

初期宇宙元素合成理論における リチウム問題とその解決策

平成 22 年度修了
物理機能系専攻 物理学コース
学籍番号：09MP108
須貝 顕一

概 要

現在の宇宙を構成している物質は、宇宙が誕生してから数分間で合成された軽元素を基に作られている。この軽元素合成の仕組みは初期宇宙元素合成理論により説明されており、この理論において予言された軽元素の存在量は現在の観測量と精度よく一致している。しかし数ある軽元素の中でリチウム (Li) の存在量においてのみ、理論における予言量と観測量の間に矛盾がみられ、予言量の方が大きな値を示している。これが初期宇宙元素合成理論における Li 問題である。この問題に対する解決策は現在までに広く議論されてきたが未だに発見されていない。本論文では、初めに初期宇宙元素合成理論について説明を行った後、以下に焦点を当てて Li 問題に対する解決策の説明を行う。Li 問題に対する解決策は大まかに、以下の二つに分けられる。

- 1 今までの理論計算、観測において修正すべき点が存在しているため、その修正を行う事で解決を図る。
- 2 理論において Li の存在量を減少させる新しい機構が存在していると考え、それを新たに理論に組み込むことによって解決を図る。

本論文では初めに 1) について原子核物理、宇宙論的な観点から考察を行い、これらの修正を行った上で Li 問題が解決され得るかを簡単に説明する。本論文では次に 2) について考える。その際、本論文では Li の存在量を減らす新しい機構を素粒子物理学における新しい模型の一つである Minimal Supersymmetric Standard Model(MSSM) に求める。この MSSM の枠組みでは、標準的な初期宇宙元素合成理論の枠組みでは存在し得ない長寿命荷電粒子が元素合成の時代に存在し得る。そしてこの粒子は Li と束縛状態を形成した後、Li を別の原子核へと変換する反応を引き起こすことが知られている。この反応によって Li の存在量が減少され、Li 問題が解決され得るのである。しかし、長寿命荷電粒子は上記した反応のみを引き起こすとは限らず、別の反応を引き起こし Li 以外の軽元素合成量を変える可能性がある。本論文では、特に長寿命荷電粒子が引き起こすヘリウム原子核 (He) 破碎反応が軽元素合成に与える影響について調べる。そして調べた He 破碎反応の影響を軽元素合成量計算に組み込み、軽元素合成量を算出する。この際、特に He 破碎反応により生じた He より質量数の小さい原子核であるトリチウム原子核 (t)、重水素原子核 (d)、中性子 (n) の存在量に注目し、それらの存在量が観測量との整合性を保てる事を示す。そして、計算した結果、Li 問題が解決され得る事を示す。

目次

第 1 章	初期宇宙元素合成理論	6
1.1	原子核の統計平衡状態 (Nuclear Statistical Equilibrium(NSE))	6
1.2	軽元素合成時代の初期 ($T \gg 1$ MeV , $t \ll 1$ Sec)	8
1.3	初期宇宙軽元素合成	12
1.3.1	$t = 10^{-2}$ Sec , $T = 10$ MeV	12
1.3.2	$t \simeq 1$ Sec , $T = T_F \simeq 1$ MeV	12
1.3.3	$t = 1$ Sec - 3 Min , $T = 0.3 - 0.1$ MeV	13
1.3.4	軽元素合成量の時間発展	14
1.4	軽元素合成量: 予言値	14
1.4.1	${}^4\text{He}$	15
1.4.2	d, ${}^3\text{He}$	16
1.4.3	${}^7\text{Li}$	16
1.4.4	${}^6\text{Li}$, $A \geq 9$ の元素	16
1.5	軽元素合成量: 観測値	17
1.5.1	${}^4\text{He}$	17
1.5.2	d	18
1.5.3	${}^7\text{Li}$	18
1.5.4	${}^6\text{Li}$	19
1.6	初期宇宙元素合成理論の観測との整合性	19
第 2 章	Li 問題の解決策 I	21
2.1	Li 問題の解決へ宇宙論的な観点からの考察	21
2.1.1	星の内部の熱輸送	21
2.1.2	星の対流活動	21
2.1.3	星内部における ${}^7\text{Li}$ の燃焼	23
2.1.4	原子拡散	23
2.1.5	初期宇宙における ${}^7\text{Li}$ 合成量の推定方法	24
第 3 章	Li 問題の解決策 II	26
3.1	$\bar{\nu}$ 触媒合成反応	26
3.2	$\bar{\nu}$ 核種変換反応	27
3.3	${}^4\text{He}$ 破砕反応	27
3.3.1	$(\bar{\nu}{}^4\text{He}) \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 + \nu_\tau + t + n$	29
3.3.2	$(\bar{\nu}{}^4\text{He}) \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 + \nu_\tau + d + n + n$	30
3.3.3	$(\bar{\nu}{}^4\text{He}) \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 + \nu_\tau + p + n + n + n$	30

3.3.4 結果	31
3.4 軽元素合成量の説明	32
第 4 章 まとめ	36
Acknowledgments	37
付 録 A 原子核反応率の計算	38
A.1 熱核反応の運動学	38
A.2 核反応率	38
付 録 B $\tilde{\tau}$ 触媒合成反応のタイムスケール計算	42
付 録 C ${}^4\text{He}$ 破砕反応の計算	44
C.1 反応振幅計算-leptonic part-	44
C.2 反応振幅計算-hadronic part-	49
C.2.1 原子核の波動関数	50
C.2.2 始状態、終状態の各原子核の波動関数	55
C.2.3 $(\tilde{\tau}^4\text{He}) \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 + \nu_\tau + t + n$ の hadronic part	62
C.2.4 $(\tilde{\tau}^4\text{He}) \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 + \nu_\tau + d + n + n$ の hadronic part	80
C.2.5 $(\tilde{\tau}^4\text{He}) \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 + \nu_\tau + p + n + n + n$ の hadronic part	106
C.3 反応振幅計算-全体-	114
C.3.1 $(\tilde{\tau}^4\text{He}) \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 + \nu_\tau + t + n$ の反応振幅計算	114
C.3.2 $(\tilde{\tau}^4\text{He}) \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 + \nu_\tau + d + n + n$ の反応振幅計算	115
C.3.3 $(\tilde{\tau}^4\text{He}) \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 + \nu_\tau + p + n + n + n$ の反応振幅計算	115
C.4 反応断面積計算	116
C.4.1 $(\tilde{\tau}^4\text{He}) \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 + \nu_\tau + t + n$ の反応断面積計算	116
C.4.2 $(\tilde{\tau}^4\text{He}) \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 + \nu_\tau + d + n + n$ の反応断面積計算	122
C.4.3 $(\tilde{\tau}^4\text{He}) \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 + \nu_\tau + p + n + n + n$ の反応断面積計算	136
C.5 パラメーター	144
参考文献	145

導入

現在の観測から、我々自身や恒星を構成しているバリオンが宇宙のエネルギー密度のわずか 4% 程しか占めていない事が知られている。しかし、その元素組成や起源を明らかにする事は宇宙物理学の重要な研究テーマの一つである。まず、現在の宇宙の元素組成を表すと図 1 のようになる。これは各元素の存在量の数量比を原子番号 (Z) 順、つまり原子核に含まれる陽子 (p) の数が少ない順に並べたものである。重量比で 70% 以上と非常に大きな比率を占めるのは p であり、次に大きいのはヘリウム原子核 (^4He) である。

これ以外の重元素の存在量は桁違いに少なく、全てを合わせても数% に過ぎない。これらの重元素は恒星の内部で ^4He を素に核融合反応で合成することが知られている。それでは、これらの重元素の素となる ^4He はどのようにして合成されたのだろうか? 重元素と同じく、 ^4He も恒星の内部で p を素に核融合反応で合成され、この時放出されるエネルギーが恒星のエネルギー源となっている。この核融合反応は非常に大きなエネルギーを放出するため、もしも現在存在する 28% の ^4He が全て恒星の内部で合成されたとすると、星は非常に長く明るく光り続けるため、銀河の光度の観測に矛盾が生じる。さらに、観測から重元素の存在量は観測する星の年齢によって様々であるが、 ^4He の存在量は観測する星に関係なく、大きく変化しないことが知られている。したがって、 ^4He は宇宙初期に合成されたと考えざるを得なくなる。

宇宙の温度が数 MeV から 0.01MeV に下がる間に、図 2 で表されているように、p と中性子 (n) から重水素原子核 (D) が合成され、それを素に ^4He が合成される。また、 ^4He と他の原子核が反応する事により少量のリチウム原子核 (^7Li)、ベリリウム原子核 (^7Be) などが合成される。

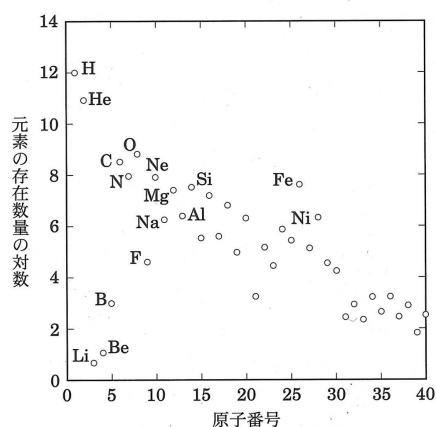


図 1: 元素の存在数量比 [6]

水素の存在量を 10^{12} に規格化している

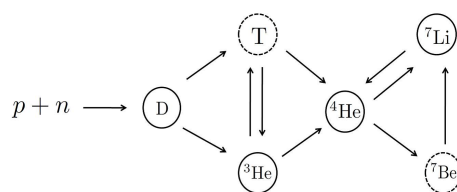


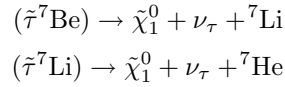
図 2: 宇宙初期の元素合成における主要な反応。点線で囲まれている原子核は不安定原子核である

このように比較的軽い元素である D, ^4He , ^7Li が宇宙初期に合成される過程が初期宇宙元素合成である。この初期宇宙元素合成理論は現在の宇宙に存在する D, ^4He などの存在量を見事に説明している。しかし、 ^7Li の存在量においては観測との矛盾が生じており、理論から予言される ^7Li の存在量が観測量に比べて 3 倍ほど大きくなる。これが初期宇宙元素合成理論における Li 問題である。

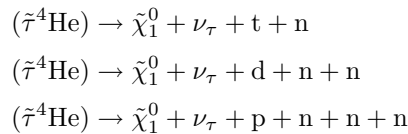
この問題に対する解決策は現在までに広く議論されているが、未だに確定的な解決策は存在していない。本論文では Li 問題の解決策に対して、天文学的な観点、及び素粒子論的な観点からの考察を行う。

