

Casimir 効果

実藤俊史

素粒子 (佐藤丈) 研究室

理学部物理学科

4 0 1 2 2

平成 16 年 2 月 4 日

1 Casimir 効果とは

場の理論によると、真空中に存在する電磁場は電荷のない空間でも完全に消えることなく、つねに揺らぎが存在している。これが零点振動と呼ばれるものである。

揺らぎの振動数を ω_n としたとき、このゆらぎが持つエネルギーは

$$E_n = \frac{\hbar\omega_n}{2} \quad (1)$$

という、振動数に比例したエネルギーであることが知られている。

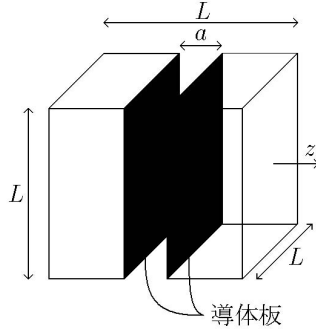
真空が持っているエネルギー全体を考えると、揺らぎの種類は無限個あるので、その合計は

$$\frac{\hbar}{2} \sum_n \omega_n \quad (2)$$

となり、これは無限大になってしまう。しかし実際に我々が観測できるのはあくまでエネルギーの“差”であるので、普遍的に存在するこのエネルギーは通常は観測されることはない。このことから多くの場合、このエネルギーは無視されている。だが真空の状態に変化が起き、それによって揺らぎの数にも変化が起こるとそこにはエネルギーの差が生まれるので、その分の寄与は観測にかかることになる。

この現象は H.B.G. Casimir が初めに提案したために [1]、このときに現れるエネルギーは Casimir エネルギーと呼ばれ、またこの効果は Casimir 効果と呼ばれる。

2 平行板での Casimir 効果



Casimir 効果が出現する最も簡単な例である、わずかな距離を隔てて平行に向かい合った 2 枚の完全導体板をの例を考えてみる。(図 1)。計算の都合上、空間を全体積が一辺 L の立方体であるとし、後に $L \rightarrow \infty$ の極限をとる。(従って導体板の面積も無限となる。) また板の間隔を a とし、 z 軸として板に垂直な方向をとる。

図 1: 向かい合った完全導体板

まず図 1 の平行板の間の零点振動のエネルギーを計算する。

板がある場合、完全導体の表面で電場は 0 となるため板の間で許される電場は、 $\exp[i(k_x x + k_y y)] \cos k_z z$ の形になる。このことから板がある場合の波数 k がとることのできる値は

$$k_x = \frac{2\pi n_x}{L}, \quad k_y = \frac{2\pi n_y}{L}, \quad k_z = \frac{\pi n_z}{a} \quad (3)$$

ここで $n_x, n_y = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, n_z = 0, 1, 2, \dots$ である。

したがって板のある場合の角振動数は

$$\omega'_k = c \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} \quad (4)$$

となる。

同様にして板がない場合を考えると、波数 k は

$$k_x = \frac{2\pi n_x}{L}, \quad k_y = \frac{2\pi n_y}{L}, \quad k_z = \frac{2\pi n_z}{L} \quad (5)$$

ここで $n_x, n_y, n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ である。従って板がない場合の角振動数は

$$\omega_k = c \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \quad (6)$$

となる。

それぞれの場合について取りうる状態数を考える。

電磁波の偏極が 2 通りあることを考慮すると

$$\begin{aligned} 2 \sum_n &= 2 \frac{L^2}{(2\pi)^2} \sum_{n_z} \iint dk_x dk_y & (\text{板があるとき}) \\ 2 \sum_n &= 2 \frac{L^3}{(2\pi)^3} \iiint dk_x dk_y dk_z & (\text{板がないとき}) \end{aligned} \quad (7)$$

ただし $L \rightarrow \infty$ の極限を考えると $2\pi n/L$ を連続量みなし、これらについては和ではなく積分を用いている。

$n_z = 0$ モードは導体板に沿って進む波なので、このモードだけは偏極が 1 通りしかないので、 n_z の和を負の数までとってもその分全体を $1/2$ にするだけでよく、(2)、(7) より板があるときの単位体積あたりの零点振動のエネルギーは

$$E' = \frac{\hbar}{4a} \int \frac{dk_1 dk_2}{(2\pi)^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega'_k \quad (8)$$

