

修士論文

ミューオン原子を用いた最小 $U(1)_{L_\mu - L_\tau}$ 模型の検証可能性

埼玉大学大学院 理工学研究科
物理機能系専攻 物理学コース博士前期課程 2 年

19MP105 柿澤広明

2021 年 3 月 30 日

概要

標準理論 (Standard Model ,SM) は素粒子物理分野で行われた多くの実験の結果を再現できるものであり、信頼された理論となっている。しかしながら SM から予言された理論値と実験値が一致しない事例も見つかっている。その一つがミューオンの異常磁気能率で、最新の研究では SM の理論値と実験値の間に 3.7σ のズレがあることが分かっている。このような SM で説明できない事象を説明するために SM を拡張した (Beyond the Standard Model, BSM) 理論が考えられており、また様々な実験によって BSM の探索が行われている。

BSM 理論のうちの一つである最小 $U(1)_{L_\mu - L_\tau}$ 模型 ($L_\mu - L\tau$ 模型) は、BSM の探索実験によって制限のかかっていない模型のパラメータ領域内でミューオンの異常磁気能率のズレを説明可能であることが先行研究より示されている。

本研究ではミューオン原子の崩壊過程 (Decay In Orbit,DIO) への $\mu - \tau$ 模型の寄与を計算し、ミューオン原子を用いた実験による模型の検証可能性について議論した。 $L_\mu - L_\tau$ 模型の存在を仮定すると、DIO の崩壊幅の計算に必要な束縛ミューオン波動関数を決定するために必要なミューオンと原子核の相互作用に $\mu - \tau$ 模型で導入される新しいゲージボソンによって湯川型の補正が生まれる。また相互作用は原子核の電荷分布を考慮したものでなければならず、本研究では原子核の電荷分布である、Woods-Saxon 分布を用いた $\mu - \tau$ 模型の補正を定式化した。そして DIO によって出てくる電子のエネルギースペクトラムへの $\mu - \tau$ 模型の影響を数値計算によって導出し、その影響を観測するために必要なミューオン原子数を見積もった。

現在 BSM の予言のひとつである荷電レプトンフレーバーの破れ (Charged Lepton Flavor Violation) の探索実験としてミューオン原子を用いた COMET 実験や Mu2e 実験などが計画されている。これらの実験では探索のため大量のミューオン原子が生成される。本研究ではこれらの実験で予定されるミューオン原子の生成数と $\mu - \tau$ 模型の影響を見るために必要なミューオン原子数を比較することにより、将来実験によって $\mu - \tau$ 模型が検証可能か議論した。

目次

概要		1
序論		1
第 1 章	最小 $L_\mu - L_\tau$ 模型	2
1.1	Lagrangian	2
1.2	1-loop γ - Z' mixing の計算	3
1.3	最小 $L_\mu - L_\tau$ 模型のパラメーター	4
第 2 章	ポテンシャル	9
2.1	$L_\mu - L_\tau$ からの寄与	9
2.2	原子核分布でのポテンシャル	10
第 3 章	ミューオン原子の崩壊率	18
3.1	波動関数	18
3.2	DIO の崩壊率	24
第 4 章	結果・考察	26
4.1	$L_\mu - L_\tau$ 模型の DIO スペクトラムへの影響	26
4.2	$L_\mu - L_\tau$ 模型の影響の測定に必要なミューオン原子数の推定	29
第 5 章	まとめと今後の展望	31
Appendix A	notation	32
Appendix B	波動関数	33
B.1	束縛状態のミューオンの波動関数	33
B.2	電子の散乱状態の波動関数	37
Appendix C	DIO	42
C.1	DIO 崩壊率	42
Appendix D	部分波展開	50
Appendix E	クーロンポテンシャル	53
E.1	クーロンポテンシャルの解析式	53

Appendix F	リップマン-シュインガーフラスト	55
F.1	積分方程式としてのシュレディンガーフラスト	55
F.2	リップマン-シュインガーフラストのコンパクト解	56
Appendix G	相互作用描像	57
Appendix H	時間発展演算子と境界条件	58
Appendix I	歪曲波	61
謝辞		63
参考文献		64

序論

標準理論 (Standard Model,SM) は素粒子物理分野で行われた多くの実験の結果を再現してきた。例えば電子の異常磁気能率に関しては、SM によって計算された理論値 [17] と実験値 [16] の 8 柄以上の一一致が確認されている。そのため SM は信頼された理論といえるが、一方で SM から予言された理論値と実験値が一致しない事例も見つかっている。その一つがミューオンの異常磁気能率であり、最新の研究では SM の理論値 [24] と実験値 [25] の間に 3.3σ のズレがあることが分かっている。このような SM で説明できない事象を説明するために SM を拡張した理論 (Beyond Standard Model,BSM) が考えられており、また様々な実験によって BSM の探索が行われている。BSM 理論のうちの一つである $U(1)_{L_\mu - L_\tau}$ 模型 ($L_\mu - L_\tau$ 模型)[26] は、BSM の探索実験によって制限の掛かっていない模型のパラメータ領域内でミューオンの異常磁気能率のズレを説明可能であることが先行研究 [8] により示されている。さらに $g_\mu - 2$ を説明可能な領域で宇宙ニュートリノ観測を目的とする IceCube 実験 [9][10] におけるニュートリノスペクトルの断絶部 (IceCube gap) を説明できる事が先行研究 [7][8] により提唱されている。同じくこの領域において Hubble 定数の遅い時間と早い時間からの推定値のズレ (Hubble tension) を説明することが先行研究で提唱されている。

本論文ではミューオンの崩壊過程 (Decay In Orbit,DIO) $\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$ への $L_\mu - L_\tau$ 模型の影響を計算し、その影響を観測するために必要なミューオン原子数を推定した。ミューオン原子は現在計画されている BSM 探索実験である COMET 実験 [21] や Mu2e 実験 [23] に使用されている。これらの実験は SM では起こらないとされているレプトンフレーバーの破れが起きる $\mu^- N \rightarrow e^- N$ 過程を観測するものであるが、この観測の為に大量のミューオン原子が必要となる。これらの実験のミューオン原子の生成数と推定したミューオン原子数を比較し実験のシナリオにおいて $L_\mu - L_\tau$ 模型の影響を見るのに最低限必要な観測感度を得られるかについて議論する。

DIO 過程の計算ではミューオンが電子のパウリの排他律に従わず生成直後に 1S 状態に遷移し、またボーア半径が電子の約 200 分の 1 であるため原子核の電荷分布に影響される。そのためクーロンポテンシャルを計算する際に電荷分布として Woods-Saxon 分布を用いて計算されるが Woods-Saxon 分布でのクーロンポテンシャルの定式化については DIO 過程の計算をはじめて行った渡辺ら [27] によって行われている。 $L_\mu - L_\tau$ 模型の存在を仮定するとクーロンポテンシャルに加えて $L_\mu - L_\tau$ ゲージボソンによる湯川型のポテンシャル ($L_\mu - L_\tau$ ポテンシャル) が生まれる。本研究では渡辺らの定式化の方法と同様の方法を用いて Woods-Saxon 分布での湯川型のポテンシャルの定式化を行った。

また Shanker の研究 [28] では原子核の反跳による補正を取り入れて DIO の計算が行われ、2016 年には放射補正を含めた計算が Szafron,Czarnecki の研究 [29] によってなされた、本研究ではこのうち原子核の反跳の効果のみを取り入れて計算を行っている。

以下 1 章では $L_\mu - L_\tau$ 模型の説明、2 章では渡辺らが導出した Woods-Saxon 分布でのクーロンポテンシャルの紹介と、Woods-Saxon 分布での $L_\mu - L_\tau$ ポテンシャルについての導出を行っている。3 章では Decay In Orbit の崩壊率の計算として先行研究の手法についての概要について解説している。4 章では $L_\mu - L_\tau$ 模型の DIO エネルギースペクトルへの影響について数値計算された結果と、その影響を実際に観測可能かについての議論をしている。

第1章

最小 $L_\mu - L_\tau$ 模型

1.1 Lagrangian

始めに、本論文で探索可能性を検証する $U(1)_{L_\mu - L_\tau}$ 拡張模型 ($L_\mu - L_\tau$ 拡張模型) について説明する。この模型は Standard Model(SM) の $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ 対称性に新たに $U(1)_{L_\mu - L_\tau}$ を加えた $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y \times U(1)_{L_\mu - L_\tau}$ のゲージ対称性を持つ模型である。この模型では既存の SM 粒子に対して新たに $L_\mu - L_\tau$ 電荷 (1.1) が割り当てられている。

表 1.1 $U(1)_{L_\mu - L_\tau}$ 対称性の電荷。 $\ell_{\mu(\tau)}$ は SM の $SU(2)$ doublet, $\mu_R(\tau_R)$ は SM の $SU(2)$ singlet, レプトンの第二世代には +1 が第三世代には -1 が割り振られそれ以外の SM 粒子では 0 が割り振られる。

	$\ell_\mu = (\nu_\mu, \mu_L)$	$\ell_\tau = (\nu_\tau, \tau_L)$	μ_R	τ_R	other
$L_\mu - L_\tau$	1	-1	1	-1	0

$L_\mu - L_\tau$ 拡張模型では SM の Lagrangian に加えて新たに

$$\mathcal{L}_{Z'} = \mathcal{L}_{\text{gauge}} + \mathcal{L}_{\text{mass}} + \mathcal{L}_{\text{int}} \quad (1.1)$$

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4} Z'_{\rho\sigma} Z'^{\rho\sigma} \quad (1.2)$$

$$Z'_{\rho\sigma} = \partial_\rho Z'_\sigma - \partial_\sigma Z'_\rho \quad (1.3)$$

$$\mathcal{L}_{\text{mass}} = \frac{1}{2} m'^2 Z'_\rho Z'^\rho \quad (1.4)$$

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = g' Q_{\alpha\beta} (\bar{\ell}_\alpha \gamma^\rho \ell_\beta + \bar{\nu}_\alpha \gamma^\rho P_L \nu_\beta) Z'_\rho \quad (\alpha, \beta = e, \mu, \tau) \quad (1.5)$$

$$Q_{\alpha\beta} = Q_\ell \delta_{\alpha\beta} \quad (1.6)$$

$$Q_\ell = \begin{cases} +1 & (l = \mu) \\ -1 & (l = \tau) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (1.7)$$

が追加される。ここで Z'_ρ は $U(1)_{L_\mu - L_\tau}$ ゲージボソン、 $Z'_{\rho\sigma}$ はゲージ場の強度、 g' はゲージカップリング、 ℓ_α, ν_α はそれぞれ四成分の SM 荷電レプトンとニュートリノを表している。質量項 (1.4) は本来 $U(1)_{L_\mu - L_\tau}$ 対称性の自発的破れによって得られる項であるが、本論文では、この項を手で与え、 m' はパラメーターとして取り扱う。また加えた対称性が $U(1)$ であることから、

$$\mathcal{L}_{\text{mixing}} = -\frac{\varepsilon}{2} Z'^{\rho\sigma} B_{\rho\sigma} \quad (1.8)$$

のように表される SM の $U(1)_Y$ との tree-level の kinetic mixing 項 [1][2] を導入することが許されるが、本論文では導入しない^{*1}。以上より、本論文で用いるラグランジアン (1.1) のパラメーターは g' と m' の 2 つのみである。本論文ではラグランジアン (1.1) で形式付けられる模型を“最小 $L_\mu - L_\tau$ 模型”と呼ぶ。

1.2 1-loop γ - Z' mixing の計算

本研究では、ミューオンと原子核の間の相互作用への $L_\mu - L_\tau$ 模型の影響について議論する。しかしながら $L_\mu - L_\tau$ 模型では、レプトンの第二世代と第三世代以外の SM 粒子はゲージボソン Z' と直接カップルしないため、原子核（や他の粒子）は図 1.1 のような loop を通して Z' と結合することによりミューオンやタウオンと相互作用する。

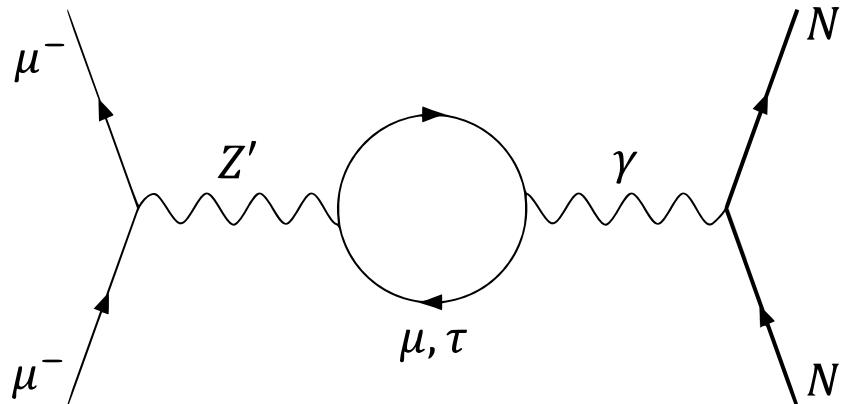


図 1.1 ミューオンやタウオンと原子核（やその他の粒子）の相互作用は 1loop を通して起こる。

このダイアグラムの 1-loop γ - Z' mixing を計算する。loop を回る粒子はミューオンとタウオンのみであり、この loop 部の寄与を計算すると

$$\begin{aligned} i\Pi^{\mu\nu}(q) &= \sum_\ell (-ie)(iQ_\ell g')(-1) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \text{tr} \left[\gamma^\mu \frac{i(k+m_\ell)}{k^2-m_\ell^2} \gamma^\nu \frac{i(k+q+m_\ell)}{(k+q)^2-m_\ell^2} \right] \\ &= (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \cdot i[\Pi_\mu(q^2) - \Pi_\tau(q^2)] \\ &\equiv (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \cdot i\Pi(q^2) \end{aligned} \quad (1.9)$$

となる。ここで

$$\Pi_\ell(q^2) = -\frac{8eg'}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx x(1-x) \log[\Delta_\ell - i\epsilon] (\ell = \mu, \tau) \quad (1.10)$$

^{*1} Ref.[3]において、 $m_\mu = m_\tau$ となる極限における離散対称性による式 (2.6) のような tree-level mixing 項の禁止について説明されている。また、Ref.[4]において tree-mixing 項 (1.8) を含む $L_\mu - L_\tau$ 模型の検証可能性が議論されている。

$$\Delta_\ell = -x(1-x)q^2 + m_\ell^2 \quad (1.11)$$

そして ϵ は微小量である。ミューオンとタウに逆符号の $L_\mu - L_\tau$ 電荷が与えられているため loop の発散部分がキャンセルしている。式 (1.11) の $x(1-x)$ は $0 < x < 1$ において $0 < x(1-x) \leq 1/4$ であるので、式 (1.10) の対数関数は

$$q^2 = 4m_\ell^2 \quad (1.12)$$

を始点とする Branch cut を持つ。この始点はレプトン対生成のエネルギー閾値に対応する。 X を正の実数として

$$\text{Im}[\log(-X \pm i\epsilon)] = \pm\pi \quad (1.13)$$

であるので、 $\Delta_\ell < 0$ になる x の範囲

$$\frac{1-\beta}{2} < x < \frac{1+\beta}{2} \quad (1.14)$$

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{4m_\ell^2}{q^2}} \quad (1.15)$$

において、関数 (1.10) の実部と虚部は

$$\text{Re}[\Pi_\ell(q^2)] = -\frac{8eg'}{(4\pi)^2} \int_{\frac{1-\beta}{2}}^{\frac{1+\beta}{2}} dx x(1-x) \log[-\Delta_\ell] \quad (1.16)$$

$$\text{Im}[\Pi_\ell(q^2)] = -\frac{8eg'}{(4\pi)^2} (-\pi) \int_{\frac{1-\beta}{2}}^{\frac{1+\beta}{2}} dx x(1-x) \quad (1.17)$$

のようにまとめられる。

1.3 最小 $L_\mu - L_\tau$ 模型のパラメーター

$L_\mu - L_\tau$ 模型のパラメーターはカップリング g' と質量 m' の二つであるが、現在、新物理を探索する様々な実験によってパラメータ領域に制限がつけられている。また 1 章でも述べたようにこの模型はあるパラメータ領域を取ると Muon $g - 2$ の SM と実験の 3σ を超えるズレを説明することができる。Ref.[8] より本論文で探索可能性を検証するこれらのパラメータ領域は図 1.2 のようになる。

以下ではこの図 1.2 に載せた実験と Muon $g - 2$ について解説をする。

1.3.1 Neutrino Trident Production Process

CCFR 実験 (Columbia-Chicago-Fermilab-Rochester neutrino experiment)[5] において、Neutrino Trident Production process:

$$\nu_\mu + N \rightarrow \nu_\mu + N + \mu^+ + \mu^- \quad (1.18)$$

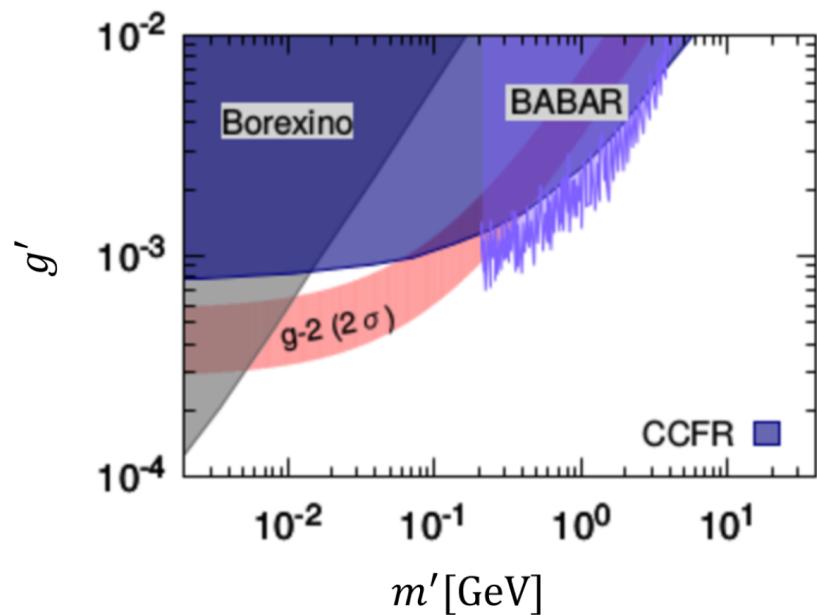


図 1.2 $L_\mu - L_\tau$ 模型のパラメータ m', g' に対する実験からの制限とミューオン $g - 2$ を解決できる領域 [7]

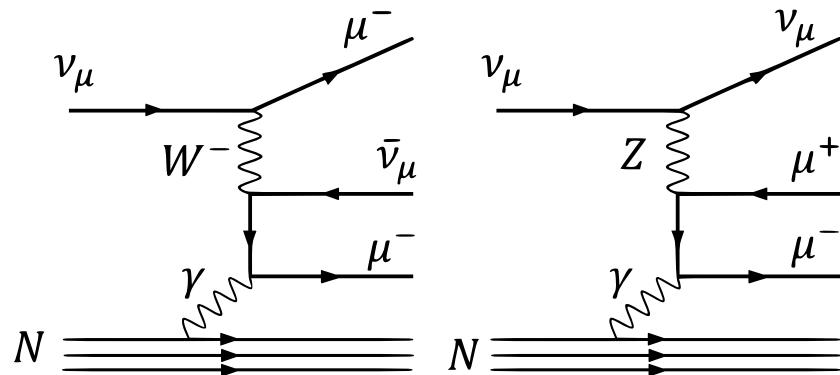


図 1.3 Neutrino Trident Production process への SM からの寄与

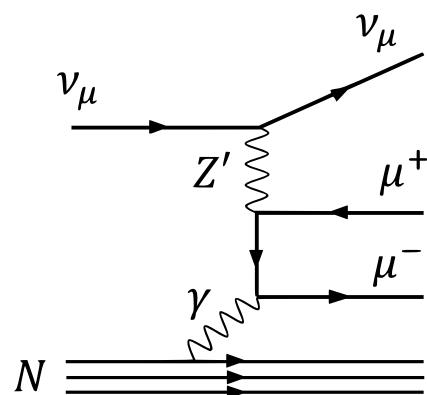


図 1.4 Neutrino Trident Production process への $L_\mu - L_\tau$ からの寄与

が観測された。この過程への SM からの寄与は図 1.3 のウェークボソンを媒介する 2 つのダイアグラムで与えられ、最小 $L_\mu - L_\tau$ 模型は、この過程に図 1.4 の新たな寄与を与える [6]。

しかし CCFR 実験の実験値と SM の理論値は断面積の比として

$$\frac{\sigma^{CCFR}}{\sigma^{SM}} = 0.82 \pm 0.28 \quad (1.19)$$

と、SM とほぼ無矛盾な結果が得られているため、最小 $L_\mu - L_\tau$ パラメーターに厳しい制限がつけられる。図 1.2 で色付けされている領域は、95%C.L で除外されている。

1.3.2 Neutrino-electron scattering

Borexino 実験は太陽ニュートリノと電子の弾性散乱の観測である。Ref.[8],[11] より、この観測によって $U(1)_{B-L}$ 拡張理論のパラメータに対して図 1.5 のような制限がつけられている。また Ref.[12]において、太陽ニュートリノと電子の弾性散乱に対する過程に対する $U(1)_{B-L}$ と $U(1)_{L_\mu - L_\tau}$ からの寄与(図 1.6 のダイアグラム)の振幅は

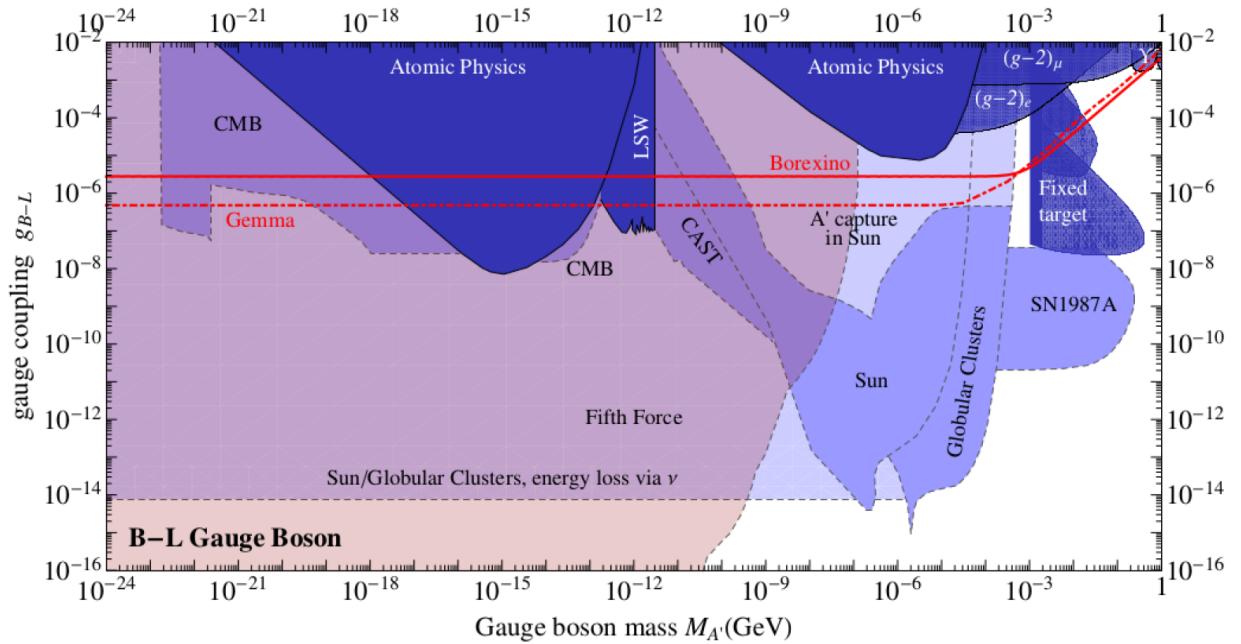
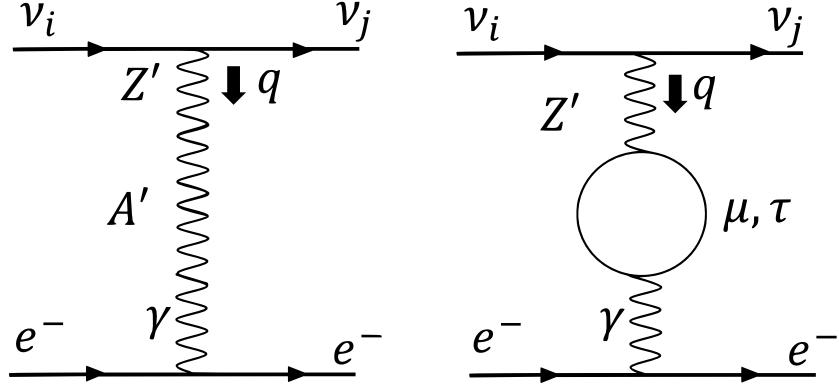


図 1.5 $U(1)_{B-L}$ 模型のパラメータの実験による制限 Ref.[8],[11]

$$i\mathcal{M}_{B-L} \propto \frac{g_{B-L}^2}{q^2 - M_{A'}^2} \quad (1.20)$$

$$i\mathcal{M}_{L_\mu - L_\tau} \propto \frac{eg'\epsilon_{\nu e}}{q^2 - m'^2} \quad (1.21)$$

との対応から最小 $L_\mu - L_\tau$ 模型へ図 1.2 の制限がつけられることが分かっている。ここで g_{B-L} はゲージ結合定数、 $M_{A'}$ はゲージボソンの質量である。また

図 1.6 太陽ニュートリノと電子の弾性散乱に対する $U(1)_{B-L}$ からの寄与 (左図) と $U(1)_{L_\mu - L_\tau}$ からの寄与 (右図)

$$\epsilon_{\nu e} = |\Pi(0)| = \frac{8}{3} \frac{eg'}{(4\pi)^2} \log \frac{m_\tau}{m_\mu} \quad (1.22)$$

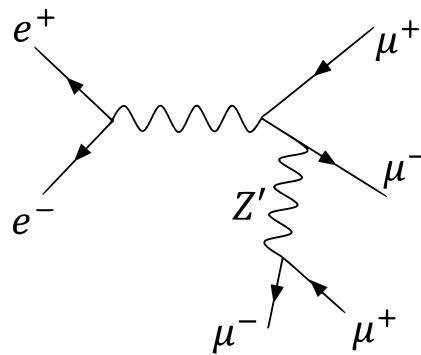
は 1loop の寄与であり、(1.9) 式からこの過程での伝搬運動量 q^2 はミューオンの質量より小さいことから近似して得られたものである。

