

電子陽電子対消滅の理論と
Positron Emission Tomography の原理

石月 恵

sg41102

埼玉大学理学部物理学科

平成 17 年 3 月 13 日

目次

1	真空中での断面積の計算	4
1.1	重心系での対消滅の断面積	9
1.2	断面積のエネルギー極限	12
2	物質中における陽電子の寿命	13
2.1	物質中での相互作用	13
2.2	非束縛状態での陽電子の寿命	14
3	束縛状態からの対消滅	15
3.1	ポジトロニウムの形成	15
3.2	ポジトロニウムの崩壊	17
4	まとめと考察	20
5	Positron Emmiton Tomography の原理	21
5.1	PET の概要	21
5.2	放射性薬剤	21
5.3	検査方法と検出原理	23
5.4	同時計数の原理と分解能	25
5.5	次世代の PET	29
5.6	まとめ	30

はじめに

β^+ 崩壊などによって放出された陽電子は電子とある確率で対消滅をする。

このとき電子と陽電子がはじめに持っていたエネルギーは光子の運動エネルギーに変換され二本以上の γ 線が放出される。このとき放出される光子は、質量中心系でエネルギー・運動量保存則により 2 γ 崩壊では互いに 180° 方向に、3 γ 崩壊では互いに 120° 方向に放出される。しかし、3 γ に崩壊する確率は 2 γ に崩壊する確率に比べて非常に小さいことが後に理論的に分かる。また、実験室系では始状態で e^+ がもっているエネルギーの状態によって角度分布などの対消滅の様子や確率の大きさが異なる。

これらのことを調べるために消滅断面積を計算しエネルギー依存性、特に高エネルギー極限と低エネルギー極限について断面積の振舞いを調べ、どのエネルギーで最も対消滅が起こりやすいのかを調べた。

また、陽電子は十分低速で物質中の電子に束縛され水素原子に似た構造をもつポジトロニウムを形成する。ポジトロニウムは e^+e^- のスピンの組み合わせによって寿命の異なる二種類に分けられ、これらのポジトロニウムは奇数 γ (主に 3 γ) 偶数 γ (主に 2 γ) に崩壊するのでこの 2 種類のポジトロンの寿命についても計算し、2 γ 3 γ への崩壊確率を比べた。

さらこの電子陽電子対消滅の物理は

Positron Emission Tomography (PET) = 陽電子放射線断層撮影法.

の原理として医療の分野にも応用され、癌検査やアルツハイマーのような代謝異常の診断にも使われている。

ここでは理論的な観点から PET への応用を考え、上記のような議論により陽電子対消滅について考察し、これが実際の検出の際にどのように使われ何が誤差要因となるのかなどを調べ、最後に最新の技術について述べた。

対消滅の理論

対消滅の仕方にはさまざまな場合が考えられるが、後に PET への応用を考えると、

実際にはどのような事象が最も優勢で、検出の際に十分なデータを得られるか

ということが問題になる。

対消滅として起こるのはほとんどは 2γ 、 3γ への崩壊であるが、現在使われている PET の検出は 2γ のみを問題にし、 3γ は考えていない。しかし、静止状態からの 3γ 崩壊は原理的には 1 回の崩壊で対消滅の位置が決まるため、 2γ を検出するよりも位置の分解能は良いはずである。したがって 3γ 崩壊と 2γ 崩壊の比率によっては、 3γ の検出も十分考えるべきである。

また実際の PET の検出では、対消滅はほとんど e^+e^- の静止状態でおこり互いに 180° の方向に 2γ が放出される、という設定の下に行われている。このことについては、対消滅の断面積を求めれば、どのエネルギー領域でもっとも優勢に対消滅がおきるかということが分かるので、理論的に考察していくことにする。

1 真空中での断面積の計算

まず e^+e^- が非束縛状態から 2γ に消滅する断面積を求める。

ファインマンダイアグラムは図 1 のようになる

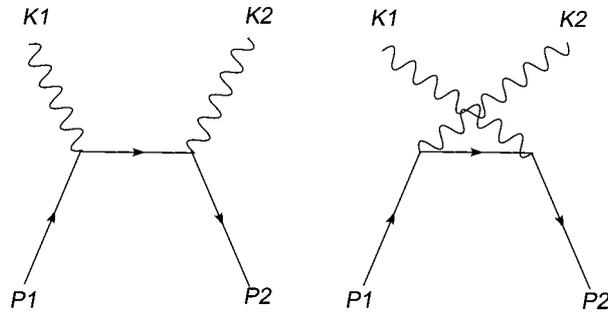


図 1: 2γ のファインマンダイアグラム

M 行列は

$$\mathcal{M} = i\epsilon_\mu\epsilon_\nu\bar{v}(p_2)\left[(-ie\gamma^\mu)\frac{-i(m + \not{p}_1 - \not{k}_1)}{m^2 - (p_1 - k_1)^2}(-ie\gamma^\nu) + (-ie\gamma^\nu)\frac{-i(m + \not{p}_1 - \not{k}_2)}{m^2 - (p_1 - k_2)^2}(-ie\gamma^\mu)\right]u(p_1) \quad (1.1)$$

$$= i\epsilon_\mu\epsilon_\nu\bar{v}(p_2)\left[(-ie\gamma^\mu)\frac{-i(m + \not{p}_1 - \not{k}_1)}{2p_1k_1}(-ie\gamma^\nu) + (-ie\gamma^\nu)\frac{-i(m + \not{p}_1 - \not{k}_2)}{2p_1k_2}(-ie\gamma^\mu)\right]u(p_1) \quad (1.2)$$

第1項目の分子で、反交換関係を用いて γ^ν を左にもっていき、Dirac.eq を用いると

$$\begin{aligned}
(m + \not{p}_1)\gamma^\nu u(p_1) &= (\gamma^\nu m + 2p^\nu - \gamma^\nu \not{p}^\mu)u(p_1) \\
&= [\gamma^\nu(m - p_\mu) + 2p^\nu]u(p_1) \\
&= 2p^\nu u(p_1)
\end{aligned} \tag{1.3}$$

と変形できる。第二項目も同様にして

$$\mathcal{M} = e^2 \epsilon_\mu \epsilon_\nu \bar{v}(p_2) \left[\frac{2\gamma^\mu \not{p}^\nu - \gamma^\nu \not{k}_2 \gamma^\mu}{2p_1 k_1} + \frac{2\gamma^\nu \not{p}^\mu - \gamma^\mu \not{k}_2 \gamma^\nu}{2p_1 k_2} \right] u(p_1) \tag{1.4}$$

次に偏極のない断面積を求める。

M 行列の絶対値 2 乗のスピンの平均は、始状態について平均を取り、終状態の光子について和をとると

$$\frac{1}{4} \sum_{e^+e^-} \sum_{\text{photons}} |M|^2 \tag{1.5}$$

e^+e^- はそれぞれ 2 つの偏極を持つため 4 で割って平均している。

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} \sum_{e^+e^-} \sum_{\text{photons}} |M|^2 &= \frac{e^2}{4} \sum_{e^+e^-} \epsilon_\mu(k_1) \epsilon_\nu(k_2) \epsilon_\rho(k_1) \epsilon_\sigma(k_2) \\
&\times \sum_{\text{photons}} \bar{v}(p_2) \left[\frac{2\gamma^\mu \not{p}^\nu - \gamma^\nu \not{k}_2 \gamma^\mu}{2p_1 k_1} + \frac{2\gamma^\nu \not{p}^\mu - \gamma^\mu \not{k}_2 \gamma^\nu}{2p_1 k_2} \right] u(p_1) \\
&\times \bar{u}(p_1) \left[\frac{2\gamma^\rho \not{p}^\sigma - \gamma^\sigma \not{k}_2 \gamma^\rho}{2p_1 k_1} + \frac{2\gamma^\sigma \not{p}^\mu - \gamma^\mu \not{k}_2 \gamma^\sigma}{2p_1 k_2} \right] v(p_2)
\end{aligned} \tag{1.6}$$

ここで光子のスピンの和については

$$\sum_{\text{photons}} \epsilon_\mu(k_1) \epsilon_\nu(k_2) \epsilon_\rho(k_1) \epsilon_\sigma(k_2) = \sum_{k_1} \sum_{k_2} \epsilon_\mu(k_1) \epsilon_\rho(k_1) \epsilon_\nu(k_2) \epsilon_\sigma(k_2) \tag{1.7}$$

$$= g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} \tag{1.8}$$

と書き換えられることを用いると

$$\frac{1}{4} \sum_{e^+e^-} \sum_{\text{photons}} |M|^2 \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^4}{4} g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} \sum_{p_1} \sum_{p_2} \bar{v}(p_2) \left[\frac{2\gamma^\mu \not{p}^\nu - \gamma^\nu \not{k}_2 \gamma^\mu}{2p_1 k_1} + \frac{2\gamma^\nu \not{p}^\mu - \gamma^\mu \not{k}_2 \gamma^\nu}{2p_1 k_2} \right] u(p_1) \\
&\times \bar{u}(p_1) \left[\frac{2\gamma^\rho \not{p}^\sigma - \gamma^\sigma \not{k}_2 \gamma^\rho}{2p_1 k_1} + \frac{2\gamma^\sigma \not{p}^\mu - \gamma^\mu \not{k}_2 \gamma^\sigma}{2p_1 k_2} \right] v(p_2)
\end{aligned} \tag{1.10}$$

