

MSSMにおけるneutralino dark matter の Sommerfeld enhancement による間接検出の可能性

常見 一太

2020/2/5

概要

暗黒物質は今までの観測によりほぼ確実に存在しているとされている。しかしその正体については全く分からず、いまだに観測されていない。暗黒物質を説明する理論は色々あるが、現在観測されている残存量を説明するためには coannihilation 機構が必要になることが多々ある。この様な場合、暗黒物質以外に質量が縮退した粒子を必要とする。このような粒子が存在する場合、Sommerfeld Enhancement の効果によって暗黒物質の対消滅の cross section が桁で大きくなる可能性がある。従って、間接検出を考えた時に将来的に測定可能な領域がある可能性がある。そこで、間接検出でよく用いられる光子を終状態に含む cross section を計算し、銀河中心での暗黒物質の対消滅による光子の flux を計算した。今回考えたモデルは MSSM(minimal supersymmetric standard model) で暗黒物質を neutralino、質量が縮退している粒子として slepton を考える。MSSM はパラメータの数が標準模型より多くなるため様々な仮定をしてパラメータの数を減らした模型 (CMSSM など) がよく用いられるが、より一般の場合について議論するため、何の仮定もしない一般的な MSSM について考える。Sommerfeld Enhancement の効果を計算するためには、MSSM で得られる action を、非相対論的な 2 体状態の action に書き直す必要がある。その計算手法や、cross section を定式化する方法について詳しく議論した。

目 次

1	Introduction	4
2	Lagrangian	8
3	Two-body state effective action	12
3.1	Integrating out all fields except $\tilde{\chi}, \tilde{\tau}$	12
3.2	Integrating out large momentum modes of $\tilde{\chi}, \tilde{\tau}$	15
3.3	Nonrelativistic expansion of action	18
3.4	Two-body state effective action	24
4	Annihilation cross section	28
5	Gamma ray flux	30
6	Numerical result and conclusion	31
Appendix		42
Coannihilation	42
緩和法	44

1 Introduction

2012 年にヒッグス粒子が発見されたことで標準模型 (Standard model) が完成したが、素粒子物理学はこれで完成したというわけではない。標準模型では観測された実験結果をすべて説明できるわけではないからである。その例として、標準模型では暗黒物質 (Dark matter) が何なのか説明できないという点がある。この問題を解決するために標準模型を何らかの形で拡張する必要がある。この論文では、標準模型を超対称性 (Super symmetry) を導入することで拡張し、超対称粒子に暗黒物質の候補となる粒子を求めていくアプローチをとる。この章では暗黒物質の性質や超対称性についての簡単な説明を行う。

まず、暗黒物質の歴史について振り返る。暗黒物質が最初に提唱されたのは 1933 年に天文学者の Fritz Zwicky によってである。Zwicky は当時研究対象としていたかみの毛座銀河団に対してビリアル定理を用いて、銀河団中の全質量を見積もった結果、目に見える物体だけでは全質量を説明できないという結論に至り、目に見えない物質、すなわち暗黒物質があるはずであると発表した。

暗黒物質の存在証拠として、1970 年代に Vera Rubin の銀河の回転速度の観測により示された。ニュートン力学によれば銀河中心から十分離れた回転速度 v は銀河中心からの距離 r を用いて、 $v \propto r^{-1/2}$ となるはずである。しかし、Rubin らの観測結果は図 1 のように遠方で回転速度が一定となり、ニュートン力学と矛盾する。この矛盾を解決するには暗黒物質があるはずである。現在では WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) によ

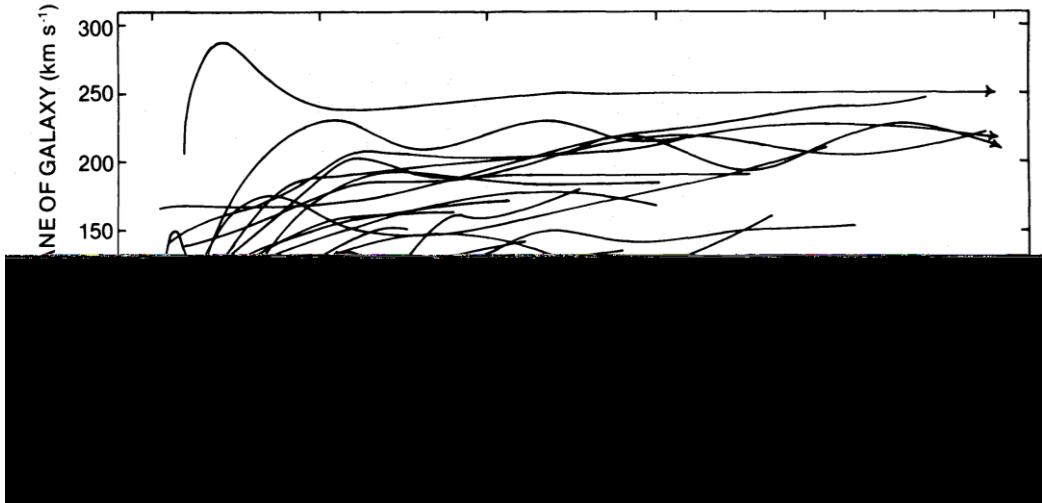


図 1: Rubin らにより測定された銀河の回転曲線 ([1] より引用)

り宇宙の構成要素の比も測定されていて、暗黒物質は我々の宇宙の約 24 %を占めているとされている(図 2)。

次に暗黒物質の 3 つの満足すべき性質について述べる。まず今まで観測されていない事実から暗黒物質は電気的に中性である必要がある。次に上述した矛盾を解消するために有限の質量を持つこと。そして、今まで崩壊せずに存在しているために安定であること。暗黒物質を含む理論を考える上でこの 3 つは必ず満たすようにならなければならない。これらの性質を満足するような暗黒物質の候補を考える上でまず、暗黒物質を粒子的なものと見るかどうかでまず場合分けができる。非粒子的なものの例はブラックホールなどである。粒子的なものとした時にはさらに暗黒物質が熱的かそうでないかで場合分けできる。非熱的な例としてアクションが挙げられる。熱的な暗黒物質はさらに熱いか冷たい暗黒物質化に分けることができる。ここでいう熱い、冷たいとは暗黒物質が脱結合するときに相対論的な状態ならば熱い、非相対論的なならば冷たいということである。簡単に図にすると図 3 のように暗黒物質の候補は場合分けできる。熱い暗黒物質の例として質量を持つニュートリノが挙げられる。しかし現在ではニュートリノが暗黒物質の主成分ではないだろうということが分かっている。冷たい暗黒物質の例としては WIMP (Weakly Interacting Massive particle) が挙げられる。WIMP は $\mathcal{O}(\text{GeV}) \sim \mathcal{O}(\text{TeV})$ 程度の質量をもち、名前の通り他の粒子と弱く相互作用する。WIMP の有力候補として考えられているのが本論文で扱って

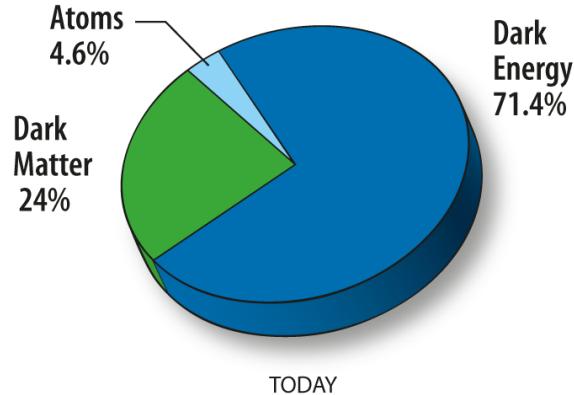


図 2: 現在の宇宙の構成要素 ([2] より引用)

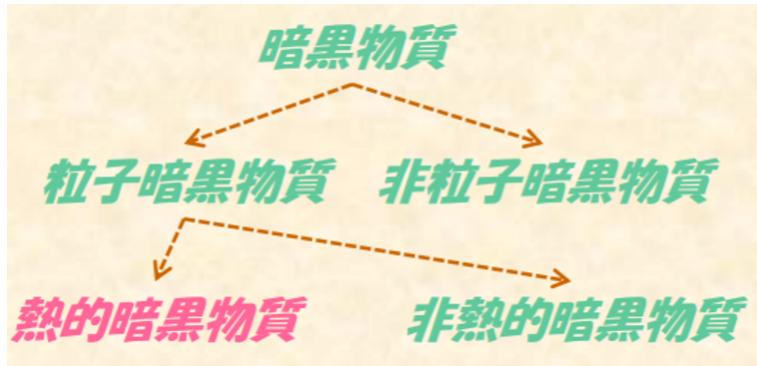


図 3: 暗黒物質の候補の場合分けの模式図 ([3] より引用)

いる neutralino である。neutralino とは超対称標準模型で予言される粒子のことで、標準模型におけるゲージボソンのスピンが $\frac{1}{2}$ となった粒子などの質量固有状態のことである。他にも余剰次元理論におけるカルツァクライン励起状態の粒子が WIMP の候補として考えられている。

次に先ほど出てきた超対称性についての説明を行う。超対称性とはボソンとフェルミオンの間の対称性のこととで、標準模型を超対称性を用いて拡張する場合は一番簡単な場合でも標準模型の倍の数の粒子が現れ、パラメータの数も 120 を超える。この一番簡単な場合というのを MSSM(Minimal Super symmetric Standard Model) といい、図 4 の物質場と図 5 のゲージ場たちからなる。

neutralino とは図 4 の H_u^0, H_d^0 と図 5 の \tilde{W}^0, \tilde{B}^0 の線形結合で表される。neutralino は質量をもち、電荷をもない粒子であるが、超対称粒子なのでより質量の軽い標準模型の粒子へと崩壊する可能性がある。neutralino を安定なものにするためには、超対称性の理論を考える上で R-parity と呼ばれる、離散対称性を仮定しなければならない。R-parity の定義はそれぞれの粒子に対するバリオン数 B 、レプトン数 L 、スピン s で

$$P_R = (-1)^{3(B-L)+2s}$$

と定義される。これは標準模型の粒子に対しては +1 を、超対称粒子には -1 を与える。この R-parity を導入することで標準模型の粒子を X 、超対称粒子を χ と書くと、

$$\begin{aligned} \chi &\rightarrow XX \\ \chi X &\rightarrow XX \end{aligned}$$

Names		spin 0	spin 1/2	$SU(3)_C, SU(2)_L, U(1)_Y$
squarks, quarks ($\times 3$ families)	Q	$(\tilde{u}_L \ \tilde{d}_L)$	$(u_L \ d_L)$	$(\mathbf{3}, \mathbf{2}, \frac{1}{6})$
	\bar{u}	\tilde{u}_R^*	u_R^\dagger	$(\overline{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, -\frac{2}{3})$
	\bar{d}	\tilde{d}_R^*	d_R^\dagger	$(\overline{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, \frac{1}{3})$
sleptons, leptons ($\times 3$ families)	L	$(\tilde{\nu} \ \tilde{e}_L)$	$(\nu \ e_L)$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2})$
	\bar{e}	\tilde{e}_R^*	e_R^\dagger	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 1)$
Higgs, higgsinos	H_u	$(H_u^+ \ H_u^0)$	$(\tilde{H}_u^+ \ \tilde{H}_u^0)$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, +\frac{1}{2})$
	H_d	$(H_d^0 \ H_d^-)$	$(\tilde{H}_d^0 \ \tilde{H}_d^-)$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2})$

図 4: MSSM での chiral supermultiplets([4] より引用)

Names	spin 1/2	spin 1	$SU(3)_C, SU(2)_L, U(1)_Y$
gluino, gluon	\tilde{g}	g	$(\mathbf{8}, \mathbf{1}, 0)$
winos, W bosons	$\widetilde{W}^\pm \ \widetilde{W}^0$	$W^\pm \ W^0$	$(\mathbf{1}, \mathbf{3}, 0)$
bino, B boson	\tilde{B}^0	B^0	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 0)$

図 5: MSSM での gauge supermultiplets([4] より引用)

のような反応を禁止することができる。こうすることで超対称粒子で一番軽い粒子 (LSP) は安定な粒子となり、暗黒物質の候補となるための 3 つの条件を満足することができる。

現在この neutralino dark matter を見つけるため実験がされているが発見されず、質量の下限に制限がついている。この制限を逃れるために暗黒物質の質量を大きくすればいいのだが、WIMP の残存量は WIMP の質量が増えると多くなってしまう。そのため質量を大きくしすぎたら今度は残存量を満たさなくなってしまう。これらの実験結果をうまく満たすようにするために coannihilation[5] などの方法がある。coannihilation は暗黒物質の他に質量が縮退している粒子があるモデルを考えるときに生じる効果である。この効果により、暗黒物質の質量を変化させず、残存量を桁で小さくすることができる。そのため実験結果と矛盾しない parameter space が生じる可能性がある。

Coannihilation を起こすようなモデルを考える場合、暗黒物質の間接検出において Sommerfeld Enhancement[6] の効果が重要になる。Sommerfeld Enhancement とは、暗黒物質が標準模型の粒子へ対消滅する際に束縛状態を形成することで、cross section が大きくなる効果のことである。diagram 的に解釈すると、図 6 のような diagram ではなく、図 7 のような ladder diagram を考えることになる。この機構によって、対消滅の cross section に resonance が生じる。図 7 の diagram の cross section を計算するためには、非対称論的な 1 ループの effective action[7] のシュレディンガー方程式を解いて波動関数を求める必要がある。

この論文では、neutralino と質量が縮退している粒子として slepton の一番質量が軽いものを考える。このようなモデルでは neutralino だけでなく、slepton の反応も図 7 の中に寄与してくることになる。このような暗黒物質のモデルのことを EWIMP(ElectroWeak Interacting Massive Particle) という。

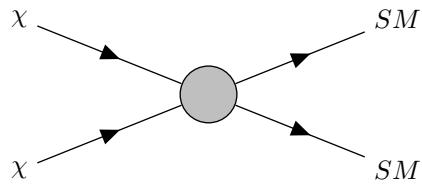


図 6: χ が ϕ を交換せずに SM の粒子へ崩壊する diagram

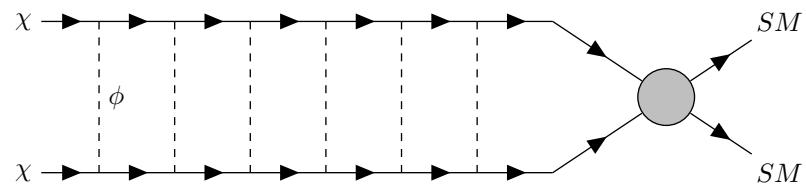


図 7: χ が n 回 ϕ を交換して SM の粒子へ崩壊する diagram

本論文では 2 章でラグランジアンを導出し、3 章で非相対論的な Two-body state effective action を計算する。そして 4 章で cross section の式を導出し、5 章で銀河中心からの光子の flux について議論し、6 章でそれらの数値的な計算結果についてまとめる。

2 Lagrangian

この章ではイントロで述べたモデルのラグランジアンを導出する。まずは slepton の質量行列を考える。関連する super potential W は

$$W = -\hat{e}^i y_i^j \hat{L}_{j\alpha} \hat{H}_{d\beta} \epsilon^{\alpha\beta} + \mu \hat{H}_{u\alpha} \hat{H}_{d\beta} \epsilon^{\alpha\beta} \quad (1)$$

これより F-term の寄与を計算すると

$$\begin{aligned} W^k W_k^* &\sim y_k^j \tilde{e}_{Lj} H_d^0 y_i^k \tilde{e}_L^{*i} H_d^{0*} + \tilde{e}_R^{*i} y_i^k H_d^0 \tilde{e}_{Rj} y_i^j H_d^{0*} - \mu^* \tilde{e}_R^{*i} y_i^j \tilde{e}_{Lj} H_u^0 - \mu H_u^0 \tilde{e}_{Ri} y_i^j \tilde{e}_L^{*j} \\ &= (\tilde{e}_L^{*i} y_i^k y_k^j \tilde{e}_{Lj} + \tilde{e}_R^{*i} y_i^k y_i^j \tilde{e}_{Rj}) |H_d^0|^2 - (\mu^* \tilde{e}_R^{*i} y_i^j \tilde{e}_{Lj} H_u^0 + h.c) \end{aligned} \quad (2)$$

次に D-term の寄与を計算すると

$$\frac{1}{2} \sum_a g_a^2 (\phi^* T^a \phi)^2 \sim \frac{1}{4} g^2 \tilde{e}_L^{*i} \tilde{e}_{Li} (|H_u^0|^2 - |H_d^0|^2) + \frac{1}{4} g'^2 (-\tilde{e}_L^{*i} \tilde{e}_{Li} + 2 \tilde{e}_R^{*i} \tilde{e}_{Ri}) (|H_u^0|^2 - |H_d^0|^2) \quad (3)$$

さらに A-term の寄与は

$$\mathcal{L}_{soft} \sim -\tilde{e}_R^{*i} a_i^j \tilde{e}_{Lj} H_d^0 - \tilde{e}_L^{*i} a_i^j \tilde{e}_{Rj} H_d^{0*} \quad (4)$$

式(2)～(4) より slepton の質量行列は $\tilde{\psi}_l = (\tilde{e}_L \ \tilde{\mu}_L \ \tilde{\tau}_L \ \tilde{e}_R \ \tilde{\mu}_R \ \tilde{\tau}_R)^T$ base で

$$\mathcal{L}_{slepton\ mass} = -\tilde{\psi}_l^\dagger M^2 \tilde{\psi}_l \quad (5)$$

と書ける。ここで、

$$\begin{aligned} M^2 &= \begin{pmatrix} M_{LL}^2 & M_{LR}^2 \\ M_{RL}^2 & M_{RR}^2 \end{pmatrix} \\ M_{LLi}^j &= m_L^2 y_i^j + y_i^k y_k^j v_d^2 + m_z^2 (s_w^2 - 1/2) c_{2\beta} \delta_i^j \\ M_{LRi}^j &= -\mu v_u y_i^j + v_d a_i^j \\ M_{RLi}^j &= -\mu^* v_u y_i^j + v_d a_i^j \\ M_{RRi}^j &= m_R^2 y_i^j + y_i^k y_k^j v_d^2 + m_z^2 s_w^2 c_{2\beta} \delta_i^j \end{aligned}$$

m_L^2, m_R^2 は soft breaking mass parameter、 $v_u(v_d)$ は $H_u(H_d)$ の真空期待値、それらの比として $\tan\beta = v_u/v_d$ 、 $s_w(c_w) = \sin\theta_w(\cos\theta_w)$ は Weinberg angle、 $m_z(m_w)$ は Z(W) ポソンの質量である。 M^2 を対角化するためにはユニタリ行列 $N_{\tilde{l}}{}^A{}^B$ ($A, B = 1 \sim 6$) を用いて

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_A &= N_{\tilde{l}}{}^A{}^B \tilde{\psi}_l B \\ \rightarrow \tilde{e}_{Li} &= N_{\tilde{l}}{}^i{}^B \tilde{\tau}_B, \quad \tilde{e}_{Ri} = N_{\tilde{l}}{}^i{}^{i+3} \tilde{\tau}_B \quad (N_{\tilde{l}}{}^A{}^B \equiv (N_{\tilde{l}}{}^A{}^B)^\dagger) \end{aligned} \quad (6)$$

とすればいい。 $\tilde{\tau}_A$ の添え字については固有値である質量が小さい順に 1～6 とラベルされているものとする。次に neutralino の質量行列を求める $\tilde{\psi}^0 = (\tilde{B}, \tilde{W}^0, \tilde{H}_d^0, \tilde{H}_u^0)^T$ base で

$$\mathcal{L}_{neutralino\ mass} = -\frac{1}{2} (\tilde{\psi}^0)^T M_N \tilde{\psi}^0 + c.c. \quad (7)$$

と書ける。ここで、

$$M_N = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & -c_\beta s_w m_z & s_\beta s_w m_z \\ 0 & M_2 & c_\beta c_w m_z & -s_\beta c_w m_z \\ -c_\beta s_w m_z & c_\beta c_w m_z & 0 & -\mu \\ s_\beta s_w m_z & -s_\beta c_w m_z & -\mu & 0 \end{pmatrix}$$

であり、slepton の時と同様にユニタリ行列 $N_{\tilde{G}^a}{}^b$ ($a, b = 1 \sim 4$) を用いて

$$\tilde{\chi}_a = N_{\tilde{G}^a}{}^b \tilde{\psi}^0_b \quad (8)$$

とすれば対角化できる。ここでも $\tilde{\chi}_a$ の添え字については固有値が小さい順に $1 \sim 4$ とラベルされているものとする。最後に chargino の質量行列を求める $\tilde{\psi}^\pm = (\tilde{W}^+, \tilde{H}_u^+, \tilde{W}^-, \tilde{H}_d^-)$ base で

$$\mathcal{L}_{chargino\,mass} = -\frac{1}{2}(\tilde{\psi}^\pm)^T M_C \tilde{\psi}^\pm + h.c. \quad (9)$$

となる。ここで、

$$M_C = \begin{pmatrix} 0 & X^T \\ X & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} M_2 & \sqrt{2}s_\beta m_w \\ \sqrt{2}c_\beta m_w & \mu \end{pmatrix}$$

M_C を対角化するためには 2 つのユニタリ行列 U, V を用いて

$$\begin{pmatrix} \tilde{C}_1^+ \\ \tilde{C}_2^+ \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} \tilde{W}^+ \\ \tilde{H}_u^+ \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tilde{C}_1^- \\ \tilde{C}_2^- \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \tilde{W}^- \\ \tilde{H}_d^- \end{pmatrix}$$