1.3.3 $e^+e^- \rightarrow 4\mu$ process

BaBar 実験 [13][14] は $e^+e^- \rightarrow 4\mu$ を観測する実験である。この過程への、 $L_\mu - L_\tau$ 模型の寄与 (図 1.7 のダイアグラム)

$$e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-Z', Z' \rightarrow \mu^+\mu^- \quad (1.23)$$

で与えられる。しかしこの過程に対する有意な信号事象は観測されなかった。この結果によって、 Z' がミューオン対生成の閾値より重い領域 ($m' > 2m_\mu$) に対してパラメーターに制限がつけられた [15]。図 1.2 の色付けされた領域は 90% C.L. で除外される。

図 1.7 $e^+e^- \rightarrow 4\mu$ 過程への $U(1)_{L_\mu - L_\tau}$ 模型の寄与

1.3.4 Muon $g - 2$ discrepancy

スピンと磁場の相互作用

$$H_{\text{int}} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} \quad (1.24)$$

における磁気モーメント

$$\boldsymbol{\mu} = -g \frac{e}{2m} \mathbf{s} \quad (1.25)$$

の係数 g は Lande' の g 因子と呼ばれ、Dirac 方程式から計算すると $g = 2$ となる。しかし実際の測定における g 因子は $g = 2$ からズレており、これは場の理論における量子効果によるものである。 $g-2$ の値は異常磁気能率と呼ばれている。

$a = (g - 2)/2$ という値に直すと電子の異常磁気能率に関しては

$$a_e^{\text{exp}} = 1159652180.73(28) \times 10^{-12} \quad (1.26)$$

$$a_e^{\text{SM}} = 1159652175.86(0.10)(0.26)(8.48) \times 10^{-12} \quad (1.27)$$

[16][17] と、実験値と SM の理論値が 8 衡以上に渡って一致している。一方でミューオンの異常磁気能率は、

$$a_\mu^{\text{exp}} = 11659209.1(5.4)(3.3) \times 10^{-10} \quad (1.28)$$

$$a_\mu^{\text{SM}} = 11659182.04(3.56) \times 10^{-10} \quad (1.29)$$

$$\Delta_\mu = a_\mu^{\text{exp}} - a_\mu^{\text{SM}} = (27.06 \pm 7.26) \times 10^{-10} \quad (1.30)$$

[22] と 3.7σ の差がある。最小 $L_\mu - L_\tau$ 模型は、 $g_\mu - 2$ に図 1.8 のような新たな寄与を与える。このダイアグラムによる補正是、

$$a_\mu^{Z'} = \frac{g'^2}{8\pi^2} \int_0^1 \frac{2m_\mu^2 x^2 (1-x)}{x^2 m_\mu^2 + (1-x)m'^2} dx \quad (1.31)$$

のように与えられる [18]。この補正により図 1.2 のパラメータ領域ではこのズレを 2σ 以内に抑えられる。

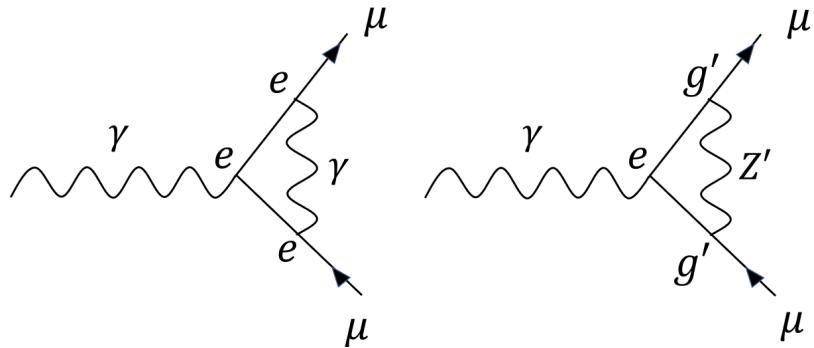


図 1.8 a_μ への SM からの最低次の寄与 (左図) と $L_\mu - L_\tau$ からの寄与 (右図)

本研究では図 1.2 の実験によって制限の掛からない領域でミューオン $g - 2$ 問題を解決可能なパラメータ領域のなかで最も大きな影響が期待できるパラメータである $m' = 10[\text{MeV}], g' = 5.0 \times 10^{-4}$ を用いてミューオン原子の崩壊 (Decay In Orbit) への影響を計算しさらにその影響を観測するのに必要なミューオン原子数を見積もり、ミューオン原子を用いる実験である COMET 実験 [21] や Mu2e 実験 [23] で観測可能かについて議論を行う。

第2章

ポテンシャル

この章では、ミューオン原子の崩壊過程 (Decay In Orbit,DIO) $\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$ の始状態のミューオンや終状態の電子と原子核との相互作用について考える。SM 内ではミューオンや電子と原子核の間に Coulomb 相互作用が働くが、 $L_\mu - L_\tau$ 拡張模型では Coulomb 相互作用に加えて $L_\mu - L_\tau$ ゲージボソンによって生まれる新たな相互作用が生まれる。2.1 節でその相互作用を Born 近似することによって得られる $L_\mu - L_\tau$ ポテンシャルを導出する。

ミューオン原子では原子核の周りをまわるミューオンは電子の軌道半径の 1/200 の軌道半径であるため、DIO の計算では原子核の電荷分布の影響を取り入れて相互作用を考えなければならない。このことについては 2.2 節で扱う。

2.1 $L_\mu - L_\tau$ からの寄与

$L_\mu - L_\tau$ のゲージボソンが存在すると仮定すると、ミューオンと原子核の間に図 1.1 のダイアグラムの寄与が生まれる。

このダイアグラムの振幅は

$$i\mathcal{M}_{L_\mu - L_\tau} \propto \frac{Zeg'|\Pi(q^2)|}{q^2 - m'^2} \quad (2.1)$$

で表される。ここで

$$\begin{aligned} \Pi(q^2) &= \Pi_\mu(q^2) - \Pi_\tau(q^2) \\ &= -\frac{8eg'}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx x(1-x) \log \frac{m_\mu^2 - x(1-x)q^2}{m_\tau^2 - x(1-x)q^2} \\ &= -\frac{8eg'}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx x(1-x) \log \left(\frac{m_\tau^2}{m_\mu^2} \right) \\ &\quad + \frac{8eg'}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx x(1-x) \log \left(\frac{m_\tau^2}{m_\tau^2 - x(1-x)q^2} \right) - \frac{8eg'}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx x(1-x) \log \left(\frac{m_\mu^2}{m_\mu^2 - x(1-x)q^2} \right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

と書くことができる。第一項は

$$\frac{8eg'}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx x(1-x) \log \left(\frac{m_\tau^2}{m_\mu^2} \right) = \frac{8}{3} \frac{eg'}{(4\pi)^2} \log \frac{m_\tau}{m_\mu} \quad (2.3)$$

となる。(2.1)式のBorn近似を行うと、この第一項部分は

$$V'(r) = \frac{K}{4\pi r} e^{-m'r} \quad (2.4)$$

という湯川型の相互作用となる。ここで

$$K = \frac{8}{3} \frac{Ze^2}{(4\pi)^2} \frac{g'^2}{4\pi} \log \frac{m_\tau}{m_\mu} \quad (2.5)$$

第二項部分のBorn近似は

$$\begin{aligned} V_\mu(\mathbf{r}) &= \frac{8e^2 g'^2}{(4\pi)^2} \int \frac{d^3 Q}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}} \frac{1}{Q^2 + m'^2} \hat{\Pi}(-Q^2) \\ &= \frac{8e^2 g'^2}{(4\pi)^2} \frac{i}{4\pi^2 r} \int_{-\infty}^{\infty} dQ \frac{Q e^{iQr}}{Q^2 + m'^2} \hat{\Pi}(-Q^2) \end{aligned} \quad (2.6)$$

ここで

$$\hat{\Pi}(-Q^2) = \int_0^1 dx x(1-x) \log \left(\frac{m_\mu^2}{m_\mu^2 + x(1-x)Q^2} \right) \quad (2.7)$$

であり。前章で議論したようにこの \log は $Q = 2mi$ でBranch cutを持つ。 $q = iQ$ とすると

$$\begin{aligned} \text{Im}[\hat{\Pi}(q^2 - i\epsilon)] &= (-\pi) \int_{\frac{1-\beta}{2}}^{\frac{1+\beta}{2}} dx x(1-x) \\ &= -\frac{\pi}{6} \sqrt{1 - \frac{4m_\mu^2}{q^2}} \left(1 + \frac{2m_\mu^2}{q^2} \right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

であり。

$$\begin{aligned} V_\mu(\mathbf{r}) &= \frac{8e^2 g'^2}{(4\pi)^2} \frac{-1}{4\pi^2 r} \int_{2m_\mu}^{\infty} dq \frac{qe^{-qr}}{q^2 - m'^2} \text{Im}[\hat{\Pi}(q^2 - i\epsilon)] \\ V_\mu(\mathbf{r}) &= \frac{4}{3} \frac{Ze^2 g'^2}{(4\pi)^3 r} \int_{2m_\mu}^{\infty} dq \frac{qe^{-qr}}{q^2 - m'^2} \sqrt{1 - \frac{4m_\mu^2}{q^2}} \left(1 + \frac{2m_\mu^2}{q^2} \right) \end{aligned} \quad (2.9)$$

同様にして第三項は

$$V_\tau(\mathbf{r}) = \frac{4}{3} \frac{Ze^2 g'^2}{(4\pi)^3 r} \int_{2m_\tau}^{\infty} dq \frac{qe^{-qr}}{q^2 - m'^2} \sqrt{1 - \frac{4m_\tau^2}{q^2}} \left(1 + \frac{2m_\tau^2}{q^2} \right) \quad (2.10)$$

となる。我々が本論文で考える $L_\mu - L_\tau$ のゲージボソンの質量 $m' = 10[\text{MeV}]$ に対し、ミューオンとタウォンの質量は $m_\mu = 105[\text{MeV}], m_\tau = 1771[\text{MeV}]$ と m' より大きく V_μ, V_τ の指數関数部分が V' と比べて速く落ちる為、本論文では $L_\mu - L_\tau$ のゲージボソンによるミューオンと原子核の間の相互作用について V' のみを考える。

2.2 原子核分布でのポテンシャル

ミューオン原子のミューオンは電子に対するパウリの排他律には従わず、ミューオン原子が出来てすぐに1S状態に遷移する。またミューオンの質量は電子の質量の200倍大きくボア半径は200分の1である。従って原子核の電荷分布の影響を考慮しなければならない。先行研究[27]では、原子核の電荷分

布として2パラメータのWoods-Saxon分布を用いて原子核分布でのCoulombポテンシャルに対しての定式化を行う。まずその導出について紹介した後、本研究で新たに定式化したWoods-Saxon分布での $L_\mu - L_\tau$ ポテンシャル $V'(r)$ の定式化を行う。

$$\rho(R)_{ws} = \frac{\rho_0}{1 + e^{[(R-c)/a]}} \quad (2.11)$$

2.2.1 Coulomb ポテンシャル

一般の電荷分布 $\rho(\mathbf{R})$ でのCoulombポテンシャルは

$$V_C(r) = Z\alpha \int d^3\mathbf{R} \frac{\rho(\mathbf{R})}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \quad (2.12)$$

となる。ここで、電荷分布が球対称 $\rho(R)$ である場合には、角度方向の積分が計算を行うことで

$$V_C(r) = \frac{4\pi Z\alpha}{r} \left[\int_0^r dR \rho(R) R^2 + r \int_r^\infty dR \rho(R) R \right] \quad (2.13)$$

となる。

さて2パラメータのWoods-Saxon分布

$$\rho_{ws}(R) = \frac{\rho_0}{1 + e^{[(R-c)/a]}} \quad (2.14)$$

を(2.14)式に代入して積分の計算を行うために、 $|x| < 1$ では

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x^2 + x^3 - x^4 \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (2.15)$$

となることを利用することにより、($R < c$)では

$$\frac{1}{1 + e^{[(R-c)/a]}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp\left[\frac{n(R-c)}{a}\right] \quad (2.16)$$

($R > c$)では

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + e^{[(R-c)/a]}} &= e^{[-(R-c)/a]} \frac{1}{1 + e^{[-(R-c)/a]}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \exp\left[\frac{-(n+1)(R-c)}{a}\right] \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp\left[\frac{-n(R-c)}{a}\right] \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\frac{1}{1 + e^{[(R-c)/a]}} = - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp\left[\frac{-n(R-c)}{a}\right] \quad (2.18)$$

と展開して計算を行う。まず(2.14)式の第一項

$$V_C^1(\mathbf{r}) \equiv \frac{4\pi Z\alpha}{r} \int_0^r dR \rho(R) R^2 \quad (2.19)$$

を計算すると $r < c$ では、

$$\begin{aligned} V_C^1(r) &= \frac{4\pi Z\alpha\rho_0}{r} \int_0^r R^2 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp \left[\frac{n(R-c)}{a} \right] \right) dR \\ &= \frac{4\pi Z\alpha\rho_0}{r} \left\{ \frac{r^3}{3} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left\{ -2 \left(\frac{a}{n} \right)^3 \exp \left[-\frac{nc}{a} \right] + \left(\frac{a}{n} r^2 - 2 \left(\frac{a}{n} \right)^2 r + 2 \left(\frac{a}{n} \right)^3 \right) \exp \left[\frac{n(r-c)}{a} \right] \right\} \right\} \end{aligned} \quad (2.20)$$

となり、 $r > c$ では

$$\begin{aligned} V_C^1(r) &= \frac{4\pi Z\alpha\rho_0}{r} \left\{ \int_0^c R^2 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp \left[\frac{n(R-c)}{a} \right] \right) dR + \int_c^r R^2 \left(- \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp \left[\frac{-n(R-c)}{a} \right] \right) dR \right\} \\ &= \frac{4\pi Z\alpha\rho_0}{r} \left\{ \frac{c^3}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ -2 \left(\frac{a}{n} \right)^3 \exp \left[-\frac{nc}{a} \right] - 4 \left(\frac{a}{n} \right)^2 c + \left(\frac{a}{n} r^2 + 2 \left(\frac{a}{n} \right)^2 r + 2 \left(\frac{a}{n} \right)^3 \right) \exp \left[-\frac{n(r-c)}{a} \right] \right\} \right\} \end{aligned} \quad (2.21)$$

となる。同様に (2.14) 式の第二項

$$V_C^2(r) \equiv 4\pi Z\alpha \int_r^{\infty} dR \rho(R) R \quad (2.22)$$

の積分を行うと

$r > c$ では

$$\begin{aligned} V_C^2(r) &= 4\pi Z\alpha\rho_0 \int_r^{\infty} R \left(- \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp \left[\frac{-n(R-c)}{a} \right] \right) dR \\ &= -4\pi Z\alpha\rho_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{a}{n} r + \left(\frac{a}{n} \right)^2 \right] \exp \left[-\frac{n(r-c)}{a} \right] \end{aligned} \quad (2.23)$$

$r < c$ では

$$\begin{aligned} V_C^2(r) &= 4\pi Z\alpha\rho_0 \left\{ \int_r^c R \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp \left[\frac{n(R-c)}{a} \right] \right) dR + \int_c^{\infty} R \left(- \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp \left[\frac{-n(R-c)}{a} \right] \right) dR \right\} \\ &= 4\pi Z\alpha\rho_0 \left\{ \frac{c^2 - r^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(-2 \left(\frac{a}{n} \right)^2 + \left[-\frac{a}{n} r + \left(\frac{a}{n} \right)^2 \right] \exp \left[\frac{n(r-c)}{a} \right] \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.24)$$

が得られる。さて簡単のため

$$\begin{aligned} \chi_0 &\equiv \exp \left[-\frac{c}{a} \right] \\ \chi &\equiv \exp \left[\frac{r-c}{a} \right] \end{aligned} \quad (2.25)$$

に書き換え、エータ関数 $\eta(s)$ とゼータ関数 $\zeta(s)$ との関係式

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s} = (1 - 2^{1-s})\zeta(s) \quad (2.26)$$

より、

$$\eta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = (1 - 2^{-1})\zeta(2) = \frac{\pi^2}{12} \quad (2.27)$$

であることを用いると

原子核分布での Coulomb ポテンシャルは $V_{CWS}(r) = V_C^1(r) + V_C^2(r)$ は
 $r > c$ で

$$V_{CWS}(r) = 4\pi Z\alpha\rho_0 \left[\frac{1}{r} \left\{ \frac{c^3}{3} + \frac{\pi^2 a^2 c}{3} - 2a^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} (\chi_0^n - \chi^{-n}) \right\} + a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \chi^{-n} \right] \quad (2.28)$$

$r < c$ で

$$V_{CWS}(r) = 4\pi Z\alpha\rho_0 \left[\frac{c^2}{2} - \frac{r^2}{6} + \frac{\pi^2 a^2}{6} - a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \chi^n - \frac{2a^3}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} (\chi_0^n - \chi^n) \right] \quad (2.29)$$

となる。

次に、(2.15) 式の ρ_0 は規格化条件

$$\int d^3R \rho(\mathbf{R}) = 1 \quad (2.30)$$

から求めることができる。(2.15) 式の左辺を計算すると

$$\begin{aligned} \int d^3R \rho(\mathbf{R}) &= 4\pi\rho_0 \int_0^\infty dRR^2 \frac{1}{1 + \exp\left[\frac{(R-c)}{a}\right]} \\ &= 4\pi\rho_0 \left\{ \int_0^c dRR^2 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp\left[\frac{n(R-c)}{a}\right] \right) \right\} \\ &\quad + 4\pi\rho_0 \left\{ \int_c^\infty dRR^2 \left(- \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp\left[\frac{-n(R-c)}{a}\right] \right) \right\} \\ &= 4\pi\rho_0 \left[\frac{c^3}{3} - 2a^3 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^3} \exp\left[-\frac{nc}{a}\right] + 4a^2 c \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} \right] \\ &= 4\pi\rho_0 \frac{c^3}{3} \left[1 + \left(\frac{a\pi}{c}\right)^2 - 6 \left(\frac{a}{c}\right)^3 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^3} \chi_0^n \right] \end{aligned} \quad (2.31)$$

したがって

$$\rho_0 = \frac{3}{4\pi c^3} \left[1 + \left(\frac{a\pi}{c}\right)^2 - 6 \left(\frac{a}{c}\right)^3 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^3} \chi_0^n \right]^{-1} \quad (2.32)$$

となる。

2.2.2 $L_\mu - L_\tau$ のゲージボソンによるポテンシャル V'

次に前節で導出した $L_\mu - L_\tau$ の相互作用への寄与

$$V'(r) = \frac{K}{4\pi r} e^{-m'r} \quad (2.33)$$

$$K = \frac{8}{3} \frac{Ze^2}{4\pi} \frac{g'^2}{4\pi} \log \frac{m_\tau}{m_\mu} \quad (2.34)$$

について Coulomb ポテンシャルと同様に Woods-Saxon 分布 ρ_{ws} を用いた $V'_{WS}(r)$ を求める。まず、一般の電荷分布 $\rho(\mathbf{R})$ の式に拡張すると

$$V'(\mathbf{r}) = \frac{K}{4\pi} \int d^3\mathbf{R} \frac{\rho(\mathbf{R}) e^{-m'|\mathbf{r}-\mathbf{R}|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{R}|} \quad (2.35)$$

のように書ける。さらに、球対称の電荷分布 $\rho(R)$ を仮定して、角度方向の積分を計算すると

$$J(R, r) = 2\pi \int_{-1}^{+1} \frac{e^{-m'\sqrt{r^2 - 2Rr\mu + R^2}}}{\sqrt{r^2 - 2Rr\mu + R^2}} d\mu \quad (2.36)$$

ここで

$$x = \sqrt{r^2 - 2Rr\mu + R^2} \quad (2.37)$$

$$dx = \frac{-rR}{\sqrt{r^2 - 2Rr\mu + R^2}} d\mu \quad (2.38)$$

と置換することにより、

$$\begin{aligned} J(R, r) &= -\frac{2\pi}{rR} \int_{r+R}^{|r-R|} e^{-m'x} dx \\ &= \frac{2\pi}{m'rR} \left[e^{-m'|r-R|} - e^{-m'(r+R)} \right] \end{aligned} \quad (2.39)$$

となる。したがって $\rho(R) = \rho_{ws}(R)$ では

$$V'_{WS}(r) = \frac{K\rho_0}{2m'r} \int_0^\infty dR \frac{R}{1 + e^{[(R-c)/a]}} \left[e^{-m'|r-R|} - e^{-m'(r+R)} \right] \quad (2.40)$$

となる。まず第二項

$$V'^2_{WS}(r) \equiv -\frac{K\rho_0 e^{-m'r}}{2m'r} \int_0^\infty dR \frac{R}{1 + e^{[(R-c)/a]}} e^{-m'R} \quad (2.41)$$

について Coulomb ポテンシャルと同様に積分を行うと

$$\begin{aligned} V'^2_{WS}(r) &= -\frac{K\rho_0 \exp[-m'r]}{2m'r} \left\{ \int_0^c dRR \exp[-m'R] \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp \left[\frac{n(R-c)}{a} \right] \right) \right. \\ &\quad \left. - \int_c^\infty dRR \exp[-m'R] \left(- \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp \left[\frac{-n(R-c)}{a} \right] \right) \right\} \\ &= -\frac{K\rho_0 \exp[-m'r]}{2m'r} \left\{ \left\{ \frac{1}{m'^2} - \left(\frac{c}{m'} + \frac{1}{m'^2} \right) \exp[-m'c] + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{a}{n-m'a} \right)^2 \exp \left[-\frac{nc}{a} \right] \right\} \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \exp[-m'c] \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{ac}{n-m'a} - \frac{ac}{n+m'a} - \left(\frac{a}{n-m'a} \right)^2 - \left(\frac{a}{n+m'a} \right)^2 \right] \right\} \right\} \end{aligned} \quad (2.42)$$

次に第一項

$$V'^1_{WS}(r) \equiv \frac{K\rho_0}{2m'r} \left\{ \exp[-m'r] \int_0^r dR \frac{R}{1 + e^{[(R-c)/a]}} e^{m'R} + \exp[m'r] \int_r^\infty \frac{R}{1 + e^{[(R-c)/a]}} e^{-m'R} \right\} \quad (2.43)$$

の計算ではさらに

$$V_{WS}^{\prime 1(1)}(r) = \frac{K\rho_0 \exp[-m'r]}{2m'r} \int_0^r dR \frac{R}{1 + e^{[(R-c)/a]}} e^{m'R} \quad (2.44)$$

$$V_{WS}^{\prime 1(2)}(r) = \frac{K\rho_0 \exp[m'r]}{2m'r} \int_r^\infty dR \frac{R}{1 + e^{[(R-c)/a]}} e^{-m'R} \quad (2.45)$$

と分けて、分母を展開し積分を行うと ($r < c$) では

$$\begin{aligned} V_{WS}^{\prime 1(1)}(r) &= \frac{K\rho_0 \exp[-m'r]}{2m'r} \int_0^r dRR \exp[m'R] \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp\left[\frac{n(R-c)}{a}\right] \right) \\ &= \frac{K\rho_0}{2m'r} \left\{ \exp[-m'r] \left\{ \frac{1}{m'^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{a}{n+m'a} \right)^2 \exp\left[-\frac{nc}{a}\right] \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \left(\frac{r}{m'} - \frac{1}{m'^2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{ar}{n+m'a} - \left(\frac{a}{n+m'a} \right)^2 \right) \exp\left[\frac{n(r-c)}{a}\right] \right\} \right\} \end{aligned} \quad (2.46)$$

となる。同様に

$$\begin{aligned} V_{WS}^{\prime 1(2)}(r) &= \frac{K\rho_0 \exp[m'r]}{2m'r} \left\{ \left\{ \int_r^c dRR \exp[-m'R] \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp\left[\frac{n(R-c)}{a}\right] \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \int_c^\infty dRR \exp[-m'R] \left(- \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp\left[\frac{-n(R-c)}{a}\right] \right) \right\} \right\} \\ &= \frac{K\rho_0 \exp[m'r]}{2m'r} \left\{ \left\{ - \left(\frac{c}{m'} + \frac{1}{m'^2} \right) \exp[-m'c] \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \exp[-m'c] \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{ac}{n-m'a} - \frac{ac}{n+m'a} - \left(\frac{a}{n-m'a} \right)^2 - \left(\frac{a}{n+m'a} \right)^2 \right) \right\} \right\} \\ &\quad + \frac{K\rho_0}{2m'r} \left\{ \left(\frac{r}{m'} + \frac{1}{m'^2} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{ar}{n-m'a} - \left(\frac{a}{n-m'a} \right)^2 \right) \exp\left[\frac{n(r-c)}{a}\right] \right\} \end{aligned} \quad (2.47)$$

従って ($r < c$) のとき $V_{WS}'(r) = V_{WS}^{\prime 1(1)}(r) + V_{WS}^{\prime 1(2)}(r) + V_{WS}^{\prime 2}(r)$ を計算して

$$\begin{aligned} V_{WS}'(r) &= \frac{K\rho_0}{2m'r} \left\{ \left\{ \frac{2r}{m'} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{ar}{n+m'a} - \frac{ar}{n-m'a} - \left(\frac{a}{n+m'a} \right)^2 + \left(\frac{a}{n-m'a} \right)^2 \right) \exp\left[\frac{n(r-c)}{a}\right] \right\} \right. \\ &\quad + \exp[-m'r] \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\left(\frac{a}{n+m'a} \right)^2 - \left(\frac{a}{n-m'a} \right)^2 \right] \exp\left[-\frac{nc}{a}\right] \right) \\ &\quad + (\exp[m'r] - \exp[-m'r]) \left[\left\{ - \left(\frac{c}{m'} + \frac{1}{m'^2} \right) \exp[-m'c] \right\} \right. \\ &\quad \left. \left. + \left\{ \exp[-m'c] \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{ac}{n-m'a} - \frac{ac}{n+m'a} - \left(\frac{a}{n-m'a} \right)^2 - \left(\frac{a}{n+m'a} \right)^2 \right) \right\} \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.48)$$

