho_{ab}^{(\omega)} e^{-ikz}) \sin(k_m z) \end{aligned} \quad (3.57)$$

となる。この式と (3.24),(3.25) 式を定常状態において (時間微分を0とする) 連立させて解くと、密度行列の非対角要素は

$$\rho_{ab}^{(\omega)} = \frac{-(\Omega - \omega + i\gamma) \frac{P_{ab} E^{(\omega)}}{\hbar} \sin(k_m z)}{(\Omega - \omega)^2 + \gamma^2 + \frac{\gamma}{\Gamma} \left| \frac{2P_{ab} E^{(-\omega)}}{\hbar} \right|^2 \sin^2(k_m z)} (\rho_{aa} - \rho_{bb})_0 \quad (3.58)$$

となる。これは分母に $\sin^2(k_m z)$ があるので、3.2節のようにこれを (3.35) に代入するだけでは $\sin(k_m z)$ のフーリエ成分 $P^{(\omega)}$ は求められない。よって次の計算を行う必要がある。

$$\begin{aligned} &P^{(\omega)} e^{-i\omega t} \int_0^L \sin^2(k_m z) dz \\ &= N \int_0^L dz \frac{-(\Omega - \omega + i\gamma) \frac{|P_{ab}|^2 E^{(\omega)} e^{-i\omega t}}{\hbar} \sin^2(k_m z)}{(\Omega - \omega)^2 + \gamma^2 + \frac{\gamma}{\Gamma} \left| \frac{2P_{ab} E^{(-\omega)}}{\hbar} \right|^2 \sin^2(k_m z)} (\rho_{aa} - \rho_{bb})_0 \end{aligned} \quad (3.59)$$

このように (3.58) を (3.35) に代入して、両辺に $\sin(k_m z)$ をかけて積分すれば $\sin(k_m z)$ に対するフーリエ成分 $P^{(\omega)}$ が求められる。

分母の飽和項 $\frac{\gamma}{\Gamma} \left| \frac{2P_{ab} E^{(-\omega)}}{\hbar} \right|^2 \sin^2(k_m z)$ が γ^2 より十分小さいときにはテイラー展開を行って $\sin^4(k_m z)$

間での近似で積分を行うことができる。
積分を実行すると (3.59) の右辺は

$$\text{右辺} = N \frac{-(\Omega - \omega + i\gamma) \frac{|P_{ab}|^2 E^{(\omega)}}{\hbar} e^{-i\omega t} \frac{L}{2}}{(\Omega - \omega)^2 + \gamma^2 + \frac{3\gamma}{4\Gamma} \left| \frac{2P_{ab} E^{(-\omega)}}{\hbar} \right|^2} (\rho_{aa} - \rho_{bb})_0 \quad (3.60)$$

となるので、これより $P^{(\omega)}$ は

$$P^{(\omega)} = N \frac{-(\Omega - \omega + i\gamma) \frac{P_{ab} E^{(\omega)}}{\hbar}}{(\Omega - \omega)^2 + \gamma^2 + \frac{3\gamma}{4\Gamma} \left| \frac{2P_{ab} E^{(-\omega)}}{\hbar} \right|^2} (\rho_{aa} - \rho_{bb})_0 \quad (3.61)$$

と求められる。よって、3.2 節と同様に χ', χ'' を求めることができ、それぞれ

$$\chi' = N \frac{-(\Omega - \omega)}{(\Omega - \omega)^2 + \gamma^2 + \frac{3\gamma}{4\Gamma} \left| \frac{2P_{ab} E^{(-\omega)}}{\hbar} \right|^2} \frac{|P_{ab}|^2}{\varepsilon_0 \hbar} (\rho_{aa} - \rho_{bb})_0 \quad (3.62)$$

$$\chi'' = N \frac{-\gamma}{(\Omega - \omega)^2 + \gamma^2 + \frac{3\gamma}{4\Gamma} \left| \frac{2P_{ab} E^{(-\omega)}}{\hbar} \right|^2} \frac{|P_{ab}|^2}{\varepsilon_0 \hbar} (\rho_{aa} - \rho_{bb})_0 \quad (3.63)$$

で与えられる。

これで定常状態における χ' と χ'' が求められたので、強度と発振周波数を考えていく。

(3.52) 式の左辺に (3.63) を代入したときこの式は $|E^{(\omega)}|$ によらず成り立つはずなので $|E^{(\omega)}| = 0$ の発振のしきいのところでも成り立つ。そのときの反転分布を $\Delta N_{th} = N(\rho_{aa} - \rho_{bb})_{th}$ とすると。

$$C = \frac{\omega}{2} \frac{\gamma}{(\Omega - \omega)^2 + \gamma^2} \frac{|P_{ab}|^2}{\varepsilon_0} \hbar \Delta N_{th} \quad (3.64)$$

となるので、発振に必要な反転分布は

$$\Delta N_{th} = \frac{(\Omega - \omega)^2 + \gamma^2}{\gamma} \frac{2C\varepsilon\hbar}{\omega |P_{ba}|^2} \quad (3.65)$$

である。また、定常状態で電場が強さ $E^{(\omega)}$ で発振しているときの反転分布を $\Delta N_0 = N(\rho_{aa} - \rho_{bb})_0$ として、

$$C = \frac{\omega}{2} \frac{\gamma}{(\Omega - \omega)^2 + \gamma^2 + \frac{3\gamma}{4\Gamma} \left| \frac{2P_{ab} E^{(\omega)}}{\hbar} \right|^2} \frac{|P_{ab}|^2}{\varepsilon\hbar} \Delta N_0 \quad (3.66)$$

となる。(3.65) と (3.66) よりレーザー電場の強度は

$$|E^{(\omega)}|^2 = \frac{\Gamma\hbar\omega}{6C\varepsilon} (\Delta N_0 - \Delta N_{th}) \quad (3.67)$$

と求められる。これより電場の強度はそのときの反転分布としきいの反転分布の差に比例していることがわかる。つまり反転分布がしきい値より多い分だけ強度が強くなる。また、緩和定数 Γ と損失を表す定数 C のの比とも比例している。