さらに Dirac スピノルの完全性の関係

$$\sum_s u(p, s)\bar{u}(p, s) = \not{p} + m \quad (1.11)$$

$$\sum_s v(p, s)\bar{v}(p, s) = \not{p} - m \quad (1.12)$$

を用いて整理すると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \sum_{e^+e^- \text{ photons}} |M|^2 \\ &= \frac{e^4}{4} g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} \sum_{p_2} \bar{v}(p_2) \left[\frac{2\gamma^\mu p^\nu - \gamma^\nu \not{k}_2 \gamma^\mu}{2p_1 k_1} + \frac{2\gamma^\nu p_1^\mu - \gamma^\rho \not{k}_2 \gamma^\mu}{2p_1 k_2} \right] \\ & \quad \times (\not{p}_1 + m) \left[\frac{2\gamma^\rho p^\sigma - \gamma^\sigma \not{k}_1 \gamma^\rho}{2p_1 k_1} + \frac{2\gamma^\sigma p_1^\mu - \gamma^\rho \not{k}_2 \gamma^\sigma}{2p_1 k_2} \right] v(p_2) \\ &= \frac{e^4}{4} g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} (\not{p}_2 - m)_{da} \left[\frac{2\gamma^\mu p^\nu - \gamma^\nu \not{k}_1 \gamma^\mu}{2p_1 k_1} + \frac{2\gamma^\nu p_1^\mu - \gamma^\rho \not{k}_2 \gamma^\mu}{2p_1 k_2} \right]_{ab} \\ & \quad \times (\not{p}_1 + m)_{bc} \left[\frac{2\gamma^\rho p^\sigma - \gamma^\sigma \not{k}_1 \gamma^\rho}{2p_1 k_1} + \frac{2\gamma^\sigma p_1^\mu - \gamma^\rho \not{k}_2 \gamma^\sigma}{2p_1 k_2} \right]_{cd} \quad (1.13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{e^4}{4} g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} \cdot \text{tr} \left[(\not{p}_2 - m) \left[\frac{2\gamma^\mu p^\nu - \gamma^\nu \not{k}_2 \gamma^\mu}{2p_1 k_1} + \frac{2\gamma^\nu p_1^\mu - \gamma^\rho \not{k}_2 \gamma^\mu}{2p_1 k_2} \right] \right. \\ & \quad \left. \times (\not{p}_1 + m) \left[\frac{2\gamma^\rho p_1^\sigma - \gamma^\sigma \not{k}_1 \gamma^\rho}{2p_1 k_1} + \frac{2\gamma^\sigma p_1^\mu - \gamma^\rho \not{k}_2 \gamma^\sigma}{2p_1 k_2} \right] \right] \quad (1.14) \end{aligned}$$

のようなトレースであらわされる。

トレースの計算

(1.15) 式を展開したものをまとめると

$$\frac{1}{4} \sum |M|^2 \equiv \frac{e^4}{4} \left[\frac{\textcircled{1}}{4(p_1 k_1)^2} + \frac{\textcircled{2}}{4(p_1 k_1)(p_1 k_2)} + \frac{\textcircled{3}}{4(p_1 k_2)(p_1 k_1)} + \frac{\textcircled{4}}{4(p_1 k_2)^2} \right] \quad (1.15)$$

とかける。

トレース部分 ①②③④を計算すればよいが、② = ③ であることと $k_1 \leftrightarrow k_2$ で ① = ④ となることがすぐわかるので ①と ②だけ計算すればよい。

運動量の関係と γ 行列の反交換関係より、 $\not{p}\not{p} = p^2 = m^2$ であることと γ 行列の反交換関係とトレースの性質より得られる次の公式を用いてトレースを計算する。

$$\begin{aligned} (1) \quad & \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -2\gamma^\nu \\ (2) \quad & \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu = 4g^{\nu\rho} \\ (3) \quad & \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu = -2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu \\ (4) \quad & \text{tr}(\not{a}\not{b}) = 4a \cdot b \\ (5) \quad & \text{tr}(\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}) = 4[(a \cdot b)(c \cdot d) - (a \cdot c)(b \cdot d) + (a \cdot d)(b \cdot c)] \end{aligned} \quad (1.16)$$

まず ①を計算する

$$\textcircled{1} = \text{tr}[(\not{p}_2 - m)(2\gamma^\mu \not{p}^\nu - \gamma^\mu \not{k}_1 \gamma^\nu)(\not{p}_1 + m)(2\gamma_\mu \not{p}_\nu - \gamma_\nu \not{k}_1 \gamma_\mu)] \quad (1.17)$$

これを展開すると16個の項が出てくるが奇数個の γ 行列はトレース0なのでこの半分の項を考えればよいことがわかる。

$$\begin{aligned} &= \text{tr}[4\not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_1^\nu \not{p}_1 \gamma_\mu \not{p}_\nu - 2\not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_1^\nu \not{p}_1 \gamma_\nu \not{k}_1 \gamma_\nu - 2\not{p}_2 \gamma^\mu \not{k}_1 \gamma^\nu \not{p}_1 \gamma_\mu \not{p}_\nu + \not{p}_2 \gamma^\mu \not{k}_1 \gamma^\nu \not{p}_1 \gamma_\nu \not{k}_1 \gamma_\mu \\ &\quad - m^2 \{4\gamma^\mu \not{p}_1^\nu \gamma_\mu \not{p}_1 \nu - 2\gamma^\mu \not{p}_1^\nu \gamma_\nu \not{k}_1 \gamma_\mu - 2\gamma^\mu \not{k}_1 \gamma^\nu \gamma_\mu \not{p}_\nu + \gamma^\mu \not{k}_1 \gamma^\nu \gamma_\nu \not{k}_1 \gamma_\mu\}] \end{aligned} \quad (1.18)$$

(1)~(5)の関係を使うとそれぞれの項は

$$\begin{aligned} \text{tr}(4\not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_1^\nu \not{p}_1 \gamma_\mu \not{p}_\nu) &= -32m^2(p_1 \cdot p_2) \\ \text{tr}(-2\not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_1^\nu \not{p}_1 \gamma_\nu \not{k}_1 \gamma_\nu) &= 16m^2(k_1 \cdot p_2) \\ \text{tr}(-2\not{p}_2 \gamma^\mu \not{k}_1 \gamma^\nu \not{p}_1 \gamma_\mu \not{p}_\nu) &= 16m^2(k_1 \cdot p_2) \\ \text{tr}(\not{p}_2 \gamma^\mu \not{k}_1 \gamma^\nu \not{p}_1 \gamma_\nu \not{k}_1 \gamma_\mu) &= 32(p_1 \cdot k_1)(p_2 \cdot k_1) \\ \text{tr}(m^2 2\gamma^\mu \not{p}_1^\nu \gamma_\nu \not{k}_1 \gamma_\mu) &= 32m^2(p_1 \cdot k_1) \\ \text{tr}(-m^2 4\gamma^\mu \not{p}_1^\nu \gamma_\mu \not{p}_1 \nu) &= -64m^4 \\ \text{tr}(-2m^2 \gamma^\mu \not{p}_1^\nu \gamma_\nu \not{k}_1 \gamma_\mu) &= 32m^2(p_1 \cdot k_1) \\ \text{tr}(m^2 \gamma^\mu \not{k}_1 \gamma^\nu \gamma_\mu \not{p}_\nu) &= 32m^2(p_1 \cdot k_1) \\ \text{tr}(-m^2 \gamma^\mu \not{k}_1 \gamma^\nu \gamma_\nu \not{k}_1 \gamma_\mu) &= 0 \end{aligned} \quad (1.19)$$

となる。

次に(1.16)式に戻ってトレース②を計算すると

$$\textcircled{2} = \text{tr}[(\not{p}_2 - m)(2\gamma^\mu \not{p}_1^\nu - \gamma^\mu \not{k}_1 \gamma^\nu)(\not{p}_1 + m)(2\gamma_\nu \not{p}_{1\mu} - \gamma_\mu \not{k}_2 \gamma_\nu)] \quad (1.20)$$

①と同様に奇数個の γ 行列を落として展開すると

$$\begin{aligned} \textcircled{2} &= \text{tr}[4\not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_1^\nu \not{p}_1 \gamma_\nu \not{p}_{1\mu} - 2\not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_1^\nu \not{p}_1 \gamma_\mu \not{k}_2 \gamma_\nu - 2\not{p}_2 \gamma^\mu \not{k}_1 \gamma^\nu \not{p}_1 \gamma_\nu \not{p}_{1\mu} + \not{p}_2 \gamma^\mu \not{k}_1 \gamma^\nu \not{p}_1 \gamma_\mu \not{k}_2 \gamma_\nu \\ &\quad - m^2 (4\gamma^\mu \not{p}_1^\nu \gamma_\nu \not{p}_{1\mu} - 2\gamma^\mu \not{p}_1^\nu \gamma_\mu \not{k}_2 \gamma_\nu - 2\gamma^\mu \not{k}_1 \gamma^\nu \gamma_\nu \not{p}_{1\mu} + \gamma^\mu \not{k}_1 \gamma^\nu \gamma_\mu \not{k}_2 \gamma_\nu)] \end{aligned} \quad (1.21)$$