とすれば対角化することができる。ここでも今までと同様に固有値が小さい順に $1 \sim 2$ とラベルしている。

次に相互作用項として、まずはゲージ相互作用を考える。

$$\begin{aligned} D^\mu \tilde{L}^{*i} D_\mu \tilde{L}_i &= \left(\partial^\mu \tilde{L}^{*i} + \frac{1}{2} ig' B^{0\mu} \tilde{L}^{*i} - \frac{1}{2} ig \begin{pmatrix} W^{0\mu} & \sqrt{2}W^{+\mu} \\ \sqrt{2}W^{-\mu} & -W^{0\mu} \end{pmatrix} \tilde{L}^{*i} \right) \\ &\times \left(\partial_\mu \tilde{L}_i - \frac{1}{2} ig' B_\mu^0 \tilde{L}_i + \frac{1}{2} ig \begin{pmatrix} W_\mu^0 & \sqrt{2}W_\mu^+ \\ \sqrt{2}W_\mu^- & -W_\mu^0 \end{pmatrix} \tilde{L}_i \right) \\ &\rightarrow -\frac{1}{2} ig' (-s_w Z_\mu + c_w A_\mu) \partial^\mu \tilde{L}^{*i} \tilde{L}_i + \frac{1}{2} ig \partial^\mu \tilde{L}^{*i} \begin{pmatrix} c_w Z_\mu + s_w A_\mu & \sqrt{2}W_\mu^+ \\ \sqrt{2}W_\mu^- & -c_w Z_\mu - s_w A_\mu \end{pmatrix} \tilde{L}_i \\ &+ \frac{1}{2} ig' (-s_w Z^\mu + c_w A^\mu) \tilde{L}^{*i} \partial_\mu \tilde{L}_i - \frac{1}{2} ig \tilde{L}^{*i} \begin{pmatrix} c_w Z^\mu + s_w A^\mu & \sqrt{2}W^\mu \\ \sqrt{2}W^{-\mu} & -c_w Z^\mu - s_w A^\mu \end{pmatrix} \partial_\mu \tilde{L}_i \\ &\rightarrow ie A_\mu \tilde{e}_L^* i \overleftrightarrow{\partial}^\mu \tilde{e}_{Li} - ig_z Z_\mu (s_w^2 - 1/2) \tilde{e}_L^* i \overleftrightarrow{\partial}^\mu \tilde{e}_{Li} \\ &- i \frac{\sqrt{2}}{2} g \left(W_\mu^+ \tilde{\nu}^{*i} i \overleftrightarrow{\partial}^\mu \tilde{e}_{Li} + W_\mu^- \tilde{e}_L^* i \overleftrightarrow{\partial}^\mu \tilde{\nu}_i \right) \\ &+ e^2 A^2 |\tilde{e}_{Li}|^2 + g_z^2 (s_w^2 - 1/2)^2 Z^2 |\tilde{e}_{Li}|^2 - 2eg_z (s_w^2 - 1/2) A_\mu Z^\mu |\tilde{e}_{Li}|^2 + \frac{g^2}{2} W_\mu^+ W^{-\mu} |\tilde{e}_{Li}|^2 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} D^\mu \tilde{\tilde{e}}_i D_\mu \tilde{\tilde{e}}^i &\rightarrow ig' B_\mu \tilde{\tilde{e}}_R^* i \overleftrightarrow{\partial}^\mu \tilde{e}_{Ri} + g'^2 B^2 |\tilde{e}_{Ri}|^2 \\ &= ie A_\mu \tilde{\tilde{e}}_R^* i \overleftrightarrow{\partial}^\mu \tilde{e}_{Ri} - ig'_z s_w^2 Z_\mu \tilde{\tilde{e}}_R^* i \overleftrightarrow{\partial}^\mu \tilde{e}_{Ri} \\ &+ e^2 A^2 |\tilde{e}_{Ri}|^2 + g_z^2 s_w^4 Z^2 |\tilde{e}_{Ri}|^2 - 2eg_z s_w^2 A_\mu Z^\mu |\tilde{e}_{Ri}|^2 \end{aligned} \quad (11)$$

ここで D_μ は共変微分を表し、

$$\phi \overleftrightarrow{\partial}^\mu \psi = \phi \partial^\mu \psi - \partial^\mu \phi \psi$$

と定義される演算子で、

$$\begin{pmatrix} Z^0 \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_w & -s_w \\ s_w & c_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^0 \\ B^0 \end{pmatrix}$$

$$g' = s_w g_z, \quad g = c_w g_z$$

などの関係を用いた。従ってゲージ相互作用は

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{gauge} = & ie A_\mu \tilde{e}_L^* i \overleftrightarrow{\partial}^\mu \tilde{e}_{Li} - ig_z Z_\mu (s_w^2 - 1/2) \tilde{e}_L^* i \overleftrightarrow{\partial}^\mu \tilde{e}_{Li} + ie A_\mu \tilde{e}_R^* i \overleftrightarrow{\partial}^\mu \tilde{e}_{Ri} - ig_z s_w^2 Z_\mu \tilde{e}_R^* i \overleftrightarrow{\partial}^\mu \tilde{e}_{Ri} \\
& - i \frac{\sqrt{2}}{2} g \left(W_\mu^+ \tilde{\nu}^* i \overleftrightarrow{\partial}^\mu \tilde{e}_{Li} + W_\mu^- \tilde{e}_L^* i \overleftrightarrow{\partial}^\mu \tilde{\nu}_i \right) \\
& + e^2 A^2 |\tilde{e}_{Li}|^2 + g_z^2 (s_w^2 - 1/2)^2 Z^2 |\tilde{e}_{Li}|^2 - 2eg_z (s_w^2 - 1/2) A_\mu Z^\mu |\tilde{e}_{Li}|^2 + \frac{g^2}{2} W_\mu^+ W^{-\mu} |\tilde{e}_{Li}|^2 \\
& + e^2 A^2 |\tilde{e}_{Ri}|^2 + g_z^2 s_w^4 Z^2 |\tilde{e}_{Ri}|^2 - 2eg_z s_w^2 A_\mu Z^\mu |\tilde{e}_{Ri}|^2 \\
\rightarrow & ie A_\mu \tilde{\tau}^* i \overleftrightarrow{\partial}^\mu \tilde{\tau} - ig_z Z_\mu \left(s_w^2 - \frac{1}{2} N_{\tilde{l}1}^i N_{\tilde{l}i}^{\dagger 1} \right) \tilde{\tau}^* i \overleftrightarrow{\partial}^\mu \tilde{\tau} \\
& - i \frac{\sqrt{2}}{2} g \left(W_\mu^+ \tilde{\nu}^* i \overleftrightarrow{\partial}^\mu N_{\tilde{l}i}^{\dagger 1} \tilde{\tau} + W_\mu^- \tilde{\tau}^* N_{\tilde{l}1}^i i \overleftrightarrow{\partial}^\mu \tilde{\nu}_i \right) \\
& + e^2 A^2 |\tilde{\tau}|^2 + g_z^2 \left(s_w^2 - \frac{1}{2} N_{\tilde{l}1}^i N_{\tilde{l}i}^{\dagger 1} \right)^2 Z^2 |\tilde{\tau}|^2 - 2eg_z \left(s_w^2 - \frac{1}{2} N_{\tilde{l}1}^i N_{\tilde{l}i}^{\dagger 1} \right) A_\mu Z^\mu |\tilde{\tau}|^2 \\
& + \frac{g^2}{2} N_{\tilde{l}1}^i N_{\tilde{l}i}^{\dagger 1} W_\mu^+ W^{-\mu} |\tilde{\tau}|^2
\end{aligned} \tag{12}$$

と書ける。最後の矢印においては式 (6) における $A=1$ のみ残し、添え字は省略した。以下の議論でも $\tilde{\tau}$ は $A=1$ の添え字を省略しているものとする。次に higgs-stau-stau の 3 点相互作用を考える。式 (2) ~ (4) より

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{h^0-\tilde{\tau}-\tilde{\tau}} = & \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{\tau}^* \tilde{\tau} h^0 \left[-\frac{1}{2} (c_\alpha v_u + s_\alpha v_d) \left(g^2 N_{\tilde{l}1}^i N_{\tilde{l}i}^{\dagger 1} + g'^2 (-N_{\tilde{l}1}^i N_{\tilde{l}i}^{\dagger 1} + 2N_{\tilde{l}1}^{i+3} N_{\tilde{l}i+3}^{\dagger 1}) \right) \right. \\
& + 2s_\alpha v_d \left(N_{\tilde{l}1}^i y_i^k y_k^j N_{\tilde{l}j}^{\dagger 1} + N_{\tilde{l}1}^{i+3} y_i^k y_k^j N_{\tilde{l}j+3}^{\dagger 1} \right) \\
& + c_\alpha \left(\mu^* N_{\tilde{l}1}^{i+3} y_i^j N_{\tilde{l}j}^{\dagger 1} + h.c. \right) \\
& \left. + s_\alpha \left(N_{\tilde{l}1}^{i+3} a_i^j N_{\tilde{l}j}^{\dagger 1} + h.c. \right) \right]
\end{aligned} \tag{13}$$

ここで

$$\begin{pmatrix} H_u^0 \\ H_d^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_u \\ v_d \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} c_\alpha & s_\alpha \\ -s_\alpha & c_\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h^0 \\ H^0 \end{pmatrix}$$

の関係を用いた。同様に higgs-higgs-stau-stau の 4 点相互作用は

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{h^0-h^0-\tilde{\tau}-\tilde{\tau}} = & \tilde{\tau}^* \tilde{\tau} h^0{}^2 \left[-\frac{1}{8} g^2 (c_\alpha^2 - s_\alpha^2) N_{\tilde{l}1}^i N_{\tilde{l}i}^{\dagger 1} - \frac{1}{8} g'^2 (c_\alpha^2 - s_\alpha^2) (-N_{\tilde{l}1}^i N_{\tilde{l}i}^{\dagger 1} + 2N_{\tilde{l}1}^{i+3} N_{\tilde{l}i+3}^{\dagger 1}) \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} s_\alpha^2 \left(N_{\tilde{l}1}^i y_i^k y_k^j N_{\tilde{l}j}^{\dagger 1} + N_{\tilde{l}1}^{i+3} y_i^k y_k^j N_{\tilde{l}j+3}^{\dagger 1} \right) \right]
\end{aligned} \tag{14}$$

と書ける。次に gaugino との相互作用を考える。書き下すと、

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{gaugino} = & \frac{\sqrt{2}}{2} g' \tilde{e}_L^* i \bar{\tilde{B}}_D P_L e_{Di} - \sqrt{2} g' \tilde{e}_R^* i \bar{\tilde{B}}_D P_R e_{Di} + \frac{\sqrt{2}}{2} g \tilde{e}_L^* i \bar{\tilde{W}}_D^0 P_L e_{Di} \\
& + \frac{1}{2} \tilde{e}_L^* i y_i^j \bar{\tilde{H}}_D^0 P_R e_{Dj} + \frac{1}{2} \tilde{e}_R^* i y_i^j \bar{\tilde{H}}_D^0 P_L e_{Dj} + h.c.
\end{aligned} \tag{15}$$

ここで、 P_L, P_R はそれぞれ left handed, right handed への projection operator で、

$$P_L = (1 - \gamma_5)/2, \quad P_R = (1 + \gamma_5)/2$$

と定義される。さらに 4 成分スピンノル $e_{Di}, \tilde{\psi}_{Da}^0$ を

$$e_{Di} = \begin{pmatrix} e_{L\alpha i} \\ e_{R_i^{\dot{\alpha}}} \end{pmatrix} \quad \tilde{\psi}_{Da}^0 = \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_{\alpha a}^0 \\ \tilde{\psi}_{0\dot{\alpha} a}^0 \end{pmatrix}$$

と定義した。式(6)、(8)を用いて式(15)を書きなおすと

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{gaugino} = & \tilde{\tau}^* \bar{\chi} \left[P_L \left(\frac{\sqrt{2}}{2} g' N_{\tilde{l}1}{}^i N_{\tilde{G}1}{}^1 + \frac{\sqrt{2}}{2} g N_{\tilde{l}1}{}^i N_{\tilde{G}1}{}^2 + \frac{1}{2} N_{\tilde{l}1}{}^{j+3} y_j{}^i N_{\tilde{G}1}{}^4 \right) \right. \\ & \left. + P_R \left(-\sqrt{2} g' N_{\tilde{l}1}{}^{i+3} N_{\tilde{G}1}{}^1 + \frac{1}{2} N_{\tilde{l}1}{}^i y^\dagger{}_i{}^j N_{\tilde{G}1}{}^4 \right) \right] e_{Di} + h.c.\end{aligned}\quad (16)$$

ここで $\tilde{\tau}$ と同様に $\tilde{\chi}$ についても $a=1$ のみ残し、以下の議論で添え字は省略する。最後に終状態で neutrino を出すような相互作用は

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{chargino} = & -g \tilde{e}_L^* i \tilde{W}^- \nu_i - g \nu^\dagger i \tilde{W}^{-\dagger} \tilde{e}_{Li} - \frac{1}{2} \tilde{e}_R^* i y_i{}^j \nu_j \tilde{H}_d^- - \frac{1}{2} \nu^\dagger i y^\dagger{}_i{}^j \tilde{e}_{Rj} \tilde{H}_d^{-\dagger} \\ = & \tilde{\tau}^* \bar{C}_\alpha P_L \nu_{Di} \left[-g N_{\tilde{l}1}{}^i U^\dagger{}_1{}^\alpha - \frac{1}{2} N_{\tilde{l}1}{}^{j+3} y_j{}^i U^\dagger{}_2{}^\alpha \right] + h.c.\end{aligned}\quad (17)$$

となる。ここで4成分スピノル \tilde{C}^α を

$$\tilde{C}^\alpha = \begin{pmatrix} \tilde{C}_\alpha^+ \\ \tilde{C}^{-\dagger\alpha} \end{pmatrix}$$

と定義した。

従って、今回考える模型のラグランジアンは

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & \mathcal{L}_{KT} + \mathcal{L}_{gauge} + \mathcal{L}_{h^0-\tilde{\tau}-\tilde{\tau}} + \mathcal{L}_{h^0-h^0-\tilde{\tau}-\tilde{\tau}} + \mathcal{L}_{gaugino} + \mathcal{L}_{chargino} \\ = & \frac{1}{2} \bar{\tilde{\chi}} (i\partial - m) \tilde{\chi} + \bar{\tilde{C}}_\alpha (i\partial - m_{C_\alpha}) \tilde{C}^\alpha + \bar{\tilde{\nu}}_D^i i\partial \nu_{Di} + \bar{\tilde{e}}_D^i \left(i\partial \delta_i^j - m_{e_i}{}^j \right) e_{Di} - \tilde{\tau}^* (\partial^2 + m_{\tilde{\tau}}^2) \tilde{\tau} - \tilde{\nu}^{*i} (\partial^2 \delta_i^j + m_{\tilde{\nu}_i}^2) \tilde{\nu}_j \\ & + \frac{1}{2} Z_\mu (\partial^2 + m_Z^2) g^{\mu\nu} Z_\nu + \frac{1}{2} A_\mu \partial^2 g^{\mu\nu} A_\nu + W_\mu^+ (\partial^2 + m_W^2) g^{\mu\nu} W_\nu^- - \frac{1}{2} h^0 (\partial^2 + m_{h^0}^2) h^0 \\ & + ie A_\mu \tilde{\tau}^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \tilde{\tau} - ig_z Z_\mu \left(s_w^2 - \frac{1}{2} N_{\tilde{l}1}{}^i N_{\tilde{l}1}^{\dagger i} \right) \tilde{\tau}^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \tilde{\tau} \\ & - i \frac{\sqrt{2}}{2} g \left(W_\mu^+ \tilde{\nu}^{*i} \overleftrightarrow{\partial}^\mu N_{\tilde{l}1}^{\dagger i} \tilde{\tau} + W_\mu^- \tilde{\tau}^* N_{\tilde{l}1}{}^i \overleftrightarrow{\partial}^\mu \tilde{\nu}_i \right) \\ & + e^2 A^2 |\tilde{\tau}|^2 + g_z^2 \left(s_w^2 - \frac{1}{2} N_{\tilde{l}1}{}^i N_{\tilde{l}1}^{\dagger i} \right)^2 Z^2 |\tilde{\tau}|^2 - 2eg_z \left(s_w^2 - \frac{1}{2} N_{\tilde{l}1}{}^i N_{\tilde{l}1}^{\dagger i} \right) A_\mu Z^\mu |\tilde{\tau}|^2 \\ & + \frac{g^2}{2} N_{\tilde{l}1}{}^i N_{\tilde{l}1}^{\dagger i} W_\mu^+ W^{-\mu} |\tilde{\tau}|^2 \\ & + \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{\tau}^* \tilde{\tau} h^0 \left[-\frac{1}{2} (c_\alpha v_u + s_\alpha v_d) \left(g^2 N_{\tilde{l}1}{}^i N_{\tilde{l}1}^{\dagger i} + g'^2 \left(-N_{\tilde{l}1}{}^i N_{\tilde{l}1}^{\dagger i} + 2N_{\tilde{l}1}{}^{i+3} N_{\tilde{l}1}^{\dagger i+3} \right) \right) \right. \\ & + 2s_\alpha v_d \left(N_{\tilde{l}1}{}^i y^\dagger{}_i{}^k y_k{}^j N_{\tilde{l}1}^{\dagger j} + N_{\tilde{l}1}{}^{i+3} y_i{}^k y^\dagger{}_k{}^j N_{\tilde{l}1}^{\dagger j+3} \right) \\ & + c_\alpha \left(\mu^* N_{\tilde{l}1}{}^{i+3} y_i{}^j N_{\tilde{l}1}^{\dagger j} + h.c. \right) \\ & \left. + s_\alpha \left(N_{\tilde{l}1}{}^{i+3} a_i{}^j N_{\tilde{l}1}^{\dagger j} + h.c. \right) \right] \\ & + \tilde{\tau}^* \tilde{\tau} h^0{}^2 \left[-\frac{1}{8} g^2 (c_\alpha^2 - s_\alpha^2) N_{\tilde{l}1}{}^i N_{\tilde{l}1}^{\dagger i} - \frac{1}{8} g'^2 (c_\alpha^2 - s_\alpha^2) \left(-N_{\tilde{l}1}{}^i N_{\tilde{l}1}^{\dagger i} + 2N_{\tilde{l}1}{}^{i+3} N_{\tilde{l}1}^{\dagger i+3} \right) \right. \\ & - \frac{1}{2} s_\alpha^2 \left(N_{\tilde{l}1}{}^i y^\dagger{}_i{}^k y_k{}^j N_{\tilde{l}1}^{\dagger j} + N_{\tilde{l}1}{}^{i+3} y_i{}^k y^\dagger{}_k{}^j N_{\tilde{l}1}^{\dagger j+3} \right) \\ & + \left(\tilde{\tau}^* \bar{\tilde{\chi}} \left[P_L \left(\frac{\sqrt{2}}{2} g' N_{\tilde{l}1}{}^i N_{\tilde{G}1}{}^1 + \frac{\sqrt{2}}{2} g N_{\tilde{l}1}{}^i N_{\tilde{G}1}{}^2 + \frac{1}{2} N_{\tilde{l}1}{}^{j+3} y_j{}^i N_{\tilde{G}1}{}^4 \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + P_R \left(-\sqrt{2} g' N_{\tilde{l}1}{}^{i+3} N_{\tilde{G}1}{}^1 + \frac{1}{2} N_{\tilde{l}1}{}^i y^\dagger{}_i{}^j N_{\tilde{G}1}{}^4 \right) \right] e_{Di} + h.c. \right) \\ & + \left(\tilde{\tau}^* \bar{C}_\alpha P_L \nu_{Di} \left[-g N_{\tilde{l}1}{}^i U^\dagger{}_1{}^\alpha - \frac{1}{2} N_{\tilde{l}1}{}^{j+3} y_j{}^i U^\dagger{}_2{}^\alpha \right] + h.c. \right)\end{aligned}\quad (18)$$

3 Two-body state effective action

この章では式(18)のラグランジアンから得られる、非相対論的な2体状態の1ループ effective actionを導出していく。導出の方法としてまず、(i) $\tilde{\chi}, \tilde{\tau}$ 以外のすべての場について integrate out する。次に非相対論的な actionを得るために、(ii) $\tilde{\chi}, \tilde{\tau}$ の large momentum mode を integrate out する。そして次に、(iii) EWIMP の速度で(ii)で得られた action を展開する。最後に(iv)2体状態を表す補助場を導入し、(iii)で得られた action に対して補助場以外のすべての場について integrate out すればよい。

3.1 Integrating out all fields except $\tilde{\chi}, \tilde{\tau}$

まず最初にここでは $\tilde{\chi}, \tilde{\tau}$ 以外の場についてすべて integrate out していくことで1ループの effective actinoを得る。まずは A_μ について考える。式(18)の中で関連する項を抜き出すと、

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_A = -i \ln \int DA \exp i \left[\int d^4x \left(\frac{1}{2} A_\mu \partial^2 g^{\mu\nu} A_\nu + ie A_\mu \tilde{\tau}^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \tilde{\tau} \right. \right. \\ \left. \left. + e^2 A^2 |\tilde{\tau}|^2 - 2eg_z \left(s_w^2 - \frac{1}{2} N_{\tilde{l}1}^i N_{\tilde{l}}^{i-1} \right) A_\mu Z^\mu |\tilde{\tau}|^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (19)$$

となる。 A_μ について変数変換

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + i \int d^4y \mathcal{D}_{\mu\nu}^A(x-y) \mathcal{J}^\nu(y)$$

を行えば式(19)は

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_A = -i \ln \int DA \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x A_\mu (-\mathcal{L}_A^{\mu\nu}) A_\nu \right] + \frac{i}{2} \int d^4x d^4y \mathcal{J}^\mu(x) \mathcal{D}_{\mu\nu}^A(x-y) \mathcal{J}^\nu(y) \\ = -i \ln \text{Det}^{-\frac{1}{2}}(-\mathcal{L}_A^{\mu\nu}) + \frac{i}{2} \int d^4x d^4y \mathcal{J}^\mu(x) \mathcal{D}_{\mu\nu}^A(x-y) \mathcal{J}^\nu(y) \end{aligned} \quad (20)$$

と変形できる。ここで、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_A^{\mu\nu} \mathcal{D}_{\nu\rho}^A(x-y) &= (\partial^2 + 2e^2 |\tilde{\tau}|^2) g^{\mu\nu} \mathcal{D}_{\nu\rho}^A(x-y) = i\delta(x-y) \delta_\rho^\mu \\ \mathcal{J}^\mu(x) &= ie \tilde{\tau}^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \tilde{\tau} - 2eg_z \left(s_w^2 - \frac{1}{2} N_{\tilde{l}1}^i N_{\tilde{l}}^{i-1} \right) Z^\mu |\tilde{\tau}|^2 \\ J_A^\mu(x) &= ie \tilde{\tau}^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \tilde{\tau} \end{aligned}$$

と定義した。式(20)の右辺第1項目について詳しく評価していくと、

$$\begin{aligned} -i \ln \text{Det}^{-\frac{1}{2}}(-\mathcal{L}_A^{\mu\nu}) &= \frac{i}{2} \text{Tr} \ln(-\mathcal{L}_A^{\mu\nu}) \\ &= \frac{i}{2} \text{Tr} [\ln(-\partial^2 - 2e^2 |\tilde{\tau}|^2) g^{\mu\nu}] \\ &\equiv \frac{i}{2} \text{Tr} [\ln(A_0 + \delta A)] \\ &= \frac{i}{2} \text{Tr} [\ln A_0 (1 + A_0^{-1} \delta A)] \\ &= \frac{i}{2} \text{Tr} \left[\ln A_0 + A_0^{-1} \delta A - \frac{1}{2} A_0^{-1} \delta A A_0^{-1} \delta A \right] \\ &\sim ie^4 \text{tr} \int d^4x_1 d^4x_2 |\tilde{\tau}|^2(x_1) |\tilde{\tau}|^2(x_2) D_{\mu\nu}^A(x_1 - x_2) D^{A\nu\rho}(x_2 - x_1) \end{aligned} \quad (21)$$

と評価できる。最後の～においては1項目と2項目は考えたい diagram ではないため無視し、3項目のみ取り出した。ここで $D_{\mu\nu}^A(x-y)$ は光子のプロパゲーターで、

$$A_0^{-1} = iD_{\mu\nu}^A(x-y) = i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} e^{-iq(x-y)} \quad (22)$$

である。式 (20) の右辺第2項については展開の最低次で $\mathcal{D}_{\nu\rho}^A(x-y) \sim D_{\mu\nu}^A(x-y)$ となるので最終的に

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_A = & ie^4 \text{tr} \int d^4x_1 d^4x_2 |\tilde{\tau}|^2(x_1) |\tilde{\tau}|^2(x_2) D_{\mu\nu}^A(x_1 - x_2) D^{A\nu\rho}(x_2 - x_1) \\ & + \frac{i}{2} \int d^4x d^4y \mathcal{J}^\mu(x) D_{\mu\nu}^A(x-y) \mathcal{J}^\nu(y) \end{aligned} \quad (23)$$