ここで、式を簡単に書くために

$$A_n \equiv \frac{4nm'a^3}{(n^2 - m'^2 a^2)^2}, B_n \equiv \frac{2m'a^2 r}{n^2 - m'^2 a^2}, C_n \equiv \frac{2m'a^2 c}{n^2 - m'^2 a^2}, D_n \equiv \frac{2a^2}{n^2 - m'^2 a^2}, E_n \equiv \frac{4m'^2 a^4}{(n^2 - m'^2 a^2)^2} \quad (2.49)$$

と定義して (2.26) 式の書き換えを行うと

$$V'_{WS}(r) = \frac{K\rho_0}{2m'r} \left\{ \frac{2r}{m'} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (A_n - B_n) \chi^n - e^{-m'r} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n A_n \chi_0^n \right. \\ \left. - \left(e^{m'(r-c)} - e^{-m'(r+c)} \right) \left[\frac{c}{m'} + \frac{1}{m'^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (C_n - D_n - E_n) \right] \right\} \quad (2.50)$$

と書くことができる。

さて、($r > c$) では

$$V'^{1(1)}_{WS}(r) = \frac{K\rho_0 \exp[-m'r]}{2mr} \left\{ \left\{ \int_0^c dR R \exp[m'R] \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp \left[\frac{n(R-c)}{a} \right] \right) \right\} \right. \\ \left. + \left\{ \int_c^r dR R \exp[m'R] \left(- \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp \left[\frac{-n(R-c)}{a} \right] \right) \right\} \right\} \\ = \frac{K\rho_0 \exp[-m'r]}{2m'r} \left\{ \left\{ \frac{1}{m'^2} + \left(\frac{c}{m'} - \frac{1}{m'^2} \right) \exp[m'c] + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{a}{n+m'a} \right)^2 \exp \left[-\frac{nc}{a} \right] \right\} \right. \\ \left. + \left\{ \exp[m'c] \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{ac}{n+m'a} - \frac{ac}{n-m'a} - \left(\frac{a}{n-m'a} \right)^2 - \left(\frac{a}{n+m'a} \right)^2 \right] \right\} \right\} \\ + \frac{K\rho_0}{2m'r} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{ar}{n-m'a} + \left(\frac{a}{n-m'a} \right)^2 \right) \exp \left[-\frac{n(r-c)}{a} \right] \right\} \quad (2.51)$$

$$V'^{1(2)}_{WS}(r) = \frac{K\rho_0 \exp[m'r]}{2m'r} \left\{ \int_r^{\infty} dR R \exp[-m'R] \left(- \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp \left[\frac{-n(R-c)}{a} \right] \right) \right\} \\ = -\frac{K\rho_0 \exp[-m'r]}{2m'r} \left\{ \left\{ \frac{1}{m'^2} - \left(\frac{c}{m'} + \frac{1}{m'^2} \right) \exp[-m'c] + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{a}{n-m'a} \right)^2 \exp \left[-\frac{nc}{a} \right] \right\} \right. \\ \left. - \left\{ \exp[-m'c] \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{ac}{n-m'a} - \frac{ac}{n+m'a} - \left(\frac{a}{n-m'a} \right)^2 - \left(\frac{a}{n+m'a} \right)^2 \right] \right\} \right\} \quad (2.52)$$

となるので ($r > c$) では

$$\begin{aligned}
 V'_{WS}(r) = & \frac{K\rho_0}{2m'r} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{ar}{n-m'a} - \frac{ar}{n+m'a} + \left(\frac{a}{n-m'a} \right)^2 - \left(\frac{a}{n+m'a} \right)^2 \right) \exp \left[-\frac{n(r-c)}{a} \right] \right\} \\
 & + \frac{K\rho_0 \exp[-m'r]}{2m'r} \left\{ \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\left(\frac{a}{n+m'a} \right)^2 - \left(\frac{a}{n-m'a} \right)^2 \right) \exp \left[-\frac{nc}{a} \right] \right\} \right. \\
 & + \left. \left\{ (\exp[m'c] + \exp[-m'c]) \left\{ \frac{c}{m'} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{ac}{n+m'a} - \frac{ac}{n-m'a} \right] \right\} \right\} \right. \\
 & - \left. \left\{ (\exp[m'c] - \exp[-m'c]) \left\{ \frac{1}{m'^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\left(\frac{a}{n-m'a} \right)^2 + \left(\frac{a}{n+m'a} \right)^2 \right] \right\} \right\} \right\} \tag{2.53}
 \end{aligned}$$

こちらも簡単にすると、

$$\begin{aligned}
 V'_{WS}(r) = & \frac{K\rho_0}{2m'r} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (A_n + B_n) \chi^{-n} - e^{-m'r} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n A_n \chi_0^n + 2e^{-m'(r+c)} \left[\frac{c}{m'} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n C_n \right] \right. \\
 & + \left. \left(e^{-m'(r-c)} - e^{-m'(r+c)} \right) \left[\frac{c}{m'} - \frac{1}{m'^2} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (C_n + D_n + E_n) \right] \right\} \tag{2.54}
 \end{aligned}$$

となる。

第3章

ミューオン原子の崩壊率

ここでは Decay In Orbit の崩壊率について解説する。DIO とは原子核の周りを回る電子一つがミューオンに置き換わったミューオン原子で軌道上を回るミューオンが崩壊 $\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$ する過程である。DIO と真空中のミューオンの崩壊過程 $\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + n u_\mu$ との違いとして始状態のミューオンと終状態の電子が原子核との相互作用に影響される為、真空中の崩壊率の計算で用いる平面波の波動関数の代わりにミューオンの束縛状態の波動関数と電子の歪曲された波動関数を用いる。まずは崩壊率の計算で用いられる、始状態のミューオンの波動関数と終状態の電子の波動関数がどのように表されるかについて説明をし、その後 Decay In Orbit の崩壊率について先行研究 [27][28] によって導出されたものを紹介する。先行研究での DIO 崩壊率の導出に関する具体的な計算は Appendix C にまわし次章の計算に用いた結果のみを記す。

3.1 波動関数

前章でミューオン原子の崩壊過程 $\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \bar{\nu}_\mu$ で始状態のミューオンと終状態の電子と原子核の相互作用（ポテンシャル）について導出した。これらのポテンシャル下における Dirac 方程式を解くことによりミューオンと電子の波動関数が計算される。この節ではミューオンと電子の波動関数について解説する。一般に球体ポテンシャルが存在する場合、系の並進対称性が破れるため波動関数は運動量の固有状態ではなくなる。しかし球対称性は破られていないため角運動量の固有状態として書き表すことが出来る。まずこの角運動量の固有状態として波動関数がどのように表せるかについて解説する。

ミューオンについては電子に対するパウリの排他律に従わないため、ミューオン原子が出来てすぐに 1S 状態に遷移する。従って始状態のミューオンの波動関数は 1S 状態の波動関数として書くことが出来る。一方で終状態の電子の波動関数は角運動量の固有状態で展開する部分波展開によって表される。電子の部分波展開がどのように書き表されるかについてもここで導出する。

原子核のクーロンポテンシャルの場合 Dirac 方程式は解析的に解くことが出来ないため、数値計算によって波動関数を計算する。数値計算をする際の境界条件としてクーロンポテンシャルが無限遠で点電荷 ($V(r) = Z\alpha/r$) とみなせることから、無限遠で点電荷クーロンポテンシャルの Dirac 波動関数を用いる。点電荷クーロンポテンシャルでの Dirac 波動関数の導出と具体的な数値計算の方法は Appendix B にまわす。

3.1.1 Dirac 方程式の球面波解

球対称(静電)ポテンシャル $V(r)$ が存在する場合、フェルミオンの波動関数 $\psi(x) = e^{-iEt}\psi(\mathbf{r})$ の空間部分 $\psi(\mathbf{r})$ が満たす Dirac 方程式は

$$[-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + m\beta - V(r)]\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \quad (3.1)$$

この式の左辺の角括弧で囲まれている部分を非相対論的 Schrödinger 方程式との対応からハミルトニアン H と呼ぶ。

さて、この H との交換関係が 0 となる保存量について考える。軌道角運動量演算子 \mathbf{L} を

$$L_i = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} l_i & 0 \\ 0 & l_i \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

$$l_i = (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_i = -i\epsilon_{ijk}r_j\partial_k \quad (3.3)$$

と定義すると、ハミルトニアン H との交換関係は

$$[H, L_i] = -\epsilon_{ijk}\alpha_j\partial_k \neq 0 \quad (3.4)$$

となるため軌道角運動量 \mathbf{L} は保存量ではない。また、スピン角運動量演算子 \mathbf{S} を

$$S_i = \begin{pmatrix} s_i & 0 \\ 0 & s_i \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

$$s_i = \frac{1}{2}\sigma_i \quad (3.6)$$

と定義すると

$$[H, S_i] = \epsilon_{ijk}\alpha_j\partial_k \neq 0 \quad (3.7)$$

$$[H, \mathbf{J}] = 0 \quad (3.8)$$

となり、 \mathbf{S} も保存量にならないが、全角運動量演算子

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S} \quad (3.9)$$

を定義すると (3.4) 式と (3.7) 式より \mathbf{J} は H と交換する保存量である。したがって球対称ポテンシャルが存在するときの Dirac 波動関数は \mathbf{J} の固有状態として書くことができる。そこで、

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}, j = l + s \quad (3.10)$$

に対し、次の固有値方程式

$$\mathbf{j}^2 \chi_{j,\nu} = j(j+1) \chi_{j,\nu}, j_z \chi_{j,\nu} = \nu \chi_{j,\nu} \quad (3.11)$$

を満たす2成分固有関数 $\xi_{j,\nu}, \eta_{j,\nu}$ を用いて

$$\psi_{j,\nu}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \xi_{j,\nu} \\ \eta_{j,\nu} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

と表す。(3.11)式の解は軌道角運動量 \mathbf{l} の固有関数である球面調和関数 Y_l^m とスピン角運動量演算子 \mathbf{s} の固有関数である $\chi_{1/2}^\sigma (\sigma = 1, 2)$

$$l^2 Y_l^m = l(l+1) Y_l^m, l_z Y_l^m = m Y_l^m \quad (3.13)$$

$$\chi_{1/2}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \chi_{1/2}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

の合成関数であるスピノール球面調和関数

$$\Omega_{j,\nu}^l(\hat{r}) = \sum_{m,\sigma} (l, m, 1/2, \sigma | j, \nu) Y_l^m(\hat{r}) \chi_{1/2}^\sigma$$

$$= \begin{cases} \sqrt{\frac{l+1/2+\nu}{2l+1}} Y_l^{\nu-1/2}(\hat{r}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sqrt{\frac{l+1/2-\nu}{2l+1}} Y_l^{\nu+1/2}(\hat{r}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & (j = l + 1/2) \\ -\sqrt{\frac{l+1/2-\nu}{2l+1}} Y_l^{\nu-1/2}(\hat{r}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sqrt{\frac{l+1/2+\nu}{2l+1}} Y_l^{\nu+1/2}(\hat{r}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & (j = l - 1/2) \end{cases} \quad (3.15)$$

を使って表すことが出来る。ここで新たな量子数 κ を

$$\kappa \equiv \begin{cases} -(l+1) = -(j+1/2) & (j = l + 1/2) \\ l = j + 1/2 & (j = l - 1/2) \end{cases} \quad (3.16)$$

と定義すると、(3.11)式の解は

$$\chi_{\kappa,\nu}(\hat{r}) = \begin{cases} \Omega_{j,\nu}^{j-1/2}(\hat{r}) & (\kappa < 0) \\ \Omega_{j,\nu}^{j+1/2}(\hat{r}) & (\kappa > 0) \end{cases} \quad (3.17)$$

と書き直すことができる。この $\chi_{\kappa,\nu}(\hat{r})$ と動径方向の波動関数 $g_\kappa(r), f_\kappa(r)$ を用いて球対称のポテンシャルが存在するときの Dirac 波動関数 $\psi_{j,\nu}(\mathbf{r})$ は

$$\psi_{j,\nu}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} g_\kappa(r) \chi_{\kappa,\nu}(\hat{r}) + g_{-\kappa}(r) \chi_{-\kappa,\nu}(\hat{r}) \\ i f_\kappa(r) \chi_{-\kappa,\nu}(\hat{r}) + i f_{-\kappa}(r) \chi_{\kappa,\nu}(\hat{r}) \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

と表せる。ここで(3.18)式を(3.1)式に代入することで $g_\kappa(r), f_\kappa(r)$ の従う動径方向の波動方程式を導出する。

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla} [f_\kappa(r) \chi_{-\kappa,\nu}(\hat{r}) + f_{-\kappa}(r) \chi_{\kappa,\nu}(\hat{r})] + (m - E - V(r)) (g_\kappa(r) \chi_{\kappa,\nu}(\hat{r}) + g_{-\kappa}(r) \chi_{-\kappa,\nu}(\hat{r})) = 0 \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla [g_\kappa(r)\chi_{\kappa,\nu}(\hat{r}) + g_{-\kappa}(r)\chi_{-\kappa,\nu}(\hat{r})] \\ & + (m + E + V(r))(f_\kappa(r)\chi_{-\kappa,\nu}(\hat{r}) + f_{-\kappa}(r)\chi_{\kappa,\nu}(\hat{r})) = 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

ここで、 r のみに依存する任意の関数 $G(r)$ に対して

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla [G(r)\chi_{\kappa,\nu}(\hat{r})] = - \left(\frac{dG(r)}{dr} + \frac{1+\kappa}{r}G(r) \right) \chi_{-\kappa,\nu}(\hat{r}) \quad (3.21)$$

が成り立つことを用いることで、 $g_\kappa(r), f_\kappa(r)$ に関する方程式

$$\frac{dg_\kappa(r)}{dr} + \frac{1+\kappa}{r}g_\kappa(r) - (E + m + V(r))f_\kappa(r) = 0 \quad (3.22)$$

$$\frac{df_\kappa(r)}{dr} + \frac{1-\kappa}{r}f_\kappa(r) - (E - m + V(r))g_\kappa(r) = 0 \quad (3.23)$$

および、 $\kappa \rightarrow -\kappa$ と置き換えた場合に対応する $g_{-\kappa}(r), f_{-\kappa}(r)$ に関する方程式が得られる。よって

$$\psi_{\kappa,\nu}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} g_\kappa(r)\chi_{\kappa,\nu}(\hat{r}) \\ if_\kappa(r)\chi_{-\kappa,\nu}(\hat{r}) \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

と定義すると球対称のポテンシャルが存在するときの Dirac 波動関数 $\psi_{j,\nu}(\mathbf{r})$ は $\psi_{\kappa,\nu}(\mathbf{r})$ と $\psi_{-\kappa,\nu}(\mathbf{r})$ の重ね合わせで表される。

$$\psi_{j,\nu}(\mathbf{r}) = \psi_{\kappa,\nu}(\mathbf{r}) + \psi_{-\kappa,\nu}(\mathbf{r}) \quad (3.25)$$

3.1.2 部分波展開

最初に自由場の Dirac 方程式に対する平面波解

$$\psi_{\text{pl}}^{p,s}(\mathbf{r}) = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \end{pmatrix} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} \chi_{1/2}^s \quad (3.26)$$

の部分波展開を考える。

$$e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} = \sum_{L,M} 4\pi i^L Y_L^{M*}(\hat{p}) Y_L^M(\hat{r}) j_L(pr) \quad (3.27)$$

となることを用いると、

$$\begin{aligned} \psi_{\text{pl}}^{p,s}(\mathbf{r}) &= \sqrt{E+m} \sum_{L,M} 4\pi i^L Y_L^{M*}(\hat{p}) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \end{pmatrix} j_L(pr) Y_L^M(\hat{r}) \chi_{1/2}^s \\ &= \sqrt{E+m} \sum_{L,M} 4\pi i^L Y_L^{M*}(\hat{p}) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \end{pmatrix} j_L pr \sum_{J,\nu} (L, M, 1/2, s | J, \nu) \Omega_{J,\nu}^L(\hat{r}) \\ &= \sqrt{E+m} \sum_{\kappa,\nu} 4\pi i^{l_\kappa} Y_{l_\kappa}^{\nu-s^*}(\hat{p}) (l_\kappa, \nu-s, 1/2, s | j_\kappa, \nu) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \end{pmatrix} j_{l_\kappa}(pr) \chi_{\kappa,\nu}(\hat{r}) \end{aligned} \quad (3.28)$$

さらに、(3.21) 式と球ベッセル関数の漸化式

$$\left(\frac{d}{dz} - \frac{n}{z} \right) j_n(z) = -j_{n+1}(z) \quad (3.29)$$

$$\left(\frac{d}{dz} + \frac{n+1}{z} \right) j_n(z) = j_{n-1}(z) \quad (3.30)$$

より

$$\begin{aligned} -i \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} [j_{l_\kappa}(pr) \chi_{\kappa,\nu}(\hat{r})] &= \frac{i}{E+m} \left[\frac{d}{dz} + \frac{1+\kappa}{r} \right] j_{l_\kappa}(pr) \chi_{-\kappa,\nu}(\hat{r}) \\ &= \frac{ip}{E+m} \text{sign}(\kappa) j_{l_{-\kappa}}(pr) \end{aligned} \quad (3.31)$$

となることを用いると自由場の Dirac 方程式に対する平面波解の部分波展開

$$\psi_{\text{pl}}^{p,s}(\mathbf{r}) = \sum_{\kappa,\nu} 4\pi i^{l_\kappa} Y_{l_\kappa}^{\nu-s^*}(\hat{p})(l_\kappa, \nu-s, 1/2, s | j_\kappa, \nu) \begin{pmatrix} g_\kappa^{\text{pl}}(r) \chi_{\kappa,\nu}(\hat{r}) \\ i f_\kappa^{\text{pl}}(r) \chi_{-\kappa,\nu}(\hat{r}) \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

$$g_\kappa^{\text{pl}}(r) = \sqrt{E+m} j_{l_\kappa}(pr) \quad (3.33)$$

$$f_\kappa^{\text{pl}}(r) = \sqrt{E-m} \text{sign}(\kappa) j_{l_{-\kappa}}(pr) \quad (3.34)$$

が得られる。動径方向の波動関数 $g_\kappa^{\text{pl}}(r), f_\kappa^{\text{pl}}(r)$ は、無限遠方 ($r \rightarrow \infty$) で

$$g_\kappa^{\text{pl}}(r) \rightarrow \frac{\sqrt{E+m}}{pr} \cos \left(pr - \frac{l_\kappa + 1}{2} \pi \right) \quad (3.35)$$

$$f_\kappa^{\text{pl}}(r) \rightarrow -\frac{\sqrt{E-m}}{pr} \sin \left(pr - \frac{l_\kappa + 1}{2} \pi \right) \quad (3.36)$$

のように振る舞う。

次に一般の球対称ポテンシャルが存在する場合を考える。球対称ポテンシャルは平面波における角度部分は変化させず、動径方向の波動関数のみを変化させる。したがって (3.32) 式を修正することで球対称ポテンシャルが存在する Dirac 方程式の波動関数の部分波展開は

$$\psi^{p,s}(\mathbf{r}) = \sum_{\kappa,\nu} 4\pi i^{l_\kappa} Y_{l_\kappa}^{\nu-s^*}(\hat{p})(l_\kappa, \nu-s, 1/2, s | j_\kappa, \nu) c_\kappa \begin{pmatrix} g_\kappa(r) \chi_{\kappa,\nu}(\hat{r}) \\ i f_\kappa(r) \chi_{-\kappa,\nu}(\hat{r}) \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

と表せることがわかる。 c_κ は部分波を重ね合わせる際に重みを与える係数である。

原子核 Coulomb potential での c_κ を求めるため、波動関数の遠方での振る舞いを考える。原子核 Coulomb potential は無限遠 ($r \rightarrow \infty$) で点電荷 Coulomb potential に漸近するため、波動関数は点電荷ポテンシャルに対する Dirac 方程式の解の重ね合わせによって表現できる。さて原点で正則な解 $g_\kappa^{\text{reg}}(r), f_\kappa^{\text{reg}}(r)$ と非正則な解 $g_\kappa^{\text{irr}}(r), f_\kappa^{\text{irr}}(r)$ の線形結合によって記述できると仮定すると

$$\begin{pmatrix} g_\kappa(r) \\ f_\kappa(r) \end{pmatrix} \rightarrow \cos \delta_\kappa \begin{pmatrix} g_\kappa^{\text{reg}}(r) \\ f_\kappa^{\text{reg}}(r) \end{pmatrix} - \sin \delta_\kappa \begin{pmatrix} g_\kappa^{\text{irr}}(r) \\ f_\kappa^{\text{irr}}(r) \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

と表すことができ、点電荷分布における解の無限遠での漸近形 (B.60),(B.61),(B.71),(B.72) を用いれば

$$\begin{aligned} g_\kappa(r) &\rightarrow \frac{\sqrt{E+m}}{pr} \left[\cos \delta_\kappa \cos \left(pr - \frac{l_\kappa+1}{2}\pi + \delta_C \right) - \sin \delta_\kappa \sin \left(pr - \frac{l_\kappa+1}{2}\pi + \delta_C \right) \right] \\ &= \frac{\sqrt{E+m}}{pr} \cos \left(pr - \frac{l_\kappa+1}{2}\pi + \delta_C + \delta_\kappa \right) \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} f_\kappa(r) &\rightarrow \frac{\sqrt{E-m}}{pr} \left[-\cos \delta_\kappa \sin \left(pr - \frac{l_\kappa+1}{2}\pi + \delta_C \right) - \sin \delta_\kappa \cos \left(pr - \frac{l_\kappa+1}{2}\pi + \delta_C \right) \right] \\ &= -\frac{\sqrt{E-m}}{pr} \sin \left(pr - \frac{l_\kappa+1}{2}\pi + \delta_C + \delta_\kappa \right) \end{aligned} \quad (3.40)$$

となる、ここで δ_C は自由場の波動関数からの点電荷ポテンシャルによる位相のずれを表しているため、 δ_κ が点電荷波動関数からの原子核ポテンシャルによる位相のズレであることが分かる。さらに

$$z = pr - \frac{l_\kappa+1}{2}\pi + \delta_C \quad (3.41)$$

とおき、

$$\begin{aligned} \cos(z + \delta_\kappa) &= \frac{e^{i(z+\delta_\kappa)} + e^{-i(z+\delta_\kappa)}}{2} \\ &= e^{\mp\delta_\kappa} \frac{e^{iz} + e^{-iz} - e^{\pm iz} + e^{\pm i(z+2\delta_\kappa)}}{2} \\ &= e^{\mp\delta_\kappa} \left(\cos z + \frac{e^{\pm 2i\delta_\kappa} - 1}{2} e^{\pm iz} \right) \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} \sin(z + \delta_\kappa) &= \frac{e^{i(z+\delta_\kappa)} - e^{-i(z+\delta_\kappa)}}{2i} \\ &= e^{\mp\delta_\kappa} \frac{e^{iz} - e^{-iz} \mp e^{\pm iz} \pm e^{\pm i(z+2\delta_\kappa)}}{2i} \\ &= e^{\mp\delta_\kappa} \left(\sin z \pm \frac{e^{\pm 2i\delta_\kappa} - 1}{2i} e^{\pm iz} \right) \end{aligned} \quad (3.43)$$

が成り立つことを用いると

$$\begin{pmatrix} g_\kappa(r) \\ f_\kappa(r) \end{pmatrix} \rightarrow e^{\mp i\delta_\kappa} \left[\frac{1}{pr} \begin{pmatrix} \sqrt{E+m} \cos z \\ -\sqrt{E-m} \sin z \end{pmatrix} + \frac{(e^{\pm 2i\delta_\kappa} - 1)e^{\pm iz}}{2pr} \begin{pmatrix} \sqrt{E+m} \\ \pm i\sqrt{E+m} \end{pmatrix} \right] \quad (3.44)$$

と書き直すことができる。したがって、(3.37) 式で導入した係数 c_κ を

$$c_\kappa = e^{\pm i\delta_\kappa} \quad (3.45)$$

と選べば、(3.35),(3.36) 式と見比べることで第一項が平面波のような振る舞いを持っており、第二項が球対称ポテンシャルによる波動関数の歪曲を表していると解釈できる。(ただし、 δ_C が r を含むため、第一項が完全な平面波になっているわけではない事に注意する。) 以上より、一般の球対称ポテンシャルにより歪曲を受けた散乱波の部分波展開は

$$\psi^{p,s}(r) = \sum_{\kappa,\nu} 4\pi i^{l_\kappa} Y_{l_\kappa}^{\nu-s^*}(\hat{p})(l_\kappa, \nu-s, 1/2, s | j_\kappa, \nu) e^{\pm i\delta_\kappa} \begin{pmatrix} g_\kappa(r) \chi_{\kappa,\nu}(\hat{r}) \\ i f_\kappa(r) \chi_{-\kappa,\nu}(\hat{r}) \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

と表される。各部分波にたいする δ_κ の値は、遠方での境界条件を満たすように数値的に求める必要がある。 $+(-)$ の符号は境界条件として外向き（内向き）球面波をとることに対応しており、今回の計算で終状態の散乱波を求めるには内向きの境界条件を選ぶ。

計算に用いる始状態のミューオンの 1S 状態の波動関数と終状態の電子の部分波展開で記述された波動関数は

$$\begin{aligned}\psi_e^{\mathbf{q}_e, s_e}(\mathbf{x}) &= \sum_{\kappa, \nu} a_{\kappa, \nu, s_e}(\hat{q}_e) \psi_{q_e}^{\kappa, \nu}(\mathbf{x}) \\ a_{\kappa, \nu, s_e}(\hat{q}_e) &= 4\pi i^{l_\kappa} (l_\kappa, \nu - s_e, 1/2, s_e | j_\kappa, \nu) Y_{l_\kappa}^{\nu - s_e *}(\hat{q}_e) e^{-i\delta_\kappa} \\ \psi_\mu^{\mathbf{p}_\mu, s_\mu}(\mathbf{x}) &= a_{s_\mu} \psi_{p_\mu}^{-1, s_\mu}(\mathbf{x}) \\ a_{s_\mu} &= e^{-i\delta_1}\end{aligned}\quad (3.47)$$

ここで

$$\psi_q^{\kappa, \nu}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} g_q^\kappa(x) \chi_\kappa^\nu(\hat{x}) \\ i f_q^\kappa(x) \chi_{-\kappa}^\nu(\hat{x}) \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