次に発振周波数について見ていく。

(3.62),(3.63) 式の比を取ると、定常状態では

$$\frac{\chi'}{\chi''} = \frac{\Omega - \omega}{\gamma} \quad (3.68)$$

とわかる。また、これを (3.52) 式と合わせると

$$\chi' = -(\Omega - \omega) \frac{2C}{\gamma\omega} \quad (3.69)$$

となる。さらにこれを (3.53) 式と合わせると、

$$\omega = \frac{\gamma\omega_m + C\Omega}{\gamma + C} \quad (3.70)$$

となる。この式から発振周波数が決まる。

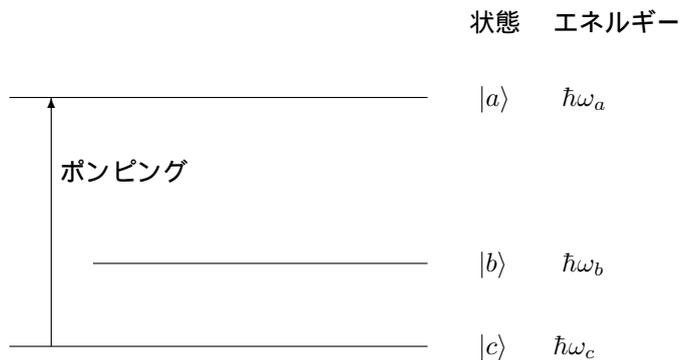
4 完全に量子化されたレーザー理論と レーザー光の特性

ここでは電磁場と原子の両方を量子化した理論を考えていく。電磁場を量子化することで半古典的理論では現れなかった光子数分布を扱うことができる。この光子数分布より発振のしきいの前後での光子数の振る舞いを知ることができ、レーザーの発振の様子を詳しく見ていくことができる。また、発振のしきいを考えることにより、レーザー発振に必要なポンピングの強さが評価でき、それが現実的なものであることがわかるだろう。ただし、ここでの議論では光子数などのオーダーを見るだけにとどめ、レーザー発振の媒質による差などの詳細は考えない。また、半古典的な場合と同様レーザー光が1モードだけで発振されると仮定する。

考えるモデルとしては、3準位系のモデルを選ぶ。3準位系を選ぶのは、2準位系では出てこないレーザー遷移に関わる2準位以外の準位への遷移による緩和効果を考えたいからである。それによって自然放射による緩和がどのように理論に入ってくるかがわかり、より一般的なレーザー発振の議論ができる。

4.1 モデル

ここでは次のようなモデルを考える。

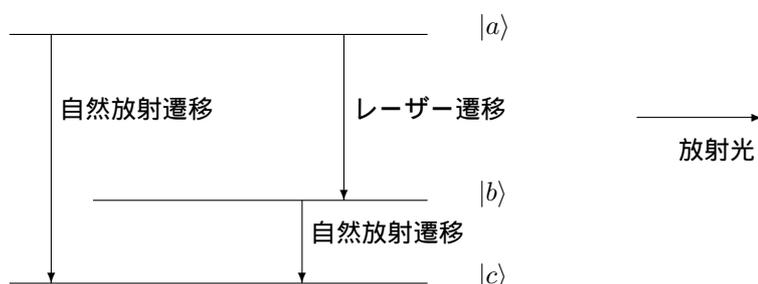


このような3準位系の原子の集団によってレーザーが発振されるとする。レーザー光の発振に寄与するのは $|a\rangle, |b\rangle$ 間の遷移による放射である。 $|a\rangle, |b\rangle$ から $|c\rangle$ への自然放射遷移は励起状態の緩和に寄与する。放射遷移以外では $|b\rangle$ から $|a\rangle$ への誘導吸収がレーザー光の損失を与える。計算においては放射遷移と吸収遷移は別々に扱い、最後にそれらの効果を合わせて全体での光子数のふるまいを考えていく。

放射遷移を考える際にはレーザー媒質となる原子の集団の一部が時刻 t で基底状態 $|c\rangle$ から励起状態 $|a\rangle$ にポンピングされるとし、その励起された原子の集団の遷移を考えていく。ただし、ポンピングの詳細はここでは考えずにポンピングの強さをパラメータとして扱う。ポンピングの強さを表すパラメータとして時刻 t から原子の寿命より十分長い時間 τ だけ経過した時間 $t + \tau$ までの間に電場と相互作用する $|a\rangle$ 状態の原子の個数 r_a を導入する。また、共振器などの状況は半古典的な場合と同じとする。

始め励起状態 $|a\rangle$ にあった原子は時刻 t から $t + \tau$ の間に電場と相互作用して次のような遷移を起

こす。



すでに述べたように、 $|a\rangle$ から $|b\rangle$ への遷移がレーザー遷移で、共振器内の共振モードの電場による相互作用で遷移する。この準位間の誘導放射によって共振モードの光が増幅されレーザー光として発振する。ここではレーザー遷移を誘導する共振モードは1モードとして考えを進めていく。つまり、1モード発振の場合を考えていくわけである。

残りの遷移は自然放射遷移で原子状態の緩和に寄与する。

各遷移における固有周波数、つまり準位間のエネルギー差は異なるので相互作用する電場のモードも異なるはずである。もちろん固有周波数がかなり近いと同じモードと相互作用すると考えられるがここではある程度固有周波数が違うとして、各遷移過程は他の過程とは独立に考えることができるとする。

また、レーザー媒質となる原子の集団のなかで原子は一樣で互いに位置等で区別できないとする。その仮定の下で、原子は集団の中での1原子に注目して状態の変化を考察し、最後に集団全体の寄与による光子数分布の時間変化を求める。

4.2 方程式の導出

前節で示したモデルを用いてレーザー光の光子数分布に対する運動方程式を求める。ここでも前章と同じように密度行列を用いて原子の集団と電場による系の時間変化を考えていく。まずはレーザー媒質である原子の集団の中の1原子に注目して考える。時刻 t でポンピングされた原子も別の状態にいた原子も電場との相互作用ですぐに重ね合わせ状態

$$|\psi^{(i)}(t)\rangle = \sum_n \left[\{c_{an\{0\}}^{(i)}(t)|a\rangle + c_{bn\{0\}}^{(i)}(t)|b\rangle\} \{|0\rangle\} + \sum_r \{c_{an\{1_r\}}^{(i)}|c\rangle\} \{|1_r\rangle\} \right] |n\rangle \quad (4.1)$$

に移ると考えられる。ここで $|n\rangle$ はレーザー周波数の光子数状態、つまりレーザー光の光子数状態。 $\{|1_r\rangle\}, \{|0\rangle\}$ はレーザー光以外の輻射場の光子数状態で、ここでは初期状態では輻射場の光子数は0で考え、光子数1と0の間で移り変わるとしている。すでに述べたようにレーザー遷移のモードは1モードだけと考え、輻射場はあらゆるモードを考えている。また、1は半古典的な場合と同じように分布に対する統計的な知識を表すラベルである。集団のなかの1原子の完全な量子力学的状態は到底わかるものではないのでこのようなラベルをつけておく必要がある。しかし、半古典的な場合と同様、詳細は考えない。

この系を表す密度演算子 $\hat{\rho}(t)$ は相互作用表示で

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}(t) &= \sum_l P_l |\psi^{(l)}(t)\rangle \langle \psi^{(l)}(t)| \\
&= \sum_{n,m} \left[\{\rho_{an\{0\},am\{0\}} |a\rangle \langle a| \rho_{bn\{0\},bm\{0\}} |b\rangle \langle b|\} \otimes |\{0\}\rangle \langle \{0\}| \right. \\
&\quad \left. + \sum_r \{\rho_{cn\{1_r\},cm\{1_r\}} |c\rangle \langle c|\} \otimes |\{1_r\}\rangle \langle \{1_r\}| \right] \otimes |n\rangle \langle n| \\
&\quad + \text{原子または自由空間の電場の非対角項}
\end{aligned} \tag{4.2}$$