それぞれの項は

$$\begin{aligned}
tr(4\not{p}_2\gamma^\mu\not{p}_1^\nu\not{p}_1\gamma_\nu\not{p}_{1\mu}) &= 16m^2(p_1 \cdot p_2) \\
tr(-2\not{p}_2\gamma^\mu\not{p}_1^\nu\not{p}_1\gamma_\mu\not{k}_2\gamma_\nu) &= 16[(2p_1 \cdot p_2)(p_1 \cdot k_2) - m^2p_2 \cdot k_2] \\
tr(-2\not{p}_2\gamma^\mu\not{k}_1\gamma^\nu\not{p}_1\gamma_\nu\not{p}_{1\mu}) &= 16[(2p_1 \cdot p_2)(p_1 \cdot k_1) - m^2p_2 \cdot k_1] \\
tr(\not{p}_2\gamma^\mu\not{k}_1\gamma^\nu\not{p}_1\gamma_\mu\not{k}_2\gamma_\nu) &= -32(p_1 \cdot p_2)(k_1 \cdot k_2) \\
tr(-4m^2\gamma^\mu\not{p}_1^\nu\gamma_\nu\not{p}_{1\mu}) &= -16m^2 \\
tr(2m^2\gamma^\mu\not{p}_1^\nu\gamma_\mu\not{k}_2\gamma_\nu) &= 32m^2(p_1 \cdot p_2) \\
tr(2m^2\gamma^\mu\not{k}_1\gamma^\nu\gamma_\nu\not{p}_{1\mu}) &= 32m^2(p_1 \cdot k_2) \\
tr(-m^2\gamma^\mu\not{k}_1\gamma^\nu\gamma_\mu\not{k}_2\gamma_\nu) &= -16m^2(k_1 \cdot k_2)
\end{aligned} \tag{1.22}$$

と求められる。

次に求めた ①と ②を次のような Mandelstam 変数 s, t, u であらわし見通しをよくすることを考える。

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (k_1 + k_2)^2 = 2m^2 + 2p_1 \cdot p_2 = 2k_1 \cdot k_2 \tag{1.23}$$

$$t = (p_1 - k_1)^2 = (p_2 - k_2)^2 = m^2 - 2p_1 \cdot k_1 = m^2 - 2p_2 \cdot k_2 \tag{1.24}$$

$$u = (p_1 - k_2)^2 = (p_2 - k_1)^2 = m^2 - 2p_1 \cdot k_2 = m^2 - 2p_2 \cdot k_1 \tag{1.25}$$

2 粒子 \rightarrow 2 粒子の散乱ではプロパゲーターの運ぶ運動量に対応して一般に 3 種類の崩壊の仕方がある。この 3 つの崩壊はチャンネルとして整理され、それぞれ s チャンネル、 t チャンネル、 u チャンネルと呼ばれ、Mandelstam 変数でプロパゲーターが書かれる。

s チャンネルはプロパゲーターの運ぶ運動量が始状態の粒子の持つ運動量の和に等しく、 t チャンネルはプロパゲーターの運ぶ運動量が終状態と始状態の運動量の差を表し、 u チャンネルのプロパゲーターは t チャンネルで終状態の粒子を入れ替えたものであらわされる。 t チャンネルと u チャンネルは図 1 のダイアグラムのように表現でき、 s, t, u の間には $s + t + u = 2m^2$ の関係がある。

e^+e^- 対消滅には t チャンネルと u チャンネルがあり、 s チャンネルはない。

これらの関係を用いて ①と ②を整理し、(1.16) 式で ② = ③ であることと、 $k_1 \leftrightarrow k_2$ で ① = ④ となることを思い出せば、このとき $t \leftrightarrow u$ であるので

$$\begin{aligned}
① &= 16[-2m^4 + m^2(m^2 - t) + \frac{1}{2}(m^2 - t)(m^2 - u)] \\
② &= 8[-4m^4 + m^2(m^2 - t) + m^2(m^2 - u)] = ③ \\
④ &= 16[-2m^4 + m^2(m^2 - u) + \frac{1}{2}(m^2 - u)(m^2 - t)]
\end{aligned} \tag{1.26}$$

これらを (1.16) 式に代入し、再び p_1 で表すと $|M|^2$ スピン和

$$\frac{1}{4} \sum_{e^+e^-} \sum_{\text{photons}} |M|^2 = 2e^2 \left[\frac{p_1 k_2}{p_1 k_2} + \frac{p_1 k_1}{p_1 k_2} + 2m^2 \left(\frac{1}{p_1 k_2} + \frac{1}{p_1 k_2} \right) - m^4 \left(\frac{1}{p_1 k_2} + \frac{1}{p_1 k_2} \right)^2 \right] \quad (1.27)$$

が得られる。

次に重心系での断面積を求めてみる

1.1 重心系での対消滅の断面積

重心系での微分断面積は、求めた $|M|^2$ スピン平均和を用いて

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|k| \Sigma \frac{1}{4} |M|^2}{(2\pi)^2 16v E_1 E_2 (E_1)' (E_2)'} \quad (1.28)$$

E_i : 始状態の粒子のエネルギー E_i' : 終状態の粒子のエネルギー
 k : 終状態の粒子の運動量 v : 粒子の相対速度

と表される。

全断面積はこれを全立体角で積分すればよく、これによって消滅の確率を計算することができる。重心系で考えると散乱の前後でのエネルギーと運動量は、図2のようになる。

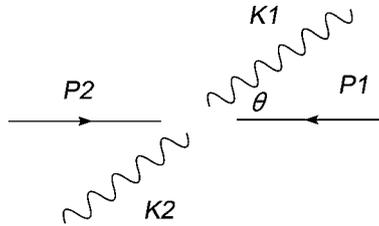


図 2: 重心系での対消滅

ただし

$$\begin{aligned} P_1 &= (E, 0, 0, -P\hat{z}) : e^+ \text{ の運動量} \\ P_2 &= (E, 0, 0, P\hat{z}) : e^- \text{ の運動量} \\ k_1 &= (E, E\sin\theta, 0, E\cos\theta) : \text{光子の運動量} \\ k_2 &= (E, -E\sin\theta, 0, -E\cos\theta) : \text{光子の運動量} \end{aligned}$$

とする

e^+e^- の相対速度は重心系で考えると $v = (\frac{p}{E}) \cdot 2$ と表され、 $|k| = E$ であること用いて

$$d\sigma_{CM} = d\Omega \frac{1}{(2\pi)^2 16(4E)^2} \frac{p}{E} \cdot \frac{1}{4} |M|^2 \quad (1.29)$$

$$= d\Omega \frac{1}{(2\pi)^2 16s} \frac{p}{E} \cdot \frac{1}{4} |M|^2 \quad (1.30)$$

図より $p_1 k_1 = E^2 + EP \cos \theta$ $p_1 k_2 = E^2 - EP \cos \theta$ なので
(1.29) 式を散乱角を用いて表わすと

$$\frac{1}{4} \sum_{e^+e^-} \sum_{photons} |M|^2 = 4e^4 \left[\frac{E^2 + P^2 \cos^2 \theta}{m^2 + p^2 \sin^2 \theta} + \frac{2m^2}{m^2 + p^2 \sin^2 \theta} + \frac{2m^4}{m^2 + p^2 \sin^2 \theta} \right]$$

$d\Omega = 2\pi d(\cos \theta)$ なので微分断面積は

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{CM}}{d \cos \theta} &= \frac{(2\pi)\alpha^2}{s} \left(\frac{E}{P} \right) \left[\frac{E^2 + P^2 \cos^2 \theta}{m^2 + p^2 \sin^2 \theta} + \frac{2m^2}{m^2 + p^2 \sin^2 \theta} + \frac{2m^4}{m^2 + p^2 \sin^2 \theta} \right] \quad (1.31) \\ &= \frac{(2\pi)\alpha^2}{s} \left(\frac{E}{P} \right) \left[\frac{P^2 \cos^2 \theta}{E^2 - p^2 \cos^2 \theta} + \frac{E^2 + 2m^2}{E^2 - p^2 \cos^2 \theta} + \frac{2m^4}{E^2 - p^2 \cos^2 \theta} \right] \end{aligned}$$

$$(1.32)$$

と求められる。

これを積分すれば全断面積が求められる。

ただし、終状態は同種粒子なので $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ と $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ の状態には区別がない。したがって積分範囲は $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ をとればよいことがわかる。

全断面積は

$$\begin{aligned} \sigma_{CM} &= \int_0^1 \frac{d\sigma}{d \cos \theta} d \cos \theta \\ &= \int_0^1 \frac{(2\pi)\alpha^2}{s} \left(\frac{E}{P} \right) \left[\frac{P^2 \cos^2 \theta}{E^2 - p^2 \cos^2 \theta} + \frac{E^2 + 2m^2}{E^2 - p^2 \cos^2 \theta} + \frac{2m^4}{E^2 - p^2 \cos^2 \theta} \right] d \cos \theta \\ &\equiv \int_0^1 \frac{(2\pi)\alpha^2}{s} \left(\frac{E}{P} \right) [I_1 + I_2 - I_3] \quad (1.33) \end{aligned}$$

I_1, I_2, I_3 をそれぞれ積分すると

I_1 と I_2 は変数変換 (1.34)

$$\cos \theta = \frac{E}{P} \sin \alpha$$

$0 \leq \alpha \leq \sin^{-1} \frac{P}{E}$ によって得られる

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{P}{E} \int_0^{\sin^{-1} \frac{P}{E}} d\alpha \left[\frac{1}{\cos \alpha} - \cos \alpha \right] = \frac{P}{E} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{E+P}{E-P} - 1 \right] \\ I_2 &= \frac{E^2 + m^2}{EP} \int_0^{\sin^{-1} \frac{P}{E}} d\alpha \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{E^2 + m^2}{EP} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{E+P}{E-P} - 1 \right] \\ I_3 &= \frac{m^2}{E^2} + \frac{m^4}{2E^3P} \ln \frac{E+P}{E-P} \end{aligned} \quad (1.35)$$

よって

$$\sigma_{CM} = \frac{2\pi\alpha^2}{s} \left[-\frac{E^2 + m^2}{E^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{E}{P} + \frac{E^2 + 2m^2}{EP} + \frac{m^4}{E^3P} \right) \ln \frac{E+P}{E-P} \right] \quad (1.36)$$