となる。次に Z_μ についても式 (18)、(23) から Z_μ に関連する項を抜き出し、 A_μ の時と同様な計算をすると、

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_Z = & -i \ln \text{Det}^{-\frac{1}{2}}(-\mathcal{L}_Z^{\mu\nu}) \\ & + \frac{i}{2} \int d^4x d^4y J_Z^\mu(x) D_{\mu\nu}^Z(x-y) J_Z^\nu(y) \\ \sim & 2ie^2 g_z^2 \left(s_w^2 - \frac{1}{2} N_{\tilde{l}1}^i N_{\tilde{l}i}^1 \right)^2 \text{tr} \int d^4x_1 d^4x_2 |\tilde{\tau}|^2(x_1) |\tilde{\tau}|^2(x_2) D_{\mu\nu}^Z(x_1 - x_2) D^{A\nu\rho}(x_2 - x_1) \\ & + ig_z^4 \left(s_w^2 - \frac{1}{2} N_{\tilde{l}1}^i N_{\tilde{l}i}^1 \right)^4 \text{tr} \int d^4x_1 d^4x_2 |\tilde{\tau}|^2(x_1) |\tilde{\tau}|^2(x_2) D_{\mu\nu}^Z(x_1 - x_2) D^{Z\nu\rho}(x_2 - x_1) \\ & + \frac{i}{2} \int d^4x d^4y J_Z^\mu(x) D_{\mu\nu}^Z(x-y) J_Z^\nu(y) \end{aligned} \quad (24)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Z^{\mu\nu} = & \left(\partial^2 + m_Z^2 + 2g_z^2 \left(s_w^2 - \frac{1}{2} N_{\tilde{l}1}^i N_{\tilde{l}i}^1 \right)^2 |\tilde{\tau}|^2 \right. \\ & \left. + 4ie^2 g_z^2 \left(s_w^2 - \frac{1}{2} N_{\tilde{l}1}^i N_{\tilde{l}i}^1 \right)^2 \int d^4y |\tilde{\tau}|^2(x) D_{\mu\nu}^A(x-y) |\tilde{\tau}|^2(y) \right) g^{\mu\nu} \\ D_{\mu\nu}^Z(x-y) = & -i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{q^2 - m_Z^2 + i\epsilon} e^{-iq(x-y)} \\ J_Z^\mu(x) = & -ig_z \left(s_w^2 - \frac{1}{2} N_{\tilde{l}1}^i N_{\tilde{l}i}^1 \right) \tilde{\tau}^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \tilde{\tau} \end{aligned}$$

である。次に W^+, W^- についても同様の計算によって、

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_W = & \frac{i}{4} g^4 \left(N_{\tilde{l}1}^i N_{\tilde{l}i}^1 \right)^2 \text{tr} \int d^4x_1 d^4x_2 |\tilde{\tau}|^2(x_1) |\tilde{\tau}|^2(x_2) D_{\mu\nu}^W(x_1 - x_2) D^{W\nu\rho}(x_2 - x_1) \\ & + i \int d^4x d^4y J_W^\mu(x) D_{\mu\nu}^W(x-y) J_W^{\nu\dagger}(y) \end{aligned} \quad (25)$$

と計算できる。ここで、

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu}^W(x-y) = & -i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{q^2 - m_W^2 + i\epsilon} e^{-iq(x-y)} \\ J_W^\mu(x) = & -i \frac{\sqrt{2}}{2} g N_{\tilde{l}1}^i \tilde{\tau}^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \tilde{\nu}_i \\ J_W^{\mu\dagger}(x) = & -i \frac{\sqrt{2}}{2} g N_{\tilde{l}i}^1 \tilde{\nu}^{*\dagger} \overleftrightarrow{\partial}^\mu \tilde{\tau} \end{aligned}$$

である。続いて $\tilde{\nu}^{*i}, \tilde{\nu}_i$ についても同様の計算で、

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{\tilde{\nu}} = & 2ig^4 N_{\tilde{l}}^{\dagger i} N_{\tilde{l}1}^j N_{\tilde{l}}^{\dagger k} N_{\tilde{l}1}^l \text{tr} \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 \\ & \times \partial^\sigma \tilde{\tau}^*(x_1) \partial^\mu \tilde{\tau}(x_2) \partial^\nu \tilde{\tau}^*(x_3) \partial^\rho \tilde{\tau}(x_4) \\ & \times D^{\tilde{\nu}}_j{}^i(x_1 - x_2) D_{\mu\nu}^W(x_3 - x_2) D^{\tilde{\nu}}_l{}^k(x_3 - x_4) D_{\rho\sigma}^W(x_1 - x_4)\end{aligned}\quad (26)$$

となる。ここで、

$$D^{\tilde{\nu}}_i{}^j(x - y) = -i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{\delta_i^j}{q^2 - m_{\tilde{\nu}}^2 + i\epsilon} e^{-iq(x-y)}$$

である。次に e_D, \bar{e}_D についても同様で、

$$\mathcal{S}_e = i \int d^4x d^4y \tilde{\tau}^*(x) \tilde{\tau}(y) \bar{\chi}(x) [C_1^i P_L + C_2^i P_R] S^\tau(x - y)_i{}^j [C^\dagger_{1j} P_R + C^\dagger_{2j} P_L] \tilde{\chi}(y) \quad (27)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}S^\tau(x - y)_i{}^j &= i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{\not{q} \delta_i^j + m_e \not{e}_i{}^j}{q^2 - m_e^2 + i\epsilon} e^{-iq(x-y)} \\ C_1^i &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} g' N_{\tilde{l}1}^i N_{\tilde{G}1}^{-1} + \frac{\sqrt{2}}{2} g N_{\tilde{l}1}^i N_{\tilde{G}1}^{-2} + \frac{1}{2} N_{\tilde{l}1}^{j+3} y_j{}^i N_{\tilde{G}1}^{-4} \right) \\ C_2^i &= \left(-\sqrt{2} g' N_{\tilde{l}1}^{i+3} N_{\tilde{G}1}^{-1} + \frac{1}{2} N_{\tilde{l}1}^i y^\dagger_j{}^j N_{\tilde{G}1}^{-4} \right)\end{aligned}$$

である。 $\nu_D, \bar{\nu}_D$ についても

$$\mathcal{S}_{\tilde{\nu}} = i \int d^4x d^4y \tilde{\tau}^*(x) \tilde{\tau}(y) \bar{\tilde{C}}_\alpha(x) C^{i\alpha} P_L S^\nu(x - y)_i{}^j C^\dagger_{j\beta} P_R \tilde{C}^\beta(y) \quad (28)$$

となり、

$$\begin{aligned}S^\nu(x - y)_i{}^j &= i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{\not{q} \delta_i^j}{q^2 + i\epsilon} e^{-iq(x-y)} \\ C^{i\alpha} &= -g N_{\tilde{l}1}^i U^\dagger_1{}^\alpha - \frac{1}{2} N_{\tilde{l}1}^{j+3} y_j{}^i U^\dagger_2{}^\alpha\end{aligned}$$

で定義される。続いて $\bar{\tilde{C}}, \tilde{C}$ について計算すると

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{\tilde{C}} = & \frac{i}{2} \text{tr} \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 \tilde{\tau}^*(x_1) \tilde{\tau}(x_2) \tilde{\tau}^*(x_3) \tilde{\tau}(x_4) \\ & \times S^{\tilde{C}}(x_1 - x_2)_{\alpha}{}^{\beta} C^{i\alpha} P_L S^\nu(x_2 - x_3)_i{}^j C^\dagger_{j\beta} P_R S^{\tilde{C}}(x_3 - x_4)_\gamma{}^\delta C^{k\gamma} P_L S^\nu(x_4 - x_1)_k{}^l C^\dagger_{l\delta} P_R\end{aligned}\quad (29)$$

である。ここで、

$$S^{\tilde{C}}(x - y)_\alpha{}^\beta = i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{\not{q} + m_{C_\alpha}}{q^2 - m_{C_\alpha}^2 + i\epsilon} \delta_\alpha^\beta e^{-iq(x-y)}$$

と定義される。最後に h^0 について計算すると、

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{h^0} = & i C_{h^0}^{(4)2} \text{tr} \int d^4x_1 d^4x_2 |\tilde{\tau}|^2(x_1) |\tilde{\tau}|^2(x_2) D^{h^0}(x_1 - x_2) D^{h^0}(x_2 - x_1) \\ & - \frac{i}{2} \int d^4x d^4y J^{h^0}(x) D^{h^0}(x - y) J^{h^0}(y)\end{aligned}\quad (30)$$

となる。ここで、

$$D^{h^0}(x-y) = -i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 - m_{h^0}^2 + i\epsilon} e^{-iq(x-y)}$$

$$J^{h^0}(x) = |\tilde{\tau}(x)|^2 C_{h^0}$$

$$C_{h^0}^{(4)} = -\frac{1}{8}g^2(c_\alpha^2 - s_\alpha^2)N_{\tilde{l}1}{}^i N_{\tilde{l}}{}^{\dagger i}{}^1 - \frac{1}{8}g'^2(c_\alpha^2 - s_\alpha^2) \left(-N_{\tilde{l}1}{}^i N_{\tilde{l}}{}^{\dagger i}{}^1 + 2N_{\tilde{l}1}{}^{i+3} N_{\tilde{l}}{}^{\dagger i+3}{}^1 \right)$$

$$-\frac{1}{2}s_\alpha^2 \left(N_{\tilde{l}1}{}^i y^\dagger{}_i{}^k y_k{}^j N_{\tilde{l}}{}^{\dagger j}{}^1 + N_{\tilde{l}1}{}^{i+3} y_i{}^k y^\dagger{}_k{}^j N_{\tilde{l}}{}^{\dagger j+3}{}^1 \right)$$

$$C_{h^0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-\frac{1}{2}(c_\alpha v_u + s_\alpha v_d) \left(g^2 N_{\tilde{l}1}{}^i N_{\tilde{l}}{}^{\dagger i}{}^1 + g'^2 \left(-N_{\tilde{l}1}{}^i N_{\tilde{l}}{}^{\dagger i}{}^1 + 2N_{\tilde{l}1}{}^{i+3} N_{\tilde{l}}{}^{\dagger i+3}{}^1 \right) \right) \right.$$

$$+ 2s_\alpha v_d \left(N_{\tilde{l}1}{}^i y^\dagger{}_i{}^k y_k{}^j N_{\tilde{l}}{}^{\dagger j}{}^1 + N_{\tilde{l}1}{}^{i+3} y_i{}^k y^\dagger{}_k{}^j N_{\tilde{l}}{}^{\dagger j+3}{}^1 \right)$$

$$+ c_\alpha \left(\mu^* N_{\tilde{l}1}{}^{i+3} y_i{}^j N_{\tilde{l}}{}^{\dagger j}{}^1 + h.c. \right)$$

$$\left. + s_\alpha \left(N_{\tilde{l}1}{}^{i+3} a_i{}^j N_{\tilde{l}}{}^{\dagger j}{}^1 + h.c. \right) \right]$$

と定義される。以上の計算により effective action は

$$\mathcal{S}_{eff} = \int d^4 x \left[\frac{1}{2} \bar{\chi} (i\partial - m) \tilde{\chi} - \tilde{\tau}^* (\partial^2 + m_{\tilde{\tau}}^2) \tilde{\tau} \right] + \mathcal{S}'_A + \mathcal{S}_Z + \mathcal{S}'_W + \mathcal{S}_\nu + \mathcal{S}_e + \mathcal{S}_{\tilde{C}} + \mathcal{S}_{h^0} \quad (31)$$

となる。ここで、

$$\mathcal{S}'_A = ie^4 \text{tr} \int d^4 x_1 d^4 x_2 |\tilde{\tau}|^2(x_1) |\tilde{\tau}|^2(x_2) D_{\mu\nu}^A(x_1 - x_2) D^{A\nu\rho}(x_2 - x_1)$$

$$+ \frac{i}{2} \int d^4 x d^4 y J_A^\mu(x) D_{\mu\nu}^A(x-y) J_A^\nu(y) \quad (32)$$

$$\mathcal{S}'_W = \frac{i}{4} g^4 \left(N_{\tilde{l}1}{}^i N_{\tilde{l}}{}^{\dagger i}{}^1 \right)^2 \text{tr} \int d^4 x_1 d^4 x_2 |\tilde{\tau}|^2(x_1) |\tilde{\tau}|^2(x_2) D_{\mu\nu}^W(x_1 - x_2) D^{W\nu\rho}(x_2 - x_1) \quad (33)$$

である。

3.2 Integrating out large momentum modes of $\tilde{\chi}, \tilde{\tau}$

次に $\tilde{\chi}, \tilde{\tau}$ の large momentum mode を式 (31) で integrate out することで非相対論的な action に変形していく。やり方として $\tilde{\chi}, \tilde{\tau}$ を

$$\tilde{\chi}(x) = \tilde{\chi}(x)_R + \tilde{\chi}(x)_{NR}$$

$$\tilde{\chi}(x)_R = \int_R \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \phi^0(q) e^{-iqx} \quad (34)$$

$$\tilde{\chi}(x)_{NR} = \int_{NR} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \phi^0(q) e^{-iqx}$$

と相対論的な領域と非相対論的な領域に分割して考える。ここで、 ϕ^0 は $\tilde{\chi}$ のフーリエ係数である。積分範囲の R, NR の意味はそれぞれ相対論的な運動量の範囲と非相対論的な運動量の範囲で積分するという意味である。 $\tilde{\tau}$ についても式 (34) のように $\tilde{\tau}_{NR}, \tilde{\tau}_R$ の 2 つに分割する。まず最初に $\tilde{\chi}_R$ について integrate out することを考え

る。3.1 節で行ったことと同様に式 (31) から $\tilde{\chi}_R$ に関連する項を抜き出すと

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{\tilde{\chi}} = & \frac{1}{2} \int d^4x (\bar{\tilde{\chi}}(x)_R + \tilde{\chi}(x)_{NR}) (i\partial - m) (\tilde{\chi}(x)_R + \tilde{\chi}(x)_{NR}) \\
& + i \int d^4x d^4y \tilde{\tau}^*(x) \tilde{\tau}(y) \\
& \times (\bar{\tilde{\chi}}(x)_R + \tilde{\chi}(x)_{NR}) [C_1^i P_L + C_2^i P_R] S^\tau(x-y)_i{}^j [C^\dagger_{1j} P_R + C^\dagger_{2j} P_L] (\tilde{\chi}(y)_R + \tilde{\chi}(y)_{NR}) \\
\rightarrow & \frac{1}{2} \int d^4x \bar{\tilde{\chi}}(x)_{NR} (i\partial - m) \tilde{\chi}(x)_{NR} + \frac{1}{2} \int d^4x \bar{\tilde{\chi}}(x)_R (i\partial - m) \tilde{\chi}(x)_R \\
& + i \int d^4x d^4y \tilde{\tau}^*(x) \tilde{\tau}(y) \bar{\tilde{\chi}}(x)_{NR} [C_1^i P_L + C_2^i P_R] S^\tau(x-y)_i{}^j [C^\dagger_{1j} P_R + C^\dagger_{2j} P_L] \tilde{\chi}(y)_{NR} \\
& + i \int d^4x d^4y \tilde{\tau}^*(x) \tilde{\tau}(y) \bar{\tilde{\chi}}(x)_R [C_1^i P_L + C_2^i P_R] S^\tau(x-y)_i{}^j [C^\dagger_{1j} P_R + C^\dagger_{2j} P_L] \tilde{\chi}(y)_R
\end{aligned} \tag{35}$$

ここで、矢印のところで運動量保存的に排除される $\tilde{\chi}_R$ と $\tilde{\chi}_{NR}$ の交差項は無視した。これより $\tilde{\chi}$ のマヨラナ性に注意して integrate out すると

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{\tilde{\chi}_{NR}} = & -i \ln \int D\tilde{\chi}_R D\bar{\tilde{\chi}}_R \exp[i\mathcal{S}_{\tilde{\chi}}] \\
\sim & i \text{tr} \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 \tilde{\tau}(x_1) \tilde{\tau}^*(x_2) \tilde{\tau}(x_3) \tilde{\tau}^*(x_4) \\
& \times S^{\tilde{\chi}}(x_1 - x_2) [C_1^i P_L + C_2^i P_R] S^\tau(x_2 - x_3)_i{}^j [C^\dagger_{1j} P_R + C^\dagger_{2j} P_L] \\
& \times S^{\tilde{\chi}}(x_3 - x_4) [C_1^k P_L + C_2^k P_R] S^\tau(x_4 - x_1)_k{}^l [C^\dagger_{1l} P_R + C^\dagger_{2l} P_L]
\end{aligned} \tag{36}$$

と計算できる。続いて $\tilde{\tau}$ についても同様に計算すると最終的に得られる非相対論的 effective action \mathcal{S}_{NR} は

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{NR} = & \frac{1}{2} \int d^4x \bar{\chi}(x) (i\partial - m) \tilde{\chi}(x) - \int d^4x \tilde{\tau}^* (\partial^2 + m_{\tilde{\tau}}^2) \tilde{\tau} \\
& + \frac{i}{2} \int d^4x d^4y J_A^\mu(x) D_{\mu\nu}^A(x-y) J_A^\nu(y) \\
& + \frac{i}{2} \int d^4x d^4y J_Z^\mu(x) D_{\mu\nu}^Z(x-y) J_Z^\nu(y) \\
& - \frac{i}{2} \int d^4x d^4y J^{h^0}(x) D^{h^0}(x-y) J^{h^0}(y) \\
& + i \int d^4x d^4y \tilde{\tau}^*(x) \tilde{\tau}(y) \bar{\chi}(x) [C_1^i P_L + C_2^i P_R] S^\tau(x-y)_i^j [C^\dagger_{1j} P_R + C^\dagger_{2j} P_L] \tilde{\chi}(y) \\
& + ie^4 \text{tr} \int d^4x_1 d^4x_2 |\tilde{\tau}|^2(x_1) |\tilde{\tau}|^2(x_2) D_{\mu\nu}^A(x_1-x_2) D^{A\nu\rho}(x_2-x_1) \\
& + 2ie^2 g_z^2 \left(s_w^2 - \frac{1}{2} N_{\tilde{l}1}^i N_{\tilde{l}1}^{\dagger i} \right)^2 \text{tr} \int d^4x_1 d^4x_2 |\tilde{\tau}|^2(x_1) |\tilde{\tau}|^2(x_2) D_{\mu\nu}^Z(x_1-x_2) D^{A\nu\rho}(x_2-x_1) \\
& + ig_z^4 \left(s_w^2 - \frac{1}{2} N_{\tilde{l}1}^i N_{\tilde{l}1}^{\dagger i} \right)^4 \text{tr} \int d^4x_1 d^4x_2 |\tilde{\tau}|^2(x_1) |\tilde{\tau}|^2(x_2) D_{\mu\nu}^Z(x_1-x_2) D^{Z\nu\rho}(x_2-x_1) \\
& + \frac{i}{4} g^4 \left(N_{\tilde{l}1}^i N_{\tilde{l}1}^{\dagger i} \right)^2 \text{tr} \int d^4x_1 d^4x_2 |\tilde{\tau}|^2(x_1) |\tilde{\tau}|^2(x_2) D_{\mu\nu}^W(x_1-x_2) D^{W\nu\rho}(x_2-x_1) \\
& + i C_{h^0}^{(4)} \text{tr} \int d^4x_1 d^4x_2 |\tilde{\tau}|^2(x_1) |\tilde{\tau}|^2(x_2) D^{h^0}(x_1-x_2) D^{h^0}(x_2-x_1) \\
& + 2ig^4 N_{\tilde{l}1}^i N_{\tilde{l}1}^j N_{\tilde{l}1}^k N_{\tilde{l}1}^l \text{tr} \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 \partial^\sigma \tilde{\tau}^*(x_1) \partial^\mu \tilde{\tau}(x_2) \partial^\nu \tilde{\tau}^*(x_3) \partial^\rho \tilde{\tau}(x_4) \\
& \quad \times D_{\mu\nu}^W(x_3-x_2) D_{\mu\nu}^W(x_4-x_1) \\
& + i \text{tr} \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 \tilde{\tau}(x_1) \tilde{\tau}^*(x_2) \tilde{\tau}(x_3) \tilde{\tau}^*(x_4) \\
& \quad \times S^{\tilde{\chi}}(x_1-x_2) [C_1^i P_L + C_2^i P_R] S^\tau(x_2-x_3)_i^j [C^\dagger_{1j} P_R + C^\dagger_{2j} P_L] \\
& \quad \times S^{\tilde{\chi}}(x_3-x_4) [C_1^k P_L + C_2^k P_R] S^\tau(x_4-x_1)_k^l [C^\dagger_{1l} P_R + C^\dagger_{2l} P_L] \\
& - \frac{i}{2} \sum_{\phi,\phi'} a_\phi a_{\phi'} \text{tr} \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 D^{\tilde{\tau}}(x_1-x_2) \delta A_\phi(x_2,x_3) D^{\tilde{\tau}}(x_3-x_4) \delta A_{\phi'}(x_4,x_1) \\
& + \frac{i}{2} \text{tr} \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 \tilde{\tau}^*(x_1) \tilde{\tau}(x_2) \tilde{\tau}^*(x_3) \tilde{\tau}(x_4) \\
& \quad \times S^{\tilde{C}}(x_1-x_2)_\alpha^\beta C^{i\alpha} P_L S^\nu(x_2-x_3)_i^j C_{j\beta}^\dagger P_R S^{\tilde{C}}(x_3-x_4)_\gamma^\delta C^{k\gamma} P_L S^\nu(x_4-x_1)_k^l C_{l\delta}^\dagger P_R \quad (37)
\end{aligned}$$

ここで ϕ についての和は $\phi = A, Z, h^0$ についてとり、 $a_\phi, \delta A_\phi$ はそれぞれ

$$a_A = \frac{ie^2}{2} \quad a_Z = \frac{ig_z^2}{2} \left(s_w^2 - \frac{1}{2} N_{\tilde{l}1}^i N_{\tilde{l}1}^{\dagger i} \right)^2 \quad a_{h^0} = \frac{iC_{h^0}^2}{2} \quad (38)$$

$$\begin{aligned}
\delta A_A(x,y) &= \overleftrightarrow{\partial}^\mu \tilde{\tau}(x) (D_{\mu\nu}^A(x-y) + D_{\mu\nu}^A(y-x)) \tilde{\tau}^*(y) \overleftrightarrow{\partial}^\nu \\
\delta A_Z(x,y) &= \overleftrightarrow{\partial}^\mu \tilde{\tau}(x) (D_{\mu\nu}^Z(x-y) + D_{\mu\nu}^Z(y-x)) \tilde{\tau}^*(y) \overleftrightarrow{\partial}^\nu \\
\delta A_{h^0}(x,y) &= \tilde{\tau}(x) (D^{h^0}(x-y) + D^{h^0}(y-x)) \tilde{\tau}^*(y) \quad (39)
\end{aligned}$$

のように定義してある。 $D^{\tilde{\tau}}$ は $\tilde{\tau}$ のプロパゲーターで

$$D^{\tilde{\tau}}(x-y) = -i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 - m_{\tilde{\tau}}^2 + i\epsilon} e^{-iq(x-y)}$$