とする。密度行列の要素は

$$\rho_{an\{0\},am\{0\}}(t) = \sum_l P_l c_{an\{0\}}^{(l)}(t) c_{am\{0\}}^{(l)*}(t) \tag{4.3}$$

$$\rho_{bn\{0\},bm\{0\}}(t) = \sum_l P_l c_{bn\{0\}}^{(l)}(t) c_{bm\{0\}}^{(l)*}(t) \tag{4.4}$$

$$\rho_{cn\{1_r\},cm\{1_r\}}(t) = \sum_l P_l c_{cn\{1_r\}}^{(l)}(t) c_{cm\{1_r\}}^{(l)*}(t) \tag{4.5}$$

である。ここで P_l は半古典のときと同様に $|\psi^{(l)}\rangle$ の状態を取る統計的な確率であり、時間や空間には依存しないとして詳細は追わない。

レーザー光の光子数分布を知るためにはレーザー場の簡約密度行列 $\rho_{nm}(t)$ を求める必要がある。 $\rho_{nm}(t)$ は原子と自由空間の電場について対角和をとることで得られ、

$$\rho_{nm}(t) = \rho_{an\{0\},am\{0\}}(t) + \rho_{bn\{0\},bm\{0\}}(t) + \rho_{cn,cm}(t) \tag{4.6}$$

である。ただし、

$$\rho_{cn,cm}(t) = \sum_r \rho_{cn\{1_r\},cm\{1_r\}}(t) \tag{4.7}$$

である。

次に、準位 $|a\rangle \rightarrow |c\rangle$ および $|b\rangle \rightarrow |c\rangle$ への緩和は $|a\rangle \rightarrow |b\rangle$ へのレーザー遷移とは独立に起きるものとした考えの下で、放射遷移の場合に対する $c_{an\{0\}}^{(l)}, c_{bn\{0\}}^{(l)}$ の運動方程式を考える。

$c_{an\{0\}}^{(l)}, c_{bn\{0\}}^{(l)}$ の運動方程式を考える上でレーザー遷移に対する相互作用ハミルトニアンは (2.91) であり

$$H_I^{(I)} = \hbar g [a \sigma^\dagger e^{-i(\Omega-\omega)t} + a^\dagger \sigma e^{i(\Omega-\omega)t}].$$

Ω はレーザー遷移に寄与する共振モードの周波数で ω は準位間のエネルギー差に対応した周波数である。この相互作用による2準位の確率振幅に対する運動方程式は (2.94), (2.95) だった。これとは別に自然放射の効果を考える必要がある。自然放射に対する相互作用ハミルトニアンは (2.109) で与えられた、全モードを考慮に入れた

$$H_I^{(I)} = \hbar \sum_s g_s \{ \sigma a_s^\dagger \exp[i(\Omega_s - \omega)t] + \sigma^\dagger a_s \exp[-i(\Omega_s - \omega)t] \}$$

であり、共振器中で自然放射に対する運動方程式は 2.6 で一般的にやったように (2.125) で与えられる。これらの 2 種類の遷移の間に相関はないと考えているので全体の運動方程式はこれらの寄与を単に合わせた。

$$\dot{c}_{an\{0\}}^{(l)}(t) = -\frac{1}{2}\gamma_a c_{an\{0\}}^{(l)}(t) - ig\sqrt{n+1} \exp[i(\Omega - \omega)t] c_{bn+1\{0\}}^{(l)}(t) \quad (4.8)$$

$$\dot{c}_{bn+1\{0\}}^{(l)}(t) = -\frac{1}{2}\gamma_b c_{bn+1\{0\}}^{(l)}(t) - ig\sqrt{n+1} \exp[-i(\Omega - \omega)t] c_{an\{0\}}^{(l)}(t) \quad (4.9)$$

となる。ここで γ_a, γ_b はそれぞれ $c_{an\{0\}}^{(l)}, c_{bn\{0\}}^{(l)}$ に対する緩和定数であり後で求めるものと同じである。

これらの式を見ればわかるように密度行列の行列要素 (4.3), (4.4) はそれぞれ $\frac{1}{\gamma_a}, \frac{1}{\gamma_b}$ の時定数で減衰することがわかる。したがって時刻 t で励起された原子は原子の寿命より十分時間のたった時刻 $t + \tau$ において

$$\rho_{nm}^{(e)}(t + \tau) \approx \rho_{cn,cm}(t + \tau) \quad (4.10)$$

となると考えられる。ただし添え字の (e) はこれが放射遷移により変化したものであることを表す。そこで次に $\rho_{cn,cm}(t)$ に対する運動方程式を考える。 $\rho_{cn,cm}(t)$ の時間変化は自然放射による寄与のみ起こるのでこの場合は自然放射のみ考えればよい。また、 $|a\rangle \rightarrow |c\rangle$ と $|b\rangle \rightarrow |c\rangle$ の遷移に対する固有周波数は十分異なっているとして 2 つの自然放射遷移を独立に考えていく。

まず、 $|a\rangle \rightarrow |c\rangle$ の遷移による寄与を考える。このときの遷移に対する固有周波数を ω_{ac} として $c_{cn\{1,r\}}^{(l)}(t)$ の運動方程式は

$$\dot{c}_{cn\{1,r\}}^{(l)}(t) = -ig_r^{(ac)} c_{an\{0\}} \exp[i(\Omega_r - \omega_{ac})t] \quad (4.11)$$

で与えられる。よって、

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{cn,cm}^{(ac)}(t) &= \sum_l P_l \sum_r [\dot{c}_{cn\{1,r\}}^{(l)} c_{cm\{1,r\}}^{(l)*} + c_{cn\{1,r\}}^{(l)} \dot{c}_{cm\{1,r\}}^{(l)*}] \\ &= -i \sum_l P_l \sum_r g_r^{(ac)} c_{an\{0\}} c_{cm\{1,r\}}^{(l)*} \exp[i(\Omega_r - \omega_{ac})t] \\ &\quad + C.C \text{ and } \{n \leftrightarrow m\} \text{ の項} \\ &= -i \sum_r g_r^{(ac)} \exp[i(\Omega_r - \omega_{ac})t] \rho_{an\{0\}cm\{1,r\}} \\ &\quad + C.C \text{ and } \{n \leftrightarrow m\} \text{ の項} \end{aligned} \quad (4.12)$$

となる。ここで C.C は複素共役を表す。 $g_r^{(ac)}$ は $|a\rangle \rightarrow |c\rangle$ の自然放射遷移に対応した定数 g であることを表す。