エネルギーの関係式から E と P のみの式に直し、 $\beta = \frac{P}{E}$ で書き直すと

$$\sigma_{CM} = \frac{\pi\alpha^2}{4EP} \left[2(\beta^2 - 2) + \frac{3 - \beta^4}{\beta} \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right] \quad (1.37)$$

$$(1.38)$$

これが重心系での対消滅の衝突断面積を表す。

実際に観測を行うときは e^- が静止している実験室系で考えることになるので、実験室系での断面積に変換してからエネルギー極限を考える。

1.2 断面積のエネルギー極限

断面積は不変量なので重心系でのエネルギーと運動量を実験室系 (e^- の静止系) のものに置き換える。

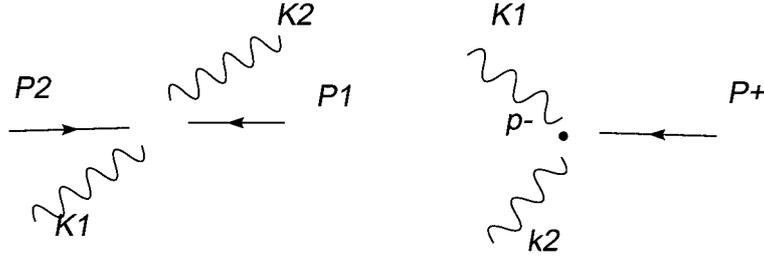


図 3: 重心系から実験室系への変換

ただし

E^+ : 実験室系での e^- のエネルギー
 p : 実験室系での e^+ の空間運動量
 $p^+ = (E^+, p)$... 実験室系での e^+ の 4 元運動量
 $p^- = (m, 0)$... 実験室系での e^- の 4 元運動量

とする。

それぞれの系の 4 元運動量から不変な関係式を作ると

$$P^{1\mu} P_{2\mu} = p^{+\mu} p^-_{\mu}$$

$$E^2 + P^2 = mE^+$$

よって

$$E^2 = \frac{m(E^+ + m)}{2} = \frac{m^2(\gamma + 1)}{2} \quad (1.39)$$

$$\gamma \equiv \frac{E^+}{m} \quad (1.40)$$

$$\beta = \frac{p}{E} = \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} \quad (1.41)$$

などの関係を用いて、重心系での断面積 (1.38) 式を実験室系での断面積に書き直すと

$$\sigma_{LAB} = \pi r_0^2 \frac{1}{\gamma + 1} \left[-\frac{\gamma + 3}{\sqrt{\gamma^4 - 1}} + \frac{\gamma^2 + 3}{\sqrt{\gamma^4 - 1}} + \frac{\gamma^2 + 4\gamma + 1}{\gamma^2 - 1} \ln(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}) \right] \quad (1.42)$$

$$(r_0 = \frac{\alpha}{m_e} \dots \text{電子の古典半径})$$

となる。

次にエネルギー極限を考える

- 高エネルギー極限 (相対論的極限)
 $E^+ \gg m$ より

$$\gamma = \frac{E^+}{m} \gg 1$$

$$\sigma_{LAB} \simeq \pi r_0^2 \frac{m}{E^+} \left(\ln \frac{2E^+}{m} - 1 \right) \rightarrow 0 \quad (1.43)$$

- 低エネルギー極限 (非相対論的極限)

$$\gamma \simeq 1$$

$$\sigma_{LAB} \simeq \frac{\pi r_0^2}{v} \quad (1.44)$$

非束縛状態での対消滅の断面積は e^+ の運動エネルギーが小さいところで大きく、特に静止状態で最も大きいことが分かる。したがって e^+ の運動エネルギーが大きい場合は散乱

$$e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^- \quad (1.45)$$

の過程が優勢である。したがって、物質中をあるエネルギーで走る陽電子を考えると、高エネルギーでは散乱を繰り返し減速され、ほぼ静止状態まで減速されてから電子と対消滅をするという過程が最も自然である。

2 物質中における陽電子の寿命

β^+ 崩壊によって放出された e^+ は前節の議論により、物質中に入射した e^+ はいきなり対消滅せず、物質中の電子や原子核と相互作用し次第にエネルギーを失っていく。陽電子が物質に入射し止まるまでの減衰過程の長さは、最大飛程によって理解される。ここでは物質中で減速された電子が、低速で非束縛状態で対消滅をする寿命を求めることにする。

2.1 物質中での相互作用

物質中を走る陽電子は電子や原子核と相互作用しながらエネルギーを失う。ここでは陽電子の物質中でのエネルギーの損失について考える。

e^+ が物質中でエネルギーを失う原因は主に

- 原子核や e^- との弾性散乱
- 原子核に束縛された電子のイオン化や励起を伴う非弾性散乱
- 制動放射 … 原子核や e^- との散乱によって加速を受け光子を放出する。

の3つが考えられる。

α 粒子などの重荷電粒子の場合は散乱によってほとんど加速を受けないため制動放射による寄与は小さく、殆どは原子のイオン化などによってエネルギーを損失する。

これに対して e^- や e^+ は質量が小さく、1回の散乱で受ける加速が大きいので制動放射によるエネルギー損失が効いてくる。制動放射による一秒あたりのエネルギー損失は

$$\Delta E \propto \frac{z^2}{m^2} \quad (2.1)$$

で与えられる。

また制動放射は高エネルギーで起こりやすく、エネルギーが小さくなるにつれて減少するので低エネルギーでは散乱、特にイオン化などの非弾性散乱によるエネルギー損失のほうが大きくなる。

このような機構により e^+ は減速され物質中を数 mm 走って対消滅する。この距離を飛程 (range) という。 α などの重粒子はほとんど真っ直ぐ飛ぶため平均飛程 (= 吸収体を通過した長さ) を考えればよいが、 e^+ の場合は大きな散乱を受けてジグザグ運動をするため飛程の予測は難しく、平均飛程を考えてもあまり意味がない。したがって e^+ の場合は、全走行距離を直線に直した最大飛程によって飛程を評価する。

飛程は 1cm あたりのエネルギー損失から求められ、この飛程の長さが後述する PET の分解能の限界を決める。飛程は始状態の入射 e^+ のエネルギーが高いほど長くなり、寿命も伸びる。

PET によく用いられる ^{18}F の最大飛程は水中で 2.4mm である。

2.2 非束縛状態での陽電子の寿命

物質中で減速された e^+ が静止状態で束縛状態を作らずに消滅する場合の寿命を考える。ここで

ρ : 物質中の陽電子の位置での電子の数密度

v : 電子に対する e^+ の相対速度 ($v \ll 1$)

と定義する。

逆に陽電子の静止系から見れば電子が速度 $-v$ で動いているので流束 ϕ は

$$\phi = v \cdot \rho \quad (2.2)$$

となり、単位断面積・単位時間に ϕ 個の電子が陽電子に入射することになる。 e^+ が対消滅する確率は断面積と流束 ϕ に比例するはずである。したがって単位時間での 2γ 崩壊の対消滅の確率は、断面積の低エネルギー極限 (1.44) 式より

$$R = \sigma v \rho = \pi r_0^2 \rho \quad (2.3)$$

水 1 分子中の電子の数は 10 個なので

$$\rho = \frac{N_A}{18} \times 10 = 3 \times 10^{23} \text{個/cm}^3 \quad (2.4)$$

崩壊率 R は時間の逆元を持つが (2.3) 式は長さの逆元を持つので、自然単位系から cgs 単位系に直すためには光速 c を掛ければよい。単位時間あたりの対消滅の確率は

$$R = \pi r_0^2 \rho \times c \simeq 2.1 \times 10^9 (s^{-1}) \quad (2.5)$$

したがって水中での e^+ の寿命は逆数をとって

$$\tau = 4.7 \times 10^{-10} (s) \quad (2.6)$$

と計算できる。

また同様な計算により鉛に対しては $2.1 \times 10^{-10} (s)$ であるので、自由な陽電子は物質中で減速された後ほぼ 10^{-10} 秒ほどで消滅することがわかる。

3 束縛状態からの対消滅

3.1 ポジトロニウムの形成

物質中でエネルギーを失った e^+ は十分低速で e^- に捕獲されて束縛状態を形成する。この e^+e^- の束縛状態はポジトロニウムと呼ばれ、気体や液体など電子の密度があまり大きくない物質中ではよくつくられる。ポジトロニウムは水素原子とよく似た構造を持つが、純粋なレプトンからなる 2 体系で、最終的に e^+e^- の対消滅によって崩壊するという点が水素原子と大きく異なっている。

ポジトロニウムは一般にどのような物質に対しても形成されるわけではなく、金属など電子密度が非常に大きい物質中では形成されない。これは e^+ の周りに分極した e^- が集り、束縛状態を作るのに十分なクーロン力が得られないからである。