天文学的な観点からの考察では、恒星内部の活動に注目する。Li 問題が存在する要因として、現在観測されている ^7Li の存在量が初期宇宙における合成量と異なる事が挙げられる [1]。恒星の表面に存在する ^7Li は重力の影響により、観測することが困難な恒星の内部へと運ばれると考えられる。また、重力以外にも恒星の対流活動により、恒星の表面にある ^7Li が恒星の内部へと運ばれ、燃焼される事でその存在量自体が減少する事も考えられる。そのため現在観測されている ^7Li の存在量は、初期宇宙における合成量が恒星内部の活動により減少し、残った量と考えられる。ゆえに恒星内部の活動による ^7Li の減少量が、初期宇宙元素合成理論から予言される ^7Li の合成量と現在の観測量との矛盾を説明する事が出来れば、Li 問題は解決すると考えられる。

素粒子論的な観点からの考察では、初期宇宙元素合成理論において ^7Li の存在量を減らす新しい機構が存在すると考え、それを素粒子物理学における新たな模型の一つである MSSM に求める。この MSSM の枠組みでは、標準的な初期宇宙元素合成理論の枠組みでは考えられなかった長寿命荷電粒子が元素合成の時代に存在すると考えられる。この長寿命荷電粒子の候補として、タウレプトンの Superpartner であるスタウ ($\tilde{\tau}$) の存在が知られている [2]。そして、長寿命 $\tilde{\tau}$ が引き起こす ^7Li の存在量を減らす反応として、以下の反応が知られている [3]。



この反応において $\tilde{\chi}_1^0$ は $\tilde{\tau}$ の崩壊により生じる超対称粒子ニュートラリーノを、 ν_τ はタウニュートリノを表している。この反応は $\tilde{\tau}$ が原子核と束縛状態を形成した後、別の原子核へと変換する反応である。この反応を考慮して初期宇宙元素合成を考えた時、Li 問題が解決され得る事が [3] によって示された。しかし、 $\tilde{\tau}$ は上記した反応のみを引き起こすとは限らず、別の反応を引き起こし ^7Li 以外の軽元素存在量を変える可能性がある。そのような反応として挙げられるものが、以下の反応である。



この反応では ^4He より質量数の小さい原子核である t, d, n が新たに合成されている。そのため、この枠組みで初期宇宙元素合成理論を考え Li 問題の解決を示すには、上記した反応の影響を含めて軽元素の存在量を計算し、それが ^7Li のみならず他の軽元素存在量の観測値と整合することを示さなければならない。

本論文の構成は以下のとおりである。まず第一章にて、初期宇宙元素合成理論について説明を行う。その際、この理論において予言される軽元素合成量の予言値、また現在の軽元素存在量の観測値として最新のものを紹介して説明を行う。尚、この説明に関しては、主に [4],[5],[6],[7] を参考にした。

第二章では、Li 問題に対する解決策として天文学的な観点から考察を行う。その際、特に星の活動のが ^7Li の存在量に与える影響に焦点をおき、これについて説明を行う。尚、この説明に関して、主に [8],[9] を参考にした。

そして第三章にて、MSSM の枠組みにおける Li 問題の解決方法について論じる。ここでは特に ${}^4\text{He}$ 破碎反応が軽元素合成に与える影響について説明を行う。そして ${}^4\text{He}$ 破碎反応を含めて軽元素合成量を計算し、その結果導出された軽元素の合成量が観測量と矛盾のないことを示し、それを持って Li 問題が解決され得る事を示す。

第1章 初期宇宙元素合成理論

1.1 原子核の統計平衡状態

(Nuclear Statistical Equilibrium(NSE))

初めに初期宇宙における元素合成を理解するための準備として、各軽元素間に統計平衡状態が成り立つと考えた時に、各軽元素の存在量が如何に表されるかを考える。この事について説明を行うために、まず宇宙において軽元素間に統計平衡状態が成り立つための条件、及び各平衡状態の定義を行う。

非平衡状態にある系が平衡状態に落ち着くためには平衡化に向かう反応が十分に生じる必要がある。すなわち、反応に要する時間よりも十分長い時間が経ち、初めて平衡状態が成立する。静的な系であればただ時間が経過するだけで平衡状態が成立する。しかし、宇宙は膨張しているため、反応に要する時間が考えている宇宙の年齢よりも長いと、反応が生じる事に宇宙が膨張してしまい、反応時間の計算に用いる温度、密度が正しくなくなると考えられる。したがって、平衡状態が成立するためには平衡化に向かう反応が、宇宙年齢に比べ十分に早く生じていなければならない。これを式で表すと以下となる。

$$\Gamma \gg H \quad (1-1-1)$$

この式において Γ は平衡化に向かう反応の反応率を表しており、 H はハッブル定数を表している。一回の反応に要する時間は Γ^{-1} で表され、また宇宙年齢は $t \approx H^{-1}$ より表されるため、この式は平衡化に向かう反応が、宇宙年齢に比べ十分に早く生じる事を表している。これが成立することが平衡状態が成立する条件である。ある原子核が存在している系に対して平衡状態が成立している事をその原子核の統計平衡状態 (Nuclear Statistical Equilibrium(NSE)) が成り立つという。

進化する宇宙においては様々な反応が様々なタイムスケールで生じているため、それに付随して平衡状態も、どのような反応が十分活発に起こるかにより以下の三種類に大別できる。

- 運動学的平衡

これは反応の前後で粒子の種類が変わらない、弾性散乱のみが活発に生じている状態である。

- 化学平衡

上記の反応に加え、反応前後で粒子の種類が変わるような反応も宇宙膨張のタイムスケールよりも早く起こっている状態である。位相空間での分布関数の形は運動学的平衡状態の場合と同じであるが、例えば $abc \cdots \leftrightarrow ijk \cdots$ という反応が十分活発に起こっているとすると、それらの化学ポテンシャル間に、 $\mu_a + \mu_b + \mu_c + \cdots = \mu_i + \mu_j + \mu_k + \cdots$ という関係が成り立つ。

- 熱平衡

最上位の平衡状態であり、考え得る全ての反応が宇宙膨張のタイムスケールより早く生じている状態である。エントロピーが最大になるのは、化学ポテンシャルが全て 0 となる状態であるため、非保存量に対応した化学ポテンシャルは全て 0 になる

A_Z	B_A	g_A
${}^2_1\text{H}$	2.22 MeV	3
${}^3_1\text{H}$	6.92 MeV	2
${}^3_2\text{He}$	7.72 MeV	2
${}^4_2\text{He}$	28.3 MeV	1
${}^{12}_6\text{C}$	92.2 MeV	1

表 1.1: 軽元素の束縛エネルギー [5]

以上を考慮して説明を行う。運動学的平衡状態において、質量数 A 、電荷 Z を持つ、非相対論的な原子核種の個数密度は、以下の式で表される。

$$n_A = g_A \left(\frac{m_A T}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left(\frac{\mu_A - m_A}{T} \right) \quad (1-1-2)$$

ここで、 μ_A は原子核種の化学ポテンシャルを表している。もしも、 Z 個の p と、 $A-Z$ 個の n から、質量数 A の原子核種を生成する反応が H よりも十分早く起こる、すなわち反応のタイムスケールが当時の宇宙年齢よりも十分短ければ、化学平衡状態も得る事が出来る。化学平衡状態においては、質量数 A の原子核種の化学ポテンシャルは、 p の化学ポテンシャル、 n の化学ポテンシャルと以下の関係で結びついている。

$$\mu_A = Z\mu_p + (A-Z)\mu_n \quad (1-1-3)$$

(1-1-2) は p 、 n に対して適用することが出来る。この事を用いると化学平衡状態が成り立っている時、原子核の個数密度の式中の化学ポテンシャルの部分を p 、 n の個数密度で表すことが出来る。

$$\begin{aligned} \exp \left(\frac{\mu_A}{T} \right) &= \exp \left[\frac{Z\mu_p + (A-Z)\mu_n}{T} \right] \\ &= n_p^Z n_n^{A-Z} \left(\frac{2\pi}{m_N T} \right)^{\frac{3}{2}A} 2^{-A} \exp \left[\frac{Zm_p + (A-Z)m_n}{T} \right] \end{aligned} \quad (1-1-4)$$

$\exp$ の部分を原子核種の束縛エネルギーで表すことにする。ここで、原子核種 A の束縛エネルギーは以下のように定義される。

$$B_A \equiv Zm_p + (A-Z)m_n - m_A \quad (1-1-5)$$

以上の事を用いると、質量数 A の原子核種の個数密度は以下で表される。

$$n_A = g_A A^{\frac{3}{2}} 2^{-A} \left(\frac{2\pi}{m_N T} \right)^{\frac{3(A-1)}{2}} n_p^Z n_n^{A-Z} \exp \left(\frac{B_A}{T} \right) \quad (1-1-6)$$

幾つかの軽元素についての束縛エネルギーは表 1.1 で表される。

宇宙が膨張していると考え、ある粒子の個数密度はスケールファクターを R としたとき、 R^{-3} で減少していく。これは宇宙膨張に伴って変化する量であるため、ここでは新たに全核子の密度を $n_N = n_n + n_p + \sum_i (An_A)_i$ として、宇宙膨張に対して変化しない基準量として用いる。さらに全核子量のうち質量数 A の原子核種が占める割合 (質量分率とする) を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} X_A &\equiv \frac{n_A A}{n_N} \\ \sum_i X_i &= 1 \end{aligned} \quad (1-1-7)$$

この定義を用いると、原子核の NSE 状態にて、質量数 A の原子核種の質量分率が以下で得られる。

$$X_A = g_A \left[\zeta(3)^{A-1} \pi^{\frac{1-A}{2}} 2^{\frac{3A-5}{2}} \right] A^{\frac{5}{2}} \left(\frac{T}{m_N} \right)^{\frac{3(A-1)}{2}} \times \eta^{A-1} X_p^Z X_n^{A-Z} \exp \left(\frac{B_A}{T} \right) \quad (1-1-8)$$

ここで、式中の η_b は現在の宇宙のバリオンの量に対する光子 (γ) の量の比であり、以下の様に定義される。

$$\eta_b \equiv \frac{n_N}{n_\gamma} \quad (1-1-9)$$

以上の知識を用いて、初期宇宙における軽元素合成について説明を行う。

1.2 軽元素合成時代の初期 ($T \gg 1 \text{ MeV}$, $t \ll 1 \text{ Sec}$)

宇宙の軽元素合成の様子を説明するにあたり、まずはじめに宇宙の温度が $1[\text{MeV}]$ よりはるかに高い状況を考える。この時、宇宙に存在している p と n は以下の反応によって互いに入れ替わる事が出来る。

$$n \leftrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad (1-2-1)$$

$$\nu_e + n \leftrightarrow p + e^- \quad (1-2-2)$$

$$e^+ + n \leftrightarrow p + \bar{\nu}_e \quad (1-2-3)$$

この反応のタイムスケールが考えている宇宙年齢より十分早い時、化学平衡状態が得られ各粒子の化学ポテンシャルは以下の関係で結びつく。

$$\mu_n + \mu_\nu = \mu_p + \mu_e \quad (1-2-4)$$

これより、化学平衡状態が成り立っている時、 n と p の個数密度の比は以下で表される。

$$\frac{n}{p} \equiv \frac{n_n}{n_p} = \frac{X_n}{X_p} = \exp \left[-\frac{Q}{T} + \frac{\mu_e - \mu_\nu}{T} \right] \quad (1-2-5)$$