そして $g_q^\kappa(x), f_q^\kappa(x)$ は Woods-Saxon 分布でのクーロンポテンシャルが存在するときの (3.22)(3.23) を解くことによって求められる。具体的な計算方法については AppendixB を参照。

3.2 DIO の崩壊率

ミューオン原子中でのミューオンの崩壊 $\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$ に関するラグランジアンは

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_e \gamma_\lambda (1 - \gamma^5) \psi_{\nu_e} \bar{\psi}_{\nu_\mu} \gamma^\lambda (1 - \gamma^5) \psi_\mu + \text{h.c.} \quad (3.49)$$

ここで G_F はフェルミ結合定数、 ψ_a は粒子 $a(a = \mu, e, \nu_\mu, \nu_e)$ の場の演算子を表す。ミューオン、電子の波動関数がポテンシャルの影響を受ける一方でニュートリノの波動関数は真空中での崩壊と同じ平面波の波動関数を用いる。Fierz 変換を行い

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_e \gamma_\lambda (1 - \gamma^5) \psi_\mu \bar{\psi}_{\nu_\mu} \gamma^\lambda (1 - \gamma^5) \psi_{\nu_e} + \text{h.c.} \quad (3.50)$$

とラグランジアンを書き直すことでミューオン-電子に関する部分とニュートリノに関する部分に分割すると DIO の計算に都合が良くなる。以下ではニュートリノおよび反ニュートリノの質量をゼロと仮定する。

このラグランジアンを用いて遷移振幅 \mathcal{M} は

$$\mathcal{M} \delta(E_f - E_i) = \int d^4x \langle e, \nu_\mu | \mathcal{L}(x) | \mu, \nu_e \rangle \quad (3.51)$$

となる。そして DIO の崩壊率はフェルミの黄金律により

$$P dE d\Omega_e = \left(\frac{1}{2} \sum_{s_\mu, s_e} \frac{d^3 \mathbf{q}_e}{(2\pi)^3 2E} \right) \left(\sum_{s_{\nu_\mu}, s_{\nu_e}} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_{\nu_\mu} d^3 \mathbf{p}_{\nu_e}}{(2\pi)^6 2p_{\nu_\mu}^0 2p_{\nu_e}^0} \right) |\mathcal{M}|^2 (2\pi) \delta(p_\mu^0 - p_{\nu_\mu}^0 - p_{\nu_e}^0 - E) \quad (3.52)$$

と表される。先行研究 [27] より計算した結果は

$$\begin{aligned}
 N(E) &\equiv \frac{1}{\Gamma_0} \frac{d\Gamma}{dE}(E) = \frac{1}{\Gamma_0} 4\pi P(E) \\
 &= \frac{8q_e}{\pi m_\mu^5} \int_0^{W-E} k^2 dk \sum_{J,\kappa} (2j_\kappa + 1) \\
 &\times \left[-\frac{(W-E)k}{2J+1} \{ S_{j_\kappa}^{+1*} (iS_{j_\kappa}^{+1*} + iS_{j_\kappa}^{-1*}) + c.c. \} \right. \\
 &+ k^2 \left\{ |S_{j_\kappa}^{+1}|^2 + \frac{|S_{j_\kappa}^{+1} + S_{j_\kappa}^{-1}|^2}{(2J+1)^2} \right\} \\
 &\left. + \{(W-E)^2 - k^2\} \left\{ \frac{|S_{j_\kappa}^0|^2}{J(J+1)} + \frac{|S_{j_\kappa}^{+1}|^2}{(J+1)(2J+1)} + \frac{|S_{j_\kappa}^{-1}|^2}{J(2J+1)} \right\} \right] \quad (3.53)
 \end{aligned}$$

となる。具体的な計算は Appendix C で紹介する。ここで DIO の崩壊率を自由ミューオン $\Gamma_0 = G_F^2 m_\mu^5 / 192\pi^3$ によって規格化している。W はスペクトルの end point である。k はニュートリノの運動量である。また

$$\begin{aligned}
 S_{j_\kappa}^{+1} &= \frac{1}{2} \int x^2 dx j_{J+1}(kx) \left[\{1 + (-1)^{l_\kappa+L+1}\} \{(\kappa+J)g_e^\kappa(x)g_\mu^{-1}(x) - (\kappa-2-J)f_e^\kappa(x)f_\mu^{-1}(x)\} \right. \\
 &\quad \left. - i\{1 + (-1)^{l_\kappa+J}\} \{(\kappa+2+J)g_e^\kappa(x)f_\mu^{-1}(x) + (\kappa-J)f_e^\kappa(x)g_\mu^{-1}(x)\} \right] \\
 S_{j_\kappa}^0 &= \frac{1}{2} \int x^2 dx j_J(kx) \left[\{1 + (-1)^{l_\kappa+L}\} (\kappa+1) \{g_e^\kappa(x)g_\mu^{-1}(x) - f_e^\kappa(x)f_\mu^{-1}(x)\} \right. \\
 &\quad \left. - i\{1 + (-1)^{l_\kappa+J+1}\} (\kappa-1) \{g_e^\kappa(x)f_\mu^{-1}(x) + f_e^\kappa(x)g_\mu^{-1}(x)\} \right] \\
 S_{j_\kappa}^{-1} &= \frac{1}{2} \int x^2 dx j_{J-1}(kx) \left[\{1 + (-1)^{l_\kappa+L+1}\} \{(\kappa-1-J)g_e^\kappa(x)g_\mu^{-1}(x) - (\kappa-1+J)f_e^\kappa(x)f_\mu^{-1}(x)\} \right. \\
 &\quad \left. - i\{1 + (-1)^{l_\kappa+J}\} \{(\kappa+1-J)g_e^\kappa(x)f_\mu^{-1}(x) + (\kappa+1+J)f_e^\kappa(x)g_\mu^{-1}(x)\} \right] \\
 S_{j_\kappa} &= \frac{1}{2} \int x^2 dx j_{J-1}(kx) \left[\{1 + (-1)^{l_\kappa+J}\} \{g_e^\kappa(x)g_\mu^{-1}(x) + f_e^\kappa(x)f_\mu^{-1}(x)\} \right. \\
 &\quad \left. - i\{1 + (-1)^{l_\kappa+J+1}\} \{g_e^\kappa(x)f_\mu^{-1}(x) - f_e^\kappa(x)g_\mu^{-1}(x)\} \right] \quad (3.54)
 \end{aligned}$$

は荷電レプトンカレントであり、Dirac 方程式をといて得られた電子とミューオンの波動関数 (3.47) を用いて計算される。

さて [28] よりエネルギースペクトルの end point W は原子核の反跳効果を取り入れて

$$W = m_\mu - B_\mu - \frac{E^2}{2m_N} \quad (3.55)$$

と書き表せる。ここで m_μ はミューオンの静止質量 B_μ はミューオンの束縛エネルギー、そして第三項が原子核の反跳効果である。

第4章

結果・考察

4.1 $L_\mu - L_\tau$ 模型の DIO スペクトラムへの影響

一章で説明したように、 $L_\mu - L_\tau$ 模型のパラメーター m', g' として実験によって制限の掛からない領域かつミューオン $g - 2$ のズレを説明可能な領域の中で可能な限り大きなカップリングと小さな質量である

$$m' = 10[\text{MeV}], g' = 5.0 \times 10^{-4} \quad (4.1)$$

を用いて計算を行った。

またミューオン原子の原子核の候補として ^{208}Pb 、 ^{56}Fe 、 ^{27}Al を用いた。それぞれの元素で、Woods-Saxon 分布 (2.11) 式のパラメーターは表 4.1 のようになっている。[19]

	^{27}Al	^{56}Fe	^{208}Pb
$a[\text{fm}]$	0.569	0.5935	0.549
$c[\text{fm}]$	2.845	3.971	6.624

表 4.1 ^{208}Pb , ^{56}Fe , ^{27}Al の Woods-Saxon パラメータ

さて、始めにそれぞれの元素で計算した SM での DIO エネルギースペクトル $N_{SM}(E)$ は図 4.1 図 4.2 図 4.3 のようになる。原子番号 Z が大きい原子ほど束縛エネルギーが大きくなるため end point のエネルギーが小さくなっていることが分かる。

次に $L_\mu - L_\tau$ 模型が存在するときの DIO のエネルギースペクトル $N_{\mu-\tau}(E)$ と SM で計算された $N_{SM}(E)$ とのズレを図 4.4 図 4.5 図 4.6 に載せる。3 つの元素を比較すると、このズレの大きさは Z に比例して大きくなっていることが分かる。ズレの原因となるポテンシャル $V'(r)$ が Z に比例することからこの結果が理解できる。

ここで、ズレの影響がエネルギー依存性を見るために鉛でのエネルギースペクトルの相対誤差 $(N_{L_\mu - L_\tau} - N_{SM})/N_{SM}$ を見ると図、エネルギーの高い領域にいくにつれてズレが大きくなっていることが分かる。これは、湯川ポテンシャルが空間的な原点に近いほど大きくなり、そのフーリエ変換として理解できる。

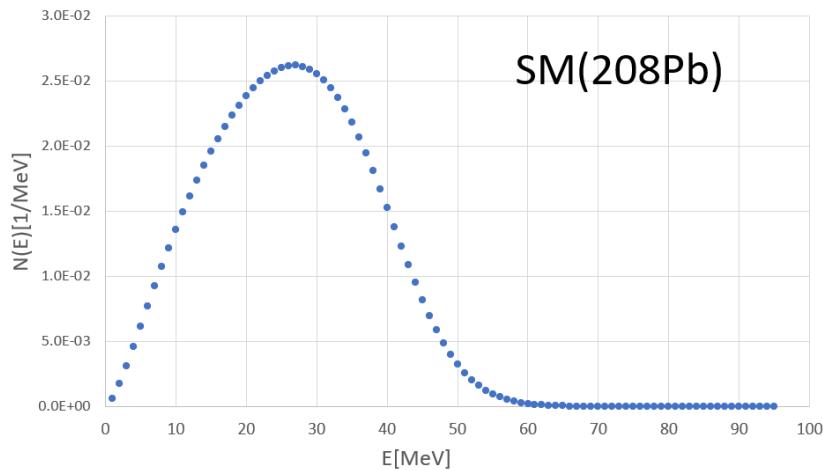


図 4.1 ^{208}Pb を用いて SM で計算された放出される電子のエネルギースペクトル $N(E)$

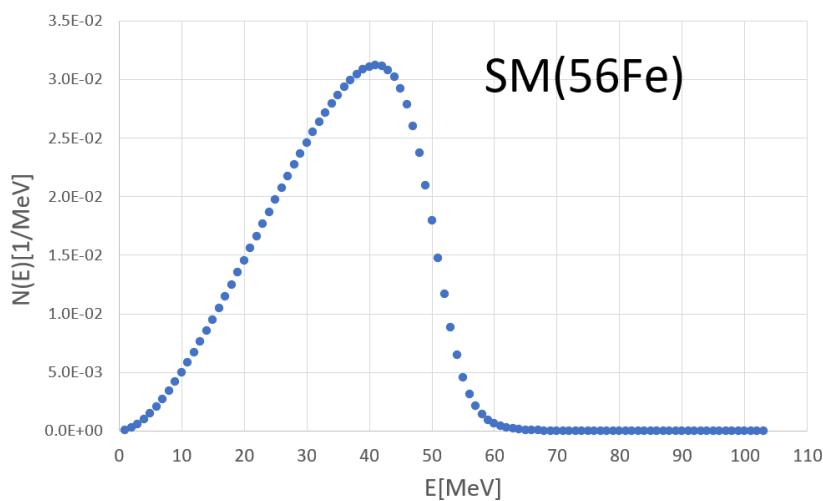


図 4.2 ^{56}Fe を用いて SM で計算された放出される電子のエネルギースペクトル $N(E)$

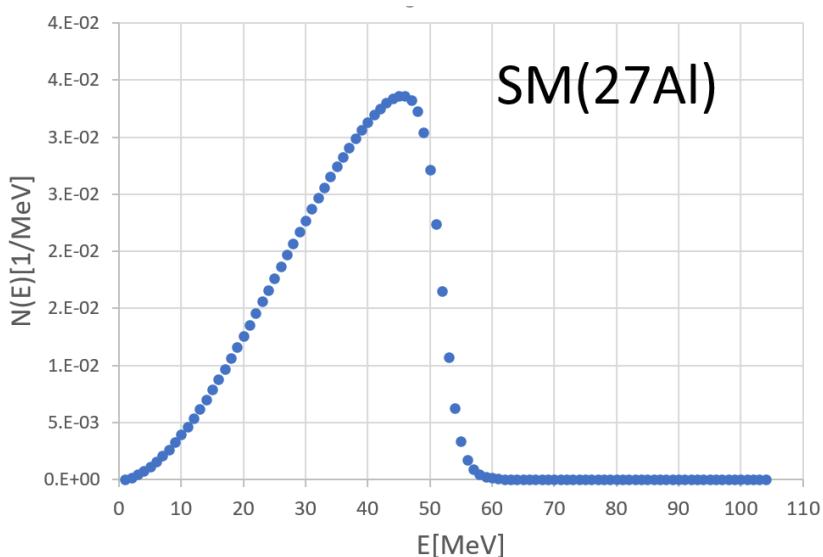
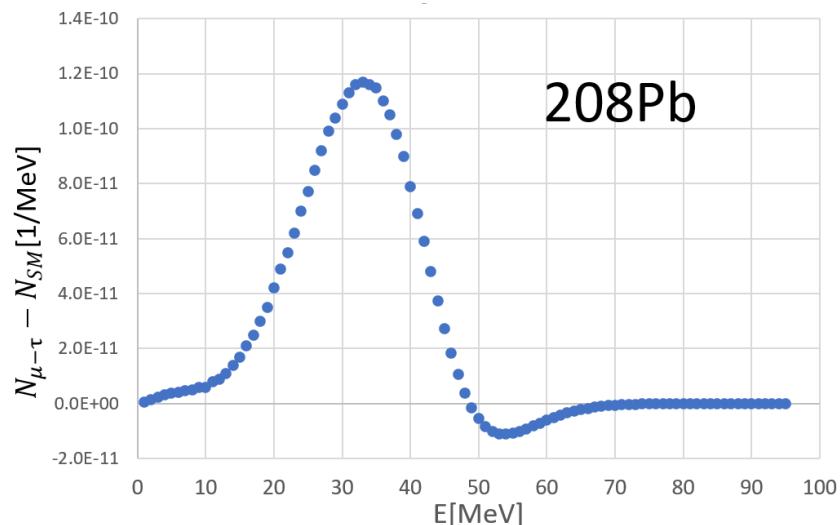
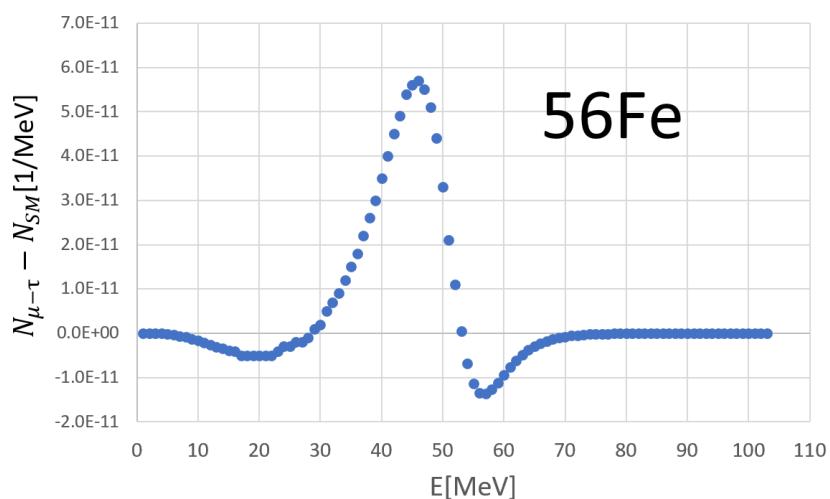
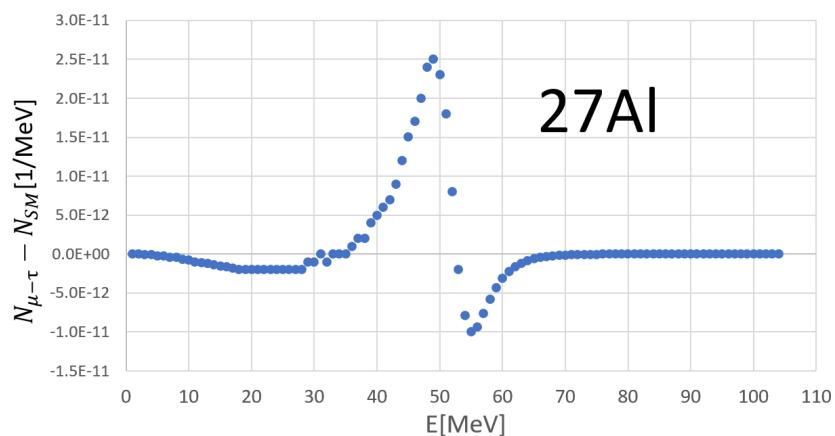


図 4.3 ^{27}Al を用いて SM で計算された放出される電子のエネルギースペクトル $N(E)$

図 4.4 ^{208}Pb で計算されたエネルギースペクトルのズレ $N_{\mu-\tau}(E) - N_{SM}(E)$ 図 4.5 ^{56}Fe で計算されたエネルギースペクトルのズレ $N_{\mu-\tau}(E) - N_{SM}(E)$ 図 4.6 ^{27}Al で計算されたエネルギースペクトルのズレ $N_{\mu-\tau}(E) - N_{SM}(E)$

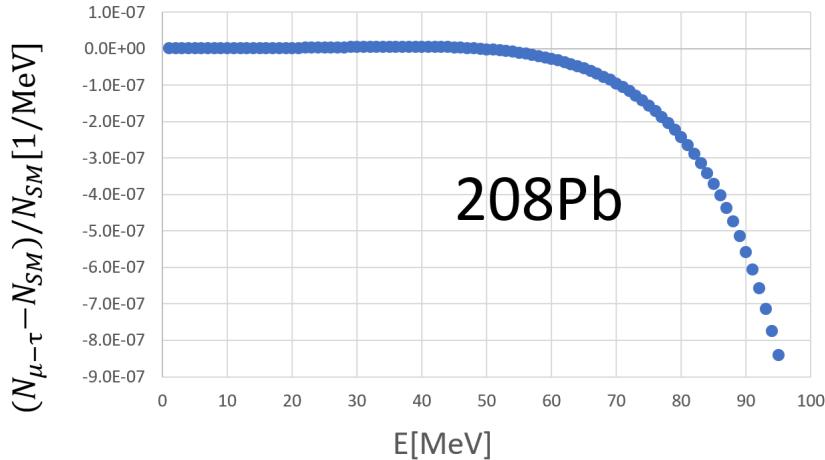


図 4.7 ^{208}Pb で計算されたエネルギースペクトルの相対誤差 $(N_{\mu-\tau}(E) - N_{SM}(E))/N(E)$

4.2 $L_\mu - L_\tau$ 模型の影響の測定に必要なミューオン原子数の推定

このズレを観測するために必要なミューオン原子の数 N_0 を求める。 N_0 個のミューオンの崩壊によって出てくる電子のなかで E_a E_b のエネルギーをもつ電子の個数は単位時間当たり

$$\int_{E_a}^{E_b} \frac{d\Gamma}{dE}(E) dE \times N_0 \quad (4.2)$$

個である。 (4.3) 式に観測時間を掛けることで観測される電子の総数が求まる。しかし、ミューオン原子の平均寿命 t_{ma} を超えた時間 $t > t_{ma}$ では崩壊が起きないと考えられる為 t_{ma} を (4.3) 式にかけたものが観測される電子の総数となる。ここで $N(E)$ は自由ミューオンの崩壊率によって規格化されているため自由ミューオン原子の平均寿命と自由ミューオンの平均寿命の比率をかけなければならない。ここでミューオン原子の平均寿命はミューオンが原子核に捕獲されることにより、自由ミューオンの平均寿命より短くなる。各元素のミューオン原子の平均寿命は表 4.2 のようになる [20]

	free μ	^{27}Al	^{56}Fe	^{208}Pb
平均寿命 [ns]	2197	880	201	82

表 4.2 ^{27}Al , ^{56}Fe , ^{208}Pb のミューオン原子の平均寿命と自由ミューオンの平均寿命との比較

さて、このズレが統計的に有意か確かめる指標として次の量を用いる。

$$\chi_0^2 \equiv 2(N'_{SM} - N'_{\mu-\tau} + N'_{\mu-\tau} \ln \frac{N'_{\mu-\tau}}{N'_{SM}}) \quad (4.3)$$

ここで

$$N'_{SM(\mu-\tau)} = \frac{t_{ma}}{t_{fm}} \int_{E_a}^{E_b} N_{SM(\mu-\tau)}(E) dE \times N_0 \quad (4.4)$$

この χ_0^2 を用いて χ^2 検定を行う。以下では実験として以下の領域を測定すると仮定した場合をそれぞれ考える。

(1) エネルギーの全領域を測定

(2) 50MeV 以上の領域を測定

(3) 80MeV 以上の領域を測定

(4) エネルギーの end point 付近の領域を測定

(2) はミューオン原子の寿命が DIO スペクトルの内、出てくる電子の数の大きい 50[MeV] 以下を用いて決定されるため、その寿命の決定につかわれない電子の測定領域である

(3) はミューオン原子を用いた実験である COMET 実験 [21] や Mu2e 実験 [23] で測定する領域である。

(1) (4) の領域で測定したとき、有意水準 5% でこのズレを観測するために必用なミューオン原子数はそれぞれの元素に対して表 4.3 のように与えられる。

	^{27}Al	^{56}Fe	$^{208}\text{Pb}(\text{前})$	$^{208}\text{Pb}(\text{後})$
(1)	1.32×10^{16}	5.48×10^{17}	1.20×10^{17}	1.66×10^{17}
(2)	4.12×10^{17}	5.87×10^{17}	5.78×10^{18}	1.25×10^{19}
(3)	1.30×10^{21}	1.44×10^{21}	8.19×10^{21}	1.11×10^{24}
(4)	3.19×10^{25}	2.56×10^{25}	1.56×10^{25}	4.15×10^{26}

表 4.3 エネルギー領域として (1) 全領域の観測 (2) 50[MeV] 以上の領域の観測 (3) end point 付近のエネルギーの観測を行った際に必用なミューオンの数

となる。図 4.4~4.6 までの結果から Z が大きな方がエネルギースペクトルのズレが大きくなり χ^2_0 が増えることが分かるが、表 4.2 より Z が大きな元素の方がミューオン原子の平均寿命が短くなるため χ^2_0 は減る。各エネルギー幅の計算でこの二つの効果の内どちらが勝つかによって大きな Z の元素が有利になるか小さな Z の元素が有利になるかが決まる。表 4.3 の結果では end point でのみ Z が大きな元素が優勢になっているが、これは図 4.7 で示したように end point の方が相対誤差が大きくなるため前者の効果が大きく働いた結果と考えられる。

さてこれらの結果と実際にミューオン原子を用いた Beyond Standard Model 探索実験である COMET 実験や Mu2e 実験でのミューオン生成数を比較する。なおこれらの実験では Al を用いて測定を行う予定である。COMET 実験でのミューオン原子生成数は 2×10^{18} 個で Mu2e 実験では 5×10^{17} 個である。これらの実験では end point 付近のエネルギーのみを測定するためこれらの実験シナリオでは DIO 過程に対する $L_\mu - L_\tau$ 模型の影響を観測する実験感度は得られない。しかし生成数のみを考慮すると全領域や 50MeV 以上の測定では $L_\mu - L_\tau$ の影響を十分に観測可能であると言える。その為、将来的にミューオン原子を用いた広いエネルギー帯で観測を行う実験を行うことで $L_\mu - L_\tau$ 模型の影響の観測や模型に対する制限をつけることが期待できる。

第5章

まとめと今後の展望

本論文では Standard Model を超える物理 (Beyond Standard Model,BSM) の模型の一つであり、ミューオンの異常磁気能率の問題の解決が可能な最小 $U(1)_{L_\mu - L_\tau}$ 模型に注目しミューオン原子中のミューオンの崩壊過程 (Decay In Orbit,DIO) への影響を計算した。また Decay In Orbit で必要となる原子核分布でのポテンシャルとしての模型の影響について新たに定式化を行った。

そしてこの影響を見積るために必要なミューオン原子の個数を見積もったところ現在計画されているミューオン原子を用いる実験のシナリオでは end point 付近のエネルギー帯で観測を行う為、 $U(1)_{L_\mu - L_\tau}$ 模型の影響を観測する感度に到達していないが、観測するエネルギー帯を広げることで $U(1)_{L_\mu - L_\tau}$ 模型の証拠の発見やパラメータに関する制限が期待できることが分かった。

今後の課題として DIO の計算を真空偏極や放射補正を取り入れ計算を行うことでより現実に近い模型で予言が可能となるため、DIO の計算にこれらを取り入れて計算を行うことがあげられる。また計算で用いた Woods-Saxon パラメータに関する不定性の影響についても考えなければならない。

さらに今後の展望として本論文で導出した BSM の影響であるミューオンと原子核との相互作用を Woods-Saxon 分布を用いた定式化は一般の $U(1)$ 拡張模型に対しても用いることができるため、様々な $U(1)$ 拡張模型に対して DIO への影響を計算し必要なミューオン原子数を求めることが出来る。

Appendix A

notation

- ・ 単位系

本論文では自然単位系を用いる。

$$c = \hbar = \varepsilon = 1 \quad (\text{A.1})$$

- ・ 計量

相対論における計量は次のようにとる。

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

- ・ Dirac 行列

4 元スピノールを考えるときには Dirac 表示を用いる。

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

ここで I は 2×2 の単位行列, σ_i はパウリ行列である。また、行列 α, β は次のように定義される。

$$\alpha_i = \gamma^0 \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \beta = \gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

・ 波動関数の規格化始状態のミューオン波動関数 $\psi_\mu^{p,s}(x)$ 及び終状態の電子波動関数 $\psi_e^{p,s}(x)$ は次のように規格化する。

$$\int d^3x \psi_\mu^{p,s\dagger}(x) \psi_\mu^{p',s'}(x) = \delta_{pp'} \delta_{ss'} \quad (\text{A.5})$$

$$\int d^3x \psi_e^{p,s\dagger}(x) \psi_e^{p',s'}(x) = 2p^0 (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{ss'} \quad (\text{A.6})$$