いまは人体の中でのことを考えているのでほぼ水中であると考え、一旦束縛状態を形成して崩壊するとして考えることにする。

ポジトロニウムの換算質量を μ_e , e^+e^- の質量をそれぞれ m_e , 基底状態の半径を a'_0 とし、水素原子のボーア半径を a_0 とすると

$$\mu_e = \frac{m_e}{2} \quad (3.1)$$

$$a'_0 = \frac{1}{\mu_e e^2} = 2a_0 \quad (3.2)$$

したがってポジトロニウムの基底状態の半径は水素原子の 2 倍である。

ポジトロニウムと水素原子は図のように比較される。

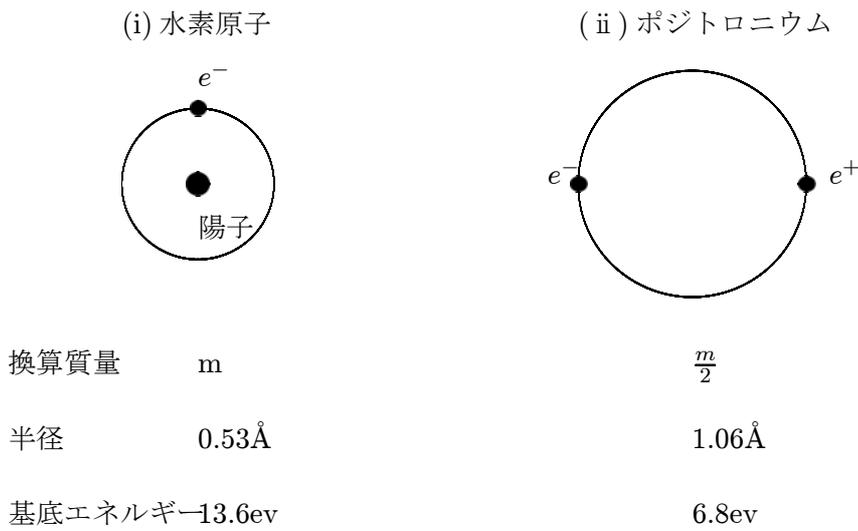


図 4: 水素原子とポジトロニウムの比較

形成されたポジトロニウムは不安定で短い時間で対消滅をする。このときポジトロニウムの持つスピンの状態によって選択則が働き、放出される光子の数に制限が付く。

ポジトロニウムが S 状態から崩壊する場合を考えると、全角運動量は e^+ と e^- の持つスピンのヘリシティによって決められる。したがってポジトロニウムは全スピン 0 を持つものと 1 を持つものに分けられる。

一方で、光子はスピン 1 を持つが質量を持たないためにヘリシティが 1 か -1 しか取れず、0 の状態を取ることが出来ない。そのために次のような選択則が働く。

全スピン 0(singlet) …… パラポジトロニウム

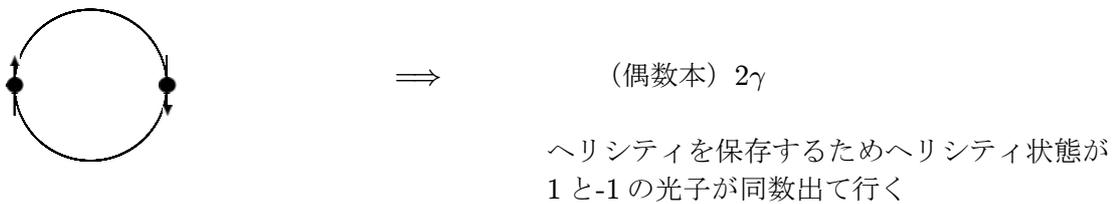


図 5: パラポジトロニウム

全スピン 1(triplet) … オルトポジトロニウム

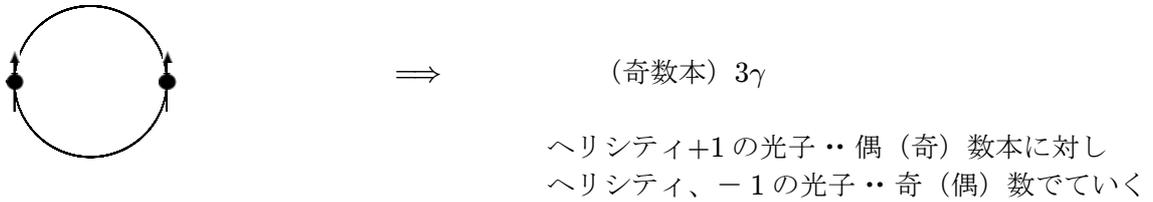


図 6: オルトポジトロニウム

したがって作られたポジトロニウムの $\frac{1}{4}$ はパラポジトロニウムで $\frac{3}{4}$ はオルトポジトロニウムであると分かる。形成された二つの状態のポジトロニウムは寿命が大きく異なる。

3.2 ポジトロニウムの崩壊

次に形成されたポジトロニウムが崩壊する寿命を求める。

対消滅は e^+e^- が非常に近づいたときに起こると考えられるので、S 状態からの崩壊を考えるのが自然である。束縛系での e^+e^- の運動エネルギーは小さいので (2.3) 式と同様に低エネルギー極限での崩壊率を考えればよい。ただし、今の場合束縛状態を作っているため、物質中での電子の密度のかわりに陽電子の位置での確率密度 $|\Psi_{100}|^2$ を考える。

ポジトロニウムの波動関数は水素原子の波動関数と同様に考えればよい。s 状態からの崩壊を考えるので全角運動量はスピンによって決まり、 1S : パラポジトロニウムと 3S : オルトポジトロニウムの 2 種類の崩壊を考える。

$1S$ の水素原子の波動関数は

$$\psi_{100}(r) = \left(\frac{1}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} 2 \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right) \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \quad (3.3)$$

と与えられる。

ポジトロニウムのボーア半径は水素のボーア半径の 2 倍なので、上の式で $a_0 \rightarrow 2a_0$ の置き換えによってポジトロニウムの基底状態の波動関数は得られる。基底状態での原点におけるポジトロニウムの波動関数は

$$\psi_{100} = \left(\frac{1}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{2}{4\pi}} \quad (3.4)$$

e^+ の位置での e^- の確率密度は

$$\rho = |\psi_{100}|^2 = \frac{1}{8\pi a_0^3} \quad (3.5)$$

と表される。

パラポジトロニウムの寿命

一般には偶数 γ の崩壊が考えられるが 2γ が増えるたびに、 α^2 、つまり $(\frac{1}{137})^2$ ずつ確率は小さくなる。したがってポジトロニウムの崩壊として考えるべきなのは 2γ への崩壊である。オルソポジトロニウムにも同様のことがいえる。

ポジトロニウムの崩壊率 ω は

ω_0 : パラポジトロニウムの崩壊率

ω_1 : オルソポジトロニウムの崩壊率

として

$$\omega = \frac{1}{4}\omega_0 + \frac{3}{4}\omega_1 \quad (3.6)$$

であたえられる。

(1.5) 式ではスピン偏極のない場合を考えていたので4で割って平均化していたことに注意すると、 1S 状態のパラポジトロニウムが 2γ 崩壊する確率は、始状態のスピンが偏極しているので (1.5) 式に対して4倍を考えることになるので

$$\omega_0 = \sigma\phi = |\Psi_{100}|^2 \pi r_0^2 \times 4 = \frac{m}{2}\alpha^5 \quad (3.7)$$

によって与えられる。これは質量の次元を持つので、単位系を直すために $\frac{c^2}{\hbar}$ を掛ければ時間の逆元になる。

よってパラポジトロニウムの崩壊率 ω_0 は

$$\omega_0 \simeq 0.81 \times 10^{10} (s^{-1}) \quad (3.8)$$

したがって寿命は

$$\tau_0 = \frac{1}{\omega_0} \simeq 1.25 \times 10^{-10} (s) \quad (3.9)$$

と求まる。

これは2.2節で求めた物質中での陽電子の寿命とほとんど変わらないことがわかる。

オルソポジトロニウムの寿命

次に 3γ に崩壊するオルトポジトロニウムの寿命を計算する。

3γ 崩壊のファインマンダイアグラムは次の2つを含む6つのダイアグラムからなる。残りの4つは終状態を入れ替えたものである。

2γ への崩壊と比べるとバーテックス $(-ie\gamma)$ が1つ増えるので、断面積を比べて

$$\frac{\sigma_{3\gamma}}{\sigma_{2\gamma}} \simeq e^2 \simeq \alpha \quad (3.10)$$

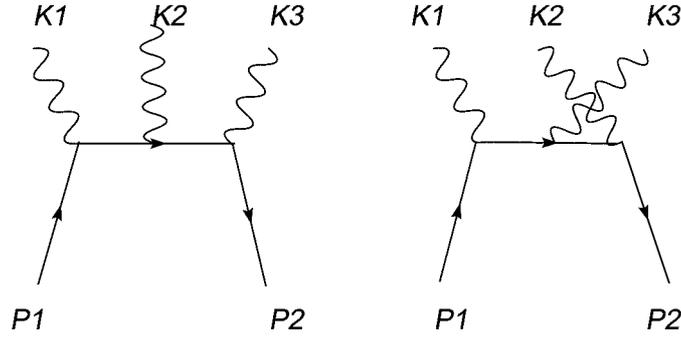


図 7: 3 γ 消滅のファインマンダイアグラム

となるので、自由な e^+e^- が 3 γ へ崩壊する断面積は 2 γ 崩壊に比べて、およそ $\frac{1}{137}$ ほど小さいことが分かる。

厳密な断面積の計算は 1 節と同様にダイアグラムから計算でき

$$\sigma_{3\gamma} = \frac{4(\pi^2 - 9)}{3v} r_0^2 \alpha = \frac{4(\pi^2 - 9)}{3vm^2} \alpha^3 \simeq \frac{1}{376} \sigma_{2\gamma} \quad (3.11)$$

と求められる。

これをもとに考えるとオルソポジトロニウムの崩壊率は

$$\omega_1 = \frac{4}{3} |\Psi_{100}|^2 v \sigma_{3\gamma} = \frac{4}{3} \frac{1}{8\pi a_0^3} \frac{4(\pi^2 - 9)}{3m^2} \alpha^3 \simeq 0.71 \times 10^7 (s^{-1}) \quad (3.12)$$

よって寿命は

$$\tau_1 = \underline{1.4 \times 10^{-7} (s)} \quad (3.13)$$

となる。

したがってパラとオルソ、つまり 2 γ と 3 γ に崩壊する確率を比較すると、オルソポジトロニウムが 3 γ に崩壊する確率はパラポジトロニウムが 2 γ に崩壊する確率の $\frac{1}{1000}$ 程度である。