ここで、式中の Q は n と p の静止エネルギーの差であり、 $Q \equiv m_n - m_p = 1.293 \text{ MeV}$ となる。

この式中の化学ポテンシャルによる寄与は以下を考えると静止エネルギーの差による寄与に比べ、非常小さく無視できると考えられる。

まずはじめに、電子 (e) の化学ポテンシャルからの寄与を考える。この化学ポテンシャルの寄与は、この時代の e 、 γ の個数密度 n_e, n_γ が

$$n_\gamma = \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T^3 \quad (1-2-6)$$

$$n_e = \frac{2}{\pi^2} \exp \left(\frac{\mu}{T} \right) T^3 \quad (1-2-7)$$

で表されることから、 $\frac{\mu_e}{T} \sim \frac{n_e}{n_\gamma}$ で表される。さらに、宇宙が中性である事から $n_e = n_p$ とする事ができ、結局

$$\exp \left(\frac{\mu_e}{T} \right) \sim \frac{n_p}{n_\gamma} \sim \eta_b \quad (1-2-8)$$

となる。ゆえに $\eta_b \sim 10^{-10}$ であることから、この部分の寄与は非常に小さいことが分かる。

次に ν_e の化学ポテンシャルの寄与について、これは ν_e のレプトン数が非常に小さいことから寄与が小さくなると考えられる。

以上の事を考えると、化学平衡状態における n, p の比は、以下のような式で表される。

$$\left(\frac{n}{p}\right)_{\text{EQ}} = \exp\left(-\frac{Q}{T}\right) \quad (1-2-9)$$

これを表すと、図 1.1 のようになる。

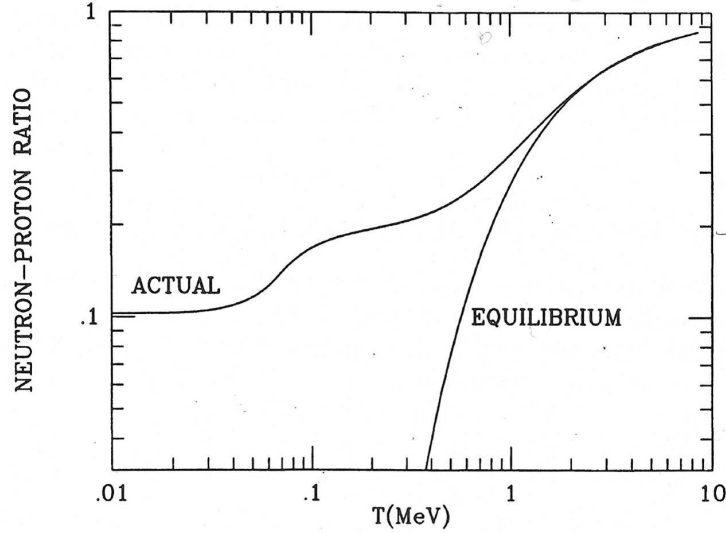


図 1.1: n と p の比を表した図 [5]。

NSE 状態が保たれたと考えた時の存在比と n - p 比が凍結した場合の存在比が描かれている

次に、 p と n を入れ替える反応の反応率を考える。これらの反応の単位時間、一核子当りの反応率は、求める反応過程の反応振幅の二乗に粒子の位相空間密度をかけたものを終状態の全ての運動量で積分することで得る事が出来る。また、この計算を行う際、エネルギー・運動量保存を課するため、デルタ関数をかける。たとえば、 p が n に変換する反応の反応率は、以下で表される。

$$\Gamma_{p \rightarrow \nu n} = \int f_e(E_e) [1 - f_\nu(E_\nu)] |M|_{pe \rightarrow \nu n}^2 (2\pi)^{-5} \delta(p + e - \nu - n) \times \frac{d^3 p_e}{2E_e} \frac{d^3 p_\nu}{2E_\nu} \frac{d^3 p_n}{2E_n} \quad (1-2-10)$$

この式において、 E_i は粒子 i のエネルギーを、 p_i は粒子 i の運動量を、 $f_i(E_i)$ は粒子 i の位相空間密度を表している。また、デルタ関数は始状態である p, e のエネルギー・運動量が終状態である ν, n と等しい事を表している。上記で記した n と p を入れ替える全ての反応に共通して、反応振幅は n の β -崩壊の反応振幅に比例した形で表される。

$$|M|^2 \propto G_F^2 (1 + 3g_A^2) \quad (1-2-11)$$

この式において、 $g_A \simeq 1.26$ は核子の軸性ベクトル結合定数を表し、また G_F はフェルミ定数を表している。この因子は n の寿命 ($\equiv \tau_n$) によって以下で表される。

$$\tau_n^{-1} = \Gamma_{n \rightarrow p e \nu} = \frac{G_F^2}{2\pi^3} (1 + 3g_A^2) m_e^5 \lambda_0 \quad (1-2-12)$$

ここで、 $\lambda_0 \sim 1.636$ であり、これは n の崩壊についての位相空間積分から得られる因子である。

Q と e の質量 ($\equiv m_e$) はこれらの反応の反応率についての積分範囲の上限と下限を定める。次のように無次元量を定義する。

$$q = \frac{Q}{m_e}, \quad \epsilon = \frac{E_e}{m_e}, \quad z = \frac{m_e}{T}, \quad z_\nu = \frac{m_e}{T_\nu}$$

すると、今考えている p から n への変換反応の反応率は、以下で表される。

$$\Gamma_{pe \rightarrow \nu n} = \frac{1}{\tau_n \lambda_0} \int_q^\infty d\epsilon \frac{\epsilon(\epsilon - q)^2 \sqrt{\epsilon^2 - 1}}{[1 + \exp(\epsilon z)][1 + \exp((q - \epsilon)z_\nu)]} \quad (1-2-13)$$

高温極限、低温極限での振る舞いは、以下のようになる。

$$\Gamma_{pe \rightarrow \nu n} \longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\tau_n} \left(\frac{T}{m_e} \right)^3 \exp\left(-\frac{Q}{T}\right) & T \ll Q, m_e \\ \frac{7}{60} \pi (1 + 3g_A^2) G_F^2 T^5 & T \gg Q, m_e \end{cases} \quad (1-2-14)$$

NSE 状態が成立するかを確かめるため、この反応の反応率と考えている時代の宇宙の膨張率とを比較する。この時代の宇宙が輻射優勢宇宙である事を考慮すると、膨張率は以下のように表される。

$$H \simeq 1.66 g_*^{1/2} \frac{T^2}{m_{\text{pl}}} \simeq 5.5 \frac{T^2}{m_{\text{pl}}} \quad (1-2-15)$$

ここで、 g_* は存在している相対論的粒子種の全自由度を足し合わせた数を表しており、また $m_{\text{pl}} (= 1.22089 \times 10^{19}) [\text{GeV}]$ はプランク質量を表している。これより、反応率と膨張率の比は以下で表される。

$$\frac{\Gamma}{H} \sim \left(\frac{T}{0.8 \text{ MeV}} \right)^3 \quad (1-2-16)$$

この式から、宇宙の温度が 0.8 MeV より高い時、反応は化学平衡状態が成り立つほど十分速く生じているため、 n と p の比はこの平衡状態の値と等しくなる。

宇宙温度が数 MeV より高い時、弱い相互作用による反応の反応率だけが H より高くなるのではなく、軽元素を形成する原始核反応の反応率も同様に高くなる。簡単のため、核子 n, p と質量数の小さい原子核である d , ^3He , ^4He 、炭素原子核 (^{12}C) の質量分率を考える。NSE 状態においては、これらの質量分率は以下の式で表される。

$$\frac{X_n}{X_p} = \exp\left(-\frac{Q}{T}\right) \quad (1-2-17)$$

$$X_2 = 16.3 \left(\frac{T}{m_N} \right)^{\frac{3}{2}} \eta_b \exp\left(\frac{B_2}{T}\right) X_n X_p \quad (1-2-18)$$

$$X_3 = 57.4 \left(\frac{T}{m_N} \right)^3 \eta_b^2 \exp\left(\frac{B_3}{T}\right) X_n X_p^2 \quad (1-2-19)$$

$$X_4 = 113 \left(\frac{T}{m_N} \right)^{\frac{9}{2}} \eta_b^3 \exp\left(\frac{B_4}{T}\right) X_n^2 X_p^2 \quad (1-2-20)$$

$$X_{12} = 3.22 \times 10^5 \left(\frac{T}{m_N} \right)^{\frac{33}{2}} \eta_b^{11} \exp\left(\frac{B_{12}}{T}\right) X_n^6 X_p^6 \quad (1-2-21)$$

$$1 = X_n + X_p + X_2 + X_3 + X_4 + X_{12} \quad (1-2-22)$$

各原子核種の質量分率を宇宙温度の関数として表してものが図 1.2 である。

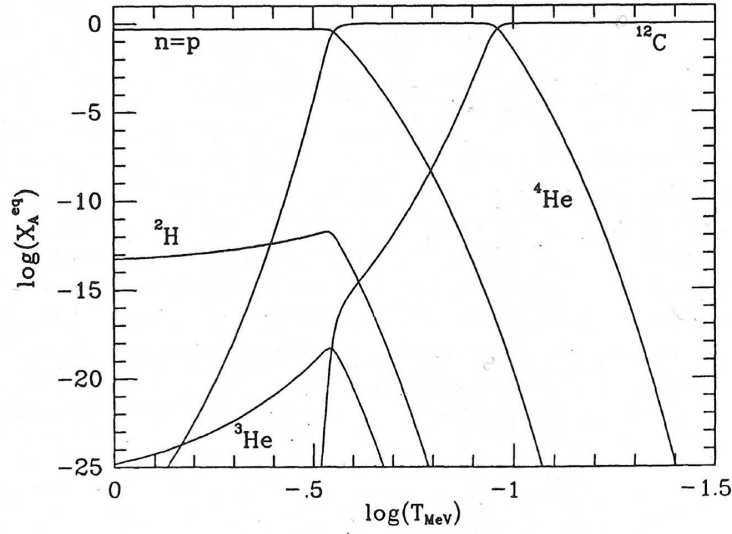


図 1.2: 各原子核種の質量分率を宇宙温度の関数として表した図 [5]

注目すべき点は、一核子辺りの原子核の束縛エネルギーが $O(1 \sim 8)$ MeV であるのにも関わらず、質量分率の値が $O(1)$ になるのは宇宙温度が $O(0.3)$ MeV まで下がってからとなる点である。これは宇宙が非常に高エントロピー状態、すなわちバリオンの存在量に対して γ の存在量が圧倒的に多いため、宇宙温度が $O(1)$ MeV 程度に下がったとしても原子核の束縛を破壊する事のできる γ の量が多いためである。