次に $\rho_{an\{0\},cm\{1,r\}}$ について考えていく。 $\rho_{an\{0\},cm\{1,r\}}$ の時間微分は

$$\dot{\rho}_{an\{0\},cm\{1,r\}}(t) = \sum_l P_l [\dot{c}_{an\{0\}}^{(l)} c_{cm\{1,r\}}^{(l)*} + c_{an\{0\}}^{(l)} \dot{c}_{cm\{1,r\}}^{(l)*}] \quad (4.13)$$

となる。ここで今は自然放射のみを考えているので $\dot{c}_{an\{0\}}^{(l)}$ は

$$\dot{c}_{an\{0\}}^{(l)}(t) = -i \sum_s g_s^{(ac)} \exp[-i(\Omega_s - \omega_{ac})t] c_{cn\{1s\}}^{(l)} \quad (4.14)$$

となる。これと (4.11) を (4.13) に代入して、

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{an\{0\},cm\{1r\}}(t) &= \sum_l P_l \left\{ -i \sum_s g_s^{(ac)} \exp[-i(\Omega_s - \omega_{ac})t] c_{cn\{1s\}}^{(l)} c_{cm\{1r\}}^{(l)*} \right. \\ &\quad \left. + i g_r^{(ac)} \exp[-i(\Omega_r - \omega_{ac})t] c_{an\{0\}}^{(l)} c_{am\{0\}}^{(l)} \right\} \end{aligned} \quad (4.15)$$

となる。ここで $|C_{cm\{1r\}}|^2$ は c 状態で m 個のレーザー光子状態で、かつ輻射場のモードの r 番目に 1 光子がある状態に対する確率である。輻射場のモードが無数にあることを考えると、 $|C_{cm\{1r\}}| \ll 1$ と考えられるので、

$$\dot{\rho}_{an\{0\},cm\{1r\}}(t) \approx i g_r^{(ac)} \exp[-i(\Omega_r - \omega_{ac})t] \rho_{an\{0\},am\{0\}}^{(e)} \quad (4.16)$$

と近似できる。この式を形式的に積分して、

$$\begin{aligned} \rho_{an\{0\},cm\{1r\}}(t) &= i g_r^{(ac)} \exp[-i(\Omega_r - \omega_{ac})t] \\ &\quad \times \int_0^t dt' \exp[i(\Omega_r - \omega_{ac})(t - t')] \rho_{an\{0\},am\{0\}}^{(e)}(t') \end{aligned} \quad (4.17)$$

となる。

ここで (4.17) を (4.12) に代入して

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{cn,cm}^{(ac)}(t) &= \sum_r g_r^{(ac)2} \int_0^t dt' \exp[i(\Omega_r - \omega_{ac})(t - t')] \rho_{an\{0\},am\{0\}}^{(e)} \\ &\quad + C.C \text{ and } \{n \leftrightarrow m\} \end{aligned} \quad (4.18)$$

が得られる。

さらに 2.6 節で行ったように周波数の連続極限をとって (2.121),(2.122) のようにする。

また、そこでの議論と同じ理由から $D(\Omega), g^{(ac)}(\Omega)$ を $D(\omega_{ac}), g^{(ac)}(\omega_{ac})$ として積分の外に出せば

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{cn,cm}^{(ac)}(t) &= g^{(ac)2}(\omega_{ac}) D(\omega_{ac}) \int_0^\infty \int_0^t dt' \exp[i(\Omega - \omega_{ac})(t - t')] \rho_{an\{0\},am\{0\}}^{(e)} \\ &\quad + C.C \text{ and } \{n \leftrightarrow m\} \end{aligned} \quad (4.19)$$

となる。ここで Ω の積分に対しては (2.124) を用いやはり主値の部分を見捨て、時間積分を実行すると

$$\dot{\rho}_{cn,cm}^{(ac)}(t) = \gamma_a \rho_{an\{0\},am\{0\}}^{(e)} \quad (4.20)$$

$$\gamma_a = \pi (g^{(ac)})^2 (\omega_{ac}) D(\omega_{ac}) \quad (4.21)$$

という結果が得られる。 $|b\rangle \rightarrow |c\rangle$ の遷移の場合もまったく同様の議論が成り立ち、遷移の固有周波数を ω_{bc} とすると

$$\dot{\rho}_{cn,cm}^{(bc)}(t) = \gamma_a \rho_{an\{0\},am\{0\}}^{(e)} \quad (4.22)$$

$$\gamma_a = \pi (g^{(bc)})^2 (\omega_{bc}) D(\omega_{bc}) \quad (4.23)$$

したがって、 $\rho_{cn,cm}$ の時間変化 $\dot{\rho}_{cn,cm} = \dot{\rho}_{cn,cm}^{(ac)} + \dot{\rho}_{cn,cm}^{(bc)}$ は

$$\dot{\rho}_{cn,cm}(t) = \gamma_a \rho_{an\{0\},am\{0\}}^{(e)}(t) + \gamma_b \rho_{bn\{0\},bm\{0\}}^{(e)}(t) \quad (4.24)$$

で与えられる。この式は $|a\rangle$ 状態、 $|b\rangle$ 状態からの自然放出全体の寄与による緩和によって $|c\rangle$ 状態にいる確率が増すことを表しているのもっともらしい。この過程はレーザー遷移とは独立に考えたが共鳴周波数が十分異なるとしたので問題ないと考えられる。この結果と (4.10) より、放射遷移による変化に対する時刻 $t + \tau$ での光子数に対する密度行列は

$$\rho_{nm}^{(e)}(t + \tau) = \int_0^\tau d\tau' [\gamma_a \rho_{an\{0\},am\{0\}}^{(e)}(t + \tau') + \gamma_b \rho_{bn\{0\},bm\{0\}}^{(e)}(t + \tau')] \quad (4.25)$$

となる。添え字の (e) はこれが放射遷移により変化したものであることを示す。

後は $\rho_{an\{0\},am\{0\}}^{(e)}$ と $\rho_{bn\{0\},bm\{0\}}^{(e)}$ を考えればよい。

そこで、 $\rho_{an\{0\},am\{0\}}^{(e)}$ および $\rho_{bn\{0\},bm\{0\}}^{(e)}$ を考えていく。今回はオーダーだけ見積もりたいので、ここからは簡単のため $\gamma_a = \gamma_b = \gamma$ とし、さらに共鳴状態 $\Omega = \omega$ の場合を考える。 γ は準位間のエネルギー差と準位間ごとの双極子の大きさに依存するが、ここではそれらが γ のオーダーを変えるほどの違いはないとする。このとき (4.8),(4.9) は

$$\dot{c}_{an\{0\}}^{(l)}(t) = -\frac{1}{2}\gamma c_{an\{0\}}^{(l)}(t) - ig\sqrt{n+1}c_{bn+1\{0\}}^{(l)}(t) \quad (4.26)$$

$$\dot{c}_{bn+1\{0\}}^{(l)}(t) = -\frac{1}{2}\gamma c_{bn+1\{0\}}^{(l)}(t) - ig\sqrt{n+1}c_{an\{0\}}^{(l)}(t) \quad (4.27)$$