また、それぞれに対応する生成・消滅演算子は反交換関係

$$\{a_\mu^s(\mathbf{p}), a_\mu^{s'}(\mathbf{p})\} = \delta_{pp'} \delta_{ss'} \quad (\text{A.7})$$

$$\{a_e^s(\mathbf{p}), a_e^{s'}(\mathbf{p})\} = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{ss'} \quad (\text{A.8})$$

を満たすものとする。

Appendix B

波動関数

ミューオン原子の崩壊 (DIO) は、崩壊率の計算に束縛状態のミューオン波動関数と散乱状態の電子の波動関数を用いる。この章ではそれらの波動関数の計算方法について解説する。前章で述べたように原子核のポテンシャルは球対称であるため、まず球対称ポテンシャルが存在する場合の Dirac 波動関数の導出を行う。原子核 (の電荷分布での) Coulomb ポテンシャルによる束縛状態のミューオンの波動関数と散乱状態の電子の波動関数はいずれも解析的に計算することが出来ず数値計算によって求められる。その際の境界条件としてポテンシャルが無限遠方では点電荷とみなせることから点電荷の Coulomb ポテンシャルの束縛状態と散乱状態の解を用いる。そのため点電荷の波動関数の導出を行い、DIO の崩壊率の計算に用いる原子核 Coulomb ポтенシャルの波動関数の数値計算法について説明する。

B.1 束縛状態のミューオンの波動関数

DIO の計算に用いる原子核 Coulomb ポтенシャルによる束縛状態のミューオンの波動関数について説明する。章のはじめで述べたように原子核分布のポテンシャルでは Dirac 方程式は解析的に計算できないので数値計算を行う。数値計算では境界条件として点電荷ポテンシャルでの波動関数 ψ^{PC} を用いるため、先に ψ^{PC} の導出を行う。

B.1.1 点電荷 potential での束縛状態の波動関数

点電荷の Colombe ポテンシャル $V(r) = Z\alpha/r$ が存在するときの動径方向の Dirac 方程式は (3.22)(3.23) 式より

$$\frac{dg_\kappa(r)}{dr} + \frac{1+\kappa}{r}g_\kappa(r) - (E + m + \frac{Z\alpha}{r})f_\kappa(r) = 0 \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{df_\kappa(r)}{dr} + \frac{1-\kappa}{r}f_\kappa(r) - (E - m + \frac{Z\alpha}{r})g_\kappa(r) = 0 \quad (\text{B.2})$$

となる。また、新たに動径方向の波動関数を

$$G_\kappa(r) \equiv rg_\kappa(r), F_\kappa(r) \equiv rf_\kappa(r) \quad (\text{B.3})$$

と定義すると、 $G_\kappa(r), F_\kappa(r)$ が満たす方程式は

$$\frac{dG_\kappa(r)}{dr} + \frac{\kappa}{r}G_\kappa(r) - (E + m + \frac{Z\alpha}{r})F_\kappa(r) = 0 \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{dF_\kappa(r)}{dr} - \frac{\kappa}{r} F_\kappa(r) + (E - m + \frac{Z\alpha}{r}) G_\kappa(r) = 0 \quad (\text{B.5})$$

と書くことができる。まず、原点付近での振る舞いを考えるとこの方程式は

$$\frac{dG_\kappa(r)}{dr} + \frac{\kappa}{r} G_\kappa(r) - \frac{Z\alpha}{r} F_\kappa(r) = 0 \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{dF_\kappa(r)}{dr} - \frac{\kappa}{r} F_\kappa(r) + \frac{Z\alpha}{r} G_\kappa(r) = 0 \quad (\text{B.7})$$

とみなすことが出来る。 $G_\kappa(r), F_\kappa(r)$ が r についての幕級数展開を考えると、原点付近では r の次数が最も小さいものが主要項となるため、その次数を γ , 定数を a, b として $G_\kappa \sim ar^\gamma, F_\kappa \sim br^\gamma$ のように振る舞うことが分かる。これを (B.6)(B.7) 式に代入すると

$$\begin{cases} (a\gamma + a\kappa - Z\alpha b)r^{\gamma-1} = 0 \\ (b\gamma - b\kappa + Z\alpha a)r^{\gamma-1} = 0 \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

となり、 a, b についての連立方程式を行列表示にすれば

$$\begin{pmatrix} \gamma + \kappa & -Z\alpha \\ Z\alpha & \gamma - \kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (\text{B.9})$$

となる。したがって a, b が 0 でない解を持つための条件として

$$\begin{vmatrix} \gamma + \kappa & -Z\alpha \\ Z\alpha & \gamma - \kappa \end{vmatrix} = \gamma^2 - \kappa^2 + (Z\alpha)^2 = 0 \quad (\text{B.10})$$

$$\gamma = \pm \sqrt{\kappa^2 - (Z\alpha)^2} \quad (\text{B.11})$$

を得る。 $Z\alpha \simeq \frac{Z}{137} < 1$ において $|\kappa| = |j_\kappa + 1/2| > 1$ より γ は実数である。原点で正則であるために以後では、 $\gamma > 0$ つまり $\gamma = +\sqrt{\kappa^2 - (Z\alpha)^2}$ とする。

さて、波動関数の遠方での振る舞いを考える。ここで新たな変数

$$\rho \equiv 2\lambda r, \lambda \equiv \sqrt{m^2 - E^2} \quad (\text{B.12})$$

によって (B.4)(B.5) 式を書き換えると

$$\frac{dG_\kappa(\rho)}{d\rho} + \frac{\kappa}{\rho} G_\kappa(\rho) - \left(\frac{E+m}{2\lambda} + \frac{Z\alpha}{\rho} \right) F_\kappa(\rho) = 0 \quad (\text{B.13})$$

$$\frac{dF_\kappa(\rho)}{d\rho} - \frac{\kappa}{\rho} F_\kappa(\rho) + \left(\frac{E-m}{2\lambda} + \frac{Z\alpha}{\rho} \right) G_\kappa(\rho) = 0 \quad (\text{B.14})$$

より

$$\frac{d^2G_\kappa(\rho)}{d\rho^2} = -\frac{E^2 - m^2}{4\lambda^2} G_\kappa(\rho) = \frac{1}{4} G_\kappa(\rho), \frac{d^2F_\kappa(\rho)}{d\rho^2} = \frac{1}{4} F_\kappa(\rho) \quad (\text{B.15})$$

となる。よって無限遠では $G_\kappa(\rho), F_\kappa(\rho) \sim e^{\pm\rho/2}$ と振る舞う。そして無限遠で発散しないために以降の計算では $G_\kappa(\rho), F_\kappa(\rho) \sim e^{\rho/2}$ を選ぶ。従って適当な関数 $\phi_1(r), \phi_2(r)$ を用いて波動関数を

$$G_\kappa(\rho) = \sqrt{m+E}e^{-\rho/2}[\phi_1(\rho) + \phi_2(\rho)] \quad (\text{B.16})$$

$$F_\kappa(\rho) = \sqrt{m-E}e^{-\rho/2}[\phi_1(\rho) - \phi_2(\rho)] \quad (\text{B.17})$$

と表す。これを (B.13)(B.14) 式に代入することにより

$$\frac{d\phi_1(\rho)}{d\rho} = \left(1 - \frac{Z\alpha E}{\lambda\rho}\right)\phi_1(\rho) - \left(\frac{\kappa}{\rho} + \frac{Z\alpha m}{\lambda\rho}\right)\phi_2(\rho) \quad (\text{B.18})$$

$$\frac{d\phi_2(\rho)}{d\rho} = \left(-\frac{\kappa}{\rho} + \frac{Z\alpha m}{\lambda\rho}\right)\phi_1(\rho) + \frac{Z\alpha E}{\lambda\rho}\phi_2(\rho) \quad (\text{B.19})$$

となる。 $\phi_1(\rho), \phi_2(\rho)$ の幕級数展開を考えると、最低次数の γ を用いて

$$\phi_1(\rho) = \rho^\gamma \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \rho^i, \phi_2(\rho) = \rho^\gamma \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i \rho^i \quad (\text{B.20})$$

と書くことが出来る。係数 α_i, β_i 求めるために、これを (B.18)(B.19) 式に代入して ρ の係数で比較すれば

$$(i + \gamma)\alpha_i = \alpha_{i-1} - \frac{Z\alpha E}{\lambda}\alpha_i - \left(\kappa + \frac{Z\alpha m}{\lambda}\right)\beta_i \quad (\text{B.21})$$

$$(i + \gamma)\beta_i = \left(-\kappa + \frac{Z\alpha m}{\lambda}\right)\alpha_i + \frac{Z\alpha E}{\lambda}\beta_i \quad (\text{B.22})$$

を得る。これを α_i, β_i について解くと

$$\alpha_i = \frac{(1-n')(2-n') \cdots (i-n')}{i!(2\gamma+1)(2\gamma+2) \cdots (2\gamma+i)}\alpha_0 \quad (\text{B.23})$$

$$\beta_i = (-1)^{i+1} \frac{n'(n'-1) \cdots (n'-i+1)}{i!(2\gamma+1)(2\gamma+2) \cdots (2\gamma+i)}\beta_0 \quad (\text{B.24})$$

となる。ここで n' は次のように定義される数である。

$$n' = \frac{Z\alpha E}{\lambda} - \gamma \quad (\text{B.25})$$

よって ϕ_1, ϕ_2 に対する幕級数展開 (B.20) 式は合流型超幾何関数の幕級数展開

$${}_1F_1(a, b, z) = 1 + \frac{a}{b}z + \frac{a(a+1)z^2}{b(b+1)2!} + \cdots \quad (\text{B.26})$$

を用いて

$$\phi_1(\rho) = \alpha_0 \rho^\gamma {}_1F_1(1-n', 2\gamma+1; \rho) \quad (\text{B.27})$$

$$\begin{aligned}\phi_2(\rho) &= \beta_0 \rho^\gamma {}_1F_1(-n', 2\gamma + 1; \rho) \\ &= \left(\frac{\kappa - Z\alpha m / \lambda}{n'} \right) \alpha_0 {}_1F_1(-n', 2\gamma + 1; \rho)\end{aligned}\quad (\text{B.28})$$

と表される。また、波動関数の規格化のため ϕ_1, ϕ_2 は有限次元の多項式でなければならない。したがって n' には非負の整数であるという制限が付く。そこで主量子数を次のように定義する。

$$n \equiv n' + |\kappa|, n = 1, 2, 3 \dots \quad (\text{B.29})$$

(B.25) 式および (B.11)(B.12) 式からエネルギー固有値 E は

$$E = m \left[1 + \left(\frac{Z\alpha}{n - |\kappa| + \sqrt{\kappa^2 - (Z\alpha)^2}} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (\text{B.30})$$

となる。最後に、規格化条件

$$\int_0^\infty dr [G_\kappa^2(r) + F_\kappa^2(r)] = 1 \quad (\text{B.31})$$

を適用して規格化することで点電荷 Coulomb ポテンシャル ($V(r) = Z\alpha/r$) が存在するときの動径方向の Dirac 波動関数は

$$\begin{pmatrix} G_\kappa^{\text{PC}}(r) \\ F_\kappa^{\text{PC}}(r) \end{pmatrix} = \frac{\pm 1}{\Gamma(2\gamma + 1)} \sqrt{\frac{2\gamma^5(m \pm E)\Gamma(2\gamma + n' + 1)}{m^2 Z\alpha(mZ\alpha - \lambda\kappa)n'!}} (2\lambda r)^{\gamma-1} r e^{-\lambda r} \times \left[\left(\frac{mZ\alpha}{\lambda} - \kappa \right) {}_1F_1(-n', 2\gamma + 1; 2\lambda r) \mp n'_1 {}_1F_1(1 - n', 2\gamma + 2; 2\lambda r) \right] \quad (\text{B.32})$$

B.1.2 原子核 Coulomb ポテンシャルに束縛されたミューオンの波動関数

章の始めでも述べたように無限遠では点電荷の Coulomb ポテンシャルに対する解 $G_\kappa^{\text{PC}}(r), F_\kappa^{\text{PC}}(r)$ に漸近する。そこでこの微分方程式を初期値

$$G_\kappa(r_{\text{ini}}) = G_\kappa^{\text{PC}}(r_{\text{ini}}), F_\kappa(r_{\text{ini}}) = F_\kappa^{\text{PC}}(r_{\text{ini}}) \quad (\text{B.33})$$

として無限遠から原点に向けて 4 次の Runge-Kutta 法を用いて解く。ここで波動関数が二重可積分であるために原点で波動関数は境界条件として

$$G_0 \equiv G_\kappa(0) = 0, F_0 \equiv F_\kappa(0) = 0 \quad (\text{B.34})$$

を満たさなければならず、この式を満たすためには適当なエネルギー E を与えて微分方程式を解かなければならぬ。したがって E の値を変えながら微分方程式を解いていく

$$G_0(E) = 0, F_0(E) = 0 \quad (\text{B.35})$$

となるような E を見つける必要がある。具体的には二分探索によって $G_0(E), F_0(E)$ のゼロ点を求める。二分探索によって得られたエネルギー E が束縛状態の固有エネルギーである。

最後に固有エネルギー E で微分方程式をといて得られた波動関数 $G_\kappa(r), F_\kappa(r)$ を規格化条件

$$\int_0^\infty dr [G_\kappa^2(r) + F_\kappa^2(r)] = 1 \quad (\text{B.36})$$

を満たすように規格化する。

B.2 電子の散乱状態の波動関数

散乱状態の波動関数の数値計算を行うためには点電荷 Coulomb が存在する Dirac 方程式 (B.4)(B.5) 式の原点で正則な解 $g_\kappa^{\text{reg}}(r), f_\kappa^{\text{reg}}(r)$ と原点で非正則な解 $g_\kappa^{\text{irr}}(r), f_\kappa^{\text{irr}}(r)$ が必要となるため、まずこれらについて導出する。また DIO の始状態の束縛状態ではミューオンが電子のパウリの排他律に影響されず、1S 状態に落ちるため单一の角運動量の固有状態で書き表せる。一方で終状態の散乱状態は角運動量の固有状態の重ね合わせ (部分波展開) として記述される。そのため部分波展開について説明をし最後に数値計算方法について解説する。

B.2.1 点電荷 potential での波動関数

$E > m$ における (B.4)(B.5) 式の一般解を求める。 $p = \sqrt{E^2 - m^2}$ に対し、便宜上の変数 $x = 2ipr$ によって方程式を書き換える。

$$\frac{dG_\kappa(x)}{dx} = -\frac{\kappa}{x}G_\kappa(x) - \left(\frac{E+m}{2ip} + \frac{Z\alpha}{x}\right)F_\kappa(x) \quad (\text{B.37})$$

$$\frac{dF_\kappa(x)}{dx} = \frac{\kappa}{x}F_\kappa(x) - \left(\frac{E-m}{2\lambda} + \frac{Z\alpha}{\rho}\right)G_\kappa(\rho) = 0 \quad (\text{B.38})$$

この方程式の解を

$$G_\kappa(x) = \sqrt{E+m}[\phi_1(x) + \phi_2(x)], F_\kappa(x) = i\sqrt{E-m}[\phi_1(x) - \phi_2(x)] \quad (\text{B.39})$$

と表すと、 $\phi_1(x)$ と $\phi_2(x)$ に関する方程式は

$$\frac{d\phi_1(x)}{dx} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{Z\alpha E}{px}\right)\phi_1(x) - \left(\frac{\kappa}{x} - i\frac{Z\alpha m}{px}\right)\phi_2(x) \quad (\text{B.40})$$

$$\frac{d\phi_2(x)}{dx} = -\left(\frac{\kappa}{x} + i\frac{Z\alpha m}{px}\right)\phi_1(x) - \left(\frac{1}{2} + i\frac{Z\alpha E}{px}\right)\phi_2(x) \quad (\text{B.41})$$

ここで、複素共役の ϕ_1^*, ϕ_2^* に関する微分方程式を考えると、

$$\phi_1 = \phi_2^*, \phi_2 = \phi_1^* \quad (\text{B.42})$$

となっており、したがって G_κ, F_κ は実数である。これを用いて (B.37)(B.38) 式を整理すると、 ϕ_1 に関する二階微分方程式

$$\frac{d^2\phi_1}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d\phi_1}{dx} - \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} + \frac{iZ\alpha E}{p}\right)\frac{1}{x} + \frac{\gamma^2}{x^2}\right]\phi_1 = 0 \quad (\text{B.43})$$

を得る。さらに $W = x^{1/2}\phi_1$ と置くと

$$\frac{d^2W}{dx^2} - \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} + \frac{iZ\alpha E}{p}\right)\frac{1}{x} + \frac{\gamma^2 - 1/4}{x^2}\right]W = 0 \quad (\text{B.44})$$

となる。これは Whittaker の微分方程式として知られ、原点で有限の値を持つ (原点で正則な) 解

$$W = x^{\gamma+1/2}e^{-x/2}{}_1F_1(\gamma; 1+iy, 2\gamma+1; x) \quad (\text{B.45})$$

と、原点で発散する（原点で非正則な）解

$$W = x^{-\gamma+1/2} e^{-x/2} {}_1F_1(-\gamma; 1 + iy, -2\gamma + 1; x) \quad (\text{B.46})$$

の二つの独立解が存在することが知られている。ここで y は

$$y = \frac{Z\alpha E}{p} \quad (\text{B.47})$$

である。まず原点で正則な解について考えると、 ϕ_1 は

$$\phi_1(r) = N(\gamma + iy)e^{i\eta}(2p)^\gamma \phi(r) \quad (\text{B.48})$$

と表すことができる。ここで N は規格化定数であり、解の r 依存性をまとめて

$$\phi(r) = r^\gamma e^{-ipr} {}_1F_1(\gamma + 1 + iy, 2\gamma + 1; 2ipr) \quad (\text{B.49})$$

と書いた。また、(B.42) 式を満たすように位相 η を導入した。ここで (B.40) 式を r についての微分方程式に直し、(B.42) 式及び (B.48) 式を用いると、 $\phi(r)$ に関する方程式

$$(\gamma + iy)e^{i\eta}(2p)^\gamma \frac{d\phi(r)}{dr} = i \left(p + \frac{Z\alpha E}{pr} \right) (\gamma + iy)e^{i\eta}(2p)^\gamma \phi^*(r) + \left(-\frac{\kappa}{r} + i \frac{Z\alpha m}{pr} \right) (\gamma - iy)e^{-i\eta}(2p)^\gamma \phi^*(r) \quad (\text{B.50})$$

が得られる。これを整理すると、 η に関する条件式は

$$e^{-2i\eta} = -\frac{\gamma + iy}{\gamma - iy} \frac{r}{\kappa - iy m/E} \left[\frac{d\phi(r)}{dr} - ip \left(1 + \frac{y}{pr} \right) \phi(r) \right] \frac{1}{\phi^*} \quad (\text{B.51})$$

となる。さらに、合流型超幾何関数の性質より

$$\frac{d\phi(r)}{dr} - ip \left(1 + \frac{y}{pr} \right) \phi(r) = \frac{(\gamma - iy)\phi^*(r)}{r} \quad (\text{B.52})$$

となるため、位相 η の満たすべき条件式は

$$e^{2i\eta} = -\frac{\kappa - iy m/E}{\gamma + iy} \quad (\text{B.53})$$

である。

以上のことから、Dirac 方程式の解 G, F は

$$G_\kappa(r) = 2N\sqrt{E + m}(2pr)^\gamma \operatorname{Re}\Phi(r) \quad (\text{B.54})$$

$$F_\kappa(r) = -2N\sqrt{E - m}(2pr)^\gamma \operatorname{Im}\Phi(r) \quad (\text{B.55})$$

ただし、

$$\Phi(r) = (\gamma + iy)e^{i(-pr+\eta)} {}_1F_1(\gamma + 1 + iy, 2\gamma + 1; 2ipr) \quad (\text{B.56})$$

と表される。便宜上、規格化定数を

$$N = \frac{|\Gamma(\gamma + iy)|e^{\pi y/2}}{2p\Gamma(2\gamma + 1)} \quad (\text{B.57})$$

と定めると

$$g_\kappa^{\text{reg}}(r) = 2\sqrt{E + m}(2pr)^{\gamma-1} \frac{|\Gamma(\gamma + iy)|e^{\pi y/2}}{2p\Gamma(2\gamma + 1)} \text{Re}\Phi(r) \quad (\text{B.58})$$

$$f_\kappa^{\text{reg}}(r) = -2\sqrt{E - m}(2pr)^{\gamma-1} \frac{|\Gamma(\gamma + iy)|e^{\pi y/2}}{2p\Gamma(2\gamma + 1)} \text{Im}\Phi(r) \quad (\text{B.59})$$

となり、この解の $r \rightarrow \infty$ における漸近形は

$$g_\kappa^{\text{reg}}(r) \rightarrow \sqrt{E + m} \frac{\cos(pr - (l_\kappa + 1)\pi/2 + \delta_C)}{pr} \quad (\text{B.60})$$

$$f_\kappa^{\text{reg}}(r) \rightarrow -\sqrt{E - m} \frac{\sin(pr - (l_\kappa + 1)\pi/2 + \delta_C)}{pr} \quad (\text{B.61})$$

となる。ここで δ_C は Coulomb ポテンシャルによる自由場からの位相のずれに対応しており、

$$\delta_C = y\ln(2pr) - \arg\Gamma(\gamma + iy) + \frac{\pi}{2}(l_\kappa + 1 - \gamma) + \eta \quad (\text{B.62})$$

で表される。

さて原点で正則でない解についても考える。この解は途中で棄却した (B.46) 式を用いて構築するが、正則な解と同様の議論から $\gamma \rightarrow -\gamma$ の置き換えをすればよいことが分かる。従ってこの場合の解は

$$g'_\kappa(r) = 2\sqrt{E + m}(2pr)^{-\gamma-1} \frac{|\Gamma(-\gamma + iy)|e^{\pi y/2}}{2p\Gamma(-2\gamma + 1)} \text{Re}\Phi'(r) \quad (\text{B.63})$$

$$f'_\kappa(r) = -2\sqrt{E - m}(2pr)^{-\gamma-1} \frac{|\Gamma(-\gamma + iy)|e^{\pi y/2}}{2p\Gamma(-2\gamma + 1)} \text{Im}\Phi'(r) \quad (\text{B.64})$$

ただし、

$$\Phi'(r) = (-\gamma + iy)e^{i(-pr + \eta')} {}_1F_1(-\gamma + 1 + iy, -2\gamma + 1; 2ipr) \quad (\text{B.65})$$

であり、 η' は

$$e^{2i\eta'} = -\frac{\kappa - iym/E}{-\gamma + iy} \quad (\text{B.66})$$

を満たす位相である。 $r \rightarrow \infty$ における漸近形も同様に、 δ_C を次の δ'_C で置き換えることにより得られる。

$$\delta'_C = y\ln(2pr) - \arg\Gamma(-\gamma + iy) + \frac{\pi}{2}(l_\kappa + 1 + \gamma) + \eta' \quad (\text{B.67})$$

本論文の計算では

$$\begin{aligned}\nabla &\equiv \delta'_C - \delta_C \\ &= \arg \left(\sqrt{\frac{-\gamma - iy}{\gamma - iy}} \frac{\Gamma(\gamma + iy)}{\Gamma(-\gamma + iy)} \right) + \pi\gamma\end{aligned}\quad (\text{B.68})$$

を用いて

$$g_\kappa^{\text{irr}}(r) = \frac{\cos \nabla}{\sin \nabla} g_\kappa^{\text{reg}}(r) - \frac{1}{\sin \nabla} g'_\kappa(r) \quad (\text{B.69})$$

$$f_\kappa^{\text{irr}}(r) = \frac{\cos \nabla}{\sin \nabla} f_\kappa^{\text{reg}}(r) - \frac{1}{\sin \nabla} f'_\kappa(r) \quad (\text{B.70})$$

と定義した解を用いる。このように定義した $g_\kappa^{\text{irr}}(r), f_\kappa^{\text{irr}}(r)$ の $r \rightarrow \infty$ での漸近形は、

$$g_\kappa^{\text{irr}}(r) \rightarrow \sqrt{E+m} \frac{\sin(pr - (l_\kappa + 1)\pi/2 + \delta_C)}{pr} \quad (\text{B.71})$$

$$f_\kappa^{\text{irr}}(r) \rightarrow \sqrt{E-m} \frac{\cos(pr - (l_\kappa + 1)\pi/2 + \delta_C)}{pr} \quad (\text{B.72})$$

となる。

B.2.2 数値計算手法

終状態における動径方向の波動関数を求めるため、与えられたエネルギーに対して (3.22)(3.23) 式を解く。

まず、ポテンシャルは原点で有限の値 $V(0) = V_0$ を持ち、その周りで十分緩やかに変化すると仮定すると、原点付近での微分方程式は

$$\frac{dg_\kappa(r)}{dr} + \frac{1+\kappa}{r} g_\kappa(r) - (E + m + V_0) f_\kappa(r) \simeq 0 \quad (\text{B.73})$$

$$\frac{df_\kappa(r)}{dr} + \frac{1-\kappa}{r} f_\kappa(r) - (E - m + V_0) g_\kappa(r) \simeq 0 \quad (\text{B.74})$$

したがって $\tilde{E} = E + V_0, \tilde{p} = \sqrt{\tilde{E}^2 - m^2}$ 、 N を定数とすれば、原点付近の解は

$$\begin{aligned}g_\kappa(r) &= \sqrt{\tilde{E} + m} j_{l_\kappa}(\tilde{p}r) \\ f_\kappa(r) &= \sqrt{\tilde{E} - m} \text{sign}(\kappa) j_{l_{-\kappa}}(\tilde{p}r)\end{aligned}\quad (\text{B.75})$$

となる。そこで、十分に小さな $r = r_{\text{ini}}$ における (B.75) 式の値を初期値として、Runge-Kutta 法により微分方程式を内側に向かって解くことができる。ただし、解は遠方での境界条件を満たしている必要があ