ここでは粗い近似 ($X_n \sim X_p \sim 1$) により、各原子核種の質量分率が 1 となる時の宇宙温度 ($\equiv T_{\text{NUC}}$) を求める。これは以下のように表される。

$$T_{\text{NUC}} \simeq \frac{1}{A-1} \frac{B_A}{\ln(\eta_b^{-1}) + 1.5 \ln(m_N/T)} \quad (1-2-23)$$

各原子核種の値をあらわに表してやると、以下のようになります。

$$d \Rightarrow T_{\text{NUC}} \simeq 0.07 \text{ MeV} \quad (1-2-24)$$

$${}^3\text{He} \Rightarrow T_{\text{NUC}} \simeq 0.11 \text{ MeV} \quad (1-2-25)$$

$${}^4\text{He} \Rightarrow T_{\text{NUC}} \simeq 0.28 \text{ MeV} \quad (1-2-26)$$

$${}^{12}\text{C} \Rightarrow T_{\text{NUC}} \simeq 0.25 \text{ MeV} \quad (1-2-27)$$

宇宙温度が数 MeV より十分に低くならない限り、各軽元素の存在量が大きくならないのは、d の束縛エネルギーが低い事にも起因する。各軽元素は d を素に合成される。この d の束縛エネルギーが高いとすると、宇宙温度がより高い時期で d の合成が行われ、逆に束縛エネルギーが低いとすると、それだけ宇宙温度が低くならないと d の合成が行われない。よって、各軽元素の存在量が低いのは d の束縛エネルギーが低いために軽元素合成の生じる時期が遅いからといえる。そして、この事を "deuterium bottleneck" と呼ぶ。事実、 ${}^4\text{He}$, ${}^{12}\text{C}$ の NSE 状態の存在量は宇宙温度が 0.3 MeV 以下にならないと大きな値をとらない。

1.3 初期宇宙軽元素合成

ここでは軽元素合成が如何にして行われるかを宇宙温度が高い時期から低い時期へと三段階にわけて説明していく。

1.3.1 $t = 10^{-2}$ Sec , $T = 10$ MeV

この時代では、宇宙のエネルギー密度は輻射優勢になっており、相対論的粒子は $e^\pm$ 、 γ 、3 種のニュートリノである。そして、このことから相対論的粒子の自由度の合計は $g_* = 10.75$ となっている。またこの時代では、弱い相互作用による全ての反応の反応率は、宇宙膨張率より非常に高くなっている。よって、

$$\left(\frac{n}{p}\right) = \left(\frac{n}{p}\right)_{\text{EQ}} \simeq 1 \quad T_\nu = T$$

が成り立つ。NSE 状態中にある軽元素は η_b の値が非常に小さいため、小さい値をとる。例えば、 $\eta_b = 10^{-9}$ の時

$$X_n, X_p = 0.5 \quad (1-3-1)$$

$$X_2 = 4.1 \left(\frac{T}{m_N}\right)^{\frac{3}{2}} \eta_b \exp\left(\frac{2.22}{T_{\text{MeV}}}\right) \simeq 6.0 \times 10^{-12} \quad (1-3-2)$$

$$X_3 = 7.2 \left(\frac{T}{m_N}\right)^3 \eta_b^2 \exp\left(\frac{7.72}{T_{\text{MeV}}}\right) \simeq 2 \times 10^{-23} \quad (1-3-3)$$

$$X_4 = 7.1 \left(\frac{T}{m_N}\right)^{\frac{9}{2}} \eta_b^3 \exp\left(\frac{28.3}{T_{\text{MeV}}}\right) \simeq 2 \times 10^{-34} \quad (1-3-4)$$

$$X_{12} = 79 \left(\frac{T}{m_N}\right)^{\frac{33}{2}} \eta_b^{11} \exp\left(\frac{92.2}{T_{\text{MeV}}}\right) \simeq 2 \times 10^{-126} \quad (1-3-5)$$

ここで温度は $T_{\text{MeV}} = \frac{T}{\text{MeV}}$ として無次元量で表されている。

1.3.2 $t \simeq 1$ Sec , $T = T_F \simeq 1\text{MeV}$

この時代より少し前に 3 種のニュートリノが熱浴から脱結合¹する。そしてその後、宇宙温度が $T \simeq \frac{m_e}{3}$ になるまで $e^\pm$ 対は γ にのみ対消滅し、エントロピーを寄与する。その結果、 ν の温度に比べ、 γ の温度の方が $\left(\frac{11}{4}\right)^{1/3}$ だけ高くなる。

この時期になると、弱い相互作用を媒介にする n と p を入れ替える反応が凍結、すなわちこの反応の反応率が H より小さくなり、事実上反応が起きなくなる。この凍結が起こる際の n と p の比は、以下ようになる。

$$\left(\frac{n}{p}\right)_{\text{freeze out}} = \exp\left(-\frac{Q}{T_F}\right) \simeq \frac{1}{6} \quad (1-3-6)$$

しかし、この反応の凍結が生じた後でも、自由な n の自然崩壊などにより n の量が減少するため、 n と p の比はこの値で一定に保たれるのではなく少し減少する。この時期においても、各原子核種は NSE

¹ 脱結合とは考えている粒子の平衡状態が保たれなくなる事をいう。

状態にあり、その存在量はとても小さくなっている。

$$X_n \simeq \frac{1}{7} \quad (1-3-7)$$

$$X_p \simeq \frac{1}{6} \quad (1-3-8)$$

$$X_2 \simeq 10^{-12} \quad (1-3-9)$$

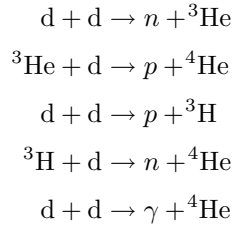
$$X_3 \simeq 10^{-23} \quad (1-3-10)$$

$$X_4 \simeq 10^{-28} \quad (1-3-11)$$

$$X_{12} \simeq 10^{-108} \quad (1-3-12)$$

1.3.3 $t = 1 \text{ Sec} - 3 \text{ Min}$, $T = 0.3 - 0.1 \text{ MeV}$

この時期になると、 $e^\pm$ も相対論的粒子ではなくなるため、 g_* の値が現在の値まで減少する。宇宙温度が 0.3 MeV の時、 ^4He の質量分率は NSE 状態にある時の値に急激に近づく。しかしこの時期の少し前、宇宙温度が 0.5 MeV の時、存在する ^4He の量は、NSE 状態にある時の存在量より低くなっている。これは、下に記したこの時期における ^4He を形成する一連の合成反応が、 ^4He を NSE 状態とする程大きくないことに起因する。



これらの反応の反応率が ^4He を NSE 状態にする程に大きくならない理由として 2 つ挙げられる。まず初めに、これらの反応において必要な各原子核 ($d, ^3\text{He}, ^3\text{H}$) の存在量自体が少ないという点が挙げられる。これらの反応の反応率は、各原子核の存在量と反応断面積を掛け合わせたもので表されるため、素となる原子核の存在量自体が少ないと反応が十分早く起こらないのである。次に、反応が各原子核のクーロン力によって阻害されることが挙げられる。各原子核は正の電荷を持っているため反発しあい、反応が生じにくくなっている。この事は以下の反応断面積の式から読み取ることが出来る。

$$\begin{aligned} \langle \sigma | v | \rangle &\propto \exp \left[-2\bar{A}^{\frac{1}{3}} (Z_1 Z_2)^{\frac{2}{3}} T_{\text{MeV}}^{-\frac{1}{3}} \right] \\ \left(\text{ここで } \bar{A} &= \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} \right) \end{aligned} \quad (1-3-13)$$

$\langle \sigma v \rangle$ は反応断面積と反応粒子同士の相対速度を掛け合わせたものの熱平均をとったものを表している。 ^4He を合成する反応の反応率が ^4He を NSE 状態にするほど大きくなるのは、宇宙温度が $T \simeq T_{\text{NUC}} \sim 0.1 \text{ MeV}$ 程に落ち、 $d, ^3\text{He}, ^3\text{H}$ などの存在量が大きくなってからである。一度これらの原子核が合成されると、ほぼ全ての n は束縛エネルギーの強い ^4He に取り込まれる。全ての n が ^4He に取り込まれると考えると、その質量分率は以下のように簡単に見積もることが出来る。

$$X_4 \simeq \frac{4n_d}{n_N} = \frac{4(n_n/2)}{n_n + n_p} = \frac{2(n/p)_{\text{NUC}}}{1 + (n/p)_{\text{NUC}}} \quad (1-3-14)$$

ここで $(n/p)_{\text{NUC}} \simeq 1/7$ は、 ^4He 合成が終わる際 ($T \simeq 0.1 \text{ MeV}$) に宇宙に存在している n と p の比を表している。

以上のように ${}^4\text{He}$ は初期宇宙に合成されるが、それよりも束縛エネルギーが大きい炭素原子核 (${}^{12}\text{C}$)、酸素原子核 (${}^{16}\text{O}$) は初期宇宙においては合成されない。この理由として、これらの原子核が多くの上電荷をもっているため、クーロン力によって合成が阻害される事、また質量数 5,8 の安定した原子核が存在しないために大きな質量数を持った原子核まで合成反応が起きない事などが挙げられる。

質量数が 4 より大きい原子核の中でも、少量の ${}^7\text{Li}$ は合成される。この ${}^7\text{Li}$ の合成は η_b の値によって大きく寄与する反応が異なる。すなわち、以下のようになる。

$$\eta_b \leq 3 \times 10^{-10} \Rightarrow {}^4\text{He} + {}^3\text{H} \rightarrow \gamma + {}^7\text{Li} \quad (1-3-15)$$

$$\begin{aligned} \eta_b \geq 3 \times 10^{-10} &\Rightarrow {}^4\text{He} + {}^3\text{He} \rightarrow \gamma + {}^7\text{Be} \\ &\Rightarrow {}^7\text{Be} + e^- \rightarrow {}^7\text{Li} + \nu_e \end{aligned} \quad (1-3-16)$$

また、 ${}^7\text{Li}$ の合成反応に対し、これを破壊する反応は以下のように記述される。

$$\eta_b \leq 3 \times 10^{-10} \Rightarrow {}^7\text{Li} + p \rightarrow 2{}^4\text{He} \quad (1-3-17)$$

$$\eta_b \geq 3 \times 10^{-10} \Rightarrow {}^7\text{Be} + n \rightarrow p + {}^7\text{Li} \quad (1-3-18)$$

${}^7\text{Be}$ の破壊反応については、この時代の n の個数密度が非常に小さいことから有効に働かないと考えられる。そのため η_B が大きいとすると、現在残っている多くの ${}^7\text{Li}$ は初期宇宙の時代に ${}^7\text{Be}$ の形で合成されたと考えられる。