このままではうまく計算できないので、高周波成分の寄与を抑える減衰関数を導入して

$$E' = \frac{\hbar}{4} \int \frac{dk_x dk_y}{(2\pi)^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega'_{\mathbf{k}} e^{-\delta \omega'_{\mathbf{k}}} \quad (9)$$

とし、後にパラメーター δ について $\delta \rightarrow 0$ の極限をとる。

同様にして板がない場合は

$$E = \frac{\hbar}{(2\pi)^3} \int dk^3 \omega_{\mathbf{k}} e^{-\delta \omega_{\mathbf{k}}} \quad (10)$$

となる。

この2つの量の差が問題となる訳だが、差をとる前に計算しやすいようにこれらを少し変形する。

(9) について、 $\rho \equiv \frac{a^2}{\pi^2} (k_x^2 + k_y^2)$ とすると、系の z 軸に垂直な方向での対称性から

$$\iint dk_x dk_y = \frac{2\pi^3}{a^2} \int_0^\infty \rho d\rho \quad (11)$$

従って

$$E = \frac{c\hbar\pi^2}{4a^4} \int_0^\infty \rho d\rho \sum_{n_z=-\infty}^{\infty} \sqrt{\rho^2 + n_z^2} e^{-\delta \omega'_{\mathbf{k}}} \quad (12)$$

同様に (10) について、 $\rho \equiv \frac{a^2}{\pi^2} (k_x^2 + k_y^2)$ 、 $t \equiv \frac{a}{\pi} k_z$ とすると

$$E = \frac{c\hbar\pi^2}{4a^4} \int_0^\infty \rho d\rho \int_{-\infty}^\infty dt \sqrt{\rho^2 + t^2} e^{-\delta \omega_{\mathbf{k}}} \quad (13)$$

となる。

こうして板がある場合とない場合のエネルギーの差をとると (12)、(13) より

$$\begin{aligned} \Delta E_V &= E' - E \\ &= \frac{c\hbar\pi^2}{4a^4} \int_0^\infty \rho d\rho \left\{ \sum_{n_z=-\infty}^{\infty} \sqrt{\rho^2 + n_z^2} e^{-\delta \omega_{\mathbf{k}_{\perp, n_z}}} - \int_{-\infty}^\infty dt \sqrt{\rho^2 + t^2} e^{-\delta \omega_{\mathbf{k}}} \right\} \\ &= \frac{c\hbar\pi^2}{2a^4} \int_0^\infty \rho d\rho \left\{ \sum_{n_z=0}^{\infty} \sqrt{\rho^2 + n_z^2} e^{-\delta \omega_{\mathbf{k}_{\perp, n_z}}} - \int_0^\infty dt \sqrt{\rho^2 + t^2} e^{-\delta \omega_{\mathbf{k}}} - \frac{\rho}{2} \right\} \quad (14) \end{aligned}$$

ここで2行目に移るところで和と積分の区間を0から ∞ に変えており、そのため和の項から $\rho/2$ が出てきている。

この計算を行うために、和の項について考えてみる。

はじめに次のような関数を考える。

$$\frac{f(-iz)}{1 - e^{-2\pi z}} \quad (15)$$

ただし $f(z)$ は $z \rightarrow \infty$ で0に収束する関数とする。

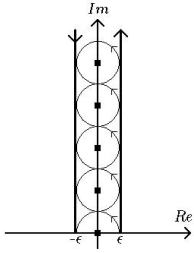
この分母を見ると $z = in$, ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) に特異点を持つことが分かる。ある特異点 $z = in_1$ 近傍で $e^{-2\pi z}$ を展開すると、

$$e^{-2\pi z} = 1 + \{-2\pi(z - in_1)\} + \frac{1}{2!}\{-2\pi(z - in_1)\}^2 \quad (16)$$