り、漸近形 (3.38) 式と滑らかに繋がるように係数 N 及び δ_κ が決まる。十分遠方の点 $r = r_{\text{con}}$ において Wronskian

$$W_g(\delta_\kappa) = \frac{g'_\kappa(r_{\text{con}})}{g_\kappa(r_{\text{con}})} - \frac{[\cos \delta_\kappa g_\kappa^{\text{reg}}(r_{\text{con}}) - \sin \delta_\kappa g_\kappa^{\text{irr}}(r_{\text{con}})]'}{[\cos \delta_\kappa g_\kappa^{\text{reg}}(r_{\text{con}}) - \sin \delta_\kappa g_\kappa^{\text{irr}}(r_{\text{con}})]} \quad (\text{B.76})$$

を定義すれば、 $W(\delta_\kappa) = 0$ をみたすように δ_κ を定めることができ、

$$\tan \delta_\kappa = \frac{g_\kappa^{\text{reg}}(r_{\text{con}})g'_\kappa(r_{\text{con}}) - g'^{\text{reg}}_\kappa(r_{\text{con}})g_\kappa(r_{\text{con}})}{g_\kappa^{\text{irr}}(r_{\text{con}})g'_\kappa(r_{\text{con}}) - g'^{\text{irr}}_\kappa(r_{\text{con}})g_\kappa(r_{\text{con}})} \quad (\text{B.77})$$

を得る。最後に $r = r_{\text{con}}$ で解が漸近形と連続になるように係数 N を求めれば、散乱状態の部分波を得ることが出来る。境界条件を課す点 r_{con} は Cooulomb potential が点電荷のものとみなせる点を選べばよく、特に原子核の半径 R の一様電荷分布の場合ならば $r_{\text{con}} = R$ とすればよい。

Appendix C

DIO

C.1 DIO 崩壊率

ミューオン原子中のミューオンの崩壊 $\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$ に関するラグランジアンは

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_e \gamma_\lambda (1 - \gamma^5) \psi_{\nu_e} \bar{\psi}_{\nu_\mu} \gamma^\lambda (1 - \gamma^5) \psi_\mu + \text{h.c.} \quad (\text{C.1})$$

ここで G_F はフェルミ結合定数、 ψ_a は粒子 $a(a = \mu, e, \nu_\mu, \nu_e)$ の場の演算子を表す。ミューオン、電子の波動関数がポテンシャルの影響を受ける一方でニュートリノの波動関数は真空中での崩壊と同じ平面波の波動関数を用いる。Fierz 変換を行い

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_e \gamma_\lambda (1 - \gamma^5) \psi_\mu \bar{\psi}_{\nu_\mu} \gamma^\lambda (1 - \gamma^5) \psi_{\nu_e} + \text{h.c.} \quad (\text{C.2})$$

とラグランジアンを書き直すことでミューオン-電子に関する部分とニュートリノに関する部分に分割すると DIO の計算に都合が良くなる。以下ではニュートリノおよび反ニュートリノの質量をゼロと仮定する。

遷移振幅 \mathcal{M} は

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \int d^3x \bar{\psi}_e(\mathbf{x}) \gamma_\lambda (1 - \gamma^5) \psi_\mu(\mathbf{x}) \bar{\psi}_{\nu_\mu}(\mathbf{x}) \gamma^\lambda (1 - \gamma^5) \psi_{\nu_e}(\mathbf{x}) \\ &= -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \int d^3x e^{i(\mathbf{p}_{\nu_\mu} + \mathbf{p}_{\bar{\nu}_e}) \cdot \mathbf{x}} \bar{\psi}_e(\mathbf{x}) \gamma_\lambda (1 - \gamma^5) \psi_\mu(\mathbf{x}) \bar{u}(\mathbf{p}_{\nu_\mu}, s_{\nu_\mu}) \gamma^\lambda (1 - \gamma^5) v(\mathbf{p}_{\nu_e}, s_{\nu_e}) \\ &= -\frac{G_F}{\sqrt{2}} J_\lambda(\mathbf{p}_{\nu_\mu} + \mathbf{p}_{\bar{\nu}_e}) \bar{u}(\mathbf{p}_{\nu_\mu}, s_{\nu_\mu}) \gamma^\lambda (1 - \gamma^5) v(\mathbf{p}_{\nu_e}, s_{\nu_e}) \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

ここで 2 行目では、Dirac スピノール $u(\mathbf{p}, s), v(\mathbf{p}, s)$ を用いてニュートリノの波動関数を

$$\psi_\nu = u(\mathbf{p}_\nu, s_\nu) e^{-i\mathbf{p}_\nu \cdot \mathbf{x}}, \quad \psi_{\bar{\nu}} = v(\mathbf{p}_{\bar{\nu}}, s_{\bar{\nu}}) e^{i\mathbf{p}_{\bar{\nu}} \cdot \mathbf{x}} \quad (\text{C.4})$$

で表した。さらに 3 行目では、荷電レプトンカレント

$$J_\lambda(\mathbf{p}) = \int d^3x e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \bar{\psi}_e(\mathbf{x}) \gamma_\lambda (1 - \gamma^5) \psi_\mu(\mathbf{x}) \quad (\text{C.5})$$

を用いた。遷移振幅の二乗は

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{G_F^2}{2} \mathbf{J}_\lambda(\mathbf{p}_{\nu_\mu} + \mathbf{p}_{\bar{\nu}_e}) \mathbf{J}_\rho^\dagger(\mathbf{p}_{\nu_\mu} + \mathbf{p}_{\bar{\nu}_e}) \bar{u}(\mathbf{p}_{\nu_\mu}, s_{\nu_\mu}) \gamma^\lambda (1 - \gamma^5) v(\mathbf{p}_{\nu_e}, s_{\nu_e}) \bar{v}(\mathbf{p}_{\nu_e}, s_{\nu_e}) \gamma^\rho (1 - \gamma^5) u(\mathbf{p}_{\nu_\mu}, s_{\nu_\mu}) \quad (\text{C.6})$$

となる。DIO の崩壊率は電子のエネルギーを E とすると

$$\begin{aligned} P dE d\Omega_e &= \left(\frac{1}{2} \sum_{s_\mu, s_e} \frac{d^3 \mathbf{q}_e}{(2\pi)^3 2E} \right) \left(\sum_{s_{\nu_\mu}, s_{\nu_e}} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_{\nu_\mu} d^3 \mathbf{p}_{\nu_e}}{(2\pi)^6 2p_{\nu_\mu}^0 2p_{\nu_e}^0} \right) |\mathcal{M}|^2 (2\pi) \delta(p_\mu^0 - p_{\nu_\mu}^0 - p_{\nu_e}^0 - E) \\ &= \frac{2G_F^2}{(2\pi)^8} \sum_{s_\mu, s_e} \frac{d^3 \mathbf{q}_e}{2E} \int d^4 p_{\nu_\mu} d^4 p_{\nu_e} \mathbf{J}_\lambda(\mathbf{p}_{\nu_\mu} + \mathbf{p}_{\bar{\nu}_e}) \mathbf{J}_\rho^\dagger(\mathbf{p}_{\nu_\mu} + \mathbf{p}_{\bar{\nu}_e}) \delta(p_{\nu_\mu}^2) \delta(p_{\nu_e}^2) \delta(p_\mu^0 - p_{\nu_\mu}^0 - p_{\nu_e}^0 - E) \\ &\quad \times \left(\frac{1}{8} \sum_{s_{\nu_\mu}, s_{\nu_e}} \bar{u}(\mathbf{p}_{\nu_\mu}, s_{\nu_\mu}) \gamma^\lambda (1 - \gamma^5) v(\mathbf{p}_{\nu_e}, s_{\nu_e}) \bar{v}(\mathbf{p}_{\nu_e}, s_{\nu_e}) \gamma^\rho (1 - \gamma^5) u(\mathbf{p}_{\nu_\mu}, s_{\nu_\mu}) \right) \\ &= \frac{2G_F^2}{(2\pi)^8} \sum_{s_\mu, s_e} \frac{d^3 \mathbf{q}_e}{2E} \int d^4 p_{\nu_\mu} d^4 p_{\nu_e} J_\lambda(\mathbf{p}_{\nu_\mu} + \mathbf{p}_{\nu_e}) J_\rho^\dagger(\mathbf{p}_{\nu_\mu} + \mathbf{p}_{\nu_e}) \delta(p_{\nu_\mu}^2) \delta(p_{\nu_e}^2) \delta(p_\mu^0 - p_{\nu_\mu}^0 - p_{\nu_e}^0 - E) \\ &\quad \times (p_{\nu_\mu}^\lambda p_{\nu_e}^\rho + p_{\nu_\mu}^\rho p_{\nu_e}^\lambda - p_{\nu_\mu} \cdot p_{\nu_e} g^{\lambda\rho}) \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

ここで、3つ目のイコールではニュートリノの部分について以下のようなスピンの和をとった。

$$\begin{aligned} &\sum_{s_{\nu_\mu}, s_{\nu_e}} \bar{u}(\mathbf{p}_{\nu_\mu}, s_{\nu_\mu}) \gamma^\lambda (1 - \gamma^5) v(\mathbf{p}_{\nu_e}, s_{\nu_e}) \bar{v}(\mathbf{p}_{\nu_e}, s_{\nu_e}) \gamma^\rho (1 - \gamma^5) u(\mathbf{p}_{\nu_\mu}, s_{\nu_\mu}) \\ &= \text{Tr} [\not{p}_{\nu_\mu} \gamma^\lambda (1 - \gamma^5) \not{p}_{\nu_e} \gamma^\rho (1 - \gamma^5)] \\ &= 8(p_{\nu_\mu})_\sigma (p_{\nu_e})_\tau (g^{\sigma\lambda} g^{\tau\rho} + g^{\sigma\rho} g^{\tau\lambda} - g^{\sigma\tau} g^{\lambda\rho} + i\epsilon^{\sigma\lambda\tau\rho}) \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

さて、変数変換

$$k = p_{\nu_\mu} + p_{\nu_e}, \quad k' = p_{\nu_\mu} - p_{\nu_e} \quad (\text{C.9})$$

を行うことにより崩壊率は

$$\begin{aligned} P dE d\Omega_e &= \frac{G_F^2}{8(2\pi)^8} \sum_{s_\mu, s_e} \frac{d^3 \mathbf{q}_e}{2E} \int d^4 k d^4 k' J_\lambda(\mathbf{k}) J_\rho^\dagger(\mathbf{k}) \delta(k^2 + k'^2) \delta(k \cdot k') \delta(p_\mu^0 - k^0 - E) \\ &\quad \times \left\{ 2k^\lambda k^\rho - 2k'^\lambda k'^\rho - (k^2 - k'^2) g^{\lambda\rho} \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

と表せる。

ニュートリノの運動量に関する積分のうち、 k' の積分の抜き出して

$$I^{\lambda\rho}(k) = \int d^4 k' \delta(k^2 + k'^2) \delta(k \cdot k') \left\{ 2k^\lambda k^\rho - 2k'^\lambda k'^\rho - (k^2 - k'^2) g^{\lambda\rho} \right\} \quad (\text{C.11})$$

とおくと、ローレンツ共変性より $I^{\lambda\rho}(k)$ は 2 階テンソル

$$I^{\lambda\rho}(k) = A g^{\lambda\rho} + B k^\lambda k^\rho \quad (\text{C.12})$$

の形で表すことができる。さらに、係数 A, B を求めるため以下の計算を行う。

$$\begin{aligned}
 g_{\lambda\rho} I^{\lambda\rho}(k) &= 4A + Bk^2 \\
 &= \int d^4 k' \delta(k^2 + k'^2) \delta(k \cdot k') \left\{ -2(k^2 - k'^2) \right\} \\
 &= \int dk'_0 d^3 \mathbf{k}' \delta(k_0^2 + k'_0^2 - \mathbf{k}'^2) \delta(k_0 k'_0) \left\{ -2(k_0^2 - k'^2 + \mathbf{k}'^2) \right\} \\
 &= -4\pi \cdot 2k_0^2 \\
 &= -8\pi k^2
 \end{aligned} \tag{C.13}$$

$$\begin{aligned}
 k_\lambda k_\rho I^{\lambda\rho}(k) &= Ak^2 + B(k^2)^2 \\
 &= \int d^4 k' \delta(k^2 + k'^2) \delta(k \cdot k') \left\{ k^2(k^2 + k'^2 - 2(k \cdot k')^2) \right\} \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{C.14}$$

ここで、ローレンツ不変性より $\mathbf{k} = 0$ となるように系をとった。(4.13) 式,(4.14) 式から

$$A = \frac{8\pi}{3}k^2, \quad B = \frac{8\pi}{3} \tag{C.15}$$

よって

$$I^{\lambda\rho}(k) = \frac{8\pi}{3}(k^\lambda k^\rho - k^2 g^{\lambda\rho}) \tag{C.16}$$

を得る。以上より、崩壊率は

$$\begin{aligned}
 PdEd\Omega_e &= \frac{G_F^2}{12(2\pi)^7} \sum_{s_\mu, s_e} \frac{d^3 \mathbf{q}_e}{E} \int d^4 k \delta(p_\mu^0 - k^0 - E) J_\lambda(\mathbf{k}) J_\rho^\dagger(\mathbf{k}) (k^\lambda k^\rho - k^2 g^{\lambda\rho}) \\
 &= \frac{G_F^2}{12(2\pi)^7} \sum_{s_\mu, s_e} \frac{d^3 \mathbf{q}_e}{E} \int d^3 \mathbf{k} J_\lambda(\mathbf{k}) J_\rho^\dagger(\mathbf{k}) (k^\lambda k^\rho - k^2 g^{\lambda\rho}) \Big|_{k^0 = p_\mu^0 - E}
 \end{aligned} \tag{C.17}$$

の形で表すことが出来る。

では次に荷電レプトンカレント

$$J_\lambda(\mathbf{p}) = \int d^3 \mathbf{x} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \bar{\psi}_e(\mathbf{x}) \gamma_\lambda (1 - \gamma^5) \psi_\mu(\mathbf{x}) \tag{C.18}$$

の計算を行う。前章で説明したように終状態の電子の波動関数は角運動量の固有状態 $\psi_{q_e}^{\kappa, \nu}(\mathbf{x})$ で展開され(部分波展開)、始状態のミューオンの波動関数は 1S 状態 $\psi_{p_\mu}^{-1, s_\mu}(\mathbf{x})$ として以下の形で記述される。

$$\begin{aligned}
 \psi_e^{\mathbf{q}_e, s_e}(\mathbf{x}) &= \sum_{\kappa, \nu} a_{\kappa, \nu, s_e}(\hat{q}_e) \psi_{q_e}^{\kappa, \nu}(\mathbf{x}) \\
 a_{\kappa, \nu, s_e}(\hat{q}_e) &= 4\pi i^{l_\kappa} (l_\kappa, \nu - s_e, 1/2, s_e | j_\kappa, \nu) Y_{l_\kappa}^{\nu - s_e *}(\hat{q}_e) e^{-i\delta_\kappa} \\
 \psi_\mu^{\mathbf{p}_\mu, s_\mu}(\mathbf{x}) &= a_{s_\mu} \psi_{p_\mu}^{-1, s_\mu}(\mathbf{x}) \\
 a_{s_\mu} &= e^{-i\delta_1}
 \end{aligned} \tag{C.19}$$

ここで

$$\psi_q^{\kappa,\nu}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} g_q^\kappa(x) \chi_\kappa^\nu(\hat{x}) \\ i f_q^\kappa(x) \chi_{-\kappa}^\nu(\hat{x}) \end{pmatrix} \quad (\text{C.20})$$

また、平面波の部分波展開

$$e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} = 4\pi \sum_{L,M} i^L j_L(kx) Y_L^{M*}(\hat{k}) Y_L^M(\hat{x}) \quad (\text{C.21})$$

を用いて、これらを用いてレプトンカレント $J_\lambda(\mathbf{k})$ を求めると、ベクトル成分については

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\mathbf{k}) &= \int d^3x e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \bar{\psi}_e(\mathbf{x}) \gamma(1 - \gamma^5) \psi_\mu(\mathbf{x}) \\ &= 4\pi \sum_{\kappa,\nu} a_{\kappa,\nu,s_e}^* a_{s_\mu} \int d^3x \sum_{L,M} i^L j_L(kx) \bar{\psi}_{q_e}^{\kappa,\nu}(\mathbf{x}) Y_L^{M*}(\hat{k}) \gamma(1 - \gamma^5) Y_L^M(\hat{x}) \psi_{p_\mu}^{-1,s_\mu}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

ここで、ベクトル球面調和関数 Y_{JM}^L に関する式

$$\begin{aligned} &\sum_{J,M} \left(\mathbf{Y}_{JM}^{L*}(\hat{k}) \right)_\sigma \gamma \cdot \mathbf{Y}_{JM}^L(\hat{x}) \\ &= \sum_{JM} \sum_{mm'} \sum_{\sigma'} (L, m, 1, \sigma) Y_L^{m*}(\hat{k}) (\gamma)_{\sigma'} (L, m', 1, \sigma') Y_L^{m'}(\hat{x}) \\ &= \sum_m Y_L^{m*}(\hat{k}) (\gamma)_\sigma Y_L^m(\hat{x}) \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

が成り立つことから

$$\mathbf{J}(\mathbf{k}) = 4\pi \sum_{\kappa,\nu} a_{\kappa,\nu,s_e}^* a_{s_\mu} \int d^3x \sum_L \sum_{JM} i^L j_L(kx) \bar{\psi}_{q_e}^{\kappa,\nu}(\mathbf{x}) \mathbf{Y}_{JM}^{L*}(\hat{k}) \gamma \cdot \mathbf{Y}_{JM}^L(\hat{x}) (1 - \gamma^5) \psi_{p_\mu}^{-1,s_\mu}(\mathbf{x}) \quad (\text{C.24})$$

となる。 まず、角度積分

$$X_{JM}^L = \int d\Omega_x \bar{\psi}_{q_e}^{\kappa,\nu}(\mathbf{x}) \gamma \cdot \mathbf{Y}_{JM}^L(\hat{x}) (1 - \gamma^5) \psi_{p_\mu}^{-1,s_\mu}(\mathbf{x}) \quad (\text{C.25})$$

について考える。次の記法

$$\langle \kappa, \nu | O | \kappa', \nu' \rangle = \int d\Omega \chi_\kappa^{\nu\dagger}(\hat{x}) \hat{O}(\hat{x}) \chi_{\kappa'}^{\nu'}(\hat{x}) \quad (\text{C.26})$$

を用いると、この積分は

$$\begin{aligned} X_{JM}^L &= -g_e^\kappa g_\mu^{-1} \langle \kappa, \nu | \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Y}_{JM}^L | -1, s_\mu \rangle - f_e^\kappa f_\mu^{-1} \langle -\kappa, \nu | \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Y}_{JM}^L | 1, s_\mu \rangle \\ &\quad + i \{ g_e^\kappa f_\mu^{-1} \langle \kappa, \nu | \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Y}_{JM}^L | 1, s_\mu \rangle - f_e^\kappa g_\mu^{-1} \langle -\kappa, \nu | \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Y}_{JM}^L | -1, s_\mu \rangle \} \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

と表すことができ、Wigner-Eckart 定理

$$\langle \kappa, \nu | \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Y}_{JM}^L | \kappa', \nu' \rangle = \frac{1}{\sqrt{2j_\kappa + 1}} (j_{\kappa'}, \nu', J, M | j_\kappa, \nu) \langle \kappa | \mathbf{Y}_J^L | \kappa' \rangle \quad (\text{C.28})$$

及び換算行列要素

$$\langle \kappa | |\mathbf{Y}_J^L| | \kappa' \rangle = \sqrt{\frac{(2j_\kappa + 1)(2j_{\kappa'} + 1)}{4\pi}} (-1)^{L+1+\kappa} (j_\kappa, 1/2, j_{\kappa'}, -1/2 | J, 0) V_J^{LS}(\kappa, \kappa') \frac{1 + (-1)^{l_\kappa + l_{\kappa'} + L}}{2} \quad (\text{C.29})$$

$$V_J^{LS}(\kappa, \kappa') \equiv \begin{cases} \delta_J^L & (S = 0) \\ (J - \kappa - \kappa')/\sqrt{J(2J+1)} & (S = 1, J = L+1) \\ (-\kappa + \kappa')/\sqrt{J(J+1)} & (S = 1, J = L) \\ -(J+1+\kappa+\kappa')/\sqrt{(J+1)(2J+1)} & (S = 1, J = L-1) \end{cases} \quad (\text{C.30})$$

を用いれば、

$$\begin{aligned} X_{JM}^L &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (j_\kappa, 1/2, 1/2, -1/2 | J, 0) (1/2, s_\mu, J, M | j_\kappa, \nu) (-1)^{L+1+\kappa} \\ &\quad \times \left[\frac{1 + (-1)^{l_\kappa + L}}{2} \{ -g_e^\kappa g_\mu^{-1} V_J^{L1}(\kappa, -1) - f_e^\kappa f_\mu^{-1} V_J^{L1}(-\kappa, +1) \} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 + (-1)^{l_\kappa + L+1}}{2} \{ g_e^\kappa f_\mu^{-1} V_J^{L1}(\kappa, +1) - f_e^\kappa g_\mu^{-1} V_J^{L1}(-\kappa, -1) \} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} (1/2, s_\mu, J, M | j_\kappa, \nu) (-1)^{L+j_\kappa+1/2} \\ &\quad \times \left[\frac{1 + (-1)^{l_\kappa + L}}{2} \{ g_e^\kappa g_\mu^{-1} V_J^{L1}(\kappa, -1) + f_e^\kappa f_\mu^{-1} V_J^{L1}(-\kappa, +1) \} \right. \\ &\quad \left. - i \frac{1 + (-1)^{l_\kappa + L+1}}{2} \{ g_e^\kappa f_\mu^{-1} V_J^{L1}(\kappa, +1) - f_e^\kappa g_\mu^{-1} V_J^{L1}(-\kappa, -1) \} \right] \quad (\text{C.31}) \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{k}) &= \sqrt{4\pi} \sum_{\kappa, \nu} a_{\kappa, \nu, s_e}^* a_{s_\mu} \int x^2 dx \sum_L \sum_{JM} i^L j_L(kx) (-1)^{L+l_\kappa+1/2} \mathbf{Y}_{JM}^{L*}(\hat{k}) \\ &\quad \times (1/2, s_\mu, J, M | j_\kappa, \nu) \\ &\quad \times \left[\frac{1 + (-1)^{l_\kappa + L}}{2} \{ -g_e^\kappa g_\mu^{-1} V_J^{L1}(\kappa, -1) - f_e^\kappa f_\mu^{-1} V_J^{L1}(-\kappa, +1) \} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 + (-1)^{l_\kappa + L+1}}{2} \{ g_e^\kappa f_\mu^{-1} V_J^{L1}(\kappa, +1) - f_e^\kappa g_\mu^{-1} V_J^{L1}(-\kappa, -1) \} \right] \quad (\text{C.32}) \end{aligned}$$

を得る。角運動量 L の取りうる値は $J, J+1, J-1$ であることを考慮して、

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{k}) &= \sqrt{4\pi} \sum_{\kappa, \nu} a_{\kappa, \nu, s_e}^* a_{s_\mu} \sum_{JM} (-1)^{L+l_\kappa-1/2} (1/2, s_\mu, J, M | j_\kappa, \nu) \\ &\quad \times \left[-i^J \mathbf{Y}_{JM}^{J*}(\hat{k}) S_{j_\kappa}^0 / \sqrt{J(J+1)} \right. \\ &\quad \left. + i^{J+1} \mathbf{Y}_{JM}^{J+1*}(\hat{k}) S_{j_\kappa}^{+1} / \sqrt{(J+1)(2J+1)} \right. \\ &\quad \left. + i^{J-1} \mathbf{Y}_{JM}^{J-1*}(\hat{k}) S_{j_\kappa}^{-1} / \sqrt{J(2J+1)} \right] \quad (\text{C.33}) \end{aligned}$$

となる。同様にしてレプトンカレントの第0成分は

$$\begin{aligned}
J_0(\mathbf{k}) &= 4\pi \sum_{\kappa, \nu} a_{\kappa, \nu, s_e}^* a_{s_\mu} \int d^3x \sum_{JM} i^L j_L(kx) \bar{\psi}_{q_e}^{\kappa, \nu}(\mathbf{x}) Y_L^{M*}(\hat{k}) \gamma_0(1 - \gamma^5) Y_L^M(\hat{x}) \psi^{-1, s_\mu}(\mathbf{x}) \\
&= 4\pi \sum_{\kappa, \nu} a_{\kappa, \nu, s_e}^* a_{s_\mu} \int x^2 dx \sum_{LM} i^L j_L(kx) Y_L^{M*}(\hat{k}) \frac{1}{\sqrt{4\pi}} (1/2, s_\mu, L, M | j_\kappa, \nu) (-1)^{L+1+\kappa} \\
&\quad \times \left[\frac{1 + (-1)^{l_\kappa+L}}{2} (g_e^\kappa g_\mu^{-1} + f_e^\kappa f_\mu^{-1}) - i \frac{1 + (-1)^{l_\kappa+1+L}}{2} (g_e^\kappa f_\mu^{-1} - f_e^\kappa g_\mu^{-1}) \right] \\
&= \sqrt{4\pi} \sum_{\kappa, \nu} a_{\kappa, \nu, s_e}^* a_{s_\mu} \sum_{JM} (-1)^{J+l_\kappa-1/2} (1/2, s_\mu, J, M | l_\kappa, \nu) i^J Y_J^{M*}(\hat{k}) S_{j_\kappa}
\end{aligned} \tag{C.34}$$