と定義される。また式 (37) においては $\tilde{\chi}, \tilde{\tau}$ の NR の記号は全て省略してある。以降の議論でも NR の記号は省略して書く。

3.3 Nonrelativistic expansion of action

この節では式 (37) で得られた action を EWIMP の速度で展開していく。この展開にあたっては 4 成分スピンノルよりも 2 成分スピンノルで議論したほうが便利なので 2 成分スピンノル ζ, η, ξ を以下のように

$$\tilde{\chi} = \begin{pmatrix} e^{-imt}\zeta + ie^{imt}\frac{\vec{\nabla} \cdot \sigma}{2m}\zeta^c \\ e^{imt}\zeta^c - ie^{-imt}\frac{\vec{\nabla} \cdot \sigma}{2m}\zeta \end{pmatrix} \quad \tilde{\tau} = \frac{1}{\sqrt{2m}}\eta e^{-imt} + \frac{1}{\sqrt{2m}}\xi e^{imt} \quad (40)$$

$$f(x) = \int_{NR} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \tilde{f}(k) e^{-ikx}, \quad (f = \zeta, \eta, \xi), \quad k^0 = \mathcal{O}(mv^2), \quad \vec{k} = \mathcal{O}(mv) \quad (41)$$

と定義する。ここで、 ζ^c は ζ の荷電共役であり、 $\zeta^c = -i\sigma^2\zeta^{\dagger T}$ である。そして以下では非相対論的な効果を扱いたいので γ 行列は dirac representation で計算していく。まずは運動項を計算する。 $\zeta^{\dagger}\zeta^c = -\zeta^{\dagger}\zeta$ などに注意して、高次の項を無視すると、

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{K.T.} &= \frac{1}{2} \int d^4 x \bar{\chi}(x) (i\partial - m) \tilde{\chi}(x) - \int d^4 x \tilde{\tau}^* (\partial^2 + m_{\tilde{\tau}}^2) \tilde{\tau} \\ &= \int d^4 x \left[\zeta^{\dagger} \left(i\partial_0 + \frac{\nabla^2}{2m} \right) \zeta + \eta^* \left(i\partial_0 + \frac{\nabla^2}{2m} - \delta m \right) \eta - \xi^* \left(i\partial_0 - \frac{\nabla^2}{2m} + \delta m \right) \xi \right] \end{aligned} \quad (42)$$

と計算される。ここで δm は

$$\delta m = \frac{m_{\tilde{\tau}}^2 - m^2}{2m} \quad (43)$$

で定義される。

次にポテンシャルの項（式 (37) で tr ではない項）を計算していく。 $\tilde{\tau}^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \tilde{\tau} \sim -i(\eta^* \eta \delta_0^\mu - \xi^* \xi \delta_0^\mu)$ に注意してまずは光子に関する部分を計算する。計算すると、

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{NR}^A &= \frac{i}{2} \int d^4 x d^4 y J_A^\mu(x) D_{\mu\nu}^A(x-y) J_A^\nu(y) \\ &= \frac{ie^2}{2} \int d^4 x d^4 y (\eta^* \eta - \xi^* \xi)(x) (-i) \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + i\epsilon} e^{-iq(x-y)} (\eta^* \eta - \xi^* \xi)(y) \end{aligned} \quad (44)$$

となる。ここで、 η, ξ をフーリエ変換すると q が η, ξ の運動量の差に比例することが分かるので

$$q^2 \sim -\mathbf{q}^2$$

と近似してもよいことになり、式 (44) の $d^4 q$ 積分を実行すると

$$\mathcal{S}_{NR}^A = -\frac{1}{2} \alpha \int d^4 x d^4 y \frac{\delta(x^0 - y^0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} (\eta^*(x)\eta(x)\eta^*(y)\eta(y) + \xi^*(x)\xi(x)\xi^*(y)\xi(y) - 2\eta^*(x)\eta(x)\xi^*(y)\xi(y)) \quad (45)$$

と計算できる。同様の計算で Z, ヒッグス、neutralino に関する項は計算することができて、結果は

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{NR}^Z &= -\frac{g_z^2}{2} \left(s_w^2 - \frac{1}{2} N_{\tilde{l}1}^i N_{\tilde{l}1}^{\dagger i} \right)^2 \\ &\times \int d^4 x d^4 y \frac{e^{-m_z r}}{4\pi} \frac{\delta(x^0 - y^0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} (\eta^*(x)\eta(x)\eta^*(y)\eta(y) + \xi^*(x)\xi(x)\xi^*(y)\xi(y) - 2\eta^*(x)\eta(x)\xi^*(y)\xi(y)) \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{NR}^{h^0} &= \frac{1}{2} C_{h^0}^2 \int d^4 x d^4 y \frac{e^{-m_{h^0} r}}{4\pi} \frac{\delta(x^0 - y^0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \frac{1}{(2m)^2} \\ &\times \left(|\eta(x)|^2 + |\xi(x)|^2 + \eta^*(x)\xi(x)e^{2imx^0} + \xi^*(x)\eta(x)e^{-2imx^0} \right) \\ &\times \left(|\eta(y)|^2 + |\xi(y)|^2 + \eta^*(y)\xi(y)e^{2imy^0} + \xi^*(y)\eta(y)e^{-2imy^0} \right) \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{NR}^{neutralino} &= \int d^4 x d^4 y \frac{e^{-m_{e_i} r}}{16\pi mr} \frac{\delta(x^0 - y^0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} (C_1^i m_{e_i}{}^j C_{2j}^\dagger - C_2^i m_{e_i}{}^j C_{1j}^\dagger) \\ &\times \left(\eta^*(x)\zeta^{c\dagger}(x)\xi(y)\zeta(y) - \xi^*(x)\zeta^\dagger(x)\eta(y)\zeta^c(y) \right) \end{aligned} \quad (48)$$

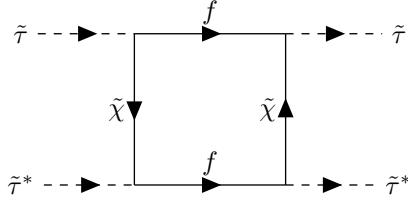


図 8: 式 (37) の下から 3 項目の表す Feynman diagram(TicZ-FeynHand[19] を用いた)

と計算される。式 (45) ~ (47) で $\eta^*(x)\eta(x)\xi^*(y)\xi(y)$ の項のみ必要になるので最終的にポテンシャル項をまとめると、

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{Pot.} &= \int d^4x d^4y \delta(x^0 - y^0) \left[\frac{\alpha}{r} + g_z^2 \left(s_w^2 - \frac{1}{2} N_{\bar{l}1}^i N_{\bar{l}1}^{i\dagger} \right)^2 \frac{e^{-m_z r}}{4\pi r} + C_{h^0}^2 \frac{e^{-m_{h^0} r}}{8\pi m^2} \right] \eta^*(x)\eta(x)\xi^*(y)\xi(y) \\
&\quad + \int d^4x d^4y \frac{e^{-m_{e_i} r} \delta(x^0 - y^0)}{16\pi m r} (C_1^i m_{ei}^j C_{2j}^\dagger - C_2^i m_{ei}^j C_{1j}^\dagger) \\
&\quad \times (\eta^*(x)\zeta^{c\dagger}(x)\xi(y)\zeta(y) - \xi^*(x)\zeta^\dagger(x)\eta(y)\zeta^c(y)) \\
&\equiv \int d^4x d^4y \delta(x^0 - y^0) \left[\mathcal{S}_{pot.}^{(1)} \eta^*(x)\eta(x)\xi^*(y)\xi(y) \right. \\
&\quad \left. + \mathcal{S}_{pot.}^{(2)} (\eta^*(x)\zeta^{c\dagger}(x)\xi(y)\zeta(y) - \xi^*(x)\zeta^\dagger(x)\eta(y)\zeta^c(y)) \right] \tag{49}
\end{aligned}$$

となる。

最後に tr 部分から得られる imaginary part を計算する。この項により EWIMP が終状態の標準模型の粒子へ崩壊することが可能になる。まずは式 (37) の下から 3 項目を計算する。diagram 的に書くと 図 1 のようになる。この diagram の虚部を計算するために optical theorem[18] を用いて図 1 の diagram を半分に切ったような diagram を計算する。ここから先では切られる前の元の diagram を \mathcal{M} 、切った後の diagram を M として計算する。

$$\mathcal{M} = \begin{array}{c} \text{Diagram shown in Figure 8} \end{array} \rightarrow M = \begin{array}{c} \text{Diagram shown in Figure 8} \end{array} \tag{50}$$

$$\begin{aligned}
iM &= i\bar{u}(k_2)^j (C_{1j}^\dagger P_R + C_{2j}^\dagger P_L) \frac{i(\not{q} + m)}{q^2 - m^2 + i\epsilon} (C_1^i P_L + C_2^i P_R) v(k_1)_i \\
|M|^2 &= \bar{u}(k_2)^j (C_{1j}^\dagger P_R + C_{2j}^\dagger P_L) \frac{\not{q} + m}{q^2 - m^2 + i\epsilon} (C_1^i P_L + C_2^i P_R) v(k_1)_i \\
&\quad \times \bar{v}(k_1)^l (C_{1l}^\dagger P_R + C_{2l}^\dagger P_L) \frac{\not{q} + m}{q^2 - m^2 + i\epsilon} (C_1^k P_L + C_2^k P_R) u(k_2)_k \\
&= \frac{1}{4} \text{tr} \left[\frac{\not{q} + m}{q^2 - m^2 + i\epsilon} (C_1^i P_L + C_2^i P_R) (\not{k}_1 \delta_i^j - m_{ei}^j) (C_{1j}^\dagger P_R + C_{2j}^\dagger P_L) \right. \\
&\quad \times \left. \frac{\not{q} + m}{q^2 - m^2 + i\epsilon} (C_1^k P_L + C_2^k P_R) (\not{k}_2 \delta_k^l + m_{ek}^l) (C_{1l}^\dagger P_R + C_{2l}^\dagger P_L) \right] \\
&= \frac{1}{4} \frac{1}{(q^2 - m^2)^2} [4(|C_1|^2 + |C_2|^2) q^\mu k_1^\nu q^\rho k_2^\sigma (g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} - g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}) \\
&\quad + 2mq \cdot k_1 (m_c^\dagger |C_1|^2 + m_c |C_2|^2) - 4q^2 m_c m_c^\dagger \\
&\quad - 2mq \cdot k_2 (m_c |C_1|^2 + m_c^\dagger |C_2|^2) + 2mq \cdot k_1 (m_c |C_1|^2 + m_c^\dagger |C_2|^2) \\
&\quad + 4m^2 k_1 \cdot k_2 |C_1|^2 |C_2|^2 - 2mq \cdot k_2 (m_c^\dagger |C_1|^2 + m_c |C_2|^2)] \tag{51}
\end{aligned}$$

ここで $m_c = C_1^i m_{ei}^j C_{2j}^\dagger$ であり、重心系をとると、 p_1, p_2, k_1, k_2 はそれぞれ

$$p_1 = (m, -pe_z), \quad p_2 = (m, pe_z)$$

$$k_1 = (E, -k \sin \theta, 0, -k \cos \theta), \quad k_2 = (E, k \sin \theta, 0, k \cos \theta)$$

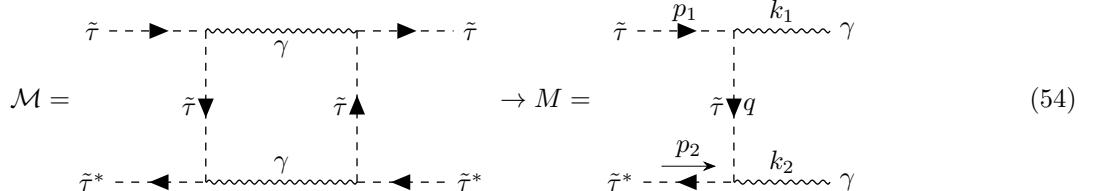
と置けるので、おおもとの diagram の虚部は

$$\begin{aligned} Im\mathcal{M} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{k_1}} \frac{1}{2E_{k_2}} |M|^2 (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 - p_1 - p_2) \\ &= \frac{1}{16\pi} \int dE \sqrt{1 - m_e^2/E^2} |M|^2 \delta(E - m) \\ &= \frac{1}{16\pi} \frac{m^2(1 - m_e^2/m^2)^{3/2}}{(2m^2 - m_e^2)^2} [(|C_1|^2 + |C_2|^2)(m_e^2 + m(m_c + m_c^\dagger)) + m_c m_c^\dagger + m^2 |C_1|^2 |C_2|^2] \end{aligned} \quad (52)$$

と書ける。これより action におすすと

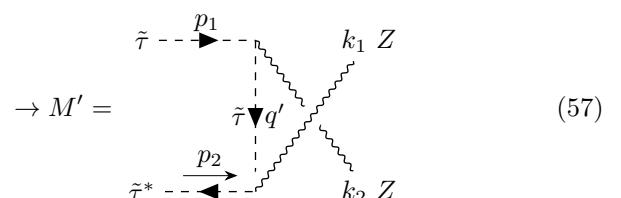
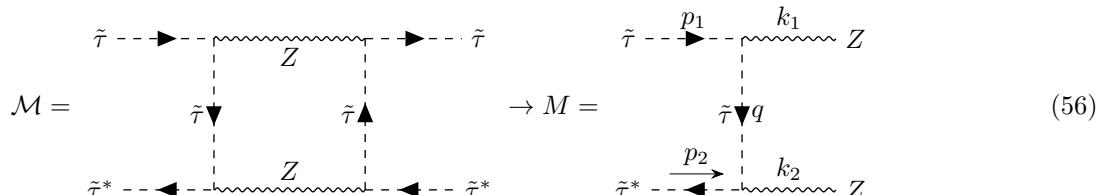
$$\begin{aligned} S_{\tilde{\chi}} &= \frac{i}{16\pi} \frac{(1 - m_e^2/m^2)^{3/2}}{(2m^2 - m_e^2)^2} \int d^4x \eta^*(x) \eta(x) \xi^*(x) \xi(x) \\ &\times [(|C_1|^2 + |C_2|^2)(m_e^2 + m(m_c + m_c^\dagger)) + m_c m_c^\dagger + m^2 |C_1|^2 |C_2|^2] \\ &\equiv \Gamma_{e_i e_i} \int d^4x \eta^*(x) \eta(x) \xi^*(x) \xi(x) \end{aligned} \quad (53)$$

次に式 (37) の ϕ の和の部分について計算する。まずは $\phi = A$ の光子が回る場合を考えていく。先ほどと同じように計算すると、



$$\begin{aligned} iM &= i(-4e^2) g^{\mu\nu} \partial_\mu \tilde{\tau} \epsilon_\nu g^{\mu'\nu'} \partial_{\mu'} \tilde{\tau}^* \epsilon_{\nu'} \frac{-i}{q^2 - m_{\tilde{\tau}}^2 + i\epsilon} \\ &\sim \partial_0 \tilde{\tau} \epsilon_0 \partial_0 \tilde{\tau}^* \epsilon_0 \end{aligned} \quad (55)$$

ここで ϵ_μ は光子の偏極ベクトルである。光子の場合は横波のみなので式 (55) の寄与は 0 となる。従って、 ϕ が光子以外の場合のみ考えればいいことになる。まず最初に Z ボソンが回る場合を考えると



の 2 つの diagram を計算する必要がある。計算すると、

$$iM \sim 4g_z^2 \left(s_w^2 - \frac{1}{2} N_{\tilde{l}1}^i N_{\tilde{l}}^{i1} \right)^2 \partial_0 \tilde{\tau} \epsilon_0^{(Z)}(k_1) \partial_0 \tilde{\tau}^* \epsilon_0^{(Z)}(k_2) \frac{1}{q^2 - m_{\tilde{\tau}}^2} \quad (58)$$

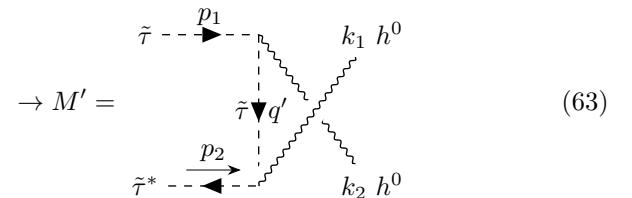
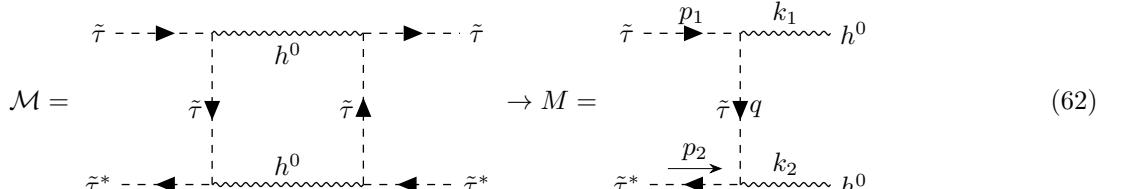
$$iM' \sim 4g_z^2 \left(s_w^2 - \frac{1}{2} N_{\tilde{l}1}^i N_{\tilde{l}}^{i1} \right)^2 \partial_0 \tilde{\tau} \epsilon_0^{(Z)}(k_1) \partial_0 \tilde{\tau}^* \epsilon_0^{(Z)}(k_2) \frac{1}{q'^2 - m_{\tilde{\tau}}^2} \quad (59)$$

である。ここで、 $\epsilon_\mu^{(Z)}$ は Z ポソンの偏極ベクトルである。これを重心系で計算し、おおもとの diagram の虚部から action にやきなおすと

$$\begin{aligned} Im\mathcal{M} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{k_1}} \frac{1}{2E_{k_2}} |M + M'|^2 (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 - p_1 - p_2) \\ &= \frac{4g_z^4 \left(s_w^2 - \frac{1}{2} N_{\tilde{l}1}^i N_{\tilde{l}}^{i1} \right)^4 m^6}{\pi m_z^4} \frac{\left(1 - \frac{m_z^2}{m^2} \right)^{5/2}}{(m^2 + m_{\tilde{\tau}}^2 - m_z^2)^2} \int d^4 x \eta^*(x) \eta(x) \xi^*(x) \xi(x) \end{aligned} \quad (60)$$

$$\rightarrow \mathcal{S}_Z = \frac{2ig_z^4 \left(s_w^2 - \frac{1}{2} N_{\tilde{l}1}^i N_{\tilde{l}}^{i1} \right)^4 m^6}{\pi m_z^4} \frac{\left(1 - \frac{m_z^2}{m^2} \right)^{5/2}}{(m^2 + m_{\tilde{\tau}}^2 - m_z^2)^2} \int d^4 x \eta^*(x) \eta(x) \xi^*(x) \xi(x) \quad (61)$$

となる。次にヒッグスが回る場合も同様に計算すると、



$$iM = C_{h^0}^2 \frac{1}{q^2 - m_{\tilde{\tau}}^2} \quad (64)$$

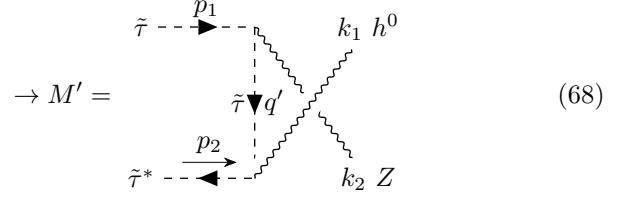
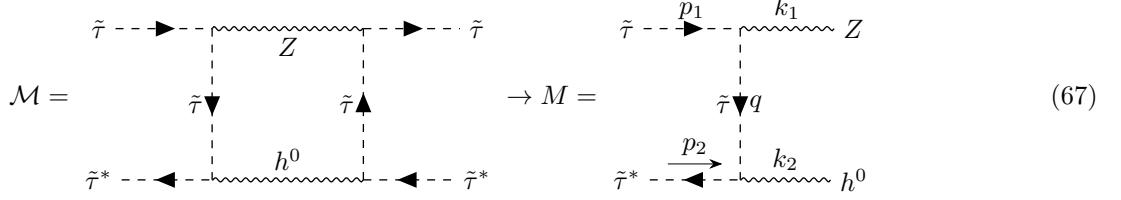
$$iM' = C_{h^0}^2 \frac{1}{q'^2 - m_{\tilde{\tau}}^2} \quad (65)$$

$$\begin{aligned} Im\mathcal{M} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{k_1}} \frac{1}{2E_{k_2}} |M + M'|^2 (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 - p_1 - p_2) \\ &= \frac{C_{h^0}^4}{2\pi} \sqrt{1 - \frac{m_{h^0}^2}{m^2}} \frac{1}{(m^2 + m_{\tilde{\tau}}^2 - m_{h^0}^2)^2} \end{aligned}$$

従って、

$$\mathcal{S}_{h^0} = \frac{iC_{h^0}^4}{4\pi m^2} \sqrt{1 - \frac{m_{h^0}^2}{m^2}} \frac{1}{(m^2 + m_{\tilde{\tau}}^2 - m_{h^0}^2)^2} \int d^4 x \eta^*(x) \eta(x) \xi^*(x) \xi(x) \quad (66)$$

となる。 ϕ の和の部分の最後にヒッグスと Z ボソンが回る場合を考える。計算していくと、

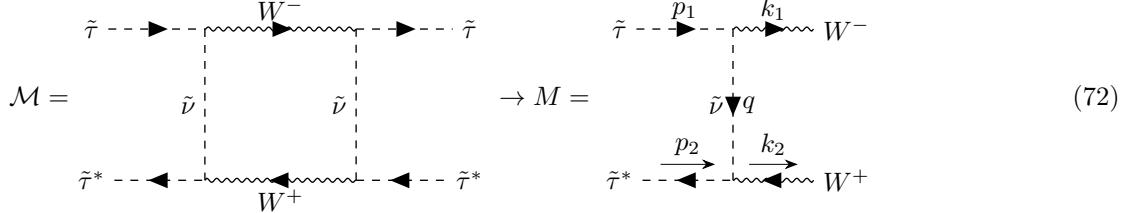


$$iM \sim 2ig_z \left(s_w^2 - \frac{1}{2} N_{\bar{l}1}^i N_{\bar{l}i}^1 \right) C_{h^0} \partial_0 \tilde{\tau} \tilde{\tau}^* \epsilon_0^{(Z)}(k_1) \frac{1}{q^2 - m_{\tilde{\tau}}^2} \quad (69)$$

$$iM' \sim 2ig_z \left(s_w^2 - \frac{1}{2} N_{\bar{l}1}^i N_{\bar{l}i}^1 \right) C_{h^0} \partial_0 \tilde{\tau} \tilde{\tau}^* \epsilon_0^{(Z)}(k_2) \frac{1}{q'^2 - m_{\tilde{\tau}}^2} \quad (70)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \mathcal{S}_{Zh^0} &= \frac{16ig_z^2 \left(s_w^2 - \frac{1}{2} N_{\bar{l}1}^i N_{\bar{l}i}^1 \right)^2 C_{h^0}^2 m}{\pi m_z^2} \left(\left(\frac{4m^2 - m_z^2 - m_{h^0}^2}{4m} \right)^2 - \left(\frac{m_z m_{h^0}}{2m} \right)^2 \right)^{3/2} \\ &\times \frac{1}{4m^2 - m_z^2 + m_{h^0}^2} \frac{1}{(2m^2 + 2m_{\tilde{\tau}}^2 - m_z^2 - m_{h^0}^2)^2} \int d^4x \eta^*(x) \eta(x) \xi^*(x) \xi(x) \\ &\equiv \Gamma_{Zh^0} \int d^4x \eta^*(x) \eta(x) \xi^*(x) \xi(x) \end{aligned} \quad (71)$$