従って特異点として $z = in_1$ のみを含む閉じた経路 C で (15) を積分すると

$$\begin{aligned} & \oint_C \frac{f(-iz)}{2\pi(z - in_1)} \frac{1}{1 + \frac{1}{2!}\{-2\pi(z - in_1)\} + \dots} dz \\ &= 2\pi i \cdot \frac{f(n_1)}{2\pi} \frac{1}{1 + \frac{1}{2!}\{-2\pi(in_1 - in_1)\} + \dots} \\ &= if(n_1) \end{aligned} \quad (17)$$

となる。



このことを踏まえると、無限個の点での周回積分は左図のように特異点からわずかに右にずれた経路とわずかに左にずれた経路での積分の和と考えられる。従って今は 0 から ∞ で考えているので $z = 0$ の寄与が $1/2$ だけ入ってくることも考慮すると、無限個の和は次のようになる。

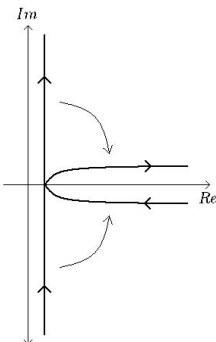
$$\begin{aligned} \sum_0^\infty f(n) &= -i \int_{i\infty-\epsilon}^{i0-\epsilon} \frac{f(-iz)}{1 - e^{-2\pi z}} dz - i \int_{i0+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} \frac{f(-iz)}{1 - e^{-2\pi z}} dz + \frac{1}{2}f(0) \\ &= i \int_{-i\infty+\epsilon}^{i0+\epsilon} \frac{f(+iz)}{1 - e^{+2\pi z}} dz - i \int_{i0+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} \frac{f(-iz)}{e^{+2\pi z} - 1} e^{+2\pi z} dz + \frac{1}{2}f(0) \\ &= -i \int_{i0+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} f(-iz) dz - i \int_{i0+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} \frac{f(-iz)}{e^{2\pi z} - 1} dz - i \int_{-i\infty+\epsilon}^{i0+\epsilon} \frac{f(iz)}{e^{2\pi z} - 1} dz + \frac{1}{2}f(0), \quad (18) \end{aligned}$$

ここで 2 行目から 3 行目に移るところで、第 1 項に対して $z \rightarrow -z$ の変換をしている。

最後の行の第 1 項について、 $-iz = t$ という変数変換をすると、 $\epsilon \rightarrow 0$ を考えて

$$-i \int_{i0+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} f(-iz) dz = \int_0^\infty f(z) dz \quad (19)$$

となる。



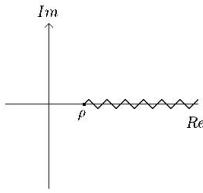
第 2 項について、左図のように積分路を折りたたんで考えてみると、 $\epsilon \rightarrow 0$ を考えて

$$-i \int_0^\infty \frac{f(-iz)}{e^{2\pi z} - 1} dz \quad (20)$$

となり、同様に第 3 項は

$$i \int_\infty^0 \frac{f(iz)}{e^{2\pi z} - 1} dz \quad (21)$$

となる。



ここで $f(iz)$ のブランチポイントは $z = \rho$ にあるので、カットを左図のように実軸上に入れる。このとき $z \geq \rho$ では

$$f(iz) - f(-iz) = 2i\sqrt{z^2 - \rho^2} \quad (22)$$

となり、 $z \leq \rho$ ではキャンセルし、結果として (18) は

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\rho^2 + n^2} = \int_0^{\infty} dt \sqrt{\rho^2 + t^2} - 2 \int_{\rho}^{\infty} \frac{\sqrt{t^2 - \rho^2}}{e^{2\pi t} - 1} dt + \frac{1}{2}\rho \quad (23)$$

となる。

こうして和の項を積分で書き直すことができた。これを (14) に代入すると

$$\begin{aligned} \Delta E_V &= -\frac{c\hbar\pi^2}{a^4} \int_0^{\infty} \frac{dt'}{e^{2\pi t'} - 1} \int_0^t \rho \sqrt{t'^2 - \rho^2} d\rho \\ &= -\frac{c\hbar\pi^2}{3a^4} \int_0^{\infty} \frac{t'^3 dt'}{e^{2\pi t'} - 1} \\ &= -\frac{c\hbar\pi^2}{3a^4} \frac{1}{(2\pi)^4} \int_0^{\infty} \frac{dx x^3}{e^x - 1} \end{aligned} \quad (24)$$