1.3.4 軽元素合成量の時間発展

以上、説明してきた軽元素の合成の時間発展は図 1.3 で表される。この図は、宇宙が膨張し、冷えた際の様々な軽元素の p と n の存在比を表している。

初めに、元素合成の初期、 $T \gg 10^9\text{K}$ では殆ど全てのバリオンが自由な p と n で存在している。そして膨張に伴い宇宙が冷えていき、 d が合成され、その存在量が増えてくると他の軽元素である ${}^3\text{He}$, ${}^3\text{H}$, ${}^4\text{He}$ などが合成される。最終的には宇宙が誕生してから 10 分後、 $T \sim 4 \times 10^8\text{K}$ に下がると軽元素合成は実質的に終わる。このようにして軽元素合成は行われるが、現在殆どの全てのバリオンは p と ${}^4\text{He}$ の形で存在している。また元素合成の結果残った少量の n は自然崩壊して p となる。

1.4 軽元素合成量:予言値

ここでは初期宇宙における各軽元素の合成量の理論による予言値について、より詳しく説明していく。まず初めに、各元素の合成量の予言値は共通して η_b の値に依存している事を説明する。

η_b の値が大きい事は、それだけバリオンに対して γ が少なく存在している事を意味している。そのため、 d が合成される時期について考えた時、合成された d を再分解する程大きなエネルギーを持った γ の量が少なくなるため、 d の合成時期が早まると考えられる。このようにして早めに d の合成が行われると、それだけ効率よく ${}^4\text{He}$ が合成されるため ${}^4\text{He}$ の予言値は大きくなると考えられる。そして、それに対応してその素となる d 、 ${}^3\text{He}$ の予言値は小さくなると考えられる。また ${}^7\text{Li}$ の予言値については、前述したように η_b の値によって大きく寄与する反応が異なるため、その存在量は η_b に依存すると考えられる。

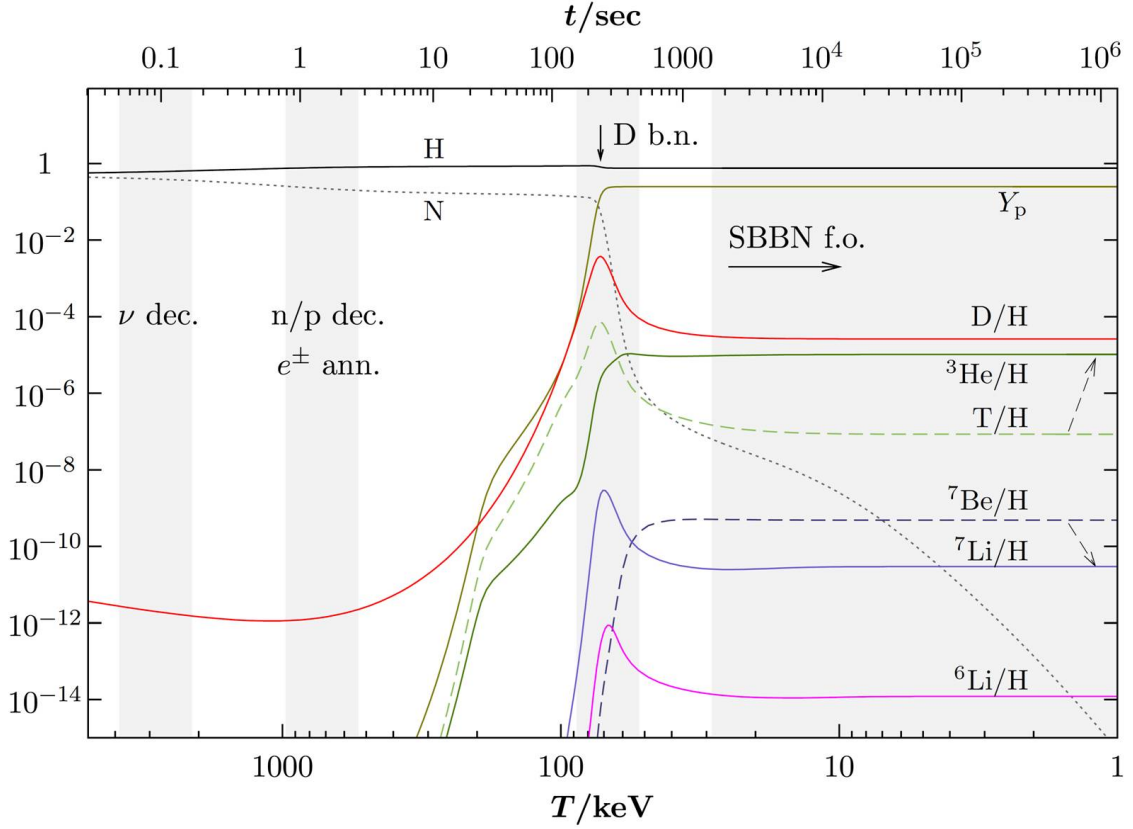


図 1.3: 初期宇宙元素合成理論における軽元素合成量の予言値の時間発展 (または宇宙温度に対する変化) を表した図 [7]。

縦の矢印はほぼ全ての ${}^4\text{He}$ が合成された時期であり $T \sim 8.5 \times 10^8 \text{K}$ を表している。また灰色で表されている縦の束は、記載されている事象の起こる時期を表し、左から ν の脱結合、 $e^\pm$ の対消滅、n-p 比の凍結、d bottleneck、全原子核反応の凍結となる。

このようにして、各軽元素の合成量は η_b の値に依存していると考えられるが、この η_b の値は Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) による宇宙マイクロ波背景放射 (cosmic microwave background (CMB)) の観測から測定され、現在の測定値は以下になっている [10]。

$$\eta_b = \frac{n_b}{n_\gamma} = (6.23 \pm 0.17) \times 10^{-10} \quad (1-4-1)$$

本論文では、一貫してこの値を用いて説明を行う。

以下では、この値を用いた時の初期宇宙における各軽元素の合成量の現在の予言値として、具体的な値を出して説明を行う。

1.4.1 ${}^4\text{He}$

初めに p の存在量との比 $\sim O(0.1)$ の元素である ${}^4\text{He}$ について説明していく。 ${}^4\text{He}$ の p との存在量の比 ($\equiv Y_p = {}^4\text{He}/\text{H}$) は元素合成の時代にかかる各現象、すなわち $T \simeq 0.7 \text{MeV}$ での n-p 比の凍結、”deuterium bottleneck” が起こる前の凍結後の n の減少 (n の自然崩壊による)、”deuterium

bottleneck”自体、などの起きるタイミングに依存している。したがって、 Y_p はニュートンの重力定数、 n - p の質量差、 n の寿命、 d の束縛エネルギーなどの良く測定された量と、あまり正確には求められない ${}^4\text{He}$ 合成に関する原子核反応率に依存している。この Y_p は上記したように元素合成時代に起こる事象のタイミングに大きく影響を受けるため、 ${}^4\text{He}$ は H に対する重要な”probe”と考える事が出来る。

現在の初期宇宙元素合成理論による Y_p の预言値は、

$$Y_p = 0.2486 \pm 0.0002 \quad (1-4-2)$$

となっている [11]。

1.4.2 $d, {}^3\text{He}$

次に p の存在量との比 $\sim O(10^{-5})$ の元素である $D, {}^3\text{He}$ について説明していく。 d と ${}^3\text{He}$ の初期宇宙元素合成理論における预言値は、 d の合成に関する原子核反応率の値と理論に入れる η_b の値に大きく影響を受ける。これら反応率は良く測定されており、また WMAP の観測から得られた η_b の値を用いると、これらの存在量を精密に预言することが出来る。それら预言した値は、以下ようになる [11]。

$$d/H = (2.49 \pm 0.17) \times 10^{-5} \quad (1-4-3)$$

$${}^3\text{He}/H = (1.00 \pm 0.07) \times 10^{-5} \quad (1-4-4)$$

1.4.3 ${}^7\text{Li}$

次に p の存在量との比 $\sim O(10^{-10})$ の元素である ${}^7\text{Li}$ について説明していく。初期宇宙元素合成理論において预言される全ての軽元素の中で、 ${}^7\text{Li}$ が理論の中に入れる η_b と原子核反応率の値に最も影響を受ける。この ${}^7\text{Li}$ は、理論において预言された量がそのまま観測量と等しくなるわけではなく、実際には理論において预言された ${}^7\text{Li}$ と ${}^7\text{Be}$ の量が現在の ${}^7\text{Li}$ として観測される。これは初期宇宙において合成された ${}^7\text{Be}$ が、後の時代に e を捕獲して ${}^7\text{Li}$ に変換するためである。そして現在、CMB の測定によって測られた η_b の値を用いると、理論において预言される現在観測されるだろう ${}^7\text{Li}$ の存在量は、初期宇宙においてその 90% が以下の反応によって ${}^7\text{Be}$ の形で合成されていると考えられる。



上記した反応の ${}^3\text{He}$ 一つ当りの反応率が、元素合成時代の宇宙膨張率に比べ非常に小さくなるため、预言される ${}^7\text{Be}$ の量はこの反応における S -因子 (この値についての説明は付録 A 参照) に線形に依存する。この反応の反応率を考慮すると、現在の初期宇宙元素合成理論における ${}^7\text{Li}$ の预言量は以下となる [11]。

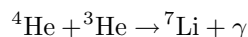
$${}^7\text{Li}/H = 5.24^{+0.71}_{-0.67} \times 10^{-10} \quad (1-4-6)$$

1.4.4 ${}^6\text{Li}, A \geq 9$ の元素

最後に p の存在量との比 $\geq O(10^{-14})$ の元素である ${}^6\text{Li}, A \geq 9$ について説明していく。 ${}^6\text{Li}$ は初期宇宙において、以下の反応で合成されると考えられる。



初期宇宙での温度では、この反応の反応率は他の γ を放出する反応、例えば



などの反応の反応率に比べて 4 桁ほど小さくなり、また γ を放出しない反応の反応率に比べると 7~8 桁ほど小さくなる。これは反応粒子である ^4He と d の各々が持つ電荷と質量数の比が同じであることから E1 遷移が禁止されるためである。このように ^6Li の合成反応が極端に下がるため、理論における予言量は

$$^6\text{Li}/\text{H} \sim O(10^{-14})$$

となる。この予言量は、現在の ^6Li を観測できるレベルより低い値となっている。

質量数が 9 以上の原子核である ^9Be , ^{10}B , ^{11}B は標準的な初期宇宙元素合成理論の枠組みでは殆ど合成されない。これは、安定な質量数 $A=8$ の原子核が存在しないため、質量数 $A=9$ 以上の原子核の合成が阻害されるからである。

1.5 軽元素合成量:観測値

ここでは、各軽元素について観測の方法と観測値について説明を行う。ここでの説明では各原子核の同位体、または同位体との比、例えば ^6Li , ^9Be , $^3\text{He}/d$ などを含む。