始め状態が $|a\rangle$ にあったので初期条件を

$$c_{an\{0\}}^{(l)}(t) = c_n^{(l)}(t), \quad c_{an+1\{0\}}(t) = 0 \quad (4.28)$$

とすると、(4.26),(4.27) を厳密に解くことができ時刻 $t + \tau'$ において

$$c_{an\{0\}}^{(l)}(t + \tau') = c_n^{(l)}(t) e^{-\frac{1}{2}\gamma\tau'} \cos(g\sqrt{n+1}\tau') \quad (4.29)$$

$$c_{bn+1\{0\}}^{(l)}(t + \tau') = -iC_n^{(l)}(t) e^{-\frac{1}{2}\gamma\tau'} \sin(g\sqrt{n+1}\tau') \quad (4.30)$$

となる。ゆえに $\rho_{an\{0\},am\{0\}}^{(e)}$ および $\rho_{bn\{0\},bm\{0\}}^{(e)}$ は

$$\rho_{an,am}^{(e)}(t + \tau') = \rho_{nm}^{(e)}(t) e^{-\gamma\tau'} \cos(g\sqrt{n+1}\tau') \cos(g\sqrt{n+1}\tau') \quad (4.31)$$

$$\rho_{bn,bm}^{(e)}(t + \tau') = \rho_{n-1m-1}^{(e)}(t) e^{-\gamma\tau'} \sin(g\sqrt{n}\tau') \sin(g\sqrt{m}\tau') \quad (4.32)$$

となる。ただし

$$\rho_{nm}(t) = \sum_l P_l c_n^{(l)} c_m^{(l)} \quad (4.33)$$

である。これより $\rho_{nm}^e(t + \tau)$ を求めることができる。

(4.31) と (4.32) を $\gamma_a = \gamma_b = \gamma$ とした (4.25) に代入して

$$\begin{aligned} \rho_{nm}^{(e)}(t + \tau) &= \rho_{nm}(t) \int_0^\tau d\tau' \gamma e^{-\gamma\tau'} \cos(g\sqrt{n+1}\tau') \cos(g\sqrt{m+1}\tau') \\ &\quad + \rho_{n-1m-1}(t) \int_0^\tau d\tau' \gamma e^{-\gamma\tau'} \sin(g\sqrt{n}\tau') \sin(g\sqrt{m}\tau') \end{aligned} \quad (4.34)$$

が得られる。

次に $t \sim t + \tau$ 間での考えている系全体での ρ_{nm} の放射遷移による変化を表す粗い時間微分 $\dot{\rho}_{nm}^e(t)$ を求める。つまり原子の集団によるレーザー場への寄与を考えるわけである。原子の集団と電磁場による系全体の変化なので 1 原子あたりの変化に $t \sim t + \tau$ 間に電場と相互作用する $|a\rangle$ 状態の原子数 r_a をかけて、 $\dot{\rho}_{nm}^e$ は

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{nm}^{(e)}(t) &= r_a [\rho_{nm}(t + \tau) - \rho_{nm}(t)] \\ &= -r_a \rho_{nm}(t) \left[1 - \int_0^\tau d\tau' \gamma e^{-\gamma\tau'} \cos(g\sqrt{n+1}\tau') \cos(g\sqrt{m+1}\tau') \right] \\ &\quad + r_a \rho_{n-1m-1}(t) \int_0^\tau d\tau' \gamma e^{-\gamma\tau'} \sin(g\sqrt{n}\tau') \sin(g\sqrt{m}\tau') \end{aligned} \quad (4.35)$$

と求めることができる。特に n 光子状態である確率をあらわす対角成分 ρ_{nn} の放射遷移による粗い時間変化は

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{nn}^{(e)}(t) &= -r_a \rho_{nn}(t) \left[1 - \int_0^\tau d\tau' \gamma e^{-\gamma\tau'} \cos^2(g\sqrt{n+1}\tau') \right] \\ &\quad + r_a \rho_{n-1n-1}(t) \int_0^\tau d\tau' \gamma e^{-\gamma\tau'} \sin^2(g\sqrt{n}\tau') \end{aligned} \quad (4.36)$$

となる。この式は次のように解釈できる。

$\dot{\rho}_{nn}^{(e)}(t) = -(t \sim t + \tau$ の間に相互作用する $|a\rangle$ 状態の原子数) \times (n 光子の存在確率) \times (n 光子の場による誘導放出の平均確率) $+ (t \sim t + \tau$ の間に相互作用する $|a\rangle$ 状態の原子数) \times ($n - 1$ 光子の存在確率) \times ($n - 1$ 光子の場による誘導放出の平均確率)

次に (4.35) の時間積分を考える。積分をうまく実行するために積分範囲の上限を ∞ に変える。この操作をしても、もともと τ は原子の寿命よりは十分長い時間としていたので結果は変わらないはずである。すると解くべき積分は

$$\int_0^\infty d\tau' \gamma e^{-\gamma\tau'} \cos(g\sqrt{n+1}\tau') \cos(g\sqrt{m+1}\tau') \quad (4.37)$$

$$\int_0^\infty d\tau' \gamma e^{-\gamma\tau'} \sin(g\sqrt{n}\tau') \sin(g\sqrt{m}\tau') \quad (4.38)$$

である。この積分は実行することができて、積分を解くと

$$(4.37) = \frac{1 + 2\left(\frac{g}{\gamma}\right)^2(n+1+m+1)}{1 + 2\left(\frac{g}{\gamma}\right)^2(n+1+m+1) + \left(\frac{g}{\gamma}\right)^4(n-m)^2} \quad (4.39)$$

$$(4.38) = \frac{2\left(\frac{g}{\gamma}\right)^2\sqrt{(n+1)(m+1)}}{1 + 2\left(\frac{g}{\gamma}\right)^2(n+1+m+1) + \left(\frac{g}{\gamma}\right)^4(n-m)^2} \quad (4.40)$$

が得られる。よって (4.35) は

$$\dot{\rho}_{nm}^{(e)}(t) = -\left(\frac{N'_{nm}A}{1 + N_{nm}\frac{B}{A}}\right)\rho_{nm}(t) + \left(\frac{\sqrt{nm}A}{1 + N_{n-1m-1}\frac{B}{A}}\right)\rho_{n-1m-1}(t) \quad (4.41)$$

とまとめることができる。ここで各係数は

$$A = 2r_a\left(\frac{g}{\gamma}\right)^2, \quad B = 4\left(\frac{g}{\gamma}\right)^2 A \quad (4.42)$$

$$N'_{nm} = \frac{1}{2}(n+1+m+1) + \frac{1}{8}\frac{(n-m)^2 B}{A} \quad (4.43)$$

$$N_{nm} = \frac{1}{2}(n+1+m+1) + \frac{1}{16}\frac{(n-m)^2 B}{A} \quad (4.44)$$

である。

(4.41) 式は誘導放射と自然放射の寄与による密度行列要素 ρ_{nm} の粗い時間変化を表した式だが、実際にはこれに加えて $|b\rangle \rightarrow |a\rangle$ の遷移による誘導吸収による光子の損失がある。よってその効果を (4.41) 式に加える必要がある。