となる。ただし2行目から3行目に移るところで $2\pi t = x$ と置き換えている。ところでこの積分の部分をよく見ると、これは ζ 関数

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt \quad (25)$$

の形になっているので、 $\zeta(4) = \pi^4/90$ 、 $\Gamma(4) = 3! = 6$ から

$$\int_0^{\infty} \frac{dx x^3}{e^x - 1} = 6 \frac{\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{15} \quad (26)$$

従って

$$\Delta E_V = -\frac{c\hbar\pi^2}{720a^4} \quad (27)$$

これは単位体積あたりのエネルギーの増加分である。単位面積あたりの増加分 ΔE_a は ΔE_V に a をかけて得られるので

$$\Delta E_a = -\frac{c\hbar\pi^2}{720a^3} \quad (28)$$

となる。

こうして2枚の板は帯電していないにもかかわらず、その間にエネルギーを持つことが分かった。2枚の板の間に働く力は

$$\begin{aligned} F(a) &= -\frac{\partial \Delta E_a}{\partial a} \\ &= -\frac{\hbar c \pi^2}{240a^4} S \end{aligned} \quad (29)$$

であり、これは a を小さくする方向に働く、すなわち引力である。

こうして最も簡単な Casimir 効果が出現する例の理論的な計算を見てきたが、実際にこの測定は Sparnaay によって行われている [2]。Casimir 効果の測定は (29) から分かるように、現れる力が非常に小さいため困難である。Sparnaay は実験を行う上で必要なこととして

- 1 表面が完全にきれいであること
- 2 板の間隔の、正確で再現性のある測定を行うこと
- 3 板が電荷を持たないようにし、板の間に電氣的な力が働かないようにすること

と述べている。

Sparnaay は導体板として Al-Al、Cr-Cr、Cr-steel の 3 種の組み合わせを用い、その結果 Cr-Cr と Cr-steel では板の間に引力が観測されたが、Al-Al では逆に斥力が観測された（これは表面の汚れが原因と考えられている）。また観測された引力の値も理論値に対して 100 % 程度の不定性があり、Casimir 効果を確認するまでにはならなかった。しかしこれは Casimir 効果の兆候を測定した初めての実験であった。

3 板と球での Casimir 効果

先の平行板を使った実験では改良すべき問題として上に述べた 3 つの点に加えて、“ 2 枚の板を完全に平行にしなければならない ” という問題がつかまとう。実際の導体板にはゆがみもあるであろうから、実験上これは非常に難しい問題である。だが、2 枚の板を用いるのではなく、向かい合った球と板を用いると根本的に平行性の問題は生じなくなるので、この問題は解決できる。この方法を使った測定は Lamoreaux によって初めて行われた [3]。

まず、この球と板の場合の Casimir 効果の理論的な計算について考えてみる。

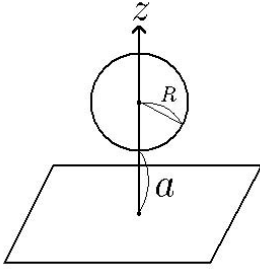


図 2 のように完全導体板の上に完全導体球が存在する系を考える。ここで球の半径を R 、球と板が最も接近するところでの間隔を a とする。ただし $a \ll R$ とする。また、導体板は無限に広いとする。

図 2: 板と球の場合

板と球の間のエネルギーは、球を曲面ではなく板に平行な微小な板の集まりと考え、さらに球の上半面による寄与、また下半面でも平行でない部分による寄与を無視することによって近似的に与えられる。これを式で書くと

$$E_s = \int_{\Sigma} \Delta E_a(z) d\sigma \quad (30)$$

と表される。ここで E_p は先に求めた平行板の間のエネルギーである。また Σ は板と向かい合っている部分の球面で、 $d\sigma$ は球面の微小部分である。