1.5.1 ^4He

初期宇宙に合成された ^4He と p の比、 $^4\text{He}/\text{H}$ は銀河系外にある H-II 領域²からの H , He の放出線を用いて推定される。以下で、その仕組みを以下で説明する。

H-II 領域ではその中心にある大質量星 (O 型星、B 型星) の紫外線によって H が電離している。この時、 H と同様に ^4He も電離し、 He-II^3 になっている。この領域にある H と ^4He は、星からの光により以下のようにイオン化と再結合が頻繁に起きている。



^4He の存在比を求めるのに用いられる放出線は波長が 3889Å, 4471Å, 5876Å, 6678Å, 7065Å のものである。対して、 H の存在量測定に用いられる放出線はバルマー系列 ($n=2$ のエネルギー準位に e が落ちる際に放出される線) のものとなる。これらの原子核が再結合する際の放出線を観測することにより、H-II と He-II の比 $^4\text{He}^+/\text{H}^+$ を求める事ができ、さらに H-II 領域において H と ^4He がほぼ 100% H-II と He-II として存在するため、H-II 領域における $^4\text{He}/\text{H}$ が求められる。

しかし、上記した方法で求めた ^4He の存在量には星で合成されたものも含まれる。実際に求めたい量は初期宇宙における合成量であるため、星による合成の影響を含めなければならない。星では金属も合成されるため、この金属の量が星による影響の強さの指標と考えられる。したがって、星による寄与を少なくするためには出来るだけ金属量の低い H-II 領域を観測する必要がある。そしてさらに、観測した ^4He の p との存在比と金属との相関をとり、金属量が 0 となる極限をとることによって宇宙初期において合成された ^4He の p との存在比を求める。

²H-II 領域とは電離した H が光を放っている天体をいう

³これは二つある e のうち一つが電離した状態をいう

以上の方法により He/H の比の測定は幾つかのグループによって行われてきた。現在の値は、以下のようになっている。[12],[13]

$$Y_p = 0.249 \pm 0.009 \quad (1-5-3)$$

$$Y_p \simeq 0.250 \pm 0.004 \quad (1-5-4)$$

1.5.2 d

d は非常に壊されやすい原子核であり、元素合成の時代以外では合成されることがないため、現在観測される存在量は元素合成の時代に合成され、銀河の化学進化によって壊されずに残った量だと考えられる。よって現在の観測量は、元素合成時代の合成量の『下限』と考えられる。

この d は現在、金属量の低いクエーサーの吸収線観測 (quasar absorption line system≡QALS) により、ライマン α 雲 (原始水素雲) 中で直接観測される。d の観測対象となるライマン α 雲は大きな赤方偏移を持ち、金属量が太陽系に比べて低いため、そこでの d の p との存在比は宇宙初期での存在比と等しいと考えられる。クエーサーの光がライマン α 雲を通過する際に、H のエネルギー準位

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{\hbar^2 (1 + m_e/m_p)} \frac{1}{n^2} = -13.6 \frac{1}{n^2} \text{eV} \quad (1-5-5)$$

で $E_n - E_1$ に等しいエネルギーの光は H に吸収される。ここで $n=2,3,4,5,\dots$ に対応する吸収線をライマン α 、ライマン β 、ライマン γ 、ライマン δ 、 $\dots$ と呼ぶ。d の場合、エネルギー準位は H の順位の式 (上記したもの) において m_e/m_p を m_e/m_d に変えれば求められる。したがって、d-吸収線のエネルギーは H に比べて 0.003 % 程高くなります。

以上の方法によって測定された d/H の現在の値は以下ようになる [14]

$$d/H = (2.82 \pm 0.12) \times 10^{-5} \quad (1-5-6)$$

1.5.3 ${}^7\text{Li}$

現在、宇宙初期において合成された ${}^7\text{Li}$ の量は、我々の銀河にある種族 II の星⁴の観測から推定される。

このようにして観測された ${}^7\text{Li}$ の p との存在比は、金属量が低く温度が高い星で金属量、温度によらず一定っており、これを”スナイトプラトー (Spite Plateau)”と呼ぶ。観測において、温度が低い星での ${}^7\text{Li}$ の存在量は低くなる。これは、そのような星では対流活動が星の表面近くまで効いていることから、表面近くの ${}^7\text{Li}$ が星の内部に運ばれ燃焼されるためと考えられる。また、金属量の多い星での ${}^7\text{Li}$ の存在量は高くなるが、これはこのような星では銀河の進化の過程で宇宙線による相互作用から ${}^7\text{Li}$ が合成され多くなると考えられる。この ${}^7\text{Li}$ の存在量測定には後の章で説明する通り、星の対流活動の影響をどのように含めるか、測定値を定めるために必要なパラメーターである星の表面温度の測定方法などに関して、未だ多くの問題が残されている。

現在の Spite Plateau からの ${}^7\text{Li}$ と p との存在比の測定結果は以下のようになっている [15][16]。

$${}^7\text{Li}/\text{H} = 1.23^{+0.34}_{-0.16} \times 10^{-10} \quad (1-5-7)$$

⁴銀河構造の円盤部に属する天体を種族 I、ハロー部に属する天体を種族 II と呼ぶ。銀河の円盤部はガスを多く含み、主として回転により支えられており、重元素量は太陽のものと同程度になっている。対してハロー部はガスをほとんど含まず、ほぼ球状の分布をしており、また回転以外にランダムな運動に支えられており、重元素量は太陽の 100 分の 1 程度になっている。

これらの値は標準的な初期宇宙元素合成理論からの予言値 $5.24^{+0.71}_{-0.67} \times 10^{-10}$ (1-4-6) と矛盾している。これをリチウム問題と呼ぶ。

この問題に対する解決策は現在までに様々考えられてきた。本論文では、二章以降でこの問題に対する解決策を説明する。

1.5.4 ${}^6\text{Li}$

標準的な初期宇宙元素合成理論から予言される ${}^6\text{Li}$ の合成量は非常に小さいため、この ${}^6\text{Li}$ の存在量の起源は初期宇宙元素合成とは関係がないと考えられている。逆に考えると、低い金属量を持つ恒星にて $O(10^{-12})$ を超える ${}^6\text{Li}$ の存在量が検出されると、標準的な元素合成理論と銀河の化学発展モデルの両方にとって興味深いテストとして考えられる。Li の同位体比 ${}^6\text{Li}/{}^7\text{Li} \simeq 0.05$ での ${}^6\text{Li}$ の Plateau の存在が低金属量を持つ 10 個の恒星の観測から確認されている [17]。この観測から測定された同位体比 ${}^6\text{Li}/{}^7\text{Li}$ は低金属量を持つ星での宇宙線による合成では説明されない事が知られている [18]。しかし、星の大気においては ${}^7\text{Li}$ と ${}^6\text{Li}$ の吸収線が互いに交わりあうため、この測定は非常に難しいものとなっていると考えられる。実際、最近の研究 [19] では、星の対流活動が引き起こす ${}^7\text{Li}$ 吸収線の歪みが ${}^6\text{Li}$ の検出と混同されているものだと指摘している。

1.6 初期宇宙元素合成理論の観測との整合性

これまでに理論における初期宇宙での軽元素合成量の予言値が η_b の値に依存する事を説明した。初期宇宙に合成される各軽元素、d, ${}^3\text{H}$, ${}^3\text{He}$, ${}^4\text{He}$, ${}^7\text{Li}$ の量の予言値の η_b に対する依存性は図 1.4 で表される [11]。

この図において、d, ${}^3\text{He}$, ${}^4\text{He}$ の存在量は理論における予言値と観測量が整合性良く一致している事がわかる。これらの元素に対して、 ${}^7\text{Li}$ の存在量は理論における予言値と観測量が矛盾しており、理論における予言値が観測値に比べ 2~3 倍程大きくなっている事が見て取れる。これが上記でも説明した初期宇宙元素合成理論における Li 問題である。

以下では、この Li 問題に対する解決策について説明を行う。

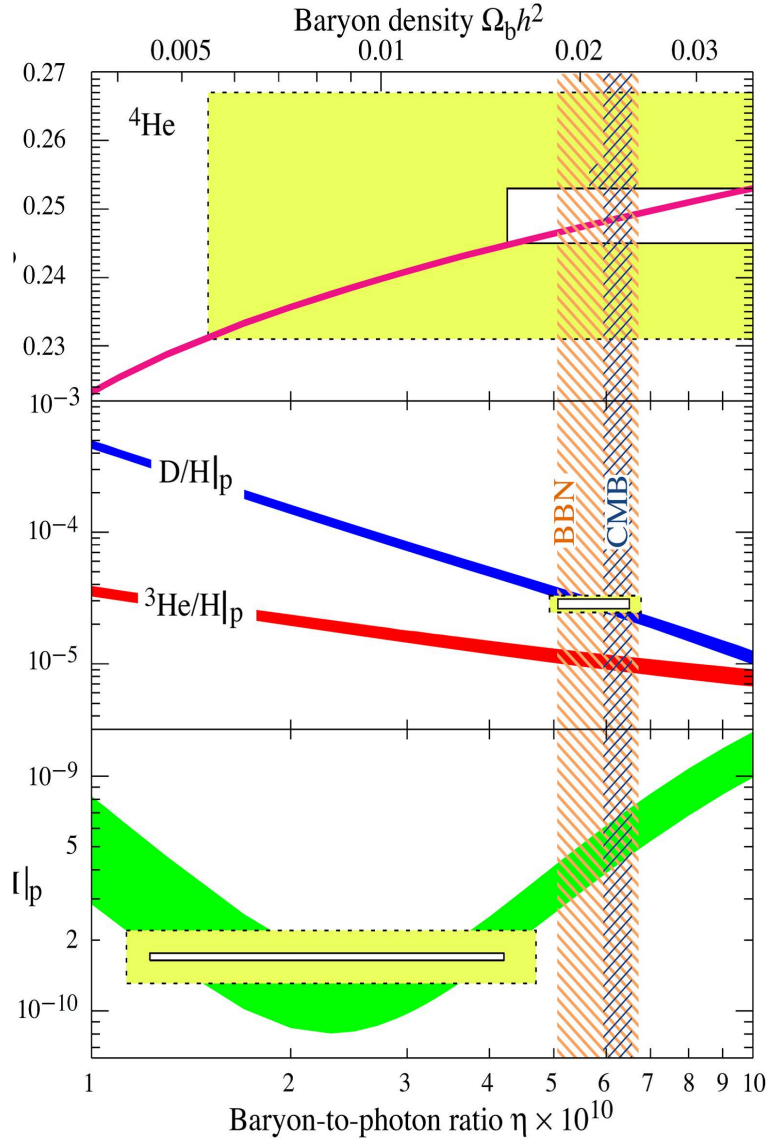


図 1.4: 初期宇宙元素合成理論による d , ${}^3\text{H}$, ${}^3\text{He}$, ${}^4\text{He}$, ${}^7\text{Li}$ の合成量予言値を表した図 [11] 各曲線の太さは 95 % の信頼水準を表している。また、各長方形は軽元素の観測量を表している (小さい長方形は $\pm 2\sigma$ の統計誤差のみを、大きな長方形は $\pm 2\sigma$ の統計誤差と系統誤差を表している)。縦の狭い束は WMAP による CMB の観測から測定された η_b の値を、広い束は初期宇宙元素合成理論と一致する η_b の領域を共に 95 % の信頼水準で表している。