実際には物質中で形成されたポジトロニウムの e^+ は、周りに存在するスピン反平行の e^- と 2 γ の対消滅をする。これを Pick-off 消滅という。3 γ 崩壊の確率はさらに小さなものとなる。

したがって物質中での対消滅はほとんど



のパターンで起こる。

4 まとめと考察

ここまでの議論では物質中を走る e^+ が減速されて低速になるまでの時間は考えておらず、飛程（数ミリ）をその目安にした。しかし、低速になった e^+ がどのように対消滅するかはこの減速過程とは関係がないため結果として周りの物質との相互作用によって低速になった e^+ がどのように対消滅をするかを考えればよい。対消滅の様子をまとめると図8のようになる。

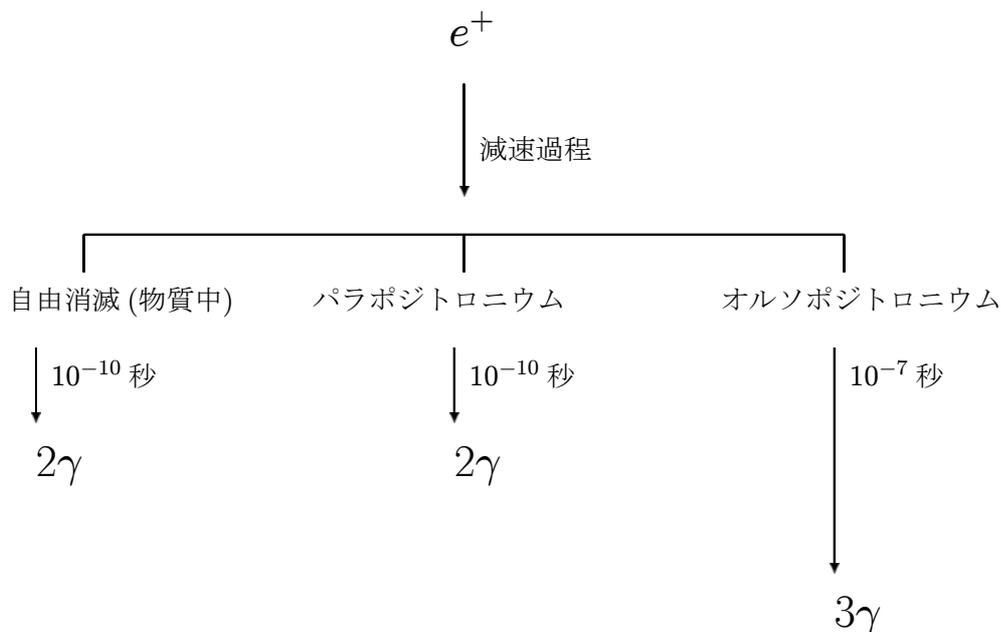


図 8: オルソポジトロニウム

3節の結果によると最も優勢な反応は 2γ 崩壊で、 3γ 崩壊が起こるのはその $\frac{1}{1000}$ で、これは少ない。もし対消滅の位置を決めるために、 2γ とともに 3γ 崩壊も有意な量を取るには、線源の量を増やして事象の回数を増やさなければならない。

しかし、PETでは放射性核種を体内に取り込むため人体への影響を最小にすべきである。このため接種する核種の量は位置を決定するために、十分なデータが得られる最低の元の量にとどめなければならない。

2γ 崩壊では大まかにみると2回の事象を捉えられれば対消滅のだいたいの位置情報が得られる。したがって実質的には $2\gamma \times 2$ 回の事象に対して、 3γ はその $\frac{1}{500}$ だけ検出される。 3γ 崩壊で現在行われている 2γ 崩壊と同じ感度の検出をするためには、

- 接種する薬剤の量を数100倍にする
- 検出器の感度（検出効率）を上げる

のどちらかであるが、どちらも現実的ではない。したがって結論として、PET の検出で考えるべき対消滅の反応は、



の反応を考えればよく、断面積の振る舞いからほとんど静止状態で消滅するため反対方向に放出される 2 γ を検出すればよい。

5 Positron Emmission Tomography の原理

5.1 PET の概要

Positron Emmission Tomography (PET) : 陽電子放射断層撮影法とは、今までに議論してきた陽電子対消滅による放出 γ 線を測定することで、病巣などを発見する核医学検査法の一つである。PET のほかに、良く知られた放射線医学検査法として X 線 CT (computed tomography) などがある。これは体外から照射した X 線が人体をどのように透過するかを見るもので臓器や疾患による何等かの異常による吸収係数の違いから断層画像を再構成する方法で、体の内部の情報を形として見ている。

これに対し PET は、放射線源としてブドウ糖やアミノ酸などの一部を放射性同位体で置き換えた放射性薬剤を直接体内に注入し、体内のある場所に集積した核種から放出される e^+ が対消滅をして放出される γ 線を直接検出器でとらえるもので、体内の代謝の情報を得ているという点で異なる。PET 検査に用いられる放射性核種にはブドウ糖の一部を ^{18}F で置き換えた ^{18}F -FDG などがよく使われる。糖は 脳・心筋などに集まる性質があるためこのような部位の正常な代謝が行われているかを調べることができる。また、癌細胞は正常な細胞に比べて 3 ~ 8 倍ほど糖を集める性質があるため、正常な細胞との識別が可能で、癌の早期発見を可能にする。

5.2 放射性薬剤

PET 検査に限らず人体に投与される放射性薬剤は以下のことに注意しなければならない。

- 人体への影響が少ないことと高い検出率をえるために透過性の高い放射線を選ぶ
このため対消滅によって γ 線を放出する β^+ 崩壊核種や電子捕獲をする核種を選ぶ。逆に α 崩壊や、 β^- 崩壊をする核種は透過性が悪いため検査用の薬剤としては適していない。これらの核種は治療用に用いられる。
- 検査の長さに応じた半減期を選ぶ
人体に取り込む場合は被曝線量を考えると出来るだけ短い半減期の核種を選ばなければならない。またあまり短い半減期では検査が終わるまでに減衰してしまうので、一般には検査終了までの 0.7 倍程度の半減期を持つものがよい。

現在 PET 検査のために最も使用されている放射性薬剤はブドウ糖の分子構造の一部を ^{18}F で置き換えた $^{18}\text{F} - \text{FDG}$ である。

^{18}F は半減期 109 分で β^+ 崩壊をする。放出される e^+ の初期エネルギーは 0.63MeV である。 $^{18}\text{F} - \text{FDG}$ の分子構造は図のようになっている。

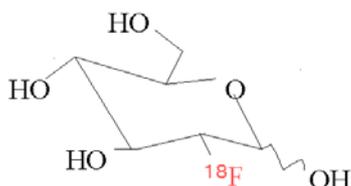


図 9: $^{18}\text{F} - \text{FDG}$ の分子構造

PET に用いられる核種は他にも

^{11}C : 神経伝達機能測定に使用

^{13}N : 心筋代謝測定に使用

^{15}O : 脳循環代謝測定に使用

などがある。これらの物理的な特性をまとめると

核反応式	得られる核種	半減期 (分)	陽電子の最大エネルギー (Mev)	陽電子の最大飛程 (平均飛程)m
$^{14}\text{N}(P, \alpha)^{11}\text{C}$	^{11}C	20.39	0.960	3.9 (1.1)
$^{16}\text{O}(P, \alpha)^{13}\text{N}$	^{13}N	9.965	1.198	5.1 (1.5)
$^{14}\text{O}(d, n)^{15}\text{O}$	^{15}O	2.037	1.732	8.0 (2.5)
$^{18}\text{O}(p, n)^{18}\text{F}$ $^{20}\text{Ne}(d, \alpha)^{18}\text{F}$	^{18}F	109.8	0.633	2.4 (0.6)

表 核種の物理的特性

のようになる。これらのうち保険診療に認定されているのは $^{18}\text{F} - \text{FDG}$ と、 ^{15}O で置換したガス状の放射性薬剤である。ここでは $^{18}\text{F} - \text{FDG}$ を用いたガン検査を具体的に取り上げる。

核種の製造

人体に投与される放射性薬剤に用いられる各種は半減期が短く、 ^{18}F などの必要な各種の合成は検査をする施設内の小型サイクロトロンで行わなければならない。

^{18}F を得る方法には $^{18}\text{F}_2$ と H^{18}F を得る方法があり、 $^{18}\text{F}_2$ は Ne ガスをターゲットに核反応 $^{20}\text{Ne} + \alpha \rightarrow ^{18}\text{O} + d$ によって得られる。

H^{18}F は ^{18}O 濃縮水をターゲットに

$^{18}\text{O} + n \rightarrow ^{18}\text{O} + P$ の核反応で製造することができる。

このようにして得られた ^{18}F をさらに化学的に合成することで $^{18}\text{F} - \text{FDG}$ を得る。

安全性

放射線能の単位には Bq を用いる。これは 1 秒間に崩壊する核種の数を表す単位である。

PET 検査では放射性核種を直接体内に入れるため、摂取する薬剤の量は人体に影響がないように十分安全な量でなければならない。

^{18}F - FDG の投薬量はがん検査の場合通常 5~10cc である。このうち、 ^{18}F は体内に薬剤を取り込むときに 180~370MBq 程*の放射能をもっている。* (参考文献 [6] より)