となる。これらの結果は次の $S_{j_\kappa}^{+1}, S_{j_\kappa}^0, S_{j_\kappa}^{-1}, S_{j_\kappa}$ を使って表した。

$$\begin{aligned}
S_{j_\kappa}^{+1} &= \frac{1}{2} \int x^2 dx j_{J+1}(kx) \left[\{1 + (-1)^{l_\kappa+L+1}\} \{(\kappa + J) g_e^\kappa(x) g_\mu^{-1}(x) - (\kappa - 2 - J) f_e^\kappa(x) f_\mu^{-1}(x)\} \right. \\
&\quad \left. - i \{1 + (-1)^{l_\kappa+J}\} \{(\kappa + 2 + J) g_e^\kappa(x) f_\mu^{-1}(x) + (\kappa - J) f_e^\kappa(x) g_\mu^{-1}(x)\} \right] \\
S_{j_\kappa}^0 &= \frac{1}{2} \int x^2 dx j_J(kx) \left[\{1 + (-1)^{l_\kappa+L}\} (\kappa + 1) \{g_e^\kappa(x) g_\mu^{-1}(x) - f_e^\kappa(x) f_\mu^{-1}(x)\} \right. \\
&\quad \left. - i \{1 + (-1)^{l_\kappa+J+1}\} (\kappa - 1) \{g_e^\kappa(x) f_\mu^{-1}(x) + f_e^\kappa(x) g_\mu^{-1}(x)\} \right] \\
S_{j_\kappa}^{-1} &= \frac{1}{2} \int x^2 dx j_{J-1}(kx) \left[\{1 + (-1)^{l_\kappa+L+1}\} \{(\kappa - 1 - J) g_e^\kappa(x) g_\mu^{-1}(x) - (\kappa - 1 + J) f_e^\kappa(x) f_\mu^{-1}(x)\} \right. \\
&\quad \left. - i \{1 + (-1)^{l_\kappa+J}\} \{(\kappa + 1 - J) g_e^\kappa(x) f_\mu^{-1}(x) + (\kappa + 1 + J) f_e^\kappa(x) g_\mu^{-1}(x)\} \right] \\
S_{j_\kappa} &= \frac{1}{2} \int x^2 dx j_{J-1}(kx) \left[\{1 + (-1)^{l_\kappa+J}\} \{g_e^\kappa(x) g_\mu^{-1}(x) + f_e^\kappa(x) f_\mu^{-1}(x)\} \right. \\
&\quad \left. - i \{1 + (-1)^{l_\kappa+J+1}\} \{g_e^\kappa(x) f_\mu^{-1}(x) - f_e^\kappa(x) g_\mu^{-1}(x)\} \right]
\end{aligned} \tag{C.35}$$

さて、これらレプトンカレント $J_\lambda(\mathbf{k})$ を代入して、DIO の崩壊率

$$PdEd\Omega_e = \frac{G_F^2}{12(2\pi)^7} \frac{d^3\mathbf{q}_e}{E} \sum_{s_\mu, s_e} \int d^3\mathbf{k} J_\lambda(\mathbf{k}) J_\rho^*(\mathbf{k}) (k^\lambda k^\rho - k^2 g^{\lambda\rho}) \Big|_{k^0 = p_\mu^0 - E} \tag{C.36}$$

を計算していく。

まず運動量 \mathbf{q}_e, \mathbf{k} に関する角度積分を実行する。

$$\begin{aligned}
&\sum_{s_\mu, s_e} \int d\Omega_{\mathbf{q}_e} \int d\Omega_{\mathbf{k}} (|J \cdot k|^2 - k^2 |J|^2) \\
&= \sum_{s_\mu, s_e} \int d\Omega_{\mathbf{q}_e} \int d\Omega_{\mathbf{k}} [-k_0 (J_0 \mathbf{J}^* + J_0^* \mathbf{J}) \cdot \mathbf{k} + |\mathbf{J} \cdot \mathbf{k}|^2 + |J_0|^2 \mathbf{k}^2 + (k_0^2 - \mathbf{k}^2) |\mathbf{J}|^2]
\end{aligned} \tag{C.37}$$

最初に、 $\Omega_{\mathbf{q}_e}$ の積分を含む部分は

$$\begin{aligned}
\sum_{s_e} \int d\Omega_{\mathbf{q}_e} a_{\kappa, \nu, s_e}^* (\hat{q}_e) a_{\kappa', \nu', s_e} (\hat{q}_e) &= (4\pi)^2 \sum_{s_e} \int d\Omega (-1)^{l_\kappa} i^{l_\kappa} \\
&\quad \times (l_\kappa, \nu - s_e, 1/2, s_e | j_\kappa, \nu) (l_{\kappa'}, \nu' - s_e, 1/2, s_e | j_{\kappa'}, \nu') \\
&\quad \times Y_{l_\kappa}^{\nu-s_e}(\hat{q}_e) Y_{l_{\kappa'}}^{\nu'-s_e*}(\hat{q}_e) e^{i(\delta_\kappa - \delta_{\kappa'})} \\
&= (4\pi)^2 \delta_{\kappa\kappa'} \delta_{\nu\nu'}
\end{aligned} \tag{C.38}$$

となる。そして球面調和関数を含んだ $\Omega_{\mathbf{k}}$ の積分は

$$\begin{aligned} \int d\Omega_{\mathbf{k}} Y_{J'M'}^{M*}(\hat{\mathbf{k}}) \mathbf{Y}_{JM}^L(\hat{\mathbf{k}}) \cdot \hat{\mathbf{k}} &= \int d\Omega_{\mathbf{k}} \sum_{m,\sigma} Y_{J'}^{M'*}(\hat{\mathbf{k}})(L, m, 1, \sigma | J, M) Y_L^M(\hat{\mathbf{k}}) \delta_{\sigma 0} \\ &= (L, M', 1, 0 | J, M) \delta_{LJ'} \end{aligned} \quad (\text{C.39})$$

$$\int d\Omega_{\mathbf{k}} \mathbf{Y}_{J'M'}^{L'*}(\hat{\mathbf{k}}) \cdot \hat{\mathbf{k}} \mathbf{Y}_{JM}^L(\hat{\mathbf{k}}) \cdot \hat{\mathbf{k}} = \sum_m (L, m, 1, 0 | J', M') (L, m, 1, 0 | J, M) \delta_{LL'} \delta_{MM'} \quad (\text{C.40})$$

$$\int d\Omega_{\mathbf{k}} \mathbf{Y}_{J'M'}^{L'*}(\hat{\mathbf{k}}) \cdot \mathbf{Y}_{JM}^L(\hat{\mathbf{k}}) = \delta_{LL'} \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \quad (\text{C.41})$$

これらを用いると、角度積分は (C.37) は

$$\begin{aligned} &\sum_{s_\mu, s_e} \int d\Omega_{\mathbf{q}_e} \int d\Omega_{\mathbf{k}} (|J \cdot k|^2 - k^2 |J|^2) \\ &= (4\pi)^2 \sum_{\kappa, J} (2j_\kappa + 1) \left[-\frac{k_0 k}{2J+1} \{ S_{j_\kappa} (iS_{j_\kappa}^{+1*} + iS_{j_\kappa}^{-1*}) + c.c. \} + k^2 \left\{ |S_{j_\kappa}|^2 + \frac{|S_{j_\kappa}^{+1} + S_{j_\kappa}^{-1}|^2}{(2J+1)^2} \right\} \right. \\ &\quad \left. + (k_0^2 - k^2) \left\{ \frac{|S_{j_\kappa}^0|^2}{J(J+1)} + \frac{|S_{j_\kappa}^{+1}|^2}{(J+1)(2J+1)} + \frac{|S_{j_\kappa}^{-1}|^2}{J(2J+1)} \right\} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.42})$$

したがって (C.36) 式は

$$\begin{aligned} 4\pi P dE &= \frac{8G_F^2 q_e dE}{192\pi^4} \int_0^{W-E} k^2 dk \sum_{J,\kappa} (2j_\kappa + 1) \\ &\quad \times \left[-\frac{(W-E)k}{2J+1} \{ S_{j_\kappa} (iS_{j_\kappa}^{+1*} + iS_{j_\kappa}^{-1*}) + c.c. \} \right. \\ &\quad \left. + k^2 \left\{ |S_{j_\kappa}|^2 + \frac{|S_{j_\kappa}^{+1} + S_{j_\kappa}^{-1}|^2}{(2J+1)^2} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \{(W-E)^2 - k^2\} \left\{ \frac{|S_{j_\kappa}^0|^2}{J(J+1)} + \frac{|S_{j_\kappa}^{+1}|^2}{(J+1)(2J+1)} + \frac{|S_{j_\kappa}^{-1}|^2}{J(2J+1)} \right\} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.43})$$

となる。ここで W は束縛されたミューオンのエネルギーである。崩壊によって出てくる電子のエネルギーは $E : 0 \sim W$ をとるため W は崩壊によって出てくる電子のエネルギースペクトルの end point になる。最後に、自由ミューオンの崩壊率 $\Gamma_0 = G_F^2 m_\mu^5 / 192\pi^3$ で規格化すると、崩壊率のエネルギースペクトルは

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma_0} \frac{d\Gamma}{dE} &= \frac{1}{\Gamma_0} 4\pi P(E) \\ &= \frac{8q_e}{\pi m_\mu^5} \int_0^{W-E} k^2 dk \sum_{J,\kappa} (2j_\kappa + 1) \\ &\quad \times \left[-\frac{(W-E)k}{2J+1} \{ S_{j_\kappa} (iS_{j_\kappa}^{+1*} + iS_{j_\kappa}^{-1*}) + c.c. \} \right. \\ &\quad \left. + k^2 \left\{ |S_{j_\kappa}|^2 + \frac{|S_{j_\kappa}^{+1} + S_{j_\kappa}^{-1}|^2}{(2J+1)^2} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \{(W-E)^2 - k^2\} \left\{ \frac{|S_{j_\kappa}^0|^2}{J(J+1)} + \frac{|S_{j_\kappa}^{+1}|^2}{(J+1)(2J+1)} + \frac{|S_{j_\kappa}^{-1}|^2}{J(2J+1)} \right\} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.44})$$

最後に、原子核の反跳の影響を考える。原子核も含めた運動量保存則は

$$\begin{aligned} E + E_\nu + E_N &= m_\mu - B_\mu \\ \mathbf{q}_e + \mathbf{P}_\nu + \mathbf{P}_N &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{C.45})$$

となる。ここで E_ν, \mathbf{P}_ν はニュートリノのエネルギーと運動量、 E_N, \mathbf{P}_N は原子核のエネルギーと運動量である。ここでニュートリノがほとんど運動量を持たない end point 付近では

$$\begin{aligned} E &\simeq E_N \gg E_\nu \\ |\mathbf{q}_e| &\simeq |\mathbf{P}_N| \gg |\mathbf{P}_\nu| \end{aligned} \quad (\text{C.46})$$

より

$$\begin{aligned} E_N &= \frac{\mathbf{P}_N^2}{2m_N} \simeq \frac{\mathbf{q}_e^2}{2m_N} \\ &= \frac{E^2}{2m_N} \end{aligned} \quad (\text{C.47})$$

となるので電子のエネルギースペクトルの end point は

$$\begin{aligned} m_\mu - B_\mu &\rightarrow m_\mu - B_\mu - E_N \\ &\simeq m_\mu - B_\mu - \frac{E^2}{2m_N} \end{aligned} \quad (\text{C.48})$$

のように修正される。

Appendix D

部分波展開

自由状態の波動関数は系に空間の並進対称性が存在するため運動量の固有状態として展開することができる。しかしポテンシャルが存在する場合並進対称性は存在しなくなり運動量の固有状態では展開できない。しかしポテンシャルが球対称ポテンシャルの場合系には角度方向の回転対称性が残るため角運動量の固有状態として展開することが出来る。それが部分波展開である。

まず球対象ポテンシャルでのシュレディンガー方程式

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) \right) \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \quad (\text{D.1})$$

を考える。極座標でハミルトニアンは

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \right] + V(r) \quad (\text{D.2})$$

ここで角運動量演算子の二乗

$$L^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \quad (\text{D.3})$$

を用いることで

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{L^2}{\hbar^2 r^2} \right] + V(r) \quad (\text{D.4})$$

と表すことが出来る。これより

$$[H, L^2] = 0, [H, L_z] = 0 \quad (\text{D.5})$$

が成り立っているため波動関数は H, L^2, L_z の固有関数で展開できることが分かる。

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} c_{lm}(k) R_{lm}(r) Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (\text{D.6})$$

ここで $Y_{lm}(\theta, \phi)$ は球面調和関数である。また l は軌道角運動量量子数、 m は磁気量子数で

$$L^2 Y_{lm} = \hbar^2 l(l+1) Y_{lm} \quad (\text{D.7})$$

$$L_z Y_{lm} = \hbar m Y_{lm} \quad (\text{D.8})$$

今この式を代入する事により

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R_l(r) + V(r)R_l(r) = ER_l(r) \quad (\text{D.9})$$

この式は m 依存性がないので $R_{lm}(r) \rightarrow R_l(r)$ とした。

$$u_l(r) = rR_l(r) \quad (\text{D.10})$$

とすると

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{l(l+1)}{r} - U(r) \right] u_l(r) = 0 \quad (\text{D.11})$$

となる。ここでまず $U(r) = 0$ の場合を考えその時の波動関数を $y_l(r)$ とする。

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{l(l+1)}{r} \right] y_l(r) = 0 \quad (\text{D.12})$$

さらに $\rho = kr$

$$f_l(\rho) = \frac{y_l}{\rho} \quad (\text{D.13})$$

とすると

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{d^2}{d\rho} + \left(1 - \frac{l(l+1)}{\rho} \right) \right] f_l(\rho) = 0 \quad (\text{D.14})$$

この解は球ベッセル関数 $j_l(kr)$ と球ノイマン関数 $n_l(kr)$ の和として書くことが出来る。よって

$$y_l(r) = kr \left[C_l^{(1)}(k)j_l(kr) + C_l^{(2)}(k)n_l(kr) \right] \quad (\text{D.15})$$

次に $u_l(r)$ は $r \rightarrow \infty$ で $y_l(r)$ となるはずであるので

$$u_l(r) = \rightarrow_{r \rightarrow \infty} \left[C_l^{(1)}(k)j_l(kr) + C_l^{(2)}(k)n_l(kr) \right] \quad (\text{D.16})$$

とかけるが球ベッセル関数 $j_l(x)$ と球ノイマン関数 $n_l(x)$ は $r \rightarrow \infty$ で

$$j_l(x) \rightarrow_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sin \left(x - \frac{1}{2}l\pi \right) \quad (\text{D.17})$$

$$n_l(x) \rightarrow_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{x} \cos \left(x - \frac{1}{2}l\pi \right) \quad (\text{D.18})$$

より

$$u_l(r) = \rightarrow_{r \rightarrow \infty} A_l(k) \sin \left[kr - \frac{1}{2}l\pi + \delta_l(k) \right] \quad (\text{D.19})$$

とかける。ここで

$$A_l(r) = \left\{ [C_l^{(1)}(k)]^2 + [C_l^{(2)}(k)]^2 \right\} \quad (\text{D.20})$$

$$\tan \delta_l(r) = -\frac{C_l^{(2)}(k)}{C_l^{(1)}(k)} \quad (\text{D.21})$$

再び

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} c_{lm}(k) R_l(r) Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (\text{D.22})$$

に戻って $c_{lm}(k)$ の具体形を求める。

今、境界条件で外向波(内向波)の散乱波 $\psi^{(\pm)}(\mathbf{r})$ は $r \rightarrow \infty$ で

$$\psi^{(\pm)}(\mathbf{r}) \rightarrow_{r \rightarrow \infty} A(k)[e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{\pm ikr}}{r}] \quad (\text{D.23})$$

ここで平面波 e^{ikz} の部分波展開は

$$e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)i^l j_l(kr) P_l(\cos \theta) \quad (\text{D.24})$$

となる。ここで $P_l(\cos \theta)$ はルジヤンドル関数である。よって

$$\psi^{(\pm)}(\mathbf{r}) \rightarrow_{r \rightarrow \infty} A(k) \left[\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)i^l \frac{\sin(kr - \frac{1}{2}l\pi)}{kr} P_l(\cos \theta) + f(\theta) \frac{e^{\pm ikr}}{r} \right] \quad (\text{D.25})$$

$$P_l(\cos \theta) = \left(\frac{4\pi}{2l+1} \right)^{\frac{1}{2}} Y_{l0}(\theta) \quad (\text{D.26})$$

$$\psi^{(\pm)}(\mathbf{r}) \rightarrow_{r \rightarrow \infty} A(k) \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} [4\pi(2l+1)]^{\frac{1}{2}} i^l \frac{\exp i(kr - \frac{1}{2}l\pi) - \exp -i(kr - \frac{1}{2}l\pi)}{2ikr} Y_{lm}(\theta, \phi) \delta_{m0} + f(\theta) \frac{e^{\pm ikr}}{r} \right\} \quad (\text{D.27})$$

$$\begin{aligned} \psi^{(\pm)}(\mathbf{r}) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} c_{lm}^{(\pm)}(k) R_l(r) Y_{lm}(\theta, \phi) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} c_{lm}^{(\pm)}(k) \frac{u_l(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \phi) \end{aligned} \quad (\text{D.28})$$

ここで境界条件は $c_{lm}^{(\pm)}(k)$ に入る。(すぐ後でわかる)

$$\psi^{(\pm)}(\mathbf{r}) \rightarrow_{r \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} c_{lm}^{(\pm)}(k) A_l(k) \frac{\exp \{i(kr - \frac{1}{2}l\pi + \delta_l(k))\} - \exp \{-i(kr - \frac{1}{2}l\pi + \delta_l(k))\}}{2ir} Y_{lm} \quad (\text{D.29})$$

これと前式を比較することで

$$c_{lm}^{(\pm)}(k) = \frac{A(k)}{k A_l(k)} [4\pi(2l+1)]^{\frac{1}{2}} i^l \exp(\pm i\delta_l) \delta_{m0} \quad (\text{D.30})$$

より

$$\begin{aligned} \psi^{(\pm)}(\mathbf{r}) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{A(k)}{k A_l(k)} [4\pi(2l+1)]^{\frac{1}{2}} i^l \exp(\pm i\delta_l) \delta_{m0} R_l(r) Y_{lm}(\theta, \phi) \\ &= A(k) \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)i^l \frac{\exp(\pm i\delta_l)}{A_l(k)} \frac{u_l(r)}{kr} P_l(\cos \theta) \end{aligned} \quad (\text{D.31})$$

これを平面波の部分波展開()式と比較すると、球対称ポテンシャルによる影響は動径方向の波動関数そして波動関数全体の位相のズレとして現れることが分かる。

さらに境界条件として外向波(内向波)をとったときそのズレの符号が $+(-)$ となることが分かった。

Appendix E

クーロンポテンシャル

この章では遠距離相互作用であり、また解析的に計算が可能なクーロン相互作用についてまず解析的な解を考え、そして部分波展開を見る。

E.1 クーロンポテンシャルの解析式

始めにシュレディンガー方程式を双曲線座標 (ξ, η, ϕ) によって表す。それぞれデカルト座標 (x, y, z) と

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\xi\eta} \cos \phi \\ y &= \sqrt{\xi\eta} \sin \phi \\ z &= \frac{1}{2}(\xi - \eta) \\ \xi &= r + z = r(1 + \cos \phi) \\ \eta &= r - z = r(1 - \cos \phi) \\ \phi &= \tan^{-1}(y/x) \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

双曲線座標での ∇^2 は

$$\nabla^2 = \frac{4}{\xi + \eta} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \right] + \frac{1}{\xi \eta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (\text{E.2})$$

となる。したがって双曲線座標でのシュレディンガー方程式は

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \frac{4}{\xi + \eta} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \right] \psi_c + \frac{1}{\xi \eta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right\} + \frac{2Z_1 Z_2 e^2}{\xi + \eta} \psi_c = E \psi_c \quad (\text{E.3})$$

となる。球対称ポテンシャルでの波動関数は方位角 ψ の回転対称性を持っているため波動関数 ψ_c は

$$\psi_c = f(\xi)g(\eta) \quad (\text{E.4})$$

と変数分離をおこなうと $f(\xi), g(\eta)$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{df}{d\xi} \right) + \left(\frac{1}{4} k^2 \xi - \nu_1 \right) f &= 0 \\ \frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{dg}{d\eta} \right) + \left(\frac{1}{4} k^2 \eta - \nu_2 \right) g &= 0 \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

ここで ν_1, ν_2 は

$$\nu_1 + \nu_2 = \gamma k \quad (\text{E.6})$$

$$\gamma = mZ_1Z_2e^2/\hbar^2k \quad (\text{E.7})$$

$f(\xi), g(\eta)$ の形を考える。平面波 e^{ikz} と球面波 e^{ikr} は

$$\begin{aligned} \exp(ikz) &= \exp\left\{\frac{1}{2}ik(\xi - \eta)\right\} \\ \exp(ikr) &= \exp\left\{\frac{1}{2}ik(\xi + \eta)\right\} \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

となる。したがって

$$f(\xi) = \exp\left(\frac{1}{2}ik\xi\right) \quad (\text{E.9})$$

とし () 式に代入すると $\nu_1 = \frac{1}{2}k$ となることが分かる。したがって $g(\eta)$ の満たす方程式は

$$\frac{d}{d\eta}\left(\eta \frac{dg}{d\eta}\right) + \frac{1}{4}k^2g - \left(\gamma k - \frac{1}{2}ik\right)g = 0 \quad (\text{E.10})$$

となる。ここで $g(\eta) = \exp\left\{-\frac{1}{2}ik\eta\right\}h(\eta)$ とすると $h(\eta)$ の満たす方程式は

$$\eta \frac{d^2h}{d\eta^2} + (1 - ik\eta) \frac{dh}{d\eta} - \gamma kh = 0 \quad (\text{E.11})$$

この方程式の原点で正則な解は第一種超幾何関数 ${}_1F_1$ によって

$$h(\eta) = C {}_1F_1(-i\gamma; 1; ik\eta) \quad (\text{E.12})$$

と表される。 $(C$ は定数。) したがって

$$\psi_c = Ce^{ikz} {}_1F_1(-i\gamma; 1; ik(r-z)) \quad (\text{E.13})$$

さて、この波動関数の無限遠 $|r-z| \rightarrow \infty$ での漸近形（導出は付録で行う）は

$$\begin{aligned} \psi_c \rightarrow & C \frac{\exp(\frac{1}{2}\pi\gamma)}{\Gamma(1+i\gamma)} \left[\exp\{i[kz + \gamma \ln kr(1 - \cos\theta)]\} \left(1 + \frac{\gamma^2}{ikr(1 - \cos\theta)} + \dots\right) \right] \\ & + C \frac{\exp(\frac{1}{2}\pi\gamma)}{\Gamma(1+i\gamma)} \left[f_c(\theta) \frac{\exp\{i(kr - \gamma \ln 2kr)\}}{r} \left(1 + \frac{(1+i\gamma)^2}{ikr(1 - \cos\theta)} + \dots\right) \right] \end{aligned} \quad (\text{E.14})$$

ここで $\Gamma(x)$ はガンマ関数であり

$$f_c(\theta) = -\gamma \exp(2i\sigma_0) \frac{-i\gamma \ln(\sin^2 \frac{1}{2}\theta)}{2k \sin^2 \frac{1}{2}\theta} \quad (\text{E.15})$$

$$\sigma_0 = \arg\Gamma(1 + i\gamma) \quad (\text{E.16})$$

である。

遠距離相互作用の場合、平面波 e^{ikz} 、球面波 e^{ikr} 共に位相が対数的な歪みを受けることが分かる。特に平面波の歪曲から、近距離相互作用との違いとして入射波にも影響を与えることが遠距離相互作用の場合の大きな特徴となる。

Appendix F

リップマン-シュインガ一方程式

F.1 積分方程式としてのシュレディンガ一方程式

$\frac{2m}{\hbar^2} = 1$ としたシュレディンガ一方程式

$$[\nabla^2 + k^2] \psi(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) \quad (\text{F.1})$$

の解 $\psi(\mathbf{r})$ は自由な波動関数 $\Phi(\mathbf{r})$ とグリーン関数 $\int G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ を用いて

$$\psi(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r}) + \int G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')V(\mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}')d\mathbf{r}' \quad (\text{F.2})$$

で表すことが出来る。ここで $\Phi(\mathbf{r})$ と $\int G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ は以下の式を満たしている

$$[\nabla^2 + k^2] \Phi(\mathbf{r}) = 0 \quad (\text{F.3})$$

$$[\nabla^2 + k^2] G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (\text{F.4})$$

このグリーン関数には次の式を満たす $\int G'(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ の自由度が存在するため境界条件を一つ入れる必要がある。

$$[\nabla^2 + k^2] G'(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \quad (\text{F.5})$$

境界条件には外向波と内向波の境界条件が存在しそれぞれの境界条件でのグリーン関数は

$$G_0^{(+)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{\exp[+ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (\text{F.6})$$

$$G_0^{(-)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{\exp[-ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (\text{F.7})$$

となる。ここで + は外向波の境界条件、- は内向波の境界条件であることを表している。またこの式の導出は付録に載せている。

グリーン関数に境界条件を課すことで (F.2) 式は $\psi(\mathbf{r})$ についての積分方程式

$$\psi^{(\pm)}(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r}) + \int G^{(\pm)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')V(\mathbf{r}')\Phi(\mathbf{r}')d\mathbf{r}' \quad (\text{F.8})$$

となる。この式はリップマン-シュインガ一方程式と呼ばれる。

F.2 リップマン-シュインガー方程式のコンパクト解

(F.8) リップマン-シュインガー方程式の解の形を求めるために再びシュレディンガー方程式

$$[\nabla^2 + k^2] \psi(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) \quad (\text{F.9})$$

を考える。波動関数 $\psi(\mathbf{r})$ は (F.3) を満たす自由な波動関数 $\Phi(\mathbf{r})$ と

$$[\nabla^2 + k^2] \psi_{\text{sc}}^{(\pm)}(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r})\psi_{\text{sc}}^{(\pm)}(\mathbf{r}) \quad (\text{F.10})$$

を満たす散乱波 $\psi_{\text{sc}}^{(\pm)}(\mathbf{r})$ の和として書くことが出来る

$$\psi^{(\pm)}(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r}) + \psi_{\text{sc}}^{(\pm)}(\mathbf{r}) \quad (\text{F.11})$$

ここで再び (\pm) は外向波・内向波を表す。これを用いて (F.1) は

$$[\nabla^2 + k^2 - V(\mathbf{r})] \psi_{\text{sc}}^{(\pm)}(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}) \quad (\text{F.12})$$

と変形できる。この式を満たす散乱波 $\psi_{\text{sc}}^{(\pm)}(\mathbf{r})$ は

$$[\nabla^2 + k^2 - V(\mathbf{r})] G^{(\pm)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (\text{F.13})$$

を満たすグリーン関数 $G^{(\pm)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ を用いて

$$\psi_{\text{sc}}^{(\pm)}(\mathbf{r}) = \int G^{(\pm)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') V(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (\text{F.14})$$