そこで、次に誘導吸収を考えていく。誘導吸収の場合は $|b\rangle \rightarrow |a\rangle$ の 2 準位間のレーザー電場による遷移を考えればよい。つまり、始め $|b\rangle$ にあった原子がレーザー光子を吸収して $|a\rangle$ に遷移する状況を考える。よって確率振幅の運動方程式は (4.26), (4.27) で自然放射による緩和項を除いた

$$\dot{c}_{an\{0\}}^{(l)}(t) = -ig\sqrt{n+1}c_{bn+1\{0\}}^{(l)}(t) \quad (4.45)$$

$$\dot{c}_{bn+1\{0\}}^{(l)}(t) = -ig\sqrt{n+1}c_{an\{0\}}^{(l)}(t) \quad (4.46)$$

となる。緩和項を除いたのは今はレーザー光子が吸収されることだけに注目しているため。また、初期条件は

$$c_{an\{0\}}^{(l)}(t) = 0, \quad c_{an+1\{0\}}(t) = c_{n+1}^{(l)}(t) \quad (4.47)$$

と変わる。この式を積分して $t + \tau$ での確率振幅を求めると

$$c_{an}^{(l)}(t + \tau) = -ic_{n+1}^{(l)}(t) \sin(g\sqrt{n+1}\tau) \quad (4.48)$$

$$c_{bn+1}^{(l)}(t + \tau) = c_{n+1}^{(l)}(t) \cos(g\sqrt{n+1}\tau) \quad (4.49)$$

と得られる。よって、これより誘導吸収の場合の密度行列の行列要素は

$$\rho_{an,am}^{(a)}(t + \tau) = \sin(g\sqrt{n+1}\tau) \sin(g\sqrt{m+1}\tau) \rho_{n+1m+1}(t) \quad (4.50)$$

$$\rho_{bn,bm}^{(a)}(t + \tau) = \cos(g\sqrt{n}\tau) \cos(g\sqrt{m}\tau) \rho_{nm}(t) \quad (4.51)$$

したがって誘導吸収の場合の $t + \tau$ での密度行列要素 ρ_{nm} は

$$\begin{aligned} \rho_{nm}^{(a)}(t + \tau) &= \sin(g\sqrt{n+1}\tau) \sin(g\sqrt{m+1}\tau) \rho_{n+1m+1}(t) \\ &\quad + \cos(g\sqrt{n}\tau) \cos(g\sqrt{m}\tau) \rho_{nm}(t) \end{aligned} \quad (4.52)$$

と得ることができる。これより、レーザー光が $t \sim t + \tau$ の間に始め $|b\rangle$ にいた原子 r_b 個と相互作用して誘導吸収を起こしたときの ρ_{nm} の粗い時間変化は

$$\dot{\rho}_{nm}^{(a)} = r_b [\rho_{nm}^{(a)}(t + \tau) - \rho_{nm}(t)] \quad (4.53)$$

で与えられる。左辺の $\rho_{nm}^{(a)}(t + \tau)$ は (4.52) で与えられているので、これを τ についてテイラー展開して g^2 のオーダーまでとって (4.53) に入れると

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{nm}^{(a)} &\approx -\frac{1}{2} r_b g^2 \tau^2 (n+m) \rho_{nm}(t) \\ &\quad + r_b g^2 \tau^2 \sqrt{(n+1)(m+1)} \rho_{n+1m+1}(t) \end{aligned} \quad (4.54)$$

と近似できる。ここで損失率 $C = r_b g^2 \tau^2$ として、(4.54) と (4.41) を表すと放射による変化と吸収による変化の双方を含んだ ρ_{nm} のトータルの粗い時間変化は

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{nm}(t) &= -\left(\frac{\mathcal{N}'_{nm} A}{1 + \mathcal{N}_{nm} \frac{B}{A}}\right) \rho_{nm}(t) + \left(\frac{\sqrt{nm} A}{1 + \mathcal{N}_{n-1m-1} \frac{B}{A}}\right) \rho_{n-1m-1}(t) \\ &\quad - \frac{1}{2} C (n+m) \rho_{nm}(t) + C \sqrt{(n+1)(m+1)} \rho_{n+1m+1}(t) \end{aligned} \quad (4.55)$$

と得られる。この式が光子数分布の粗い時間変化を与える式となる。特に対角成分は光子数分布の粗い時間変化を表し

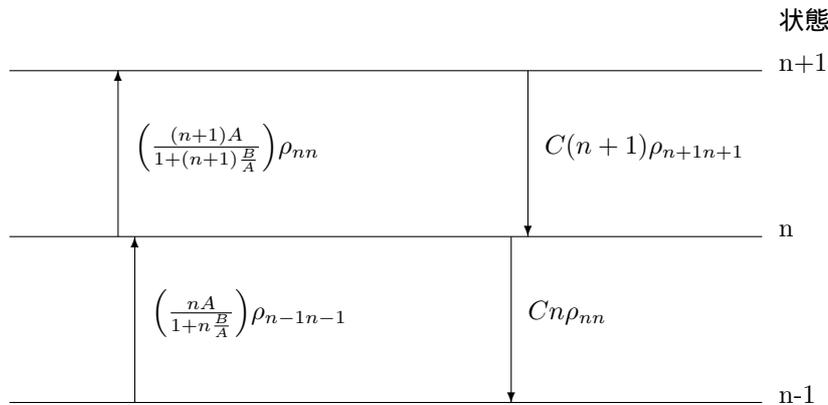
$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{nn}(t) = & -\left(\frac{(n+1)A}{1+(n+1)\frac{B}{A}}\right)\rho_{nn}(t) + \left(\frac{nA}{1+n\frac{B}{A}}\right)\rho_{n-1n-1}(t) \\ & - Cn\rho_{nn}(t) + C(n+1)\rho_{n+1n+1}(t) \end{aligned} \quad (4.56)$$

となる。この式より光子数分布を扱うことができる。次からは特に定常状態について考察していく。

4.3 定常状態での光子数のふるまい

ここでは定常状態での光子数分布を考え、さらにそれを用いて定常状態での平均光子数を求める。また、平均光子数を求めることでレーザー発振のしきいを考えることができ、しきいとなるポンピングの強さのオーダーも評価することができる。