^{18}F は 37MBq あたりで $1.05 \times 10^{-11}\text{g}^*$ ということがわかっているのも、* (参考文献 [6] より) これから換算すると、薬剤に含まれる ^{18}F の量はほぼ $5.1 \times 10^{-11} \sim 1.1 \times 10^{-10}\text{g}$ 程度で非常に少ないことが分かる。

放射線の人体への影響は線量当量 H によって表される。これは吸収線量 D と線質係数 Q の積

$$H = D \times Q \quad [\text{Sv}] \quad (5.1)$$

によって与えられる。

吸収線量 D は、放射線が単位体積あたりに与える平均エネルギーを表し、単位は Jkg^{-1} で、この量を表す特別な単位として $1\text{Jkg}^{-1} = 1\text{Gy}$ を用いる。また、線質係数 Q は、放射線の種類やエネルギーの違いによる生体への影響の違いを表す補正係数である。線量当量 H の単位は、 Jkg^{-1} となるが $1\text{Jkg}^{-1} = 1\text{Sv}$ である。

^{18}F - FDG を用いた、PET 装置によるがん検査での被曝量は 2.2mSv 程度である。これは自然放射線による年間の被曝量約 2.4mSv とほぼ同じで、胃の X 線検査 (約 4mSv) の半分なので人体に悪影響はないとされる。

5.3 検査方法と検出原理

検出器

γ 線検出器は体軸方向に複数の検出器リングを並べた構造を持っており、1つのリングに対して円周上に多数の検出器ブロックが並んでいる。検出器のブロックはシンチレータと光電子増倍管からなる。増倍管には大きさに限界があるため1つのシンチレータに対して複数の増倍管を組み合わせている。対消滅で放射されるガンマ線はエネルギーが大きいためシンチレータは

- 1、実効原子番号が大きい
- 2、発光量が多くエネルギー分解能がよい
- 3、シンチレーション光の減衰時間が速い=時間分解能がよい

などの条件を満たすものが必要である。

一般に BGO ($\text{Bi}_4\text{Ge}_3\text{O}_{12}$) がよく用いられているが、発光時間が長く変換効率が低いという欠点があるため、LSO(Ce 添加 $\text{Lu}_2(\text{SiO}_4)\text{O}$) や GSO(Ce 添加 GdS_2SiO_5) をシンチレータとして用いた検出器も開発されている。しかし LSO や GSO は温度の上昇とともに発光効率が落ちるため冷却しながら使用しなければならない。装置固有の分解能はシンチレータの結晶幅の約 2 倍である。

したがって感度を落とさないように高分解能を得るためには、厚みを 20mm～30mm に保ったままシンチレーターの幅を小さくする必要がある。

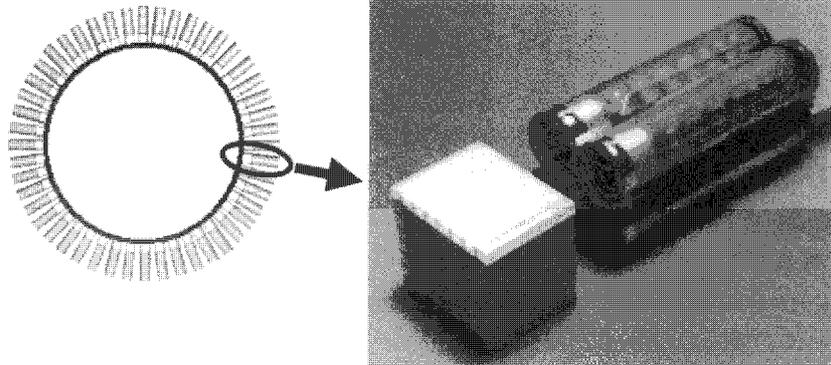


図 9: PET 装置の検出器ブロック

図 10: 増倍管

検査方法

PET (主に $^{18}F - FDG$) を用いた検査の流れは次のようになっている。

1. グランドの補正

PET 検査で収集すべきデータは 3 つある。1 つは被検体に放射性薬剤を取り込み、体内より対消滅によって放出される 2 本の γ 線を同時検出することによって得られるデータである。これをエミッションデータといい、放射性薬剤の体内の集積を見るためのメインとなるデータである。このエミッションデータに対する補正として、トランスミッションデータとブラックスキャンデータが必要である。

- トランスミッションデータ

体内での消滅 γ 線の吸収を見るもので、放射性薬剤を投与しない被検体の近くに棒状線源をおき、回転させながら吸収計数を測定する。これによって体内に吸収される γ 線の補正ができる。これは後に述べる 2D 収集法によって測定する。

- ブラックスキャンデータ

被検体なしで測定するデータで、同様に棒状線源を回転させデータ収集する。これによって装置の部分部分による検出感度のバラつきなどを補正できる。

2. 放射性薬剤の投与

まず5~6時間絶食した後、放射性薬剤 $^{18}\text{F} - \text{FDG}$ を5~10cc投与する。体内に十分薬剤が行き渡ると脳、ガン細胞などに薬剤がたまり、集った核種からは β^+ 崩壊によって e^+ が放出される。

3. 集積核種の崩壊

がん細胞などに集った核種が β^+ 崩壊によって放出した e^+ は始め0.63MeVのエネルギーを持ち、前節の議論のように、物質のなかで相互作用を受けて減速されながら2.4mm程走って、ほぼ静止状態で e^- と対消滅することになる。

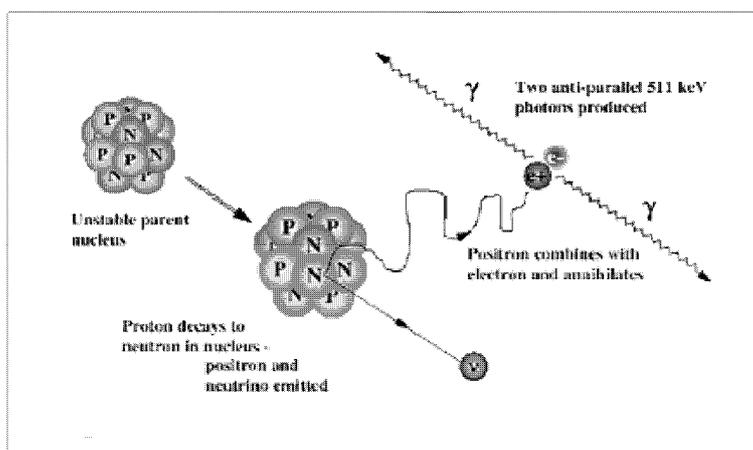


図 11: 対消滅

4. 消滅 γ 線の放出と同時計測

放出される2 γ はエネルギーと運動量を保存するため互いに反対方向ででていくので、この2本の γ 線を検出器によって同時計測する。

このとき同時に反応した検出器を直線で結ぶ線(LOR:line of response)に核種があると考えられる。集めたデータから画像を構成し、体内の核種の異常な集積を見ることでガンなどの異常を発見することが出来る。

5.4 同時計数の原理と分解能

同時計数法

陽電子対消滅により核種近傍から放出された511keVの2本の γ 線が同時に入ったときのみ計数をし、1つの検出器のみが反応した場合は計測しないように同時計数回路を組む。したがってエネルギーと、同時計測の2つの条件によって消滅 γ 線を選ぶ。

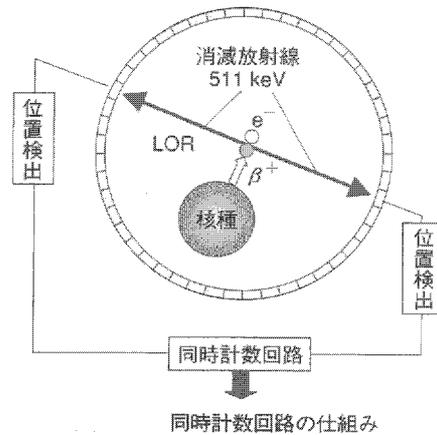


図 12: 同時計測

しかし実際には対消滅はリングの中央から離れた所でも起こるために、2本の γ 線が検出器までに届く時間はわずかに異なっているため、6~25ns程の時間幅をもって同時と考え計測する。逆にこの時間差を正確に測定することで、LOR上での核種の存在位置の情報を得ようとする装置の開発も行われている。これは Time of Flight 装置と呼ばれており、より時間分解能（発光の減衰時間が早いなどの）が良いシンチレータを用いて、時間精度を1 ns程度にできれば、核種の位置をLOR上で15cm程度にしぼることが出来る。しかしこれだけの時間精度の達成にはまだ技術的な問題が残されており、まだ実用化には至っていない。

分解能

PET装置ではLOR上に核種があるという仮定をして位置の解析を行うが、実際は対消滅の位置と核種の位置が同じではなく、陽電子の飛程分の誤差は必ず存在する。飛程の長さは β^+ 崩壊により放出された e^+ の始状態のエネルギーで与えられ、飛程が長くなるほど分解能は劣化する。PET装置でよく用いられる ^{18}F は他のPET用の核種に比べ始状態のエネルギーが小さいため分解能の劣化が抑えられることが分かる。

また、実際には対消滅の時に電子が持っているわずかわずかな運動エネルギーのため、次の図13のように2本の γ 線は 180° から 0.25° 程のずれ（角度動揺）を生じる。したがって検出器の距離が長くなるほど影響は大きくなり、100cmにつき約2.2mmの誤差を生じる（参考文献[6]より）。