で action が書ける。次に式 (37) の下から 4 番目の項である $W, \tilde{\nu}$ が回る diagram を計算していく。同じやり方で



$$iM \sim 2g^2 N_{\bar{l}1}^i N_{\bar{l}i}^1 \partial_0 \tilde{\tau} \epsilon_0^{(W^+)}(k_1) \partial_0 \tilde{\tau}^* \epsilon_0^{(W^-)}(k_2) \frac{1}{q^2 - m_{\tilde{\nu}}^2} \quad (73)$$

$$\rightarrow \mathcal{S}_W = \frac{ig^4 (N_{\bar{l}1}^i N_{\bar{l}i}^1)^2 m^6}{8\pi m_W^4} \left(1 - \frac{m_W^2}{m^2} \right)^{5/2} \frac{1}{(m^2 + m_{\tilde{\nu}}^2 - m_W^2)^2} \int d^4x \eta^*(x) \eta(x) \xi^*(x) \xi(x) \quad (74)$$

となる。続いて式 (37) の一番下の項である \tilde{C}, ν が回る diagram を計算する。

$$\mathcal{M} = \begin{array}{c} \tilde{\tau} \xrightarrow{\quad} \text{---} \xrightarrow{\nu} \text{---} \xrightarrow{\quad} \tilde{\tau} \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \tilde{C} \quad \tilde{C} \end{array} \rightarrow M = \begin{array}{c} \tilde{\tau} \xrightarrow{p_1} \text{---} \xrightarrow{k_1} \nu \\ | \quad | \quad | \\ \tilde{C} \quad q \end{array} \quad (75)$$

$$iM = i\bar{u}(k_2)^j C_{j\beta}^\dagger P_R \frac{\not{q} + m_{C_\alpha}}{q^2 - m_{C_\alpha}^2 + i\epsilon} \delta_\alpha^\beta C^{i\alpha} P_L v(k_1)_i \quad (76)$$

$$\rightarrow \mathcal{S}_\nu = \frac{(C^{i\alpha} C_{i\alpha}^\dagger)^2}{32\pi} \frac{m_{C_\alpha}^2}{(m^2 + m_{C_\alpha}^2)^2} \int d^4x \eta^*(x) \eta(x) \xi^*(x) \xi(x)$$

$$\equiv \Gamma_{\nu_i \nu_i} \int d^4x \eta^*(x) \eta(x) \xi^*(x) \xi(x) \quad (77)$$

最後に式 (37) の tr 部分の最初の 1~5 項目の虚部を計算していく。まず 1 項目について optical theorem を用いて同様に計算する。

$$\mathcal{M} = \begin{array}{c} \tilde{\tau} \xrightarrow{\quad} \text{---} \xrightarrow{\gamma} \text{---} \xrightarrow{\quad} \tilde{\tau} \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \tilde{\tau}^* \quad \gamma \quad \gamma \quad \tilde{\tau}^* \end{array} \rightarrow M = \begin{array}{c} \tilde{\tau} \xrightarrow{p_1} \text{---} \xrightarrow{k_1} \gamma \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \tilde{\tau}^* \quad p_2 \quad k_2 \quad \gamma \end{array} \quad (78)$$

の diagram を計算すればよく、計算し action になおすと、

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_A^{(4)} &= i \frac{e^4}{8\pi m^2} \int d^4x \eta^*(x) \eta(x) \xi^*(x) \xi(x) \\ &\equiv \Gamma_{\gamma\gamma} \int d^4x \eta^*(x) \eta(x) \xi^*(x) \xi(x) \end{aligned} \quad (79)$$

となる。ここで今までの計算と違い symmetry factor $1/2$ をかけなければならないことに注意する。同様に式 (37) の tr 部分の上から順に

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{AZ}^{(4)} &= i \frac{e^2 g_z^2 \left(s_w^2 - \frac{1}{2} N_{\tilde{l}1}^i N_{\tilde{l}i}^{\dagger 1} \right)^2}{4\pi m^2} \left(1 - \frac{m_z^2}{4m^2} \right) \int d^4x \eta^*(x) \eta(x) \xi^*(x) \xi(x) \\ &\equiv \Gamma_{\gamma Z^0} \int d^4x \eta^*(x) \eta(x) \xi^*(x) \xi(x) \end{aligned} \quad (80)$$

$$\mathcal{S}_Z^{(4)} = i \frac{g_z^4 \left(s_w^2 - \frac{1}{2} N_{\tilde{l}1}^i N_{\tilde{l}i}^{\dagger 1} \right)^4}{8\pi m^2} \sqrt{1 - \frac{m_z^2}{m^2}} \int d^4x \eta^*(x) \eta(x) \xi^*(x) \xi(x) \quad (81)$$

$$\mathcal{S}_W^{(4)} = i \frac{g^4 (N_{\tilde{l}1}^i N_{\tilde{l}i}^{\dagger 1})^4}{16\pi m^2} \sqrt{1 - \frac{m_W^2}{m^2}} \int d^4x \eta^*(x) \eta(x) \xi^*(x) \xi(x) \quad (82)$$

$$\mathcal{S}_{h^0}^{(4)} = i \frac{C_{h^0}^{(4)4}}{32\pi m^2} \sqrt{1 - \frac{m_{h^0}^2}{m^2}} \int d^4x \eta^*(x) \eta(x) \xi^*(x) \xi(x) \quad (83)$$

と計算できる。式 (61), (81)、式 (74), (82)、式 (66), (83) をまとめたものをそれぞれ

$$(61) + (81) \equiv \Gamma_{Z^0 Z^0} \int d^4x \eta^*(x) \eta(x) \xi^*(x) \xi(x) \quad (84)$$

$$(74) + (82) \equiv \Gamma_{W^+ W^-} \int d^4x \eta^*(x) \eta(x) \xi^*(x) \xi(x) \quad (85)$$

$$(66) + (83) \equiv \Gamma_{h^0 h^0} \int d^4x \eta^*(x) \eta(x) \xi^*(x) \xi(x) \quad (86)$$

と定義する。最終的に action の虚部をまとめると、

$$\mathcal{S}_{Im.} = \int d(xy) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \Gamma \eta^*(x) \eta(x) \xi^*(x) \xi(x) \quad (87)$$

ここで、 Γ は

$$\Gamma = \Gamma_{e_i e_i} + \Gamma_{\gamma\gamma} + \Gamma_{\gamma Z^0} + \Gamma_{Z^0 Z^0} + \Gamma_{Z^0 h^0} + \Gamma_{h^0 h^0} + \Gamma_{W^+ W^-} + \Gamma_{\nu_i \nu_i} \quad (88)$$

である。

以上の計算で非相対論的な effective action \mathcal{S}_{NR} は式 (42), (49), (87) より

$$\mathcal{S}_{NR} = \mathcal{S}_{K.T.} + \mathcal{S}_{Pot.} + \mathcal{S}_{Im.} \quad (89)$$

と最終的に書ける。

3.4 Two-body state effective action

最後にやることは式 (89) の action を $\tilde{\chi}\tilde{\chi}$, $\tilde{\tau}\tilde{\tau}$ の 2 体状態を表す補助場 $\sigma_{\tilde{\chi}}$, $\sigma_{\tilde{\tau}}$ を導入し、それらの補助場以外を integrate out することである。これを実現するために

$$\begin{aligned} 1 &= \int D\sigma_{\tilde{\tau}} Ds_{\tilde{\tau}}^\dagger \exp \left[\frac{i}{2} \int (xy) \sigma_{\tilde{\tau}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) (s_{\tilde{\tau}}^\dagger(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) - i\eta^*(t, \mathbf{x}) \xi(t, \mathbf{y})) \right] \\ 1 &= \int D\sigma_{\tilde{\tau}}^\dagger Ds_{\tilde{\tau}} \exp \left[\frac{i}{2} \int (xy) \sigma_{\tilde{\tau}}^\dagger(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) (s_{\tilde{\tau}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) - i\xi^*(t, \mathbf{y}) \eta(t, \mathbf{x})) \right] \\ 1 &= \int D\sigma_{\tilde{\chi}} Ds_{\tilde{\chi}}^\dagger \exp \left[\frac{i}{2} \int (xy) \sigma_{\tilde{\chi}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \left(s_{\tilde{\chi}}^\dagger(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) - \frac{1}{2} \zeta^\dagger(t, \mathbf{x}) \zeta^c(t, \mathbf{y}) \right) \right] \\ 1 &= \int D\sigma_{\tilde{\chi}}^\dagger Ds_{\tilde{\chi}} \exp \left[\frac{i}{2} \int (xy) \sigma_{\tilde{\chi}}^\dagger(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \left(s_{\tilde{\chi}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) - \frac{1}{2} \zeta^{c\dagger}(t, \mathbf{y}) \zeta(t, \mathbf{x}) \right) \right] \end{aligned}$$

を式 (89) に挿入し、 $\sigma_{\tilde{\chi}}$, $\sigma_{\tilde{\tau}}$ 以外で integrate out すれば Two-body state effective action \mathcal{S}^{II} が得られる。実際に計算すると、

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}^{II} = & -i \ln \int Ds_{\tilde{\tau}}^\dagger Ds_{\tilde{\tau}} Ds_{\tilde{\chi}}^\dagger Ds_{\tilde{\chi}} D\zeta^\dagger D\zeta D\eta^* D\eta D\xi^* D\xi \\
& \times \exp \left[\frac{i}{2} \int (xy) \sigma_{\tilde{\tau}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \left(s_{\tilde{\tau}}^\dagger(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) - i\eta^*(t, \mathbf{x})\xi(t, \mathbf{y}) \right) \right] \\
& \times \exp \left[\frac{i}{2} \int (xy) \sigma_{\tilde{\tau}}^\dagger(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \left(s_{\tilde{\tau}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) - i\xi^*(t, \mathbf{y})\eta(t, \mathbf{x}) \right) \right] \\
& \times \exp \left[\frac{i}{2} \int (xy) \sigma_{\tilde{\chi}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \left(s_{\tilde{\chi}}^\dagger(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) - \frac{1}{2}\zeta^\dagger(t, \mathbf{x})\zeta^c(t, \mathbf{y}) \right) \right] \\
& \times \exp \left[\frac{i}{2} \int (xy) \sigma_{\tilde{\chi}}^\dagger(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \left(s_{\tilde{\chi}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) - \frac{1}{2}\zeta^{c\dagger}(t, \mathbf{y})\zeta(t, \mathbf{x}) \right) \right] \\
& \times \exp \left[i \int d^4x d^4y \zeta^\dagger(x) \delta(x-y) \left(i\partial_{y^0} + \frac{\nabla_y^2}{2m} \right) \zeta(y) \right] \\
& \times \exp \left[i \int d^4x d^4y \eta^*(x) \delta(x-y) \left(i\partial_{y^0} + \frac{\nabla_y^2}{2m} - \delta m \right) \eta(y) \right] \\
& \times \exp \left[-i \int d^4x d^4y \xi^*(x) \delta(x-y) \left(i\partial_{y^0} + \frac{\nabla_y^2}{2m} - \delta m \right) \xi(y) \right] \\
& \times \exp \left[-i \int d(xy) s_{\tilde{\tau}}^\dagger(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathcal{S}_{pot.}^{(1)} s_{\tilde{\tau}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \right] \\
& \times \exp \left[i \int d(xy) \mathcal{S}_{pot.}^{(2)} \left(-2is_{\tilde{\tau}}^\dagger(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})s_{\tilde{\chi}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) + 2is_{\tilde{\tau}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})s_{\tilde{\chi}}^\dagger(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \right) \right] \\
& \times \exp \left[-i \int d(xy) s_{\tilde{\tau}}^\dagger(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \Gamma s_{\tilde{\tau}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \right] \\
= & -i \ln \int Ds_{\tilde{\tau}}^\dagger Ds_{\tilde{\tau}} Ds_{\tilde{\chi}}^\dagger Ds_{\tilde{\chi}} D\zeta^\dagger D\zeta D\eta^* D\eta D\xi^* D\xi \\
& \times \exp \left[i \int d^4x d^4y \begin{pmatrix} \zeta^\dagger(x) & \zeta^{c\dagger}(x) \end{pmatrix} \mathcal{K}_{\tilde{\chi}} \begin{pmatrix} \zeta(y) \\ \zeta^c(y) \end{pmatrix} \right] \\
& \times \exp \left[i \int d^4x d^4y \begin{pmatrix} \eta^*(x) & \xi^*(x) \end{pmatrix} \mathcal{K}_{\tilde{\tau}} \begin{pmatrix} \eta(y) \\ \xi(y) \end{pmatrix} \right] \\
& \times \exp \left[i \int d(xy) \begin{pmatrix} s_{\tilde{\tau}}^\dagger(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) & s_{\tilde{\chi}}^\dagger(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{pmatrix} \mathcal{V} \begin{pmatrix} s_{\tilde{\tau}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ s_{\tilde{\chi}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{pmatrix} \right] \\
& \times \exp \left[\frac{i}{2} \int d(xy) \left(\sigma_{\tilde{\tau}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})s_{\tilde{\tau}}^\dagger(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) + \sigma_{\tilde{\tau}}^\dagger(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})s_{\tilde{\tau}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \sigma_{\tilde{\chi}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})s_{\tilde{\chi}}^\dagger(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) + \sigma_{\tilde{\chi}}^\dagger(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})s_{\tilde{\chi}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \right) \right] \\
= & -i \text{Tr} \ln i\mathcal{K}_{\tilde{\chi}} - i \text{Tr} \ln i\mathcal{K}_{\tilde{\tau}} - \frac{1}{4} \int d(xy) \begin{pmatrix} \sigma_{\tilde{\tau}}^\dagger(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) & \sigma_{\tilde{\chi}}^\dagger(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{pmatrix} \mathcal{V}^{-1} \begin{pmatrix} \sigma_{\tilde{\tau}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \sigma_{\tilde{\chi}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{pmatrix} \\
= & \frac{i}{2} \text{Tr} \left[\mathcal{K}_{0\tilde{\chi}}^{-1} \mathcal{K}_{\tilde{\chi}}' \mathcal{K}_{0\tilde{\chi}}^{-1} \mathcal{K}_{\tilde{\chi}}' \right] + \frac{i}{2} \text{Tr} \left[\mathcal{K}_{0\tilde{\tau}}^{-1} \mathcal{K}_{\tilde{\tau}}' \mathcal{K}_{0\tilde{\tau}}^{-1} \mathcal{K}_{\tilde{\tau}}' \right] \\
& - \frac{1}{4} \int d(xy) \begin{pmatrix} \sigma_{\tilde{\tau}}^\dagger(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) & \sigma_{\tilde{\chi}}^\dagger(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{pmatrix} \mathcal{V}^{-1} \begin{pmatrix} \sigma_{\tilde{\tau}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \sigma_{\tilde{\chi}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{pmatrix} \tag{90}
\end{aligned}$$

ここで、式 (90) の計算で出てくる記号は

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_{\tilde{\chi}} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\delta(x-y)\left(i\partial_{y^0} + \frac{\nabla_y^2}{2m}\right) & -\frac{1}{4}\delta(x^0-y^0)\sigma_{\tilde{\chi}}(x,y) \\ -\frac{1}{4}\delta(x^0-y^0)\sigma_{\tilde{\chi}}^\dagger(x,y) & \frac{1}{2}\delta(x-y)\left(i\partial_{y^0} + \frac{\nabla_y^2}{2m}\right) \end{pmatrix} \\
\mathcal{K}_{\tilde{\tau}} &= \begin{pmatrix} \delta(x-y)\left(i\partial_{y^0} + \frac{\nabla_y^2}{2m} - \delta m\right) & -\frac{i}{2}\delta(x^0-y^0)\sigma_{\tilde{\tau}}(x,y) \\ \frac{i}{2}\delta(x^0-y^0)\sigma_{\tilde{\tau}}^\dagger(x,y) & -\delta(x-y)\left(i\partial_{y^0} - \frac{\nabla_y^2}{2m} + \delta m\right) \end{pmatrix} \\
\mathcal{V} &= \begin{pmatrix} -2\mathcal{S}_{pot.}^{(1)} - 2\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\Gamma & -4i\mathcal{S}_{pot.}^{(2)} \\ 4i\mathcal{S}_{pot.}^{(2)} & 0 \end{pmatrix} \\
\mathcal{K}_{0\tilde{\chi}}^{-1} &= \begin{pmatrix} 2S_F^{\tilde{\chi}}(x-y) & 0 \\ 0 & 2\bar{S}_F^{\tilde{\chi}}(x-y) \end{pmatrix} \\
\mathcal{K}_{0\tilde{\tau}}^{-1} &= \begin{pmatrix} S_F^{\tilde{\tau}}(x-y) & 0 \\ 0 & -\bar{S}_F^{\tilde{\tau}}(x-y) \end{pmatrix} \\
S_F^{\tilde{\chi}}(x-y) &= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{e^{-iq(x-y)}}{q^0 - |\mathbf{q}|^2/2m + i\epsilon}, \quad \bar{S}_F^{\tilde{\chi}}(x-y) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{e^{-iq(x-y)}}{q^0 + |\mathbf{q}|^2/2m - i\epsilon} \\
S_F^{\tilde{\tau}}(x-y) &= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{e^{-iq(x-y)}}{q^0 - |\mathbf{q}|^2/2m - \delta m + i\epsilon}, \quad \bar{S}_F^{\tilde{\tau}}(x-y) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{e^{-iq(x-y)}}{q^0 + |\mathbf{q}|^2/2m + \delta m - i\epsilon} \\
\mathcal{K}_0 &= \text{diag } \mathcal{K}, \quad \mathcal{K}' = \text{off diag } \mathcal{K}
\end{aligned}$$

と定義した。式 (90) の Tr 部分を計算すると、

$$\begin{aligned}
\frac{i}{2} \text{Tr} [\mathcal{K}_{0\tilde{\chi}}^{-1} \mathcal{K}'_{\tilde{\chi}} \mathcal{K}_{0\tilde{\chi}}^{-1} \mathcal{K}'_{\tilde{\chi}}] &= \frac{i}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 d^3x_3 d^3x_4 \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4q_2}{(2\pi)^4} \\
&\times \frac{e^{-iq_1(x_1-x_2)}}{q_1^0 - |\mathbf{q}_1|^2/2m + i\epsilon} \frac{e^{-iq_2(x_3-x_4)}}{q_2^0 - |\mathbf{q}_2|^2/2m - i\epsilon} \sigma_{\tilde{\chi}}(x_2^0, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \sigma_{\tilde{\chi}}^\dagger(x_1^0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_4)
\end{aligned} \tag{91}$$

となる。ここで、重心座標系と相対座標系に分離させるために

$$\begin{aligned}
R &= \begin{pmatrix} x_2^0, & \frac{\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3 \\
R' &= \begin{pmatrix} x_1^0, & \frac{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_4}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}' = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_4
\end{aligned}$$

と定義し、 $\sigma_{\tilde{\chi}}$ のフーリエ変換

$$\sigma_{\tilde{\chi}}(\mathbf{r}, P) = \int d^4R \sigma_{\tilde{\chi}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \exp^{iP \cdot R}$$

を使うことで、

$$\begin{aligned}
\frac{i}{2} \text{Tr} [\mathcal{K}_{0\tilde{\chi}}^{-1} \mathcal{K}'_{\tilde{\chi}} \mathcal{K}_{0\tilde{\chi}}^{-1} \mathcal{K}'_{\tilde{\chi}}] &= \frac{i}{2} \int d^3r d^3r' \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4q_2}{(2\pi)^4} \frac{1}{q_1^0 - |\mathbf{q}_1|^2/2m + i\epsilon} \frac{1}{q_2^0 - |\mathbf{q}_2|^2/2m - i\epsilon} e^{-\frac{i}{2}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2)} \\
&\times \sigma_{\tilde{\chi}}(\mathbf{r}, q_1 - q_2) \sigma_{\tilde{\chi}}^\dagger(\mathbf{r}', q_1 - q_2)
\end{aligned} \tag{92}$$

とでき、 P, k を

$$P = q_1 - q_2, \quad k = \frac{q_1 + q_2}{2}$$

として計算をすれば、

$$\frac{i}{2} \text{Tr} [\mathcal{K}_{0\tilde{\chi}}^{-1} \mathcal{K}'_{\tilde{\chi}} \mathcal{K}_{0\tilde{\chi}}^{-1} \mathcal{K}'_{\tilde{\chi}}] = \frac{i}{2} \int d^3r d^3r' \frac{d^4P}{(2\pi)^4} \sigma_{\tilde{\chi}}^\dagger(\mathbf{r}', P) \Upsilon_N(\mathbf{r}' - \mathbf{r}, E) \sigma_{\tilde{\chi}}(\mathbf{r}, P) \tag{93}$$

と計算することができる。ここで、 Υ_N, E はそれぞれ

$$\Upsilon_N(\mathbf{r}' - \mathbf{r}, E) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{me^{i(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{k}}}{|\mathbf{k}|^2 - mE}, \quad E = P^0 - \frac{|\mathbf{P}|^2}{4m}$$

である。同様に式 (90) の 2 項目について計算をすると、

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} \text{Tr} [\mathcal{K}_{0\tilde{\tau}}^{-1} \mathcal{K}'_{\tilde{\tau}} \mathcal{K}_{0\tilde{\tau}}^{-1} \mathcal{K}'_{\tilde{\tau}}] &= -\frac{i}{2} \int d^3r d^3r' \frac{d^4P}{(2\pi)^4} \sigma_{\tilde{\tau}}^\dagger(\mathbf{r}', P) \Upsilon_C(\mathbf{r}' - \mathbf{r}, E) \sigma_{\tilde{\tau}}(\mathbf{r}, P) \\ \Upsilon_C(\mathbf{r}' - \mathbf{r}, E) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{me^{i(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{k}}}{|\mathbf{k}|^2 - mE + 2\delta m} \end{aligned} \quad (94)$$

となり、これより \mathcal{S}^{II} は

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{II} &= \frac{1}{2} \int d^3r d^3r' \frac{d^4P}{(2\pi)^4} \begin{pmatrix} \sigma_{\tilde{\tau}}^\dagger(\mathbf{r}', P) & \sigma_{\tilde{\chi}}^\dagger(\mathbf{r}', P) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\Upsilon_C(\mathbf{r}' - \mathbf{r}, E) & 0 \\ 0 & \Upsilon_N(\mathbf{r}' - \mathbf{r}, E) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{\tilde{\tau}}(\mathbf{r}, P) \\ \sigma_{\tilde{\chi}}(\mathbf{r}, P) \end{pmatrix} \\ &\quad - \frac{1}{4} \int d^3r \frac{d^4P}{(2\pi)^4} \begin{pmatrix} \sigma_{\tilde{\tau}}^\dagger(\mathbf{r}, P) & \sigma_{\tilde{\chi}}^\dagger(\mathbf{r}, P) \end{pmatrix} \mathcal{V}^{-1} \begin{pmatrix} \sigma_{\tilde{\tau}}(\mathbf{r}, P) \\ \sigma_{\tilde{\chi}}(\mathbf{r}, P) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (95)$$