光子数分布の粗い時間変化を表す方程式は (4.56) で与えられ、その意味することを簡単に図示すると



となり、状態間での確率の流れが図のように表される。

ここで定常状態について考えると、図における状態間の確率の流れがつりあっているはずである。したがって定常状態では状態間の確率の流れのつりあいの式

$$Cn\rho_{nn} = \frac{nA}{1+n\frac{B}{A}}\rho_{n-1n-1} \quad (4.57)$$

が成り立つ。よって

$$\begin{aligned}
\rho_{nn} &= \frac{A}{C} \frac{1}{1 + n\frac{B}{A}} \rho_{n-1, n-1} \\
&= \left(\frac{A}{C}\right)^2 \left(\frac{1}{1 + n\frac{B}{A}}\right) \left(\frac{1}{1 + (n-1)\frac{B}{A}}\right) \rho_{n-2, n-2} \\
&\vdots \\
&= \left(\frac{A}{C}\right)^n \left(\frac{1}{1 + n\frac{B}{A}}\right) \left(\frac{1}{1 + (n-1)\frac{B}{A}}\right) \cdots \left(\frac{1}{1 + \frac{B}{A}}\right) \rho_{00} \\
&= \aleph \prod_{k=0}^n \left(\frac{A}{C}\right) \left(\frac{1}{1 + k\frac{B}{A}}\right) \tag{4.58}
\end{aligned}$$

となる。ここで \aleph は規格化定数である。これをより便利な形に書き直す。

$$\begin{aligned}
\rho_{nn} &= \aleph \prod_{k=0}^n \frac{A^2}{CB} \left(\frac{1}{k + \frac{A}{B}}\right) \\
&= \frac{1}{Z} \left(\frac{A^2}{CB}\right)^{n + \frac{A}{B}} \frac{1}{[n + \frac{A}{B}]!} \tag{4.59}
\end{aligned}$$

ここで、 Z は新たな規格化定数であり、具体的な形は光子数分布が満たすべき規格化条件

$$\sum_0^{\infty} \rho_{nn} = 1 \tag{4.60}$$

から求めることができる。実際に (4.59), (4.60) 式を用いて計算することにより、 Z の具体的な形を求めることができるのでそれを見ていくと、

$$\begin{aligned}
Z &= \sum_0^{\infty} \left(\frac{A^2}{CB}\right)^{n + \frac{A}{B}} \frac{1}{[n + \frac{A}{B}]!} \\
&= \left[\frac{\left(\frac{A^2}{BC}\right)^{\frac{A}{B}}}{\left(\frac{A}{B}\right)!} \right] \sum_0^{\infty} \frac{n! \left(\frac{A}{B}\right)! \left(\frac{A^2}{CB}\right)^n}{[n + \frac{A}{B}]! n!} \tag{4.61}
\end{aligned}$$

となる。ここで、合流型超幾何関数

$$F(a, b; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b+n-1)!(a-1)n!}{(a+n-1)!(b-1)!x^n} \tag{4.62}$$

を用いると Z は

$$Z = \left[\frac{\left(\frac{A^2}{BC}\right)^{\frac{A}{B}}}{\left(\frac{A}{B}\right)!} \right] F\left(1, \frac{A}{B} + 1; \frac{A^2}{BC}\right) \tag{4.63}$$

と書ける。よって (4.59) より

$$\rho_{nn} = \left[\frac{\left(\frac{A^2}{BC}\right)^{\frac{A}{B}}}{\left(\frac{A}{B}\right)!} F\left(1, \frac{A}{B} + 1; \frac{A^2}{BC}\right) \right]^{-1} \frac{\left(\frac{A^2}{BC}\right)^{\frac{A}{B}+n}}{\left[n + \left(\frac{A}{B}\right)\right]!} \quad (4.64)$$

と ρ_{nn} が求められることができた。

次にレーザー光子数 n の集団平均 $\langle n \rangle = \bar{n}$ を求める。(4.59) の ρ_{nn} を用いて計算を実行すると

$$\begin{aligned} \bar{n} &= \sum_{n=0}^{\infty} n \rho_{nn} \\ &= \frac{1}{Z} \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{A^2}{CB}\right)^{n+\frac{A}{B}} \frac{1}{\left[n + \frac{A}{B}\right]!} \\ &= \frac{1}{Z} \sum_{n=1}^{\infty} \left(n + \frac{A}{B} - \frac{A}{B}\right) \left(\frac{A^2}{CB}\right)^{n+\frac{A}{B}} \frac{1}{\left[n + \frac{A}{B}\right]!} \\ &= \frac{1}{Z} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{A^2}{CB}\right)^{n+\frac{A}{B}-1} \frac{1}{\left[n + \frac{A}{B} - 1\right]!} \right] \frac{A^2}{BC} \\ &\quad - \frac{1}{Z} \frac{A}{B} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{A^2}{CB}\right)^{n+\frac{A}{B}} \frac{1}{\left[n + \frac{A}{B}\right]!} \\ &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \rho_{nn} \right] \frac{A^2}{BC} - \frac{A}{B} (1 - \rho_{00}) \end{aligned}$$

となう。よって、

$$\bar{n} = \frac{A^2}{BC} - \frac{A}{B} (1 - \rho_{00}) \quad (4.65)$$

と \bar{n} が得られる。ただし (4.64) より、 ρ_{00} は

$$\rho_{00} = \frac{1}{F\left(1, \frac{A}{B} + 1; \frac{A^2}{BC}\right)} \quad (4.66)$$

である。

次に、光子数分布と光子数の集団平均 \bar{n} を $\frac{A}{C}$ の関数としてみていく。

その前に ρ_{nn} と \bar{n} に含まれている係数を見積もってみる。 $\frac{A}{B}$ について考えると、A, B は (4.42) で与えられたので

$$\frac{A}{B} = \frac{1}{4} \left(\frac{\gamma}{g}\right)^2 \quad (4.67)$$

となる。 γ は $\gamma_a = \gamma_b$ としたので近似されているがオーダーを見るために

$$\gamma = \pi(g'(\omega'))^2 D(\omega') \quad (4.68)$$

としておく。\$g\$ は (2.89) で与えられていたが、\$\sin\$ の部分は簡単のため省いて考える。また、\$D\$ は (2.122) で与えられていた。これらを用いると \$\frac{A}{B}\$ は

$$\begin{aligned} \frac{A}{B} &= \frac{\pi^2 D^2(\omega') (g'(\omega'))^4}{4 g^2(\omega)} \\ &= \frac{V\omega^4 (\wp')^4(\omega')^2}{4\pi^2 c^6 \wp^2 \Omega} \frac{1}{\hbar \epsilon_0} \end{aligned} \quad (4.69)$$

ここで、可視光域の場合を考えてレーザー光の周波数のオーダーは \$10^{15} s^{-1}\$ の場合で考える。また、簡単のため \$\Omega, \omega, \omega'\$ は全て同じオーダーとする。さらに \$\wp, \wp'\$ もオーダーは同じとして、計算する。\$|\wp| = ex_{ab}\$ であり、\$x_{ab}\$ が大体原子の大きさのオーダーで \$10^{-10}\$ のオーダーとすると \$e \sim 2 \times 10^{-19}\$ より \$\wp\$ のオーダーはだいたい \$2 \times 10^{-29}\$ のオーダーになる。また、共振器の体積 \$V\$ は \$9 \times 10^{-5} m^3\$ のオーダー (\$3cm \times 3cm \times 10cm\$ のサイズ) を選ぶ。最後に光速 \$c = 3.0 \times 10^8\$ と \$\hbar \sim 10^{-34}\$, \$\epsilon_0 \sim 9 \times 10^{-12}\$ を用いてオーダーを見積もると、