で表すことが出来る。従って波動関数 $\psi^{(\pm)}(\mathbf{r})$ は

$$\psi^{(\pm)}(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r}) + \int G^{(\pm)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') V(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (\text{F.15})$$

と書くことが出来る。これがリップマン-シュインガー方程式 ((F.8) 式) のコンパクト解である。

ブラケット記号を用いるとリップマン-シュインガー方程式 (F.8) 式は

$$|\psi^{(\pm)}\rangle = |\Phi\rangle + G_0^{(\pm)} V |\psi^{(\pm)}\rangle \quad (\text{F.16})$$

と書けそのコンパクト解 (F.15) 式は

$$|\psi^{(\pm)}\rangle = |\Phi\rangle + G^{(\pm)} V |\Phi\rangle \quad (\text{F.17})$$

となる。

Appendix G

相互作用描像

ここでは相互作用描像と朝永-シュインガー方程式を紹介する。

まずシュレディンガー描像での波動関数を $|\psi(t)\rangle_s$ とし物理量の演算子を O_s とする。波動関数の時間発展はシュレディンガー方程式は

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_s = H(t) |\psi(t)\rangle_s \quad (\text{G.1})$$

ここで

$$H(t) = {}_s\langle\psi(t)|H_s|\psi(t)\rangle_s \quad (\text{G.2})$$

である。相互作用描像での波動関数、物理量の演算子は

$$|\psi(t)\rangle_s = \exp\left(\frac{H_0 t}{i\hbar}\right) |\psi(t)\rangle_I \quad (\text{G.3})$$

$$O_I = \exp\left(-\frac{H_0 t}{i\hbar}\right) O_s \exp\left(\frac{H_0 t}{i\hbar}\right) \quad (\text{G.4})$$

で定義する。(G.1) 式に (G.3) を代入すると

$$i\hbar \frac{d}{dt} \exp\left(\frac{H_0 t}{i\hbar}\right) |\psi(t)\rangle_I = H(t) \exp\left(\frac{H_0 t}{i\hbar}\right) |\psi(t)\rangle_I \quad (\text{G.5})$$

ここで左辺は

$$H_0 \exp\left(\frac{H_0 t}{i\hbar}\right) |\psi(t)\rangle_I + i\hbar \exp\left(\frac{H_0 t}{i\hbar}\right) \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_I \quad (\text{G.6})$$

となり右辺のハミルトニアンは

$$H(t) = H_0 + V(t) \quad (\text{G.7})$$

で与えられる。したがって

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_I = V_I |\psi(t)\rangle_I \quad (\text{G.8})$$

これが朝永-シュインガー方程式である。

Appendix H

時間発展演算子と境界条件

この章では時間発展演算子についての説明と外向波内向波の持つ時間的な性質について説明する。なおこの章より相互作用描像での演算子や波動関数の添え字を外す。まずシュレディンガー描像での時間発展演算子の形を考える。時間発展演算子を次のように定義する。

$$\psi_s(t) = U_s(t, t_0)\psi_s(t_0) \quad (\text{H.1})$$

この演算子は以下の性質を持つ。

$$U_s(t, t) = I \quad (\text{H.2})$$

$$U_s(t, t') = U_s(t, t'')U_s(t'', t') \quad (\text{H.3})$$

$$U^{-1}s(t, t') = U_s(t', t) \quad (\text{H.4})$$

またシュレディンガーフォrm式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_s(t) = H_s \psi_s(t) \quad (\text{H.5})$$

に (H.1) 式を代入すると

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U_s(t, t_0) = H_s U_s(t, t_0) \quad (\text{H.6})$$

この式と $U_s(t, t) = I$ より U_s の形は

$$U_s(t, t_0) = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} H_s (t - t_0) \right] \quad (\text{H.7})$$

と出来ることが分かる。

前章での相互作用描像で時間発展演算子 $U(t, t')$ を次のように定義する。

$$\psi(t) = U(t, t')\psi(t') \quad (\text{H.8})$$

これを朝永-シュインガーフォrm式に代入する事で

$$i \frac{\partial}{\partial t} U(t, t')\psi(t') = V(t)U(t, t')\psi(t') \quad (\text{H.9})$$

全ての t' に対してこの式が成立するため

$$i \frac{\partial}{\partial t} U(t, t') = V(t)U(t, t') \quad (\text{H.10})$$

ここで初期条件 $U(t, t) = I$ としてこの式の解を考えると

$$U(t, t') = I - i \int_{t'}^t V(t_1)U(t_1, t')dt_1 \quad (\text{H.11})$$

となる。また (H.4) 式を満たすために

$$U(t', t) = I + i \int_{t'}^t U(t', t_1)V(t_1)dt_1 \quad (\text{H.12})$$

もしくは、 t, t' を入れ替えることで

$$U(t', t) = I + i \int_t^{t'} U(t, t_1)V(t_1)dt_1 \quad (\text{H.13})$$

また前章のシュレディンガー描像の演算子と相互作用描像の演算子の対応とシュレディンガー描像での時間発展演算子 (H.7)

$$U(t, t') = \exp(iH_0t) \exp(-iH_s(t-t')) \exp(iH_0t') \quad (\text{H.14})$$

但しこの式では $t, t' \rightarrow \pm\infty$ で振動してしまうためこの極限では定義できない。 $t, t' = \pm\infty$ での時間発展演算子を作るために次のような関数の極限を考える

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon \int_{-\infty}^0 e^{\epsilon t'} F(t')dt' \quad (\text{H.15})$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon \int_{-\infty}^0 e^{-\epsilon t'} F(t')dt' \quad (\text{H.16})$$

これらの積分を実行することにより

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\{ [F(t')e^{\epsilon t'}]_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 \frac{dF}{dt'} e^{\epsilon t'} dt' \right\} \quad (\text{H.17})$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\{ -[F(t')e^{\epsilon t'}]_0^{+\infty} + \int_{-\infty}^0 \frac{dF}{dt'} e^{-\epsilon t'} dt' \right\} \quad (\text{H.18})$$

従って $F(t)$ が $t = \pm\infty$ できちんとした値 $F(\pm\infty)$ を持つのであれば t, ϵ の極限をそれぞれとることにより

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = F(-\infty) \quad (\text{H.19})$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = F(+\infty) \quad (\text{H.20})$$

となる。そして $F(t)$ が $t \rightarrow \pm\infty$ で振動する場合。例えば $F(t) = \sin \alpha t$ では

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon \int_{-\infty}^0 e^{\epsilon t} \sin(\alpha t) dt = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\alpha \epsilon}{\alpha^2 + \epsilon^2} = 0 \quad (\text{H.21})$$

のように 0 となるので極限の定義が出来る。

さて、この極限の定義を用いて $t \rightarrow \pm\infty$ で自由な波動関数（すなわちポテンシャルの影響を受けてない状態）であるものが $t = 0$ ではポテンシャルの影響を受けている波動関数 ψ である状況を考える。これを時間発展演算子で表す。今 $\psi^{(\pm)}$ を次のように定義する。但しここでは外向波、内向波との関係はない。

$$|\psi^{(\pm)}\rangle = U(0, \mp\infty) |\Phi\rangle \quad (\text{H.22})$$

ここで極限の定義、(??) 式より

$$\begin{aligned} U(0, \mp\infty) &= \lim_{t \rightarrow \mp\infty} U(0, t) \\ &= \lim_{t \rightarrow \mp\infty} \exp(iHt) \exp(-iH_0t) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mp\epsilon \int_0^{(\mp\infty)} \exp(\pm\epsilon t) \exp(iHt) \exp(-iH_0t) dt \end{aligned} \quad (\text{H.23})$$

ここで自由な波動関数 Φ が完全系をなすと考えると (H.25) に

$$\sum |\Phi\rangle \langle \Phi| = I \quad (\text{H.24})$$

を代入することで

$$\begin{aligned} U(0, \mp\infty) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mp\epsilon \sum \int_0^{(\mp\infty)} \exp(\pm\epsilon t) \exp(iHt) |\Phi\rangle \langle \Phi| \exp(-iH_0t) dt \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mp\epsilon \sum \int_0^{(\mp\infty)} \exp(\pm\epsilon t) \exp(iHt) |\Phi\rangle \langle \Phi| \exp(-iEt) dt \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sum \frac{\pm i\epsilon}{E - H \pm i\epsilon} |\Phi\rangle \langle \Phi| \end{aligned} \quad (\text{H.25})$$

従って ($\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+}$ を省略して)

$$\begin{aligned} |\psi^{(\pm)}\rangle &= \sum \frac{\pm i\epsilon}{E - H \pm i\epsilon} |\Phi\rangle \\ &= \frac{1}{(E - H \pm i\epsilon)} (E - H_0 - V + V \pm i\epsilon) |\Phi\rangle \\ &= |\Phi\rangle + \frac{1}{E - H \pm i\epsilon} V |\Phi\rangle \end{aligned} \quad (\text{H.26})$$

となる。これはまさに外向波、内向波の境界条件でのリップマン-シュインガー方程式の解の形になっている。つまり外向波（内向波）は $t = \mp\infty$ で自由な波動関数 Φ と接続をする関数であるということが分かった。

Appendix I

歪曲波

この章では、ポテンシャルが二つ存在する系を考える。ハミルトニアン H は自由ハミルトニアン H_0 , と二つのポテンシャル V, W によって

$$H = H_0 + V + W \quad (\text{I.1})$$

またハミルトニアン \bar{H} を

$$\bar{H} = H_0 + V \quad (\text{I.2})$$

とする。今ハミルトニアン H, \bar{H}, H_0 に対する波動関数を Ψ, χ, Φ とする。すなわち

$$H\Psi = E\Psi \quad (\text{I.3})$$

$$\bar{H}\chi = E\chi \quad (\text{I.4})$$

$$H_0\Phi = E\Phi \quad (\text{I.5})$$

をそれぞれ満たしている。自由な波動関数 Φ がポテンシャル V の影響を受け χ へと変化し、その後ポテンシャル V の影響によりさらに Ψ となる状況を考える。また Φ のことを平面波、 χ のことを歪曲波、 Ψ のことを散乱波と呼ぶことにする。

Ψ, χ に対する境界条件を考える。まず歪曲波 χ はポテンシャル V の影響によって平面波 Φ から変化したものなので外向波 $\chi^{(+)}$ 、内向波 $\chi^{(-)}$ はそれぞれ

$$|\chi^{(\pm)}\rangle = |\Phi\rangle + \frac{1}{E - \bar{H} \pm i\epsilon} V |\Phi\rangle \quad (\text{I.6})$$

を満たす。次に散乱波 Ψ の境界条件を考える。 Ψ も平面波 Φ からポテンシャル $V + W$ の影響によって変化したものと考えることもできるので外向波 $\Psi^{(+)}$ 、内向波 $\Psi^{(-)}$ は

$$|\Psi^{(\pm)}\rangle = |\Phi\rangle + \frac{1}{E - H \pm i\epsilon} (V + W) |\Phi\rangle \quad (\text{I.7})$$

となる。それでは散乱波 $\Psi^{(\pm)}$ と歪曲波 $\Phi^{(\pm)}$ の間の関係を求めるために前式を変形していく。

$$\begin{aligned} |\Psi^{(\pm)}\rangle &= |\Phi\rangle + \frac{1}{E - H \pm i\epsilon} (V + W) |\Phi\rangle \\ &= |\Phi\rangle + \frac{1}{E - H_0 - V - W \pm i\epsilon} (V + W) |\Phi\rangle \end{aligned} \quad (\text{I.8})$$

ここで演算子 A, B の満たす恒等式

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{A+B} + \frac{1}{A}B\frac{1}{A+B} \quad (\text{I.9})$$

で $A = E - H_0 - V - W \pm i\epsilon, B = W$ とすることで

$$\frac{1}{E - H_0 - V - W \pm i\epsilon} V |\Phi\rangle = \frac{1}{E - H_0 - V \pm i\epsilon} V |\Phi\rangle + \frac{1}{E - H_0 - V - W \pm i\epsilon} W \frac{1}{E - H_0 - V \pm i\epsilon} V |\Phi\rangle \quad (\text{I.10})$$

となるので、

$$\begin{aligned} |\Psi^{(\pm)}\rangle &= \left[|\Phi\rangle + \frac{1}{E - H_0 - V \pm i\epsilon} V |\Phi\rangle \right] \\ &\quad + \left\{ \frac{1}{E - H_0 - V - W \pm i\epsilon} W \left[|\Phi\rangle + \frac{1}{E - H_0 - V \pm i\epsilon} V |\Phi\rangle \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{I.11})$$

ここで角括弧の中は (I.6) 式より $|\chi^{(\pm)}\rangle$ となるので

$$|\Psi^{(\pm)}\rangle = |\chi^{(\pm)}\rangle + \frac{1}{E - H \pm i\epsilon} W |\chi^{(\pm)}\rangle \quad (\text{I.12})$$

Appendix J

付録 A

ここでは境界条件を入れたグリーン関数 (F.6),(F.7) 式の導出を行う。まず $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ の満たす

$$[\nabla^2 + k^2] G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (\text{J.1})$$

とデルタ関数の積分表示

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = (2\pi)^{-3} \int \exp[i\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] d\mathbf{k}' \quad (\text{J.2})$$

$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ のフーリエ変換

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = (2\pi)^{-3} \int g_0(\mathbf{k}', \mathbf{r}') \exp(i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}) \quad (\text{J.3})$$

より $g_0(\mathbf{k}', \mathbf{r}')$ は

$$g_0(\mathbf{k}', \mathbf{r}') = \frac{\exp(-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}')}{k'^2 - k^2} \quad (\text{J.4})$$

となりグリーン関数 $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ は

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -(2\pi)^{-3} \int \frac{\exp[i\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')]}{k'^2 - k^2} d\mathbf{k}' \quad (\text{J.5})$$

と書くことが出来る。ここで $\mathbf{R} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ とし前の式を極座標での積分として

$$G_0(\mathbf{R}) = -(2\pi)^{-3} \int_0^\infty dk' k'^2 \int_0^\pi d\theta' \sin \theta' \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{\exp ik' R \cos \theta'}{k'^2 - k^2} \quad (\text{J.6})$$

この式の角度方向の積分を行うことにより

$$G_0(\mathbf{R}) = -(4\pi^2 R)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k' \sin k' R}{k'^2 - k^2} dk' \quad (\text{J.7})$$

この積分を実行するために次のように式変形を行う

$$G_0(\mathbf{R}) = -(16\pi^2 i R)^{-1} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik' R} \left[\frac{1}{k' - k} + \frac{1}{k' + k} \right] dk' - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik' R} \left[\frac{1}{k' - k} + \frac{1}{k' + k} \right] dk' \right\} \quad (\text{J.8})$$

この波括弧の中の第一項は以下の二つの経路で複素積分をすることが出来る。このとき経路を選択することは境界条件を決定することと同義である。

経路 1 で積分すると

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik'R} \left[\frac{1}{k'-k} + \frac{1}{k'+k} \right] dk' = 2\pi i e^{-ikR} \quad (\text{J.9})$$

経路 2 で積分すると

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik'R} \left[\frac{1}{k'-k} + \frac{1}{k'+k} \right] dk' = 2\pi i e^{ikR} \quad (\text{J.10})$$

波括弧内の第二項はそれぞれの経路から下側に弧を描くように経路を変更することで同様に計算出来てそれぞれ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik'R} \left[\frac{1}{k'-k} + \frac{1}{k'+k} \right] dk' = -2\pi i e^{-ikR} \quad (\text{J.11})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik'R} \left[\frac{1}{k'-k} + \frac{1}{k'+k} \right] dk' = -2\pi i e^{ikR} \quad (\text{J.12})$$

となる。従って経路 1 では

$$G_0^{(-)}(\mathbf{R}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{-ikR}}{R} \quad (\text{J.13})$$

の内向波、経路 2 では

$$G_0^{(+)}(\mathbf{R}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikR}}{R} \quad (\text{J.14})$$

の外向波となる。元の \mathbf{r}, \mathbf{r}' で表すことにより求めたい式が導出できた。

$$G_0^{(+)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{\exp[+ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (\text{J.15})$$

$$G_0^{(-)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{\exp[-ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (\text{J.16})$$

Appendix K

付録 Z

ここでは章でのクーロン波動関数の漸近形 () 式の導出を行う。

まず一般的な第一種合流型超幾何関数 ${}_1F_1(a; c; z)$ は

$$\begin{aligned} {}_1F_1(a; c; z) &= 1 + \frac{a}{c} \frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots \\ &= \sigma_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c+n)} \frac{z^n}{n!} \end{aligned} \quad (\text{K.1})$$

ここで $\Gamma(x)$ はガンマ関数である。さて、 $c = -p$ 以外の状況を考えると (p は 0 以上の整数)、全式の展開は全ての z に対して定義が出来る。そして $a = -p$ でない場合は $|z| < \infty$ で定義できる。第一種合流型超幾何関数について積分表示を考える。

$${}_1F_1(a; c; z) = (1 - e^{-2\pi i a})^{-1} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \oint_C e^{zt} t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} dt \quad (\text{K.2})$$

この積分は以下の経路 C をとり $t = 0$ から $t = 1$ の間にカットを持つ

この積分を次の積分経路に置き換える。

そして経路 C_1 で積分した結果を $W_1(a; c; z)$ そして C_2 で積分した結果を $W_2(a; c; z)$ とすると合流型超幾何関数 ${}_1F_1$ は

$${}_1F_1(a; c; z) = W_1(a; c; z)W_2(a; c; z) \quad (\text{K.3})$$

で表される。

そして、 $W_1(a; c; z), W_2(a; c; z)$ の z の無限遠での漸近形は

$$\begin{aligned} W_1(a; c; z) &\rightarrow \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} (-z)^{-a} v(a; a-c+1; -z) \\ &\quad -\pi < \arg(-z) < +\pi \end{aligned} \quad (\text{K.4})$$

$$\begin{aligned} W_2(a; c; z) &\rightarrow \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} z^{a-c} v(1-a; c-a; z) \\ &\quad -\pi < \arg z < +\pi \end{aligned} \quad (\text{K.5})$$

ここで

$$\begin{aligned} v(\alpha; \beta; z) &= 1 + \frac{\alpha\beta}{1!z} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!z^2} + \dots \\ &= \sigma_{n=0}^{infty} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+\beta)} \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) \frac{(z)^{-n}}{n!} \end{aligned} \quad (\text{K.6})$$

さて、それでは ψ_c について考える。 ψ_c は

$$\psi_c = C[\psi_1 + \psi_2] \quad (\text{K.7})$$

$$\psi_1 = e^{ikz} W_1(-i\gamma; 1; ik(r-z)) \quad (\text{K.8})$$

$$\psi_2 = e^{ikz} W_2(-i\gamma; 1; ik(r-z)) \quad (\text{K.9})$$

となる。

$$\begin{aligned} (-ik(r-z))^{i\gamma} &= \exp(i\gamma \ln -ik(r-z)) \\ &= \exp(i\gamma \ln k(r-z)) \exp i\gamma \ln -i = \exp(i\gamma \ln k(r-z)) \exp \frac{1}{2}\gamma\pi \end{aligned} \quad (\text{K.10})$$

となるので無限遠 $|r-z| \rightarrow \infty$ で

$$\psi_1 \rightarrow \frac{\exp(\frac{1}{2}\pi\gamma)}{\Gamma(1+i\gamma)} \exp\{i[kz + \gamma \ln k(r-z)]\} \left[1 + \frac{\gamma^2}{ik(r-z)} \dots\right] \quad (\text{K.11})$$

$$\begin{aligned} \psi_2 &\rightarrow \frac{\exp(\frac{1}{2}\pi\gamma)}{\Gamma(-i\gamma)} \frac{\exp\{i[kz - \gamma \ln k(r-z)]\}}{ik(r-z)} \left[1 + \frac{(1+i\gamma)^2}{ik(r-z)} \dots\right] \\ &\rightarrow -\frac{\gamma \exp(\frac{1}{2}\pi\gamma)}{\Gamma(1-i\gamma)} \frac{\exp\{i[kz - \gamma \ln k(r-z)]\}}{k(r-z)} \left[1 + \frac{(1+i\gamma)^2}{ik(r-z)} \dots\right] \end{aligned} \quad (\text{K.12})$$

したがって

$$\begin{aligned} \psi_c &\rightarrow C \frac{\exp(\frac{1}{2}\pi\gamma)}{\Gamma(1+i\gamma)} \left[\exp\{i[kz + \gamma \ln kr(1-\cos\theta)]\} \left(1 + \frac{\gamma^2}{ikr(1-\cos\theta)} + \dots\right) \right] \\ &+ C \frac{\exp(\frac{1}{2}\pi\gamma)}{\Gamma(1-i\gamma)} \left[f_c(\theta) \frac{\exp\{i(kr - \gamma \ln 2kr)\}}{r} \left(1 + \frac{(1+i\gamma)^2}{ikr(1-\cos\theta)} + \dots\right) \right] \end{aligned} \quad (\text{K.13})$$

$$f_c(\theta) = -\gamma \exp(2i\sigma_0) \frac{-i\gamma \ln(\sin^2 \frac{1}{2}\theta)}{2k \sin^2 \frac{1}{2}\theta} \quad (\text{K.14})$$

$$\sigma_0 = \arg\Gamma(1+i\gamma) \quad (\text{K.15})$$

となる。

謝辞

この修士論文を書き上げることが出来ましたのは、多くのご支援、ご協力あってのことです。ここに皆様への感謝の意を表すことで本論文の結びとさせていただきます。

谷井義彰教授には授業や輪講でお世話になり、私が物理を好きになる契機を与えていただいたことを深謝いたします。

指導教員の佐藤丈准教授には学生の頃から授業や演習、ゼミなど多くの場面で様々なご指導ご鞭撻を賜り、物理に関する知識だけでなく広く物事の考え方を学ばせていただきました。また昨年の秋に行われた日本物理学会発表の発表練習など様々な場面で支えていただいたことを深く感謝しております。

上坂優一氏には本研究において多くのアドバイスをいただき、私が研究に詰まった際に何度も助けていただきましたことを感謝いたします。

平良優奈氏には本研究で用いる数値計算のプログラムを作成していただきましたことを深くお礼を申し上げます。

また、私の家族には生活を支えていただき今日を迎えることが出来ましたことに心から感謝いたします。

最後となりますが、埼玉大学素粒子研究室の皆様との普段のコミュニケーションは研究でつらい時期に精神的な面で大きな支えとなりましたことを感謝いたします。

参考文献

- [1] R. Foot and X.-G. He, Phys. Lett. B267, 509(1991)
- [2] K. S. Babu, C. F. Kolda, and J. March-Russell, Phys. Rev. D57, 6788 (1998), hep-ph/9710441
- [3] M.Ibe, W. Nakano, and M. Suzuki (2016), 1611.08460.
- [4] Y. Kaneta and T. Shimomura (2016), 1701.00156.
- [5] S. Mishra *et al.* (CCFR Collaboration), Phys.Rev.Lett. 66, 3117(1991).
- [6] W. Altamannshofer,S. Gori, M. Pospelov, and I. Yavin, Phys. Rev. Lett. 113, 091801(2014),1406.2332.
- [7] T. Araki, F. Kaneko, Y. Konishi, T. Ota, J. Sato, and T. Shimomura, Phys.Rev. D91(3),037301 (2015), 1409.4180.
- [8] T. Araki, F. Kaneko, T Ota, J. Sato, and T. Shimomura, Phys. Rev. D93(1), 013014(2016), 1508.07471.
- [9] F. Halzen and S. R. Klein, The Review of scientific instruments 81(8), 081101 (2010),1007.1247.
- [10] M. G. Aartsen et al. (IceCube), Phys. Rev. Lett. 113, 101101 (2014), 1405.5303.
- [11] A. Kamada and H.-B. Yu, Phys. Rev. D92(11), 113004 (2015), 1504.00711.
- [12] R. Harnil, J. Kopp, and P. A. N. Machado, JCAP 1207, 026 (2012), 1202.6073.
- [13] B. Aubert *et al.*, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A 497(1),1 (2012).
- [14] B. Aubert *et al.*, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A 729,615(2013).
- [15] J. P. Less *et al.* (BaBar), Phys. Phys. Rev. D94(1), 011102 (2016), 1606.03501.
- [16] D. Henneke, S. Fogwell, and G. Gabrielse, Phys. Rev. Lett. 100, 120801 (2008), 0801.1134.
- [17] T. Kinoshita and M. Nio, Phys. Rev. D 73, 013003(2006), hep-ph/0507249.
- [18] S. Beak, N. G. Deshpande, X. G. He. and P. Ko, Phys. Rev. D64, 055006 (2001), hep-ph/0104141.
- [19] C. W. De Jager, H. De Vries, AND C. De Vries Atomic Data And Nuclear Data Tables 14, 479-508(1974).
- [20] T. Suzuki, David F.Measday, J. P. Roalsvig Phys. Rev. C35 (1987) 2212
- [21] R. Abramishvili *et al.* Prog. Theor. Exp. Phys. 2020, 033C01
- [22] Alexander Keshavarzi, Daisuke Nomura, and Thomas Teubner, Phys. Rev. D97,114025 (2018)
- [23] L. Bartoszek *et al.* arXiv:1501.05241
- [24] G. W. Bennett *et al.*, Phys. Rev. Lett. 89 101804(2002);
Erratum *ibid.* Phys. Rev. Lett. 89,129903(2002);

- G. W. Bennett *et al.*, Phys. Rev. Lett. 92, 161802(2004);
G. W. Bennett *et al.*, Phys. Rev. D73 ,072003 (2006).
- [25] M. Davier *et al.*, arXiv:1908.00921(2019)
- [26] R. Foot, Mod. Phys. Lett. A 06, 527(1991);
X. He, G. C. Joshi, H. Lew, and R. Volkas, Phys.Rev.D43,R22(1991);
R. Foot, X.G. He, H. Lew, and R. R. Volkas, Phys. Rev. D50,4571(1994).
- [27] R.Watanabe, M.Fukui, H.Ohtsubo, and M.Morita, Prog. Theor. Phys. 78,114(1987);
R.Watanabe, At. Data Nucl. Data Tables 54, 165(1993).
- [28] O.Shanker, Phys. Rev. D 25, 1847(1982);
O.Shanker,Phys. Rev. D 55, 7307(1997).
- [29] R.Szafron and A. Czarnecki, Phys. Rev. D 94 051301(R) (2016).