と書くことができる。これをさらに変形するために、 $\phi = \begin{pmatrix} \sigma_{\tilde{\tau}}(\mathbf{r}, P) \\ \sigma_{\tilde{\chi}}(\mathbf{r}, P) \end{pmatrix}$ と置いて、 ϕ に対する運動方程式を求める

と求められる。ただし

$$\varphi_P(\mathbf{r}) = \mathcal{V}^{-1} \begin{pmatrix} \sigma_{\tilde{\tau}}(\mathbf{r}, P) \\ \sigma_{\tilde{\chi}}(\mathbf{r}, P) \end{pmatrix} \quad (97)$$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E - 2\delta m & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \quad (98)$$

である。従って、最終的な action は $\varphi_P(\mathbf{r})$ のフーリエ変換を

$$\varphi_P(\mathbf{r}) = \int d^4x \Phi(x, \mathbf{r}) e^{ixP} \quad (99)$$

として、

$$\mathcal{S}^{II} = \int d^4x d^3r \Phi^\dagger(x, \mathbf{r}) \left(\frac{\nabla_x^2}{m} + i\partial_{x^0} + \frac{\nabla_x^2}{4m} - \begin{pmatrix} 2\delta m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathcal{V} \right) \Phi(x, \mathbf{r}) \quad (100)$$

となる。

4 Annihilation cross section

この章では式 (100) の Two-body state effective action を用いて EWIMP の S-wave annihilation cross section を定式化していく。optical theorem を用いると S-wave cross section は [8] より

$$\sigma_i^{(S)} = c_i \frac{32\pi^5}{m^2 v^3} \text{Im}[\mathcal{M}_i^{(S)}(v)] \quad (101)$$

と書くことができる。ここで、 v は相対速度である。 $\sigma_i^{(S)}$ は $i = 2$ で $\tilde{\chi}\tilde{\chi}$ の annihilation を、 $i = 1$ で $\tilde{\tau}\tilde{\tau}$ の annihilation をラベルしている。さらに係数 c_i は $c_1 = 1, c_2 = 2$ である。そして、 $\mathcal{M}_i^{(S)}(v)$ は 1S_0 状態から 1S_0 状態への不变散乱振幅である。式 (101) より $\mathcal{M}_i^{(S)}(v)$ を求めることができれば、cross section が分かるので、 $\mathcal{M}_i^{(S)}(v)$ を求めていく。まず最初に式 (100) から Schwinger-Dyson 方程式を求める。

$$\left[\frac{\nabla_r^2}{m} + i\partial_{x^0} + \frac{\nabla_x^2}{4m} - \mathbf{V}(\mathbf{r}) + i\Gamma \frac{\delta(r)}{4\pi r} \right] \langle 0 | T\Phi(x, \mathbf{r})\Phi^\dagger(y, \mathbf{r}') | 0 \rangle = i\delta(x - y)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (102)$$

ここでポテンシャル $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ は

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 2\delta m - \mathcal{S}_{\text{pot.}}^{(1)} & -2i\mathcal{S}_{\text{pot.}}^{(2)} \\ -2i\mathcal{S}_{\text{pot.}}^{(2)} & 0 \end{pmatrix} \quad (103)$$

である。ポテンシャルが r のみに依存しているのでグリーン関数をルジヤンドル多項式を用いて

$$\langle 0 | T\Phi(x, \mathbf{r})\Phi^\dagger(y, \mathbf{r}') | 0 \rangle = \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} e^{-iP(x-y)} \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos\gamma)(-i)\mathbf{G}^{(E,l)}(r, r') \quad (104)$$

のように展開することができる。ここで γ は \mathbf{r} と \mathbf{r}' のなす角である。従って、 $\mathbf{G}^{(E,l)}(r, r')$ の満足する方程式は

$$\left[-E - \frac{1}{mr} \frac{d^2}{dr^2} r - \frac{l(l+1)}{mr^2} + \mathbf{V}(\mathbf{r}) - i\Gamma \frac{\delta(r)}{4\pi r} \right] \mathbf{G}^{(E,l)}(r, r') = \frac{\delta(r - r')}{r^2} \quad (105)$$

となることが分かる。これより $\mathcal{M}_i^{(S)}(v)$ はグリーン関数の (i, i) 成分を用いて

$$\mathcal{M}_i^{(S)}(v) = \frac{k^2}{4\pi} \lim_{E \rightarrow k^2/m} \left(E - \frac{k^2}{m} \right)^2 \int_0^\infty r^2 dr r'^2 dr' j_0(kr) j_0(kr') \mathbf{G}_{ii}^{(E,0)}(r, r') \quad (106)$$

と書ける。ここで、 $k = mv/2$ で、 j_0 は球ベッセル関数の 0 次である。従って、S-wave cross section は

$$\sigma_i^{(S)} v = c_i \frac{2\pi}{k^2} \lim_{E \rightarrow k^2/m} \left(E - \frac{k^2}{m} \right)^2 \int_0^\infty r dr r' dr' \sin(kr) \sin(kr') \text{Im} \mathbf{G}_{ii}^{(E,0)}(r, r') \quad (107)$$

である。一般に $\mathbf{G}_{ii}^{(E,0)}(r, r')$ は解析的に解くことができないので、式 (105) を数値的に解く必要がある。より簡単にするために $\mathbf{g}(r, r') = rr' \mathbf{G}_{ii}^{(E,0)}(r, r')$ を定義して、 $\mathbf{g}(r, r')$ について解く。解くべき方程式は

$$-\frac{1}{m} \frac{d^2}{dr^2} \mathbf{g}(r, r') + \left[\mathbf{V}(\mathbf{r}) - i\Gamma \frac{\delta(r)}{4\pi r} \right] \mathbf{g}(r, r') - E\mathbf{g}(r, r') = \delta(r - r') \quad (108)$$

である。 Γ の項を摂動とみなすと、leading order での解 $\mathbf{g}_0(r, r')$ は

$$-\frac{1}{m} \frac{d^2}{dr^2} \mathbf{g}_0(r, r') + \mathbf{V}(\mathbf{r}) \mathbf{g}_0(r, r') - E\mathbf{g}_0(r, r') = \delta(r - r') \quad (109)$$

を満足する。グリーン関数 $\mathbf{G}_{ii}^{(E,0)}(r, r')$ に対して境界条件 (i) $\mathbf{G}_{ii}^{(E,0)}(r, r')$ が任意の r, r' に対して有限となる、(ii) $|r - r'| \rightarrow \infty$ で $\mathbf{G}_{ii}^{(E,0)}(r, r')$ は外向波のみをもつ、を課す。この境界条件の下で式 (109) を解くと

$$\mathbf{g}_0(r, r') = m\mathbf{g}_>(r)\mathbf{g}_<^\text{T}(r')\theta(r - r') + m\mathbf{g}_<(r)\mathbf{g}_>^\text{T}(r')\theta(r' - r) \quad (110)$$

ここで、 $\mathbf{g}_{<(>)}(r)$ は

$$-\frac{1}{m} \frac{d^2}{dr^2} \mathbf{g}_{<(>)}(r) + \mathbf{V}(r) \mathbf{g}_{<(>)}(r) = E \mathbf{g}_{<(>)}(r) \quad (111)$$

を満足し、それぞれ境界条件 (i) $\mathbf{g}_<(0) = 0$, (ii) $\mathbf{g}'_<(0) = 1$, (i) $\mathbf{g}_>(0) = 1$, (ii) $r \rightarrow \infty$ で外向波のみを持つ、を満足する。 Γ の摂動の一次の解 $\mathbf{g}_1(r, r')$ は $\mathbf{g}_<(r) = \mathbf{g}_<(0) + \mathbf{g}'_<(0)r + \dots$ を用いて、

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1(r, r') &= - \int dr'' \mathbf{g}_0(r, r'') \left(-i\Gamma \frac{\delta(r)}{4\pi r} \right) \mathbf{g}_0(r'', r') \\ &= \frac{im^2}{2\pi} \mathbf{g}_>(r) \Gamma \mathbf{g}_>(r') \end{aligned} \quad (112)$$

とかける。これより S-wave cross section は

$$\sigma_i^{(S)} v = c_i \frac{m^2}{2k^2} \lim_{E \rightarrow k^2/m} \left(E - \frac{k^2}{m} \right)^2 \sum_{a,b} \Gamma_{ab} \mathcal{A}_{ia} \mathcal{A}_{ib}^* \quad (113)$$

と書ける。ここで、

$$\mathcal{A}_{ia} = \int_0^\infty dr \sin(kr) [\mathbf{g}_>(r)]_{ia}$$

である。 $\tilde{\tau}$ は $E < 2\delta m$ の時に $r \rightarrow \infty$ の極限で現れないはずなので $\mathbf{g}_>(r)$ は

$$[\mathbf{g}_>(r)]_{ij}|_{r \rightarrow \infty} = \delta_{i2} d_{2j}(E) e^{i\sqrt{mE}r} \quad (114)$$

のようになるはずであるので cross section は簡単な形

$$\sigma_2^{(S)} v = \sum_{a,b} \Gamma_{ab} d_{2a}(mv^2/4) d_{2b}^*(mv^2/4) \quad (115)$$

で書ける。従って、cross section $\sigma^{(S)}$ を評価するためには式 (111) を数値的に解いて d_{2j} を評価する必要がある。

5 Gamma ray flux

この章では暗黒物質の間接検出に用いられている、銀河中心からのガンマ線の flux の計算について議論する。ガンマ線のスペクトルの種類には line gamma ray と continuum gamma ray の 2 種類ある。line gamma ray のほうは暗黒物質が対消滅して直接検出されるものであり、例として $\gamma\gamma$ や γZ に崩壊するものがある。このタイプのスペクトルは理論的にはピークが立つはずであるが、バックグラウンドである様々な宇宙線により見えずらくなってしまう。もう一方の continuum gamma ray の例としては、暗黒物質が W ボソンに崩壊した後に π メソンが生成され、その後に光子に崩壊する場合である。このタイプは宇宙論的なバックグラウンドがよく分かっている場合には役立つ可能性がある。以下の議論では line gamma ray について詳しく調べていく。

暗黒物質の対消滅からの gamma ray flux $\mathcal{F}_\gamma(E)$ は

$$\frac{d\mathcal{F}_\gamma(E)}{dEd\Omega} = \frac{1}{4\pi m^2} \sum_f \frac{dN_f^{(\gamma)}}{dE} \frac{\langle\sigma v\rangle_f}{2} \int_{\text{line of sight}} dl(\theta) \rho^2(l) \quad (116)$$

と書くことができる。ここで、 θ は観測者と銀河中心のなす角度で、 $N_f^{(\gamma)}$ は終状態 f のエネルギー E を持つ光子の数を表し、 $\langle\sigma v\rangle$ は前の章で求めた対消滅の cross section の速度平均、 ρ は銀河の暗黒物質の質量密度である。角度積分を detector の適切な視野角で行うことによって式 (116) は

$$\frac{d\mathcal{F}_\gamma(E)}{dE} = 9.3 \times 10^{-12} \left(\frac{100 \text{ GeV}}{m} \right)^2 \sum_f \frac{dN_f^{(\gamma)}}{dE} \left(\frac{\langle\sigma v\rangle_f}{10^{-27} \text{ cm}^3 \text{ sec}^{-1}} \right) \bar{J} \Delta\Omega [\text{cm}^{-2} \text{ sec}^{-1} \text{ GeV}^{-1}] \quad (117)$$

と計算できる。ここで detector の角度分解能 $\Delta\Omega$ は以下では 10^{-3} にとる。 \bar{J} は

$$\bar{J} = \int_{\text{line of sight}} \frac{dl(\theta)}{8.5 \text{ kpc}} \int_{\Delta\Omega} \frac{d\Omega}{\Delta\Omega} \left(\frac{\rho}{0.3 \text{ GeV cm}^{-3}} \right)^2 \quad (118)$$

と定義した。これより $\mathcal{F}_\gamma(E)$ を見積もるために $\langle\sigma v\rangle$ 、 $\frac{dN_f^{(\gamma)}}{dE}$ 、 ρ の 3 つの量を知る必要がある。 $\langle\sigma v\rangle$ についてはすでに求めてあるので $\frac{dN_f^{(\gamma)}}{dE}$ について考える。終状態が光子だけを考えるならとても簡単に求めることができる。今考えているシナリオでは暗黒物質は非相対論的に運動していると考えているので、

$$\frac{dN_f^{(\gamma)}}{dE} = 2\delta(E - m) \quad (119)$$

ととても簡単な形になる。最後に ρ については様々な暗黒物質の分布の簿デルが存在するがここでは NFW pofile[9] を用いることにする。NFW pofile では

$$\rho_{NFW}(r) = \frac{\rho_0}{(r/\alpha)(1 + r/\alpha)^2} \quad (120)$$

の形をとり、 ρ_0 と α は銀河による定数である。そして以下の数値計算では妥当な値として $\bar{J} = 1352$ [10] を用いる。さらにはかの有名な pofile の種類として、Einasto pofile[16] や Burkert pofile[17] がある。それぞれ

$$\rho_{Einasto}(r) = \rho_0 \left[-\frac{2}{\gamma} \left(\left(\frac{r}{\alpha} \right)^\gamma - 1 \right) \right] \quad (121)$$

$$\rho_{Burkert}(r) = \frac{\rho_0}{(1 + r/\alpha)(1 + (r/\alpha)^2)} \quad (122)$$

NFW と Einasto pofile においてはよく $\alpha = 20 \text{ kpc}$ 、 $\gamma = 0.17$ が用いられる。

6 Numerical result and conclusion

この章では cross section と gamma ray flux の数値計算の結果と、cross section を計算するために用いた方法について述べる。cross section を計算するためには、4 章の最後でも述べたように式 (111) を $\mathbf{g}_>(r)$ について境界条件 (i) $\mathbf{g}_>(0) = 1$, (ii) $r \rightarrow \infty$ で外向波のみを持つ、の下で解けばよい。このような 2 点境界値問題を数値的に解くには初期値問題と違い何度も反復して解を探さなければならない。解く方法として狙い撃ち法と緩和法 [11] がある。狙い撃ち法とはある一つの境界点におけるすべてのパラメータの値をランダムに決め、微分方程式を解いていき、もう片方の境界での値を求める。得られた値と、境界条件との値の差を減らすように最初の境界で用いたパラメータを調節し、それが 0 となるように反復して解く方法である。

もう一つの緩和法とは、解を求める範囲内をすべてメッシュ点上での差分方程式に置き換え、メッシュ点上のすべての値を調節することで、差分方程式と境界条件を同時に満足するような値に近づけるように反復する方法である。メッシュ点をたくさん用意すればするほどこの方法では計算量が多くなるため狙い撃ち法より効率が悪いのではと思われるが [11] によると、境界条件が繊細かつ微妙な時には緩和法は効率的である。実際、今考えたい微分方程式に対しても緩和法ではたった 2 回程度の反復で解が収束した。

式 (111) を緩和法を用いて解いて、得られた $[\mathbf{g}_>(r)]_{ij}$ は以下のようになる。

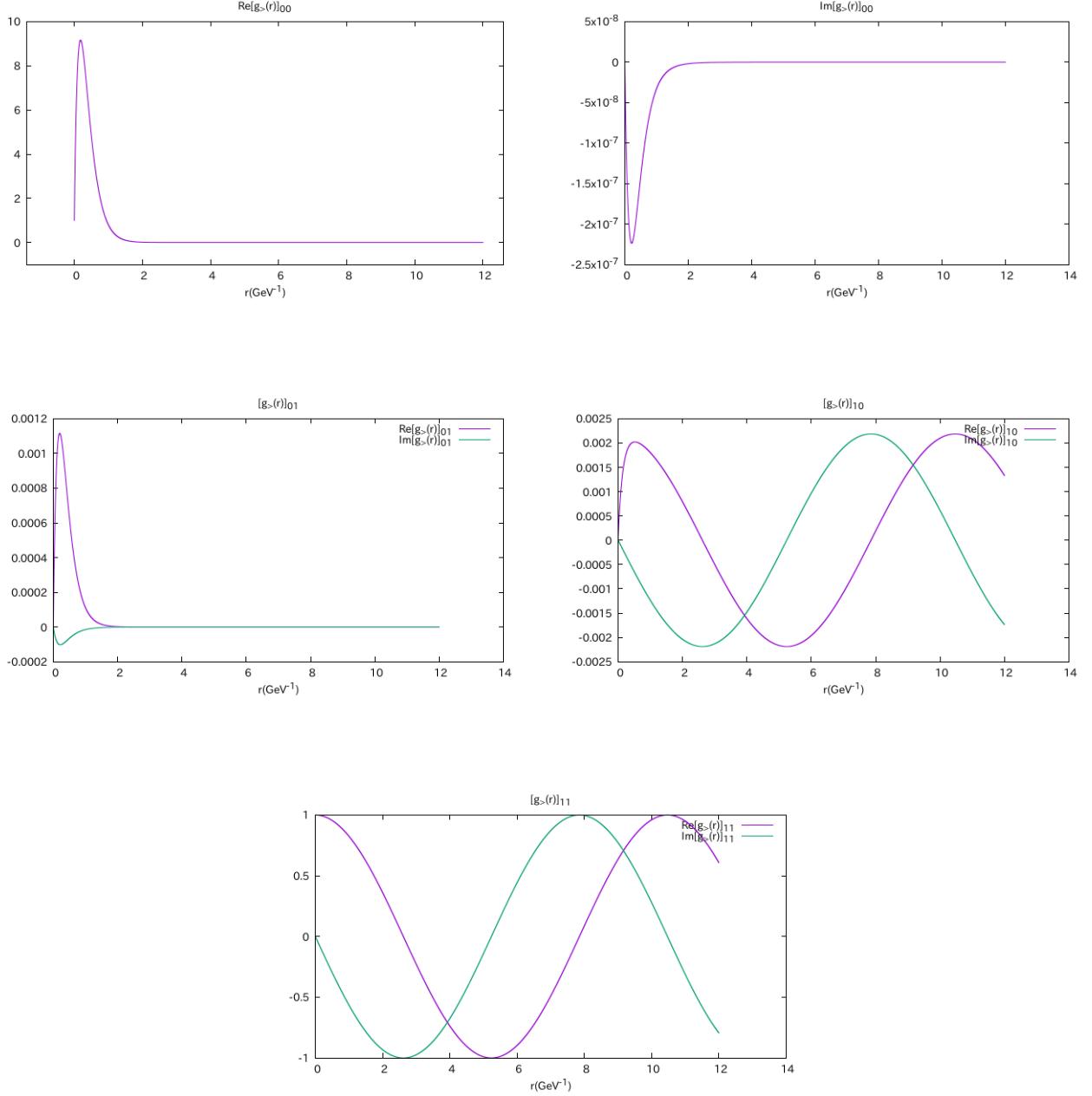


図 9: $v/c = 0.001$, $\delta m = 0.01(\text{GeV})$, $m = 1200(\text{GeV})$ の時の $[\mathbf{g}_>(r)]_{ij}$ の概形。1段目の左が $[\mathbf{g}_>(r)]_{00}$ の実部、右が虚部を表し、2段目の左が $[\mathbf{g}_>(r)]_{01}$ の実部と虚部を、右が $[\mathbf{g}_>(r)]_{10}$ の実部と虚部を、一番下が $[\mathbf{g}_>(r)]_{11}$ の実部と虚部を表す。

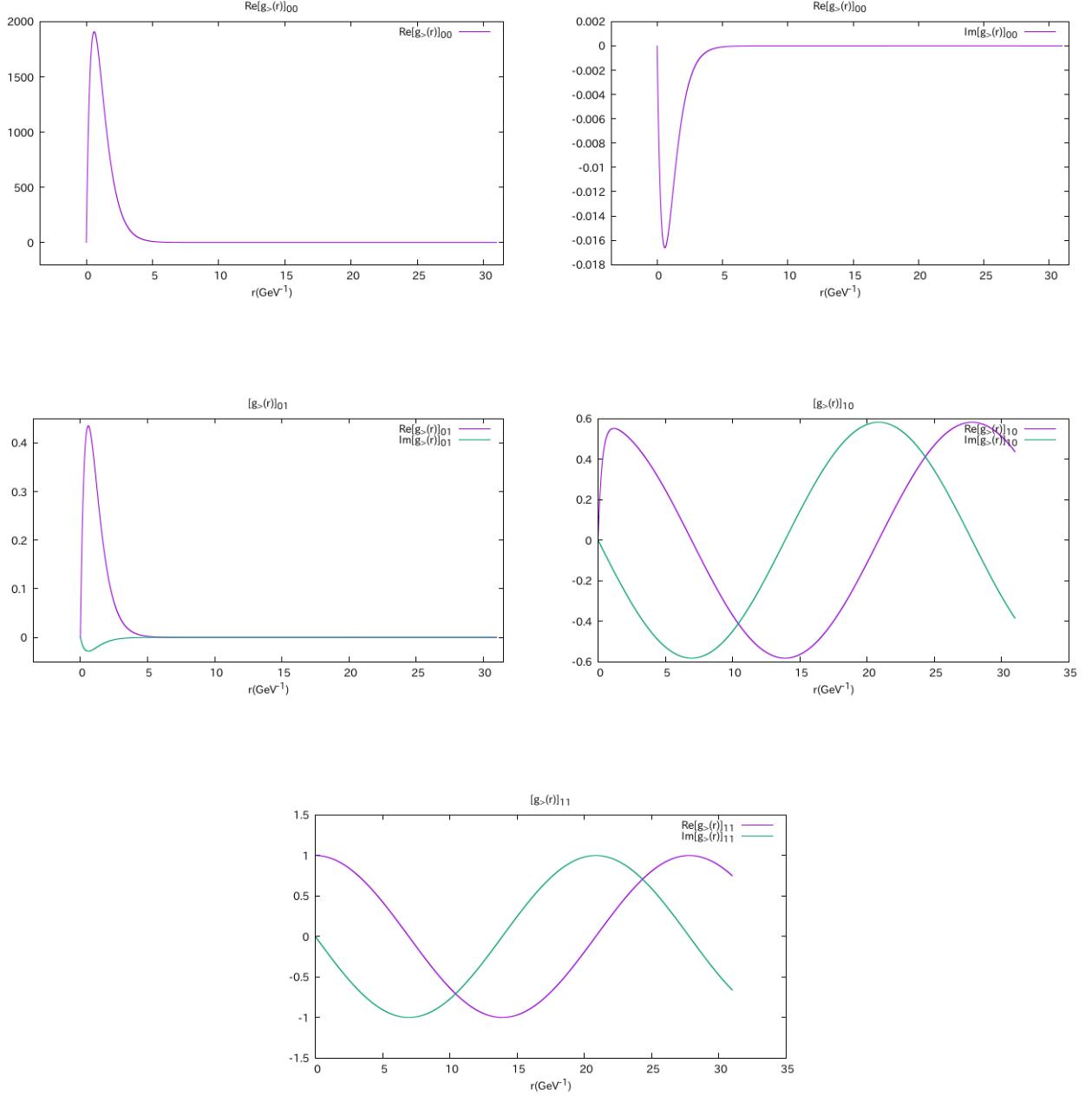


図 10: $v/c = 0.001$, $\delta m = 0.00321(\text{GeV})$, $m = 452(\text{GeV})$ の時の $[g_{>}(r)]_{ij}$ の概形。1段目の左が $[g_{>}(r)]_{00}$ の実部、右が虚部を表し、2段目の左が $[g_{>}(r)]_{01}$ の実部と虚部を、右が $[g_{>}(r)]_{10}$ の実部と虚部を、一番下が $[g_{>}(r)]_{11}$ の実部と虚部を表す。