\$\frac{A}{B} \sim 10^6\$ のオーダーになる。

係数が見積もれたので光子数分布と平均光子数を考えていく。ここではおおきくわけて \$\frac{A}{C} < 1\$ と \$\frac{A}{C} > 1\$ の二つの領域に分けて考える。(1) \$\frac{A}{C} < 1\$ のとき

\$1 \ll \frac{A}{B}\$ であるのでこのとき \$F\$ は

$$F(1, 1 + \frac{A}{B}; \frac{A^2}{BC}) \approx \frac{1}{1 - \frac{A}{C}} \left[1 - \frac{\frac{A}{C}}{\frac{A}{B} [1 - \frac{A}{C}]^2} \right] \quad (4.70)$$

と近似できる。これと (4.66), (4.65) より

$$\bar{n} \approx \frac{\frac{A}{C}}{1 - \frac{A}{C}} \quad for \quad \left(\frac{A}{C} < 1 \right) \quad (4.71)$$

となる。さらに光子数分布は (4.70), (4.71) を (4.64) に代入して

$$\rho_{nn} \approx \left(\frac{A}{C} \right)^n \left(1 - \frac{A}{C} \right) = \frac{\bar{n}^n}{(1 + \bar{n})^{n+1}} \quad (4.72)$$

となる。この最右辺の分布の形は熱輻射などのカオス的な光子分布と同じ形である。このことよりしきいより下ではカオス的な光であることが示唆される。

(2) \$\frac{A}{C} > 1\$ のとき

このとき \$F\$ は

$$F(1, 1 + \frac{A}{B}; \frac{A^2}{BC}) \approx \left(\frac{A}{B} \right)! \exp\left(\frac{A^2}{CB} \right) \left(\frac{A^2}{CB} \right)^{-\frac{A}{B}} \quad (4.73)$$

と近似できる。\$1 \ll \frac{A}{B}\$ であるのでこのとき \$\rho_{00} \approx 0\$ としてよい。よって、

$$\bar{n} \approx \frac{A}{B} \left(\frac{A}{C} - 1 \right) \quad for \quad \left(\frac{A}{C} > 1 \right) \quad (4.74)$$

となる。さらに光子数分布は (4.72),(4.73) を (4.64) に代入することで

$$\begin{aligned}\rho_{nn} &= \left(\frac{A^2}{BC}\right)^{n+\frac{A}{B}} \frac{\exp\left(-\frac{A^2}{BC}\right)}{\left(n+\frac{A}{B}\right)!} \\ &= \frac{\left(\bar{n}+\frac{A}{B}\right)^{n+\frac{A}{B}} \exp\left(-\bar{n}-\frac{A}{B}\right)}{\left(n+\frac{A}{B}\right)!}\end{aligned}\quad (4.75)$$

と得られる。特にしきいより十分上の $\frac{A}{C} \gg 2$ では

$$\rho_{nn} = \frac{n!}{\bar{n}^n \exp(-\bar{n})}\quad (4.76)$$

と Poisson 分布になる。コヒーレントな光は Poisson 分布をとることが知られているので、このことは光子数が増すとコヒーレントな状態になるということを示唆していると考えられる。

これらの結果は光子数が $\frac{A}{C} = 1$ の前後で大きく変わることを意味している。

例えば $\frac{A}{C} = 0.9$ のときは (4.71) より

$$\bar{n} \approx 9$$

となるが $\frac{A}{C} = 1.1$ のときは $\frac{A}{B} \sim 10^6$ なので (4.73) より

$$\bar{n} \approx 10^5$$

となり、しきい値を超えると飛躍的に光子数が増えることがわかる。

このようにポンピングの強さがしきい値よりも大きければレーザー発振が可能である。

そこで、しきい値 $\frac{A}{C} = 1$ での r_a のオーダーを見積もってみる。

A は (4.42) で与えられており、また、 C は大体 10^6 のオーダーであることがわかっている。そこで係数を見積もったときと同様に考えて、

$$\begin{aligned}r_a &= \frac{C}{2} \left(\frac{\gamma}{g}\right)^2 \\ &= 2C \frac{A}{B}\end{aligned}\quad (4.77)$$

$\frac{A}{B}$ は 10^6 のオーダーだったので C が 10^6 のオーダーであることを考えるとしきいでの r_a のオーダーは

$$r_a \sim 10^{12}$$

のオーダーになる。これはアボガドロ数のオーダー 10^{23} よりもかなり小さいのでこれだけの強さのポンピングは不可能ではないと考えられる。したがってある程度の強さでポンピングをすればレーザー発振はできるはずである。

5 まとめ

4章の結果から十分な強さのポンピングがあればレーザー発振が可能であることがわかった。また、3章における結果から共振器内の電場との相互作用によってレーザー媒質中に電場と同じ固有振動数を持つ巨視的な双極子分極が生じることがわかった。これにより、うまく共振器のモードを1モードに選ぶことができれば空間的にも時間的にも発振光の位相がそろふ。このためレーザー光はふつうの光よりもはるかに干渉しやすい。また、位相がそろっていることからレンズによる集光なども可能になり、強度の大きい光線を作ることができる。

レーザーを実現するために必要なのは、発振したい周波数にあったエネルギー差の2準位を持ったレーザー媒質を見つけることである。後は共振器と適度なポンピングを行う装置があればレーザー発振することは可能なはずである。

課題としてはどのような準位を持った原子がレーザー発振の効率をあげるのかを調べることである。4章では簡単のために緩和定数を異なる準位間の遷移の場合に対しても同じとする近似や、周波数をオーダーだけで見積もるなどの近似をしたが、これらの近似を行わずに計算すれば、エネルギー準位の間隔とレーザーの効率との相関が得られると考えられる。

また、温度等との関係は完全に無視したがこれについても考慮に入れる必要があるだろう。

参考文献

- [1] M.sargent . M. O. Scully and W. E Lamb Jr 著 霜田光一、岩澤宏、神谷武志 訳レーザー物理 丸善 1978
- [2] 花村榮一 岩波講座現代の物理学 量子光学 岩波書店 1992
- [3] 霜田光一 レーザー物理入門 岩波書店 1983
- [4] 松岡正弘 量子光学 裳華房 2000
- [5] M.O.Scully and W.E.Lamb, Jr., 1967 Phys.Rev 159, 208.
- [6] A.L. Schawlow and C.H. Townes 1958 Phys.Rev 112, 1940.