第2章 Li問題の解決策I

Li 問題に対する解決策は様々に考えられるが、それらは大きく分けて 1) 今までの理論計算、観測に対する修正、2) 初期宇宙元素合成理論に ${}^7\text{Li}$ の存在量を減少させる新たな機構を導入、の二つに分けられる。この章では、1) の場合において、宇宙論的な観点から考察を行う。

2.1 Li問題の解決へ宇宙論的な観点からの考察

Li 問題が存在する要因として、現在観測されている ${}^7\text{Li}$ の存在量が初期宇宙における合成量と異なる事が挙げられる。星の表面に存在する ${}^7\text{Li}$ は重力の影響により、観測することが困難な星の内部へと運ばれると考えられる。また、重力以外にも ${}^7\text{Li}$ が星の対流活動により星の内部へと運ばれ、燃焼される事でその存在量が減少する事も考えられる。そのため、現在観測されている ${}^7\text{Li}$ の存在量から初期宇宙における合成量を推定する方法が必要となる。

以下では、 ${}^7\text{Li}$ が重力の影響、対流の影響により内部へと運ばれる過程について説明し、これらを考慮する事で Li 問題が解決され得るかを説明する。

2.1.1 星の内部の熱輸送

星の対流活動について説明を行う前に、星内部における熱の伝わり方について説明を行う。

星内部において温度勾配があると、温度の高い部分から低い部分へと熱が伝わる。この熱の伝わり方に二通りある。

一つ目は星の構成物質自体は動かず、エネルギーを持った γ が星の構成物質に衝突して熱を伝える方法で、これを熱拡散による熱輸送と呼ぶ。

もう一つは星の構成物質自体が動く事で熱を伝える方法で、これを対流による熱輸送と呼ぶ。星の内部において、その温度差が大きい割りに熱拡散が生じにくい場合、対流により熱が輸送される。この対流は、熱拡散に比べ効率良く熱を輸送する事ができると考えられる。

2.1.2 星の対流活動

以下では星の対流活動について、それが起こる条件を説明する [8]。星の内部の温度分布が急になると対流が生じ、エネルギー輸送が対流で行われる。この対流の発生する条件は以下のようにして求められる。簡単のため、 $-z$ 方向に重力加速度 g があり、温度と圧力が $T(z), p(z)$ の分布をしている一次元の問題を考える。また、化学組成は一樣とする。図 2.1 のようにある小さな質量要素を周囲と化学平衡を保ちながら断熱的に $dz > 0$ だけ変位させると、この要素の圧力は

$$p(z + dz) = p(z) + \frac{dp}{dz} dz \quad (2-1-1)$$

温度は

$$T_f = T(z) + \left. \frac{dT}{dp} \right|_{\text{ad}} dp \quad (2-1-2)$$

となる。もし

$$T_f < T(z + dz) = T(z) + \frac{dT}{dp} dp \quad (2-1-3)$$

とすると、周囲よりも低温であるため膨張し、それにより密度が高くなるので下向きに力が働き、この質量要素はもとに戻る。すなわち、対流に対して安定といえる。逆に、

$$T_f > T(z + dz) \quad (2-1-4)$$

とすると、周囲よりも密度が低くなるので浮力が働き、さらに上昇する。すなわち、対流に対して不安定であるといえる。

$dz > 0$ に対して $dp < 0$ である事に注意すると、対流不安定の条件は

$$\left. \frac{dT}{dp} \right|_{\text{ad}} < \frac{dT}{dp} \quad (2-1-5)$$

となる。あるいは、両辺に $\left| \frac{dp}{dz} \right|$ をかけて

$$\left| \frac{dT}{dz} \right|_{\text{ad}} < \left| \frac{dT}{dz} \right| \quad (2-1-6)$$

で与えられる。これは、温度勾配が断熱的なものより急になる、別の言い方をするとエントロピー勾配が負である時、対流が生じる事を意味している。 $dz < 0$ の場合も同じ条件を得られる。

また、対流不安定の条件は (2-1-5) の両辺に $\frac{p}{T}$ をかけて

$$\nabla_{\text{ad}} \equiv \frac{d \ln T}{d \ln p} \Big|_{\text{ad}} < \frac{d \ln T}{d \ln p} \Big|_{\text{rad}} \equiv \nabla_{\text{rad}} \quad (2-1-7)$$

とも表される。

以上説明した対流活動は、星の表面温度からその活動具合がわかる。星の表面温度が低くなると、光に対する不透明度が大きくなる。そのため、光子の拡散が遅くなり、熱の伝わり方が悪くなる。すると外側に熱を放射しにくくなるため、内側に熱がたまり、内側と外側の温度差が大きくなる。対流活動は温度勾配によって生じるため、温度差が大きくなるほどより活発に行われる。よって、星の表面温度が低いほど、対流活動が活発に行われると考えられるのである。

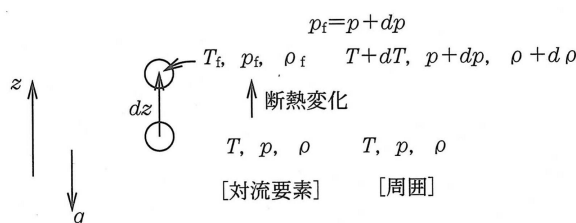


図 2.1: 対流発生の概念図 [8]

2.1.3 星内部における ${}^7\text{Li}$ の燃焼

星の構成物質の輸送は主に、星の中心から鉛直方向へ流れる鉛直対流と星の子午面を巡って流れる子午面還流によって行われる。これらを複合して考えた場合、星の活動は非常に複雑となる。

そしてこれらの異なった流れにより星の内部に乱流が生じ、これにより星内部の対流領域とその下の領域において混合が起きると考えられる。この混合の生じている領域を混合領域と呼ぶ。星の内部では中心に向かうにつれて、温度、圧力、密度が高くなる。そのため、この混合領域の温度は対流領域の温度より高くなると考えられる。そして、この混合領域の温度が ${}^7\text{Li}$ を燃焼させるのに十分なほど高温 ($2.5 \times 10^6\text{K}$) となると、この領域で以下の反応により ${}^7\text{Li}$ は燃焼され、その存在量は減らされる。



2.1.4 原子拡散

次に、 ${}^7\text{Li}$ が星の重力により内部へと運ばれる過程について説明する。

星を構成する各元素について、それらの元素にかかる力は各元素が持つ質量数、電荷などが異なる事から元素毎に異なると考えられる。そのため、各々の元素は各々にかかる力にしたがって、相対的に移動すると考えられる。このようにして生じる各元素の移動を原子拡散と呼ぶ。この原子拡散について重力による作用を考えると、重い元素は軽い元素に比べ重力が強くなるため、その分星の内部へと運ばれると考えられる。このように重力による移動の事を、特に沈降と呼ぶ。

ある元素が原子拡散により、星の混合領域からその下の領域へと運ばれる量の時間変化は、以下の式で表される [20]。

$$\frac{\partial c_Z}{\partial t} M_Z = -4\pi r^2 \rho w_Z c_Z \quad (2-1-9)$$

ここで $c(\equiv N/N_H)$ は p の存在量に対する注目している元素の存在量の比、 M_Z は混合領域に含まれる質量、 ρ は星の密度、 r は星の中心からの距離、 w は拡散速度を表している。添え字の Z は、その量が混合領域の一番底で評価される事を意味している。

拡散速度は以下の式で与えられる。

$$w = -D_{12} \left(-\frac{\partial \ln c}{\partial r} + \frac{2A - Z - 1}{2} \frac{m_p g}{k_B T} - \frac{A m_p g_R}{k_B T} + \alpha_T \frac{\partial \ln T}{\partial r} \right) \quad (2-1-10)$$

ここで D_{12} は拡散係数、 A, Z は各々注目している元素の質量数、原子番号、 m_p は p の質量、 g は星の局所重力、 T は混合領域の温度、 g_R は輻射加速度、 α_T は熱拡散係数を表している。

星の対流領域にある ${}^7\text{Li}$ の存在量は沈降によって下の領域に運ばれ、観測不能になるため、観測量が減らされると考えられる。(2-1-9)、(2-1-10) を用いて、 ${}^7\text{Li}$ の減らされるタイムスケールを表すと、以下ようになる。

$$\frac{1}{\tau_{\text{Li}}} = \frac{\partial \ln c_Z}{\partial t} \approx 2.3 \times 10^{-22} \frac{A T^{\frac{3}{2}} M}{Z^2 M_Z} \text{yr}^{-1} \quad (2-1-11)$$

ここで M は星全体の質量を表している。この表現では拡散速度における主要項である重力による沈降を表す項のみを残した。(2-1-11) は ${}^7\text{Li}$ の沈降するタイムスケールは、星全体の質量が与えられた時、混合領域にある質量とその温度に依存することを表している。

2.1.5 初期宇宙における ${}^7\text{Li}$ 合成量の推定方法

以下では観測された星の ${}^7\text{Li}$ の存在量から初期宇宙における合成量を推定する方法を文献 [1] を引用して説明する。[1] では、球状星団 NGC6397 中に存在している星の元素の存在量が調べられている。ここで球状星団とは恒星が互いの重力で球形に集まった天体であり、その年齢は非常に古いと考えられる。また、球状星団中に存在している星の年齢、誕生した時点での構成成分は等しいと考えられる。そのため、球状星団中の進化の度合いの異なる星での ${}^7\text{Li}$ の存在量を測り、それらを比較することで、星の沈降、対流活動が ${}^7\text{Li}$ の存在量に与える影響がわかる。そしてそれを考慮する事で初期宇宙における ${}^7\text{Li}$ の合成量を推定する事が出来る。

[1] における ${}^7\text{Li}$ の存在量の測定結果は図 2.2 で表される。

図 2.2 において、連続した線はこの模型から予言される各元素の存在量を表している。点線の周りの灰色の領域は CMB の観測と初期宇宙元素合成理論から求められた ${}^7\text{Li}$ 存在量予言値の 1σ の信頼間隔を表している。また、破線はこの観測から推定される初期宇宙で合成された ${}^7\text{Li}$ の量を表している。そして、その周りの明るい灰色の領域は観測から推定される初期宇宙で合成された ${}^7\text{Li}$ の量の 1σ の信頼間隔を表している。

この図より、沈降の影響は重い原子核に対して大きくなり、また温度が高い星において大きくなる事がわかる。

また、この図では ${}^7\text{Li}$ の存在量は表面温度が低い星ではより低く、高い星ではより高くなっている。これは前述で説明したように、星の表面温度が低いほど対流活動が活発に行われるので、より多くの ${}^7\text{Li}$ が燃焼されるためと考えられる。