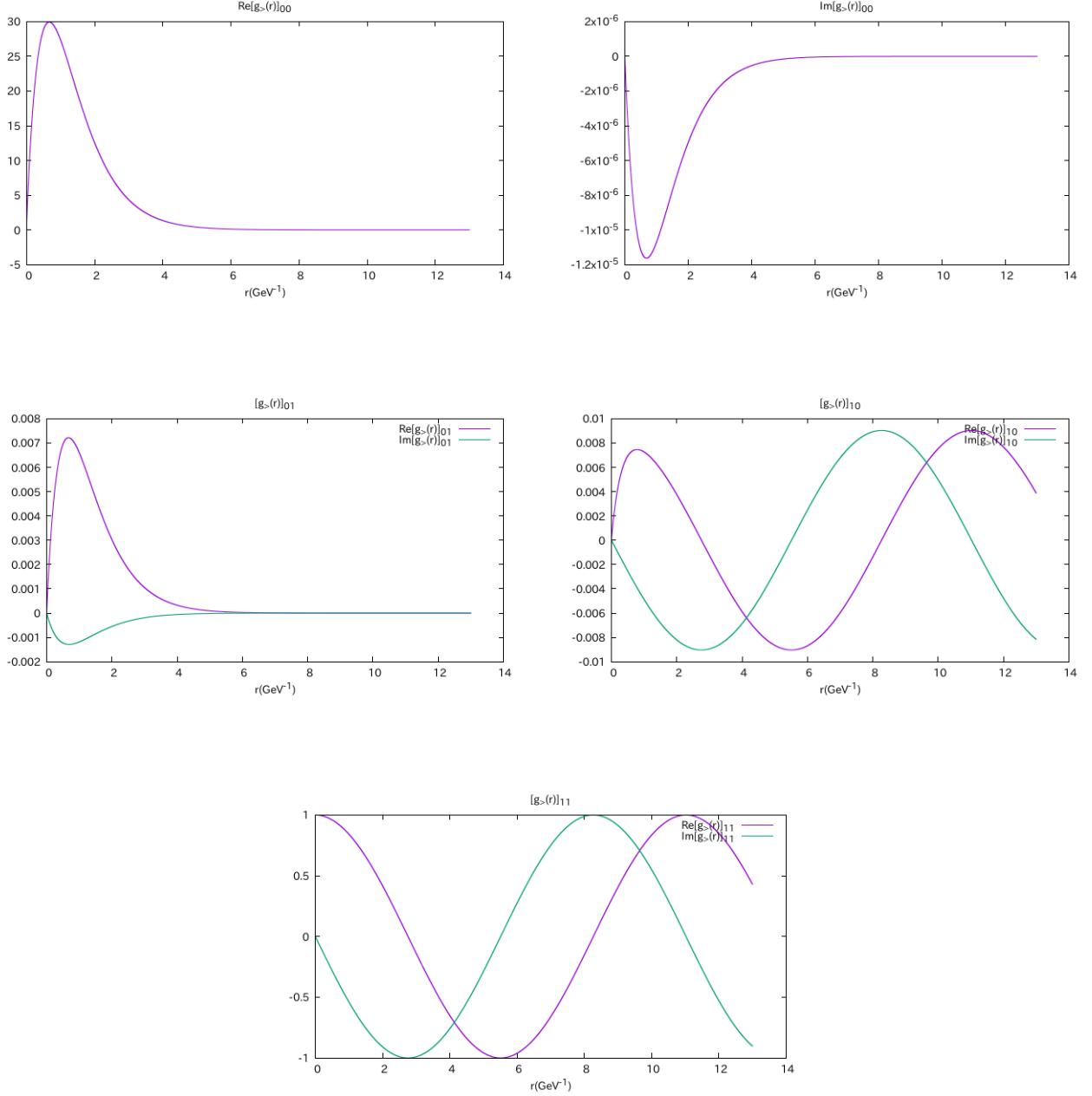


図 11: $v/c = 0.003$, $\delta m = 0.00321(\text{GeV})$, $m = 380(\text{GeV})$ の時の $[g_>(r)]_{ij}$ の概形。1段目の左が $[g_>(r)]_{00}$ の実部、右が虚部を表し、2段目の左が $[g_>(r)]_{01}$ の実部と虚部を、右が $[g_>(r)]_{10}$ の実部と虚部を、一番下が $[g_>(r)]_{11}$ の実部と虚部を表す。

図 9, 10, 11 を見ればわかるように、得られた解は境界条件をきちんと満足していることが分かる。さらに m をパラメータとして式 (115) から cross section を計算すれば以下の結果が得られる。

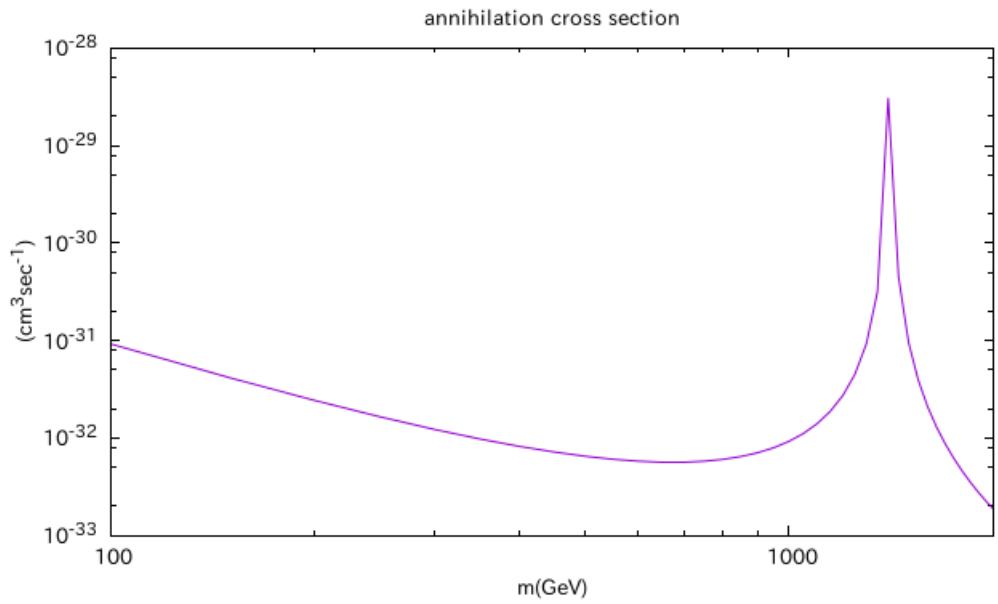


図 12: $v/c = 0.001, \delta m = 0.01(\text{GeV})$ の時、対消滅で光子へ崩壊する場合の cross section

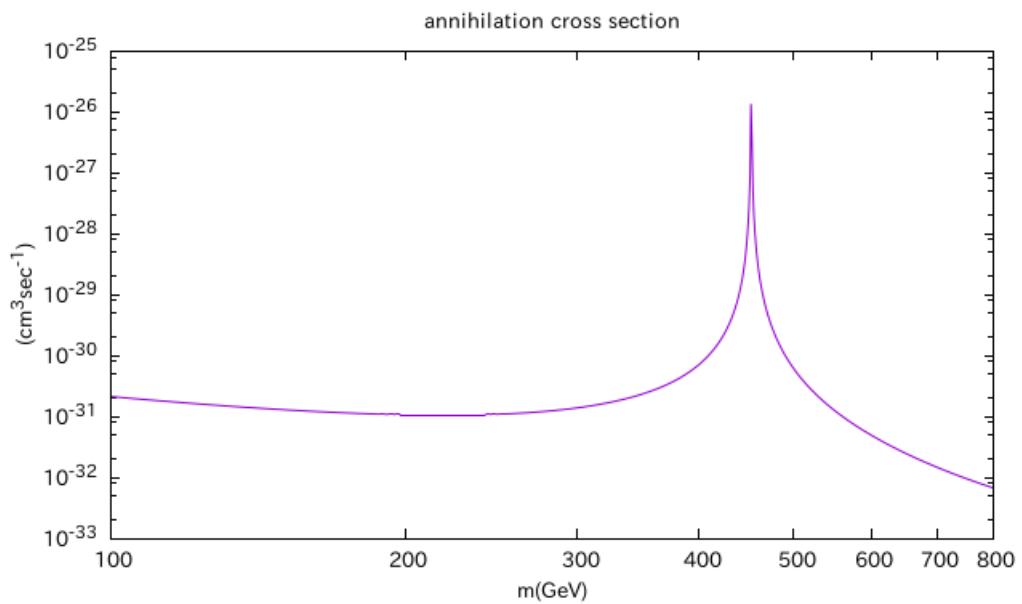


図 13: $v/c = 0.001, \delta m = 0.00321(\text{GeV})$ の時、対消滅で光子へ崩壊する場合の cross section

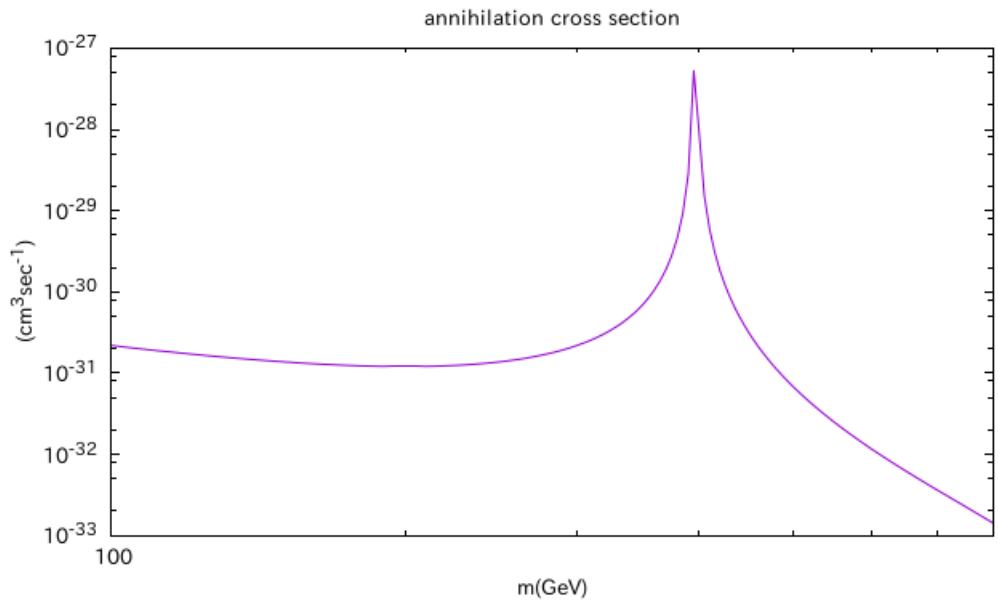


図 14: $v/c = 0.003, \delta m = 0.00321(\text{GeV})$ の時、対消滅で光子へ崩壊する場合の cross section

さらに得られた cross section を用いて式 (117) から銀河中心からの光子の flux を計算すれば以下のようなになる。

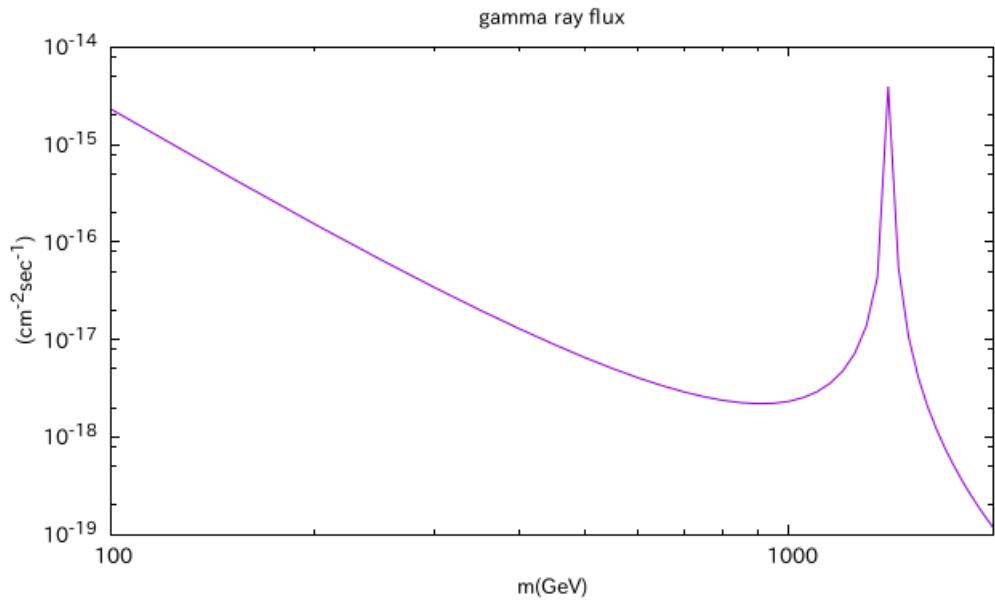


図 15: $v/c = 0.001, \delta m = 0.01(\text{GeV})$ の時、銀河中心からの暗黒物質の対消滅からの光子の flux

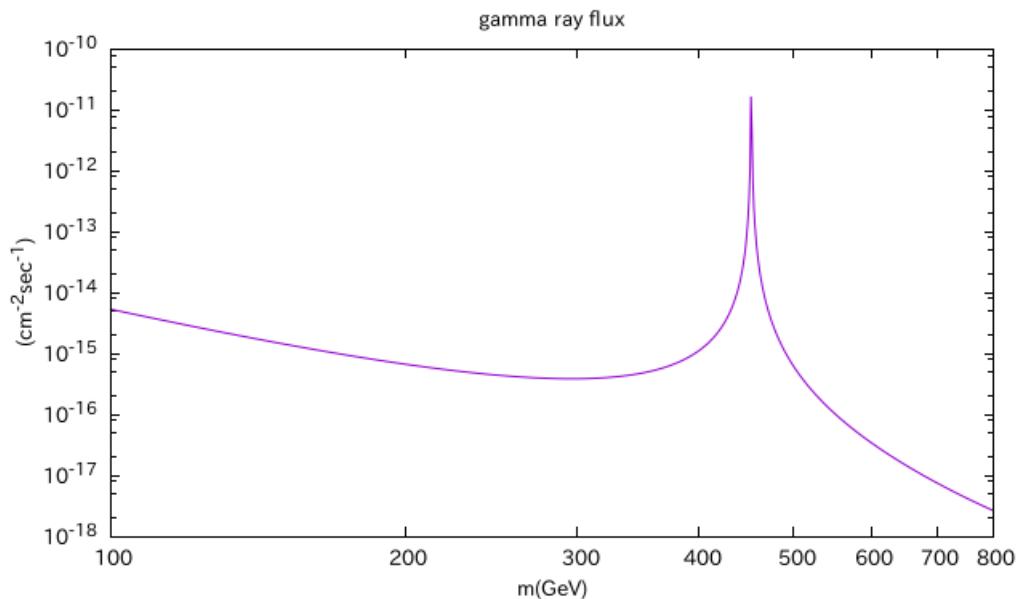


図 16: $v/c = 0.001, \delta m = 0.00321(\text{GeV})$ の時、銀河中心からの暗黒物質の対消滅からの光子の flux

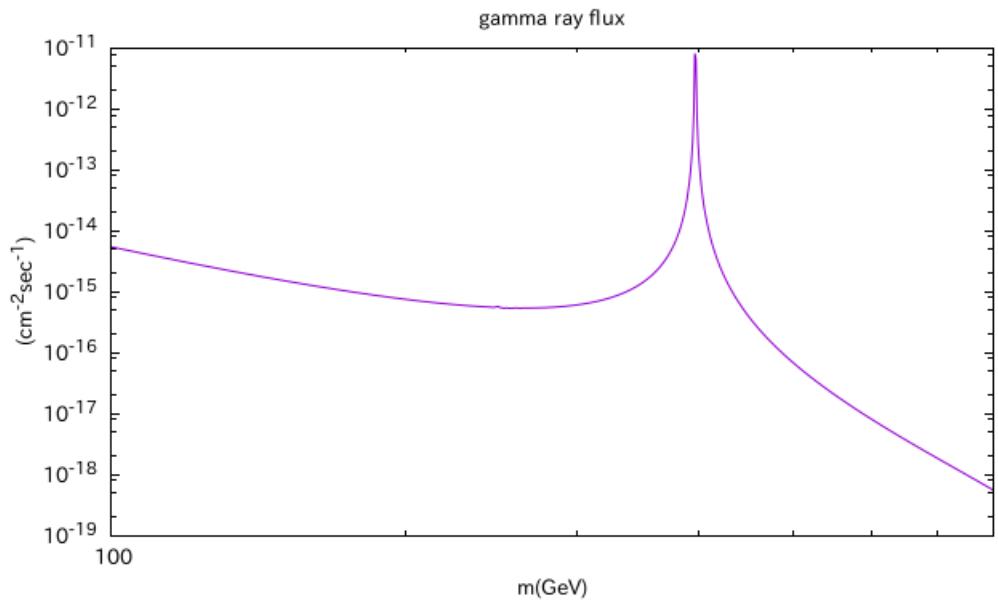


図 17: $v/c = 0.003$, $\delta m = 0.00321(\text{GeV})$ の時、銀河中心からの暗黒物質の対消滅からの光子の flux

これらの計算をするときに用いたパラメータのうち v と $\delta m = 0.00321(\text{GeV})$ 以外は [12] で得られた値を用いている。ただし、暗黒物質の質量を増やした時に生じるパラメータの変化については考えていない。そして、 $v = 0.003$ と $\delta m = 0.00321(\text{GeV})$ の値は enhance が $m = 400(\text{GeV})$ 付近に起こるように調節した値である。具体的に用いた値を以下の表にまとめておく。

parameter	value
g	0.6387
g'	0.3623
s_w^2	0.23
m	379.596576(GeV)
$m_{\tilde{\tau}}$	379.606567(GeV)
m_w	80.2(GeV)
m_z	91.19(GeV)
m_{h^0}	125.18(GeV)
μ	1766.53(GeV)
m_e	0.511×10^{-3} (GeV)
m_μ	0.105(GeV)
m_τ	1.776(GeV)
m_{C_1}	725.76(GeV)
$\tan\beta$	24.21
$\cot\alpha$	-24.21
y_1^1	1.0×10^{-5}
y_2^2	1.5×10^{-2}
y_3^3	0.2542
v	243.5786(GeV)
A_0	-3098.1(GeV)

表 1: 数値計算で用いた具体的なパラメータの値。ここで v はヒッグスの真空期待値に関するもので $v^2 = v_u^2 + v_d^2$ で定義される。

$\text{Re}N_{\tilde{l}A}^B$	B=1	B=2	B=3	B=4	B=5	B=6
A=1	$-6.31168044 \times 10^{-9}$	$2.63719358 \times 10^{-6}$	$-1.71009221 \times 10^{-1}$	$6.25408690 \times 10^{-11}$	$-5.57777646 \times 10^{-8}$	$-9.85269428 \times 10^{-1}$
A=2	$-4.88052654 \times 10^{-6}$	$-1.47061845 \times 10^{-2}$	$1.26260288 \times 10^{-5}$	$-2.05256544 \times 10^{-8}$	$-7.02536796 \times 10^{-1}$	$-2.18090514 \times 10^{-6}$
A=3	$-1.68078331 \times 10^{-5}$	$-2.88036700 \times 10^{-8}$	$-1.53915085 \times 10^{-10}$	$-1.65361745 \times 10^{-1}$	$2.67385497 \times 10^{-8}$	$-4.95673580 \times 10^{-11}$
A=4	$1.00627884 \times 10^{-7}$	$-5.03237436 \times 10^{-5}$	$9.85269426 \times 10^{-1}$	$-3.17467808 \times 10^{-10}$	$1.00201302 \times 10^{-5}$	$-1.71009221 \times 10^{-1}$
A=5	$6.62240877 \times 10^{-2}$	$6.99028792 \times 10^{-1}$	$7.13839275 \times 10^{-5}$	$-6.76095272 \times 10^{-6}$	$-1.46315410 \times 10^{-2}$	$-8.58412190 \times 10^{-6}$
A=6	$-8.24980621 \times 10^{-1}$	$5.55284568 \times 10^{-2}$	$5.85237100 \times 10^{-6}$	$8.39260849 \times 10^{-5}$	$-1.15816598 \times 10^{-3}$	$-7.02385695 \times 10^{-7}$

$\text{Im}N_{\tilde{l}A}^B$	B=1	B=2	B=3	B=4	B=5	B=6
A=1	$-6.69074517 \times 10^{-9}$	$2.68186615 \times 10^{-6}$	$-3.36466824 \times 10^{-15}$	$-6.50682427 \times 10^{-11}$	$-7.01708566 \times 10^{-8}$	$4.44552436 \times 10^{-23}$
A=2	$3.55520850 \times 10^{-6}$	$-1.48888937 \times 10^{-2}$	$-5.52344800 \times 10^{-8}$	$1.51693448 \times 10^{-8}$	$-7.11339651 \times 10^{-1}$	$6.71707263 \times 10^{-16}$
A=3	$1.00325957 \times 10^{-4}$	$-4.18395754 \times 10^{-10}$	$2.93857601 \times 10^{-10}$	$9.86232976 \times 10^{-1}$	$6.16275932 \times 10^{-10}$	$1.39096557 \times 10^{-17}$
A=4	$1.44670207 \times 10^{-7}$	$-5.11527461 \times 10^{-5}$	$1.15540529 \times 10^{-12}$	$7.71687277 \times 10^{-11}$	$1.02274109 \times 10^{-5}$	$-9.52745431 \times 10^{-21}$
A=5	$-4.78727158 \times 10^{-2}$	$7.10102998 \times 10^{-1}$	$-8.62478816 \times 10^{-9}$	$4.88605503 \times 10^{-6}$	$-1.48648974 \times 10^{-2}$	$1.39571889 \times 10^{-17}$
A=6	$5.59222261 \times 10^{-1}$	$5.99258994 \times 10^{-2}$	$3.23933295 \times 10^{-10}$	$-5.68738081 \times 10^{-5}$	$-1.24999822 \times 10^{-3}$	$1.05557136 \times 10^{-18}$

表 2: slepton の質量行列を対角化するためのユニタリ行列。上段が実部で下段が虚部をそれぞれ表す。

$\text{Re}N_{\tilde{G}^a}{}^b$	$b = 1$	$b = 2$	$b = 3$	$b = 4$
$a = 1$	$9.99599220 \times 10^{-1}$	$-2.13656993 \times 10^{-3}$	$2.72724410 \times 10^{-2}$	$-7.28340424 \times 10^{-3}$
$a = 2$	$3.78724402 \times 10^{-3}$	$9.98231872 \times 10^{-1}$	$-5.41258402 \times 10^{-2}$	$2.42730150 \times 10^{-2}$
$a = 3$	$-2.23811821 \times 10^{-17}$	$4.82387775 \times 10^{-17}$	$6.11227032 \times 10^{-16}$	$-6.11568206 \times 10^{-16}$
$a = 4$	$2.42682988 \times 10^{-2}$	$-5.55057268 \times 10^{-2}$	$-7.05176402 \times 10^{-1}$	$7.06439245 \times 10^{-1}$