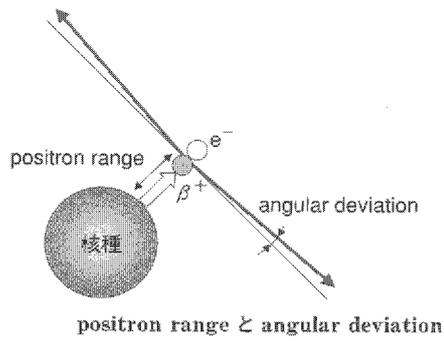


図 13: 角度動揺

対消滅から得られる真の計測の他に、以下の図 14 のような誤差要因もノイズとして加わる。

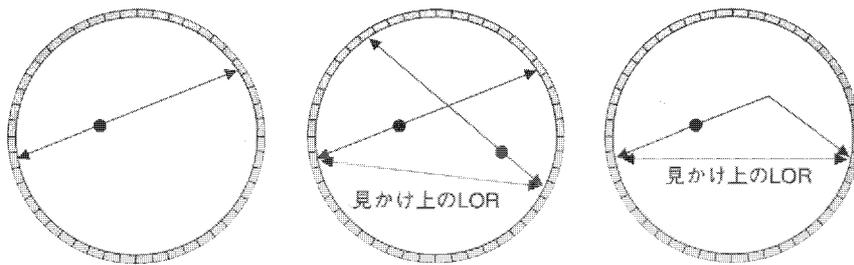


図 14: 真の同時計数

偶発同時計数

散乱同時計数

1. 偶発同時計数

同時に二箇所ところで対消滅がおき、それぞれ一方を同時計測した場合図 14 のように誤った LOR の情報が加わる。

2. 散乱同時計数

消滅 γ 線はコンプトン散乱によって曲げられ、見かけの LOR をつくる事もある。これらのノイズを軽減させるためには検出器の時間分解能をあげて、真の計数と区別しなければならない。

体軸方向のデータ収集

体軸方向のデータ収集については図のように一般に 2D と 3D の 2 通りのデータ収集法がある。

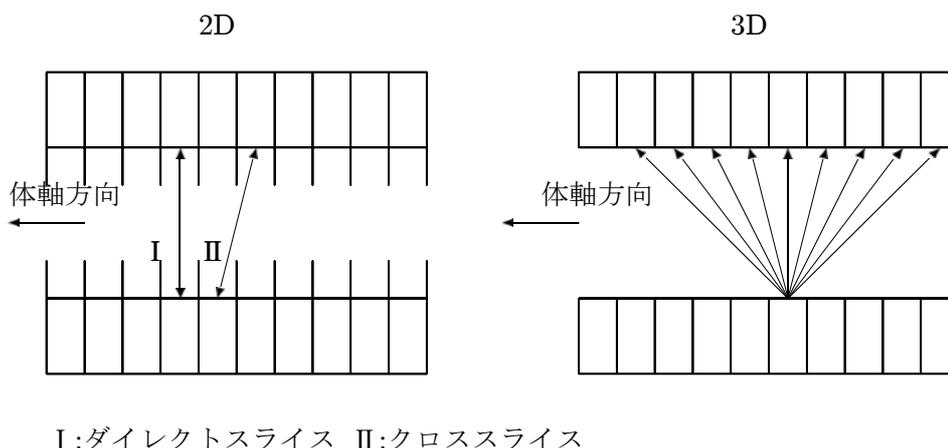


図 15: 2D 収集と 3D 収集

①. 2D 収集

基本的には体軸と直交する消滅 γ 線のみを検出する平面的な計測法である。

1つのリング内で結ぶ LOR はそのリングの幅の中心の断面情報（ダイレクトスライス）として考える。

しかし、これだけでは感度が不十分なので隣り合うリングに入る消滅 γ 線の情報も取り出し、2つのリングで検出された LOR は2つのリングの間での断面スライスとして処理する（クロススライス）。

そのほかの離れたリング間の γ 線はセプタと呼ばれるスライスシールドで遮断する。このため散乱同時計数や偶発同時計数などの、ノイズは軽減される。また斜め方向からのデータをほとんど取らないため装置の中央と端で感度の差がないことに利点がある。しかしほとんどの消滅 γ 線をカウントしないため感度が鈍いことが欠点である。

②. 3D 収集

セプタを取り除いて斜め方向からの入射光も検出し、すべてのリング間での LOR を検出できる。したがって原理的には 2D 型よりも感度が上がり（5～10 倍）、薬剤の投与の量を軽減できる。2D 収集で ^{18}F - FDG を投与する場合少なくとも 200MBq 程度の ^{18}F が必要であるが、40MBq 程度に軽減できる。

欠点としては検出器の中央と端の部分で感度に差が出るため、補正が必要となることと、1つ次元が増えるためデータから画像を構成する際の計算が複雑化し、画像構成に時間が

かかること、またセプタによる遮断がなくなったため、2D 収集では抑えられていた偶発同時計数などが増える、等の問題があるため実際には2倍3倍の程度の感度の向上である。

3D 収集の PET 装置で現在最も高い分解能の装置は 3.5mm 程の分解能を持つ。

5.5 次世代の PET

最後に現在研究開発が行われている最新の PET 装置について紹介をする。3D 収集における利点は 2D 収集より高感度が得られるというところにあった。現在ではこの 3D 収集における高感度を保ったままさらに分解能を上げようという研究がされている。シンチレーターの厚みと感度は比例するので、この厚みを最大の 30mm 程度に保ったまま幅を 4mm 以下に狭めなければならない。しかし、シンチレーターの厚み（深さ）が増すとさらに斜め方向から来る γ 線をとるため分解能は下がる。シンチレーターの厚みによる分解能の劣化をふせぐために

- 体軸方向のどのリングで検出されるかという情報
- 1つのリング上でどの検出器が反応したのかという情報
- 検出器の厚み方向の位置情報

の3つの情報をとる。この3つめの深さに関する情報が新しいもので DOI (Depth Of Interaction) と呼ばれる。具体的には同時計測による LOR が素子中の奥行きに対してどこにいるかを表す情報で、現在開発が行われている。DOI 検出器は次のような概念図で説明される。

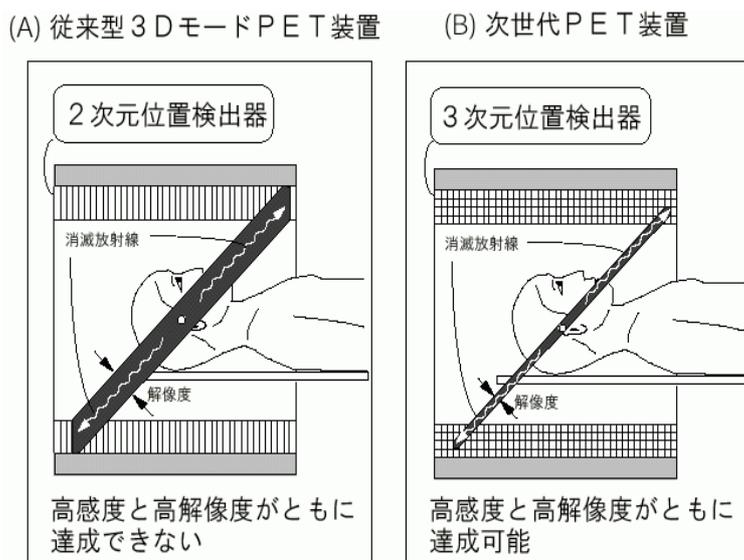


図 16: 立体計測型 PET (出典：放射線医学研究所)

もし実用化されれば、分解能 3mm で感度が現在の 3 倍にまで PET の性能を上げることが出来る。

5.6 まとめ

PET 検査では核種を取り込み体内の代謝をみるということに MRI や CT などの従来の検査法とは異なる特徴をもっている。これによって、MRI や CT では形として認識できない数ミリの初期の段階のガンも発見できる。これは PET がガンの形を見るものではなく、活動を見ているためにできることである。

また代謝を見るという PET 本来の特徴を生かし、脳の糖代謝を見てこれを正常な脳の活動状態と比較すれば、アルツハイマーなどの病状把握にも役立たせることができる。

さらに ^{15}O で標識した H_2^{15}O などを放射性薬剤として投与すれば、心筋への血流量を調べられ虚血性の心疾患などの診断ができる。これは MRI や CT では出来ないことである。

検出器の改良としては、感度と分解能を同時にあげるための努力がされている。具体的には、高感度で高いエネルギー分解能と時間分解能をもつシンチレータの開発や、前の節で説明した DOI 検出器などが研究されている。

また散乱同時計数や、偶発同時計数によるノイズをいかに取り除くかということも重要な課題である。

参考文献

- [1] J.J.Sakurai
「Advanced Quantum Mechanics」 Addison-Wesley Publishing Company, (1984)
- [2] Michael E.Peskin ,Daniel V. Schroeder 「An Introduction to Quantum Field Theory」
Addison-Wesley Publishing Company,(1996)
- [3] J.M.Jauch ,F.Rohrlich 「The Theory Of Photons And Electrons」
Addison-Wesley Publishing Company,(1955)
- [4] ハイトラ著 沢田 克郎訳 片山 泰久解説
「輻射の量子論」(上)(下) 吉岡書店,(1974)
- [5] 谷川庄一郎 物理学最前線「陽電子を用いた表面研究」
共立出版株式会社 (1985)
- [6] 佐々木雅之 桑原康雄 診療放射線技術選書「核医学検査技術学」 南山堂 (2004)
- [7] 上原周三 診療放射線技術選書「放射線物理学」 南山堂 (2002)
- [8] 伊藤泰男 鍛冶東海 田畑米穂 吉原賢二
「素粒子の化学」 学会出版センター (1985)

[9] Franz Gross 「Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory」
WILEY INTERSCIENCE (1993)

参考 web

<http://mext-atm.jst.go.jp/atomica/pict/08/08020104/07.gif> (原子力百科事典 ATOMICA)

<http://www.nirs.go.jp/randd/anzen/building.shtml> (放射線医学研究所)