このとき2つの境界の間に働く力 $F_s(a)$ は次で与えられる。

$$F_s(a) = -\frac{\partial E_s}{\partial a} = 2\pi R \Delta E_a(a) \quad (31)$$

(27) を代入すると

$$F_s(a) = -\frac{\pi^3 \hbar c R}{360 a^3} \quad (32)$$

となり、板と球の場合の Casimir 効果が求められた。

しかしこれは理想的な場合のことであり、現実には板の面積の有限さや表面の粗さ、金属の有限な伝導度、有限な温度、また2つの境界の金属の種類が違ふ場合や表面をコーティングした金属を使う場合など、様々な実際上の問題に応じた補正が加えられることになる。このうち特に温度による補正は理論的にもまだ完全には出来上がっていない。

Lamoreaux が行った実験では5%の精度で Casimir 効果が検出されたと結論付けられたが、その後温度や誘電率の補正に誤りがあることがわかり、はっきりした結果にはなっていない。この後もより改良された実験（例、[4]）が行われているが、ここでは R.S.Decca らによる実験 [5] を取り上げてみる。



図 3: R.S.Decca らの用いた装置の概観

R.S.Decca らの実験も球と板を用いたもので、図 3 に示されるような装置を使っている。この原理は球と板の間に生じた力が板の回転力となり、これを板の下にある2つの電極で静電容量の変化として検出するというものである。また表面の粗さは AFM (Atomic Force Microscope) を使って測り、この結果を補正の計算に組み入れることで回避している。こうして得られた実験値 $F_{exp}(z_i)$ と様々な補正を加えた理論値 $F_{th}(z_i)$ との差

$$\Delta F = F_{th}(z_i) - F_{exp}(z_i) \quad (33)$$

を表したものが図 4 である。ただし z は測定したときの球と板の間隔で、添え字の i は測定が複数回行われているため、これらを区別するために付けている。

測定は図 4 の 250 個の点に対し各々19回ずつ測定しているため、平均二乗誤差

$$\sigma = \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [F_{th}(z_i) - F_{exp}(z_i)]^2 \right\}^{1/2} \quad (34)$$

を求めるとその値は $\approx 0.6\text{pN}$ となる。さらに特に誤差の大きい z の小さい（板と球が接近している）部分を除き、 $z \geq 400\text{nm}$ だけで考えると $\sigma \approx 0.45\text{pN}$ となる。このとき誤差の平均は -0.045pN となり、Casimir 効果の存在はかなり良い精度で確認されたといえるだろう。

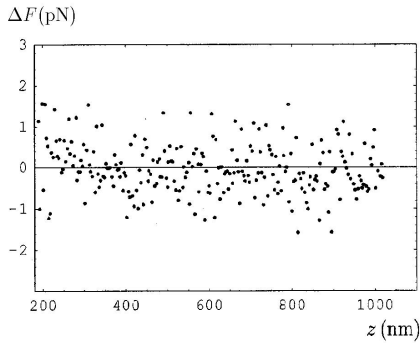


図 4: 測定された誤差の分布

4 Casimir 効果の応用

ここでは Casimir 効果の応用について述べる。ここまでは Casimir 効果をただ「板の間に働く力」として見てきたが、微小な空間で働くこの効果は物理学の様々な分野で応用されている。これらをここで列記してみる。

場の量子論では、3つの主な応用がある。1つ目は、量子色力学でのハドロンの bag 模型で、クォークやグルーオン場の Casimir エネルギーが核子の全エネルギーに重要な寄与を与えることである。2つ目は、Kaluza-Klein 理論で、余剰次元の自発的なコンパクト化のメカニズムの1つを Casimir 効果が与えるというものである。3つ目は、統一ゲージ理論や超対称性、超重力、弦理論などによって予言される軽い素粒子や、長距離相互作用のパラメーターに対して強い制限を与えることである。

凝縮系の物理では、幾何学的な形状や温度などに依存し、空間的に近づいた境界の間の引力や斥力を与え、表面張力や潜熱の研究で必要となる。

原子核物理学では、Rydberg 状態のエネルギー準位を導く。

宇宙論では、宇宙定数の原因となり、インフレーションが起きるときの重要な役割を担う。

また、物理学の範囲を超えて機械工学の分野でも Casimir 効果をエネルギー源としたマイクロマシンの開発がすでに行われている [6]。

5 まとめ

本論文では板の間の距離が変わらない場合の Casimir 効果（静的 Casimir 効果）だけについて述べているが、Casimir 効果には板の間隔が時間に応じて変わる動的 Casimir 効果もある。