$\text{Im}N_{\tilde{G}^a}{}^b$	$b = 1$	$b = 2$	$b = 3$	$b = 4$
$a = 1$	$-5.13227991 \times 10^{-16}$	$2.88642911 \times 10^{-19}$	$-1.03992019 \times 10^{-17}$	$-1.74565311 \times 10^{-18}$
$a = 2$	$-1.78170707 \times 10^{-18}$	$-2.33972913 \times 10^{-16}$	$5.73625399 \times 10^{-18}$	$1.43366353 \times 10^{-18}$
$a = 3$	$1.40749921 \times 10^{-2}$	$-2.11584124 \times 10^{-2}$	$-7.06436727 \times 10^{-1}$	$-7.07319847 \times 10^{-1}$
$a = 4$	$5.84094614 \times 10^{-18}$	$-8.37388039 \times 10^{-18}$	$-6.12074422 \times 10^{-16}$	$-6.13058014 \times 10^{-16}$

表 3: gaugino の質量行列を対角化するためのユニタリ行列。上段が実部で下段が虚部をそれぞれ表す。

$\text{Re}U_i{}^j$	$j = 1$	$j = 2$	$\text{Im}U_i{}^j$	$j = 1$	$j = 2$
$i = 1$	$-9.97043970 \times 10^{-1}$	$7.68330827 \times 10^{-2}$	$i = 1$	$-2.92376714 \times 10^{-16}$	$9.05483611 \times 10^{-18}$
$i = 2$	$7.68330827 \times 10^{-2}$	$9.97043970 \times 10^{-1}$	$i = 2$	$-4.61092153 \times 10^{-17}$	$-7.73222256 \times 10^{-16}$

$\text{Re}V_i{}^j$	$j = 1$	$j = 2$	$\text{Im}V_i{}^j$	$j = 1$	$j = 2$
$i = 1$	$-9.99396601 \times 10^{-1}$	$3.47337437 \times 10^{-2}$	$i = 1$	$7.74343187 \times 10^{-16}$	0.00000000×10^0
$i = 2$	$3.47337437 \times 10^{-2}$	$9.99396601 \times 10^{-1}$	$i = 2$	0.00000000×10^0	$7.74343187 \times 10^{-16}$

表 4: chargino の質量行列を対角化するためのユニタリ行列。左側が実部で右側が虚部をそれぞれ表す。

最後に、HESS や Fermi Lat などによる観測による最新の暗黒物質に対する制限を見る。

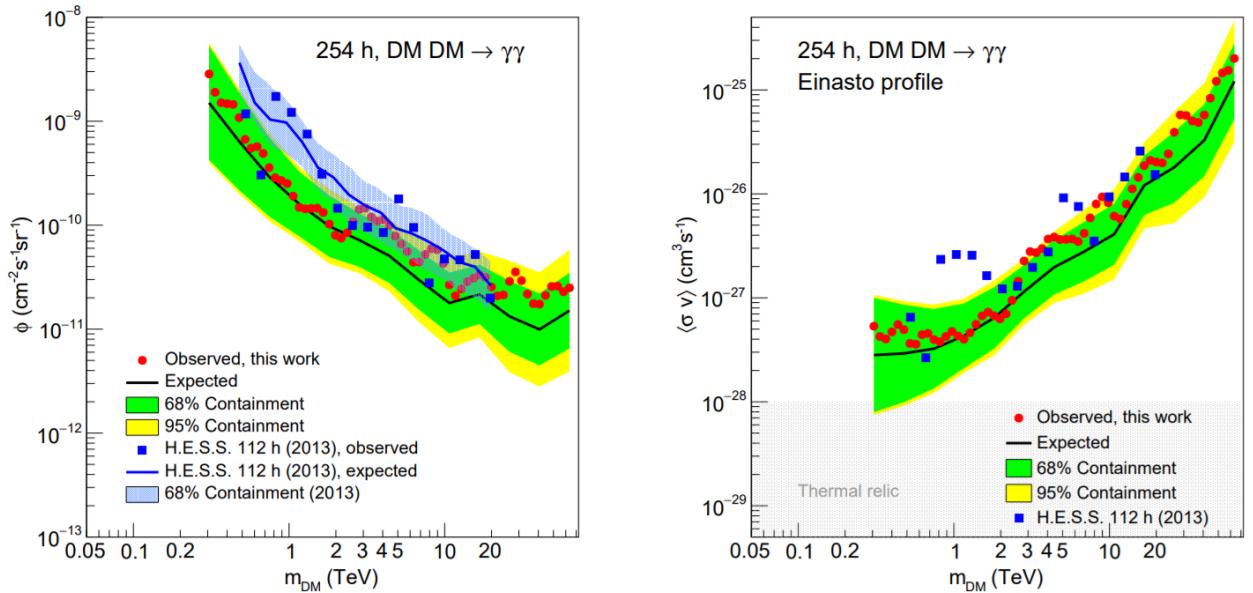


図 18: HESS[13] による暗黒物質への制限。左図が flux に対する制限で、右図が cross section に対する制限を表す。両方とも Einasto profile を用いている。([13] より引用)

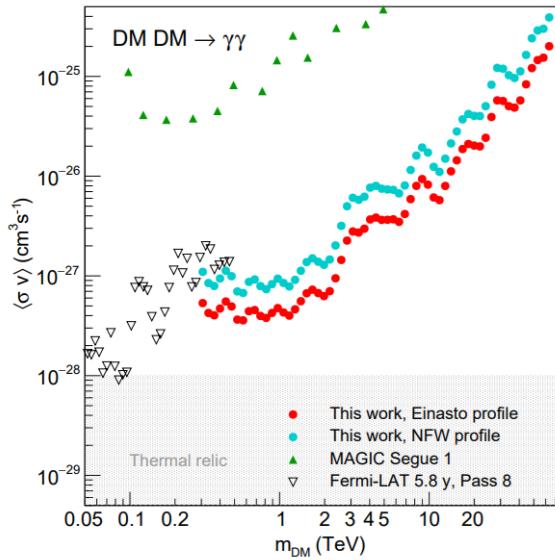


図 19: 他の観測との cross section への制限の比較。赤点と青点がそれぞれ [13] の Einasto profile、NFW profile による制限を表す。緑の三角が MAGIC による制限を表す [14]。黒の三角が Fermi-LAT による制限を表す [15]。([13] より引用)

これらの実験結果とこの論文で得られた結果は仮定している状況が同じではないので単純に比較することはできないが、ある程度の指標はできる。cross section、fluxについて比べてみると、cross sectionについては $\delta m = 0.00321(\text{GeV})$ の場合 $m = 380(\text{GeV})$ 付近では制限に引っかかっているかぎりぎりである。fluxについては、制限には引っかかっていないことが分かる。従って、将来、観測技術やバックグラウンドを取り除く方法などが進化すれば、暗黒物質が間接検出により発見される可能性は充分あるといえる。ただし、 δm を [12] で得られた値からはずらしてしまったので、coannihilation 機構により暗黒物質の残存量が観測と矛盾してくる可能性がある。今回はこの効果については計算できなかったので、残存量がどれくらい影響を受けるかについてを計算しなければならない。

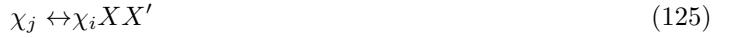
本論文では暗黒物質を説明する模型として、MSSM の範囲で、LSP neutralino を暗黒物質、NLSP として質量が縮退している粒子を slepton で考えた。この模型を考えた時に生じ得る、Sommerfeld enhancement の効果を計算した。[12] で得られたパラメータではこの効果は暗黒物質の質量が 1TeV 付近で生じたが、 $\delta m = 0.00321(\text{GeV})$ となれば、400GeV 付近でエンハンスを生じることが分かった。今回は計算していないが、 δm をいじることで残存量などの他の条件を満足しなくなる可能性がある。今後はそこのところの計算もやらなければならぬ。

Appendix

Coannihilation

観測技術の発達により暗黒物質の質量への制限はどんどんと厳しくなっている。この制限を回避するために質量を大きくしすぎてしまうと、cross section が小さくなってしまい、暗黒物質の残存量が多すぎてしまう。そこで coannihilation を考えることで観測からの制限と矛盾しないパラメータ領域を広げることができる。ここでは coannihilation について詳しく見ていく。

まず coannihilation を考えるべき状況は暗黒物質の他に暗黒物質と質量が同程度の粒子が存在する状況である。暗黒物質と、質量が縮退している粒子をそれぞれ $\chi_1, \chi_i (i > 1)$ とラベルし、それらの質量を $m_i (i = 1, 2, \dots)$ とする。ここで、質量の軽い順にラベルしているものとする。 χ_i の数密度を考えた時に、初期宇宙においてそれらの量を決める反応は標準模型の粒子を X としたとき



である。これらの反応を考慮したボルツマン方程式は χ_i, X の個数密度を n_i, n_X としたとき

$$\frac{dn_i}{dt} = -3Hn_i - \sum_{j,X} [\langle \sigma_{ij} v \rangle (n_i n_j - n_i^{eq} n_j^{eq}) - (\langle \sigma'_{ij} v \rangle n_i n_X - \langle \sigma'_{ji} v \rangle n_j n_{X'}) - \Gamma_{ij} (n_i - n_i^{eq})] \quad (126)$$

と書ける。ここで、 H はハッブルパラメータで、 n_i^{eq} は熱平衡状態での数密度である。cross section と decay rate はそれぞれ

$$\sigma_{ij} = \sigma(\chi_i \chi_j \rightarrow X X') \quad (127)$$

$$\sigma'_{ij} = \sigma(\chi_i X \rightarrow \chi_j X') \quad (128)$$

$$\Gamma_{ij} = \Gamma(\chi_i \rightarrow \chi_j X X') \quad (129)$$

と定義した。ボルツマン方程式の右辺一項目は宇宙の膨張による効果を表していて、二項目以降はそれぞれの反応による効果を表している。最終的に残った χ_i も χ_1 に崩壊していくので、 χ_i の全数密度 $n = \sum n_i$ が必要になってくる。従って、ボルツマン方程式は

$$\frac{dn}{dt} = -3Hn - \sum_{i,j} \langle \sigma_{ij} v \rangle (n_i n_j - n_i^{eq} n_j^{eq}) \quad (130)$$

と書きなおすことができる。

次に得られたボルツマン方程式を一粒子の時の方程式の形に落とし込むために必要な重要な仮定 $n_i/n \sim n_i^{eq}/n^{eq}$ を正当化するためには、全粒子数密度 n を変える反応 $\chi_i \chi_j \leftrightarrow X X'$ がほかの反応よりも弱いと言えればよいので、反応率の違いについてみていく。 $\chi_i X \leftrightarrow \chi_j X'$ の反応率との比を考えると、

$$n_X/n_j \sim (T/m_j)^{3/2} \exp(m_j/T) \sim 10^9 \quad (131)$$

となり、 $\chi_i X \leftrightarrow \chi_j X'$ の反応のほうがとても強いことが分かる。 $\chi_j \leftrightarrow \chi_i X X'$ の反応は一般的に他の反応よりも強いため先ほどの仮定 $n_i/n \sim n_i^{eq}/n^{eq}$ は正当であるといえる。この仮定を用いてボルツマン方程式をもう一度書きなおすと、

$$\frac{dn}{dt} = -3Hn - \langle \sigma_{eff} v \rangle (n^2 - n^{eq2}) \quad (132)$$

ここで、

$$\begin{aligned}\sigma_{eff} &= \sum_{ij} \sigma_{ij} \frac{g_i g_j}{g_{eff}^2} (1 + \Delta_i)^{3/2} (1 + \Delta_j)^{3/2} \exp[-x(\Delta_i + \Delta_j)] \\ \Delta_i &= (m_i - m_1)/m_1 \\ g_{eff} &= \sum_i g_i (1 + \Delta_i)^{3/2} \exp(-x\Delta_i)\end{aligned}$$

であり、 g_i は χ_i の自由度である。

書き直したボルツマン方程式を用いて、適切な freez out 時の温度 x_f を見積もると、

$$x_f = \ln \frac{0.038 g_{eff} m_{pl} m_1 \langle \sigma_{eff} v \rangle}{g_*^{1/2} x_f^{1/2}} \quad (133)$$

となり、これを用いて残存量は

$$\Omega h^2 \sim \frac{1.07 \times 10^9 x_f}{g_*^{1/2} m_{pl} (a_{11} I_a + 3b_{11} I_b / x_f)} \quad (134)$$

と書ける。ここで、 a_{11}, b_{11} は cross section を展開したときの係数で $\sigma_{ij} = a_{ij} + b_{ij}v^2$ であり、 I_a, I_b はそれぞれ σ_{eff} を展開したときの係数 $\sigma_{eff} = a_{eff} + b_{eff}v^2$ を用いて、

$$\begin{aligned}I_a &= \frac{x_f}{a_{11}} \int_{x_f}^{\infty} x^{-2} a_{eff} dx \\ I_b &= \frac{2x_f^2}{b_{11}} \int_{x_f}^{\infty} x^{-3} b_{eff} dx\end{aligned}$$

である。

緩和法

ここでは式 (111) を数値計算するときに用いた、2 点境界値問題を解くためのアルゴリズムである緩和法についてまとめる。1 階の N 元連立微分方程式

$$\frac{d\mathbf{y}_i}{dx} = \mathbf{g}(x, \mathbf{y}_i) \quad (135)$$

が点 x_1 で n_1 個の境界条件を、点 x_2 で残りの境界条件 $n_2 = N - n_1$ 個の境界条件を満足する問題を考える。まずはこの境界の間を $k = 1, 2, \dots, M$ の M 個のメッシュ点で分割する。さらに、微分方程式をこのメッシュ点上で差分方程式に置き換える例として、

$$0 = \mathbf{E}_k = \mathbf{y}_k - \mathbf{y}_{k-1} - (x_k - x_{k-1})\mathbf{g}_k(x_k, x_{k-1}, \mathbf{y}_k, \mathbf{y}_{k-1}) \quad k = 2, 3, \dots, M \quad (136)$$

のようにすることができる。さらに境界の端では境界条件として

$$0 = \mathbf{E}_1 = \mathbf{B}(x_1, \mathbf{y}_1) \quad (137)$$

$$0 = \mathbf{E}_{M+1} = \mathbf{C}(x_M, \mathbf{y}_M) \quad (138)$$

を満足する。ここで、のちの計算都合上 \mathbf{B} の持つ 0 でない成分 n_1 個を最後の成分に、 \mathbf{C} の持つ 0 でない成分 n_2 個を最初の成分とする。ここまでのことと具体的に式 (111) に即して考えると、この微分方程式は $[g_>]_{ij}$ の列について独立なものとなっているため、考えるのは 1 階の 8 元連立微分方程式を異なる境界条件で 2 回解くことと同義となる。式 (111) の一列目については、

$$y_{1,k} = \text{Re}[g_>(x_k)]_{00} \quad (139)$$

$$y_{2,k} = \text{Re}[g_>(x_k)]_{10} \quad (140)$$

$$y_{3,k} = \text{Im}[g'_>(x_k)]_{00} \quad (141)$$

$$y_{4,k} = \text{Re}[g'_>(x_k)]_{10} \quad (142)$$

$$y_{5,k} = \text{Im}[g_>(x_k)]_{00} \quad (143)$$

$$y_{6,k} = \text{Im}[g_>(x_k)]_{10} \quad (144)$$

$$y_{7,k} = \text{Re}[g'_>(x_k)]_{00} \quad (145)$$

$$y_{8,k} = \text{Im}[g'_>(x_k)]_{10} \quad (146)$$

とおいた。無限遠での境界条件より、ボーア半径の逆数を K として、

$$E_{1,1} = E_{2,1} = E_{3,1} = E_{4,1} = 0 \quad (147)$$

$$E_{5,1} = Ky_{1,1} + y_{7,1} \quad (148)$$

$$E_{6,1} = y_{8,1} - \sqrt{mE}y_{2,1} \quad (149)$$

$$E_{7,1} = Ky_{5,1} + y_{3,1} \quad (150)$$

$$E_{8,1} = y_{4,1} + \sqrt{mE}y_{6,1} \quad (151)$$

とし、原点での境界条件から、

$$E_{1,M+1} = y_{1,M} - 1 \quad (152)$$

$$E_{2,M+1} = y_{2,M} \quad (153)$$

$$E_{3,M+1} = y_{5,M} \quad (154)$$

$$E_{4,M+1} = y_{6,M} \quad (155)$$

$$E_{5,M+1} = E_{6,M+1} = E_{7,M+1} = E_{8,M+1} = 0 \quad (156)$$

とおいた。

続いて、初期推量の値 \mathbf{y}_k を与えた後により解に近づくようにするためのアルゴリズムを考える。考え方としては、 \mathbf{y}_k を少しずらした値 $\mathbf{y}_k + \Delta\mathbf{y}_k$ が式 (136) ~ (138) を満足するようになれば良い。つまり、境界の内点では、

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_k(\mathbf{y}_k + \Delta\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_{k-1} + \Delta\mathbf{y}_{k-1}) &\sim \mathbf{E}_k(\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_{k-1}) + \sum_{n=1}^N \frac{\partial \mathbf{E}_k}{\partial y_{n,k-1}} \Delta y_{n,k-1} + \sum_{n=1}^N \frac{\partial \mathbf{E}_k}{\partial y_{n,k}} \Delta y_{n,k} = 0 \\ &\rightarrow \sum_{n=1}^N S_{j,n} \Delta y_{n,k-1} + \sum_{n=N+1}^{2N} S_{i,n} \Delta y_{n-N,k} = -E_{i,k}, \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (157)$$

となる。ここで、 $S_{i,n}$ は $N \times 2N$ の行列で

$$S_{i,n} = \frac{\partial E_{i,k}}{\partial y_{n,k-1}}, \quad S_{i,n+N} = \frac{\partial E_{i,k}}{\partial y_{n,k}}, \quad n = 1, 2, \dots, N$$

と定義される。境界でも同じような議論により、最初の境界では

$$\sum_{n=1}^N S_{i,n} \Delta y_{n,1} = -E_{i,1}, \quad i = n_2 + 1, n_2 + 2, \dots, N \quad (158)$$

となる。ここで、

$$S_{i,n} = \frac{\partial E_{i,1}}{\partial y_{n,1}}, \quad n = 1, 2, \dots, N$$

である。もう片方の境界では、

$$\sum_{n=1}^N S_{i,n} \Delta y_{n,M} = -E_{i,M+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n_2 \quad (159)$$

となる。ここで、

$$S_{i,n} = \frac{\partial E_{i,M+1}}{\partial y_{n,M}}, \quad n = 1, 2, \dots, N$$

である。式 (157) ~ (159) の連立一次方程式を $\Delta y_{n,k}$ が十分小さくなるまで反復すればよい。具体的に、 $N = 5, M = 4, n_1 = 3, n_2 = 2$ の場合の解くべき行列の形を書くと、

$$\text{最初の境界 } \left(\begin{array}{c} S_{i,n}(3 \times 5) \\ S_{i,n}(5 \times 5) \quad S_{i,n+N}(5 \times 5) \\ S_{i,n}(5 \times 5) \quad S_{i,n+N}(5 \times 5) \\ S_{i,n}(5 \times 5) \quad S_{i,n+N}(5 \times 5) \\ S_{i,n}(2 \times 5) \end{array} \right) \Delta y_{n,k} = \left(\begin{array}{c} -E_{i,1} \\ -E_{i,2} \\ -E_{i,3} \\ -E_{i,4} \\ -E_{i,5} \end{array} \right) \quad (160)$$

となる。ここで、式 (137)、(138) で 0 の成分を調整したことで、式 (160) の最初の境界と最後の境界での行数を減らしていることが分かる。あとはこの行列を行基本変形を用いて対角成分が全て 1 なるようにすることができれば、後退代入により簡単に $\Delta y_{n,k}$ を求めることができる。以上が緩和法のアルゴリズムである。

謝辞

この論文を作成するために、佐藤丈准教授は毎週ゼミを見てくれただけでなく、気分転換に外への散歩にも誘つていただき本当に感謝いたします。さらにゼミと一緒に参加してくださった、高西康敬 PD、永山君、粕谷君、卒業された久保先輩にも大変お世話になりました。同期の小林、平良、寺口との何気ない雑談のおかげでつらいときも乗り越えることができました。さらに、同部屋で様々なことについて議論してくださった梁正樹 PD、上坂優一 PD、長谷川先輩のおかげでより知見を広げることができました。最後に 6 年間大学に通わせてくれた両親にありがとうございますと心を込めて言いたいです。

参考文献

- [1] V. C. Rubin, N. Thonnard, and W. K. Ford, Jr., "Rotational properties of 21 SC galaxies with a large range of luminosities and radii, from NGC 4605 /R = 4kpc/ to UGC 2885 /R = 122 kpc/," *Astrophys. J.* 238 (1980) 471.
- [2] <http://map.gsfc.nasa.gov>.
- [3] <http://www.kylab.sci.waseda.ac.jp/darkon2019/file/public/190705'darkon's1'3'Matsumoto.pdf>
- [4] S. P. Martin, pp. 1-153 (2010), [Adv. Ser. Direct. High Energy Phys.21,1(2010)], hep-ph/9709356.
- [5] K. Griest, D. Seckel, *Phys. Rev. D* 43, 3191(1991).
- [6] M. Lisanti, Lectures on Dark Matter Physics, in Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics: New Frontiers in Fields and Strings (TASI 2015) Boulder, CO, USA, June 1-26, 2015, 2016. arXiv:1603.03797.
- [7] 久後汰一郎、ゲージ場の量子論 I、培風館、初版 (2011)
- [8] J. Hisano, S. Matsumoto, M. M. Nojiri, and O. Saito, *Phys. Rev. D* 71,063528(2005).
- [9] J. F. Navarro, C. S. Frenk, and S. D. M. White, *Astrophys. J.* 490, 493(1997).
- [10] For reviews, G. Jungman, M. Kamionkowski and K. Griest, *Phys. Rept.* 267 195(1996); L. Bergstrom, *Rept. Prog. Phys.* 63 793(2000); C. Munoz, *Int. J. Mod. Phys. A* 19, 3093(2004); G. Bertone, D. Hooper and J. Silk, *Phys. Rept.* 405, 279(2005).
- [11] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, NUMERICAL RECIPES in C. 丹慶勝市, 奥村晴彦, 佐藤俊郎, 小林誠訳, 技術評論社, 初版 (2012).
- [12] M. Kubo, J. Sato, T. Shimomura, Y. Takanishi, and M. Yamanaka, *Phys.Rev. D* 97, 115013(2018)
- [13] H. Abdallah et al. (HESS collaboration), *Phys. Rev. Lett.* 120, 201101(2018), arXiv:1805.05741.
- [14] J. Aleksic et al. (MAGIC Collaboration), *JCAP* 1402, 008(2014), arXiv:1312.1535.
- [15] M. Ackermann et al. (Fermi-LAT), *Phys. Rev. D* 91, 122002(2015), arXiv:1506.00013.
- [16] J. Einasto *Trudy Inst. Astrofiz. Alma-Ata* 5(1965) 87.
- [17] A.Burkert, "The Structure of dark matter halos in dwarf galaxies," *IAU Symp.* 171(1996) 175, astro-ph/9504041.
- [18] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, An Introduction to Quantum Field Theory, PERSEUS BOOKS(1995).
- [19] M. Dohse, *TikZ-FeynHand: Basic User Guide*, arXiv:1802.00689.