境界は理想的に外場が集中したものと考えられるので、板の間隔が時間的に変わることは外場が時間的に変化することに対応する。このとき真空から粒子の生成が起こることが知られていて、この効果によって得られるエネルギーなども複雑なものになる。

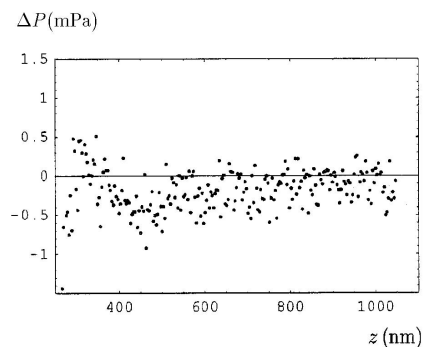


図 5: 動的 Casimir 効果の誤差の分布

[5] では動的 Casimir 効果の実験も行われているが、その結果から (33) と同様にして求めた誤差を表したグラフが図 5 である。これを見ると全体にやや誤差があり、特に z が小さいところで誤差が大きくなっていることが分かる。 $(\sigma \approx 0.5 \text{ mPa})$ 、ただし 235 個の点に対し 5 回ずつ測定している。) ここでは理論値の熱補正に誤りがあることを考えて他の種類の補正を用いての計算も行っているが、いずれも誤差はの場合よりもむしろ大きくなってしまっている。このことから動的 Casimir 効果は兆候は確かめられたといえるが、確認されたとはまだ言えないようである。

しかしながら Casimir 効果の測定は近年急速に発展しているので、近いうちに動的 Casimir 効果の存在も確認されるかもしれない。

Casimir 効果は量子効果が巨視的に現れる数少ない例の一つである。またその応用範囲も物理学の広い分野にわたっており、さらには機械工学的な分野にも広がりつつある。Casimir 効果の理論的

な面は、根本的な部分については、ほぼ出来上がっており、今後の課題は実際の物質への応用である。すなわち有限な温度、有限な伝導度、表面の粗さなどをどうやって解決するかである。先にも述べたように温度補正の理論的な部分はまだ問題が残っている。この問題の解決には理論的な発展はもちろんだが、しかし測定技術の面でも、でより低温での実験を行えるような方法を開発することができれば回避することもできる。もっともこれらの問題の解決は簡単ではないだろう。しかし近年急速に発展しているテーマなので、このような問題も理論や測定技術の両面からの発達によっていつかは解決されるであろう。今後のますますの発展が期待される。

参考文献

- [1] H.B.G.Casimir. Proc.Kon.Nederl.AkandWet.51(1948)793.
- [2] M.J.Sparnaay. Physica 24 (1958) 751.
- [3] S.K.Lamoreaux. Phys.Rev.Lett.78 (1997) 5.
- [4] B.W.Harris,F.Chen,andU.Mohideen. Phy.Rev.A 62,052109(2000).
- [5] R.S.Decca,E.Fischbach,,G.L.Kilmchitskaya,D.E.Krause,D.López,andV.M.Mostepanenko. Phys.Rev.D 68,116003(2003).
- [6] <http://www.mie.eng.himeji-tech.ac.jp/numer4/inui/Casimir5.pdf>
- [7] M.Bordag,U.Mohideen,V.M.Mostepanenko. Phy.Rep. 353 (2001) 1-205.
- [8] 武田暁. 基礎物理学選書 25 素粒子. 裳華房.
- [9] 武田暁. 基礎物理学選書 21 場の理論. 裳華房.
- [10] <http://ha2.seikyoe.ne.jp/home/Kiyoshi.Shiraishi/lec/casimirj.html>
- [11] http://osksn2.hep.sci.osaka-u.ac.jp/~naga/iias_ws/files/1_17/masuda.pdf