[1] では測定から推定された ${}^7\text{Li}$ の初期宇宙での合成量は WMAP による CMB の観測データから得られた η_b の値を用いた初期宇宙元素合成理論の予言値の 78 % であり 1σ のエラーの範囲で一致すると結論付けられている。

しかし、[1] によって推定された ${}^7\text{Li}$ の初期宇宙での合成量には、 ${}^7\text{Li}$ の同位体である ${}^6\text{Li}$ の観測の観点から問題が存在していると指摘されている。上記したように、[1] では ${}^7\text{Li}$ の減少は星の対流活動による ${}^7\text{Li}$ の燃焼過程から説明づけられる。しかし、このような ${}^7\text{Li}$ の燃焼過程があるとすると、同様な過程により ${}^6\text{Li}$ も燃焼されると考えられる。そして、 ${}^6\text{Li}$ は ${}^7\text{Li}$ に比べて燃焼されやすいため、その減少量は ${}^7\text{Li}$ よりも大きくなると考えられる。このため、 ${}^7\text{Li}$ の減少が燃焼過程によって説明づけられるか否かは、星表面にある ${}^6\text{Li}$ の存在量測定から判断される。この ${}^6\text{Li}$ の存在量の測定は [17]、[21] によって行われた。そして、これらの測定では星表面に ${}^6\text{Li}$ が存在することから、 ${}^7\text{Li}$ の減少が燃焼過程によるものという考え方は否定されている。しかし、[17]、[21] による ${}^6\text{Li}$ の存在量測定にも未だに問題があり、一概に ${}^7\text{Li}$ の減少が燃焼過程によるものではないとも言う事が出来ない。

さらに、[1] で用いられた WMAP による CMB の観測データから得られた η_b は古いものであり、最新の η_b の値を用いた時、 ${}^7\text{Li}$ の予言量は大きくなると考えられる。この値を用いた時、 ${}^7\text{Li}$ の予言量と観測量の差は大きくなると考えられ、よって対流、沈降の影響のみでは Li 問題は解決することは出来ないと考えられる。

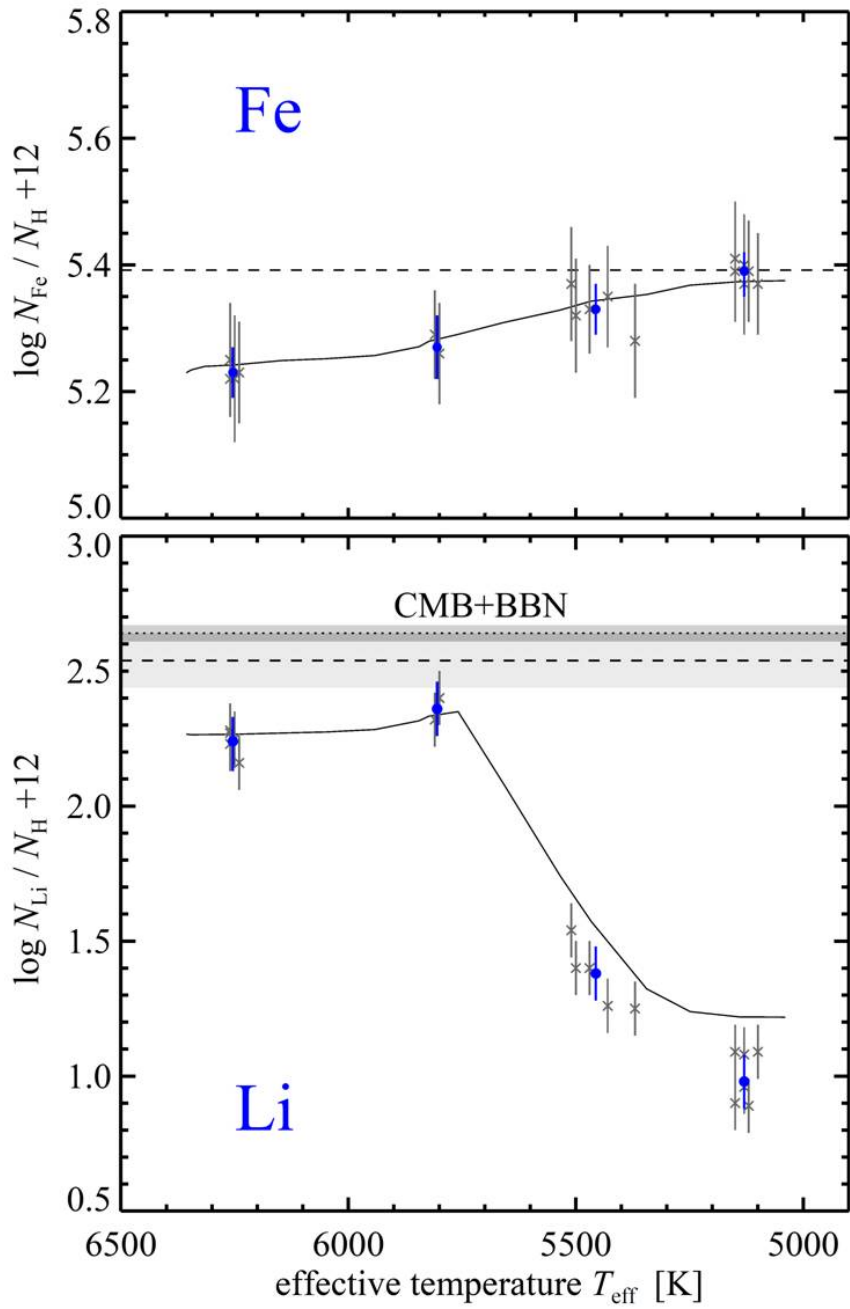


図 2.2: 観測された星の ${}^7\text{Li}$ と Fe の存在量を星の温度の関数で表した図 [1]

連続した線はこの模型から予言される各元素の存在量を表している。点線の周りの灰色の領域は CMB の観測と初期宇宙元素合成理論から求められた ${}^7\text{Li}$ 存在量予言値の 1σ の信頼間隔を表している。また、破線はこの観測から推定される初期宇宙で合成された ${}^7\text{Li}$ の量を表している。そして、その周りの明るい灰色の領域は観測から推定される初期宇宙で合成された ${}^7\text{Li}$ の量の 1σ の信頼間隔を表している。

第3章 Li問題の解決策II

この章では、Li 問題の解決を素粒子物理学における新たな模型の一つである MSSM の枠組みで考える。MSSM の枠組みでは、標準的な元素合成理論の枠組みでは考えられなかった長寿命荷電粒子が元素合成の時代に存在し、その粒子が軽元素合成に影響を与えと考えられる。

本論文では MSSM の枠組みの中でも、最も軽い超対称粒子 (Lightest Supersymmetric Particle=LSP) をニュートラリーノ ($\tilde{\chi}_1^0$)、次に軽い超対称粒子 (Next Lightest Supersymmetric Particle=NLSP) をスタウ ($\tilde{\tau}$) としたものに注目する。そしてこの枠組みで Li 問題を考える上で重要になるのが、これらの粒子の寿命である。MSSM の枠組みにおいて R-parity が保存されていると LSP は崩壊不可能な安定粒子となるため、この枠組みにおける $\tilde{\chi}_1^0$ は安定粒子と考えられる。そして $\tilde{\tau}$ は $\tilde{\chi}_1^0$ との質量差が小さくなると、崩壊の際に終状態空間が抑圧されることから長寿命になると考えられる [2]。長寿命 $\tilde{\tau}$ が元素合成の時代まで存在すると、標準的な初期宇宙元素合成理論では考えられなかった新奇な元素合成反応が生じる。

長寿命 $\tilde{\tau}$ による新奇な元素合成反応は様々考えられる。本論文では初めに $\tilde{\tau}$ による ${}^6\text{Li}$ 触媒合成反応 [22]、 ${}^7\text{Li}$, ${}^7\text{Be}$ 核種変換反応¹[3] について簡単に説明を行う。そして次に、 $\tilde{\tau}$ による ${}^4\text{He}$ 破碎反応について説明を行う。ここでは前述した二つの反応より詳しく説明を行い、具体的に反応断面積、反応のタイムスケールの計算方法を説明する。最後に、以上説明した $\tilde{\tau}$ により引き起こされる新奇な元素合成反応を含めて軽元素の合成量を計算した結果、軽元素合成量がどのように表されるかを図を用いて説明し、最終的に Li 問題が解かれ得る事を説明する。

3.1 $\tilde{\tau}$ 触媒合成反応

初めに、 $\tilde{\tau}$ による ${}^6\text{Li}$ 触媒合成反応について説明する。初期宇宙元素合成理論において ${}^6\text{Li}$ の合成は 1.4.4 で説明したとおり、以下の反応で行われると考えられる。



前述したように、この反応は初期宇宙における他の元素の合成反応に比べて極端に低いと考えられる。

長寿命 $\tilde{\tau}$ が初期宇宙に存在すると、 $\tilde{\tau}$ は ${}^4\text{He}$ と束縛状態を形成して、上記した反応とは別に以下の ${}^6\text{Li}$ 合成反応を引き起こすと考えられる。



この反応において、 $\tilde{\tau}$ はその状態を変化せず、 ${}^6\text{Li}$ 合成反応を高める触媒として作用している。またこの反応は (1-4-7) の反応と異なり ${}^4\text{He}, d$ 間の核力によって生じるため、その反応の大きさは (1-4-7) より 6-7 桁大きくなると考えられる。

¹原子核の核種変換反応とは、原子核を構成している核子である n、p の状態を変える事で、ある原子核を別の原子核に変える反応をいう

3.2 $\tilde{\tau}$ 核種変換反応

次に、 $\tilde{\tau}$ による原子核核種変換反応について説明を行う。この反応は以下の式で表される。

$$\begin{aligned}(\tilde{\tau}^7\text{Be}) &\rightarrow \tilde{\chi}_1^0 + \nu_\tau + {}^7\text{Li} \\(\tilde{\tau}^7\text{Li}) &\rightarrow \tilde{\chi}_1^0 + \nu_\tau + {}^7\text{He}\end{aligned}\tag{3-2-1}$$

この反応によって生じた ${}^7\text{Li}$ は背景にある p によって壊される。また、 ${}^7\text{He}$ は背景に存在してる他の原子核と反応し ${}^3\text{He}$, ${}^4\text{He}$ などに壊れる。

この反応の重要な点は、 $\tilde{\tau}$ が原子核と束縛状態を形成している点である。 $\tilde{\tau}$ が原子核と束縛状態を形成すると、これらは非常に相互作用しやすくなる。これには二つの理由にがある。一つ目は、束縛状態を形成することにより、原子核の波動関数の重なりが非常に大きくなるためである。二つ目は、 $\tilde{\tau}$ と $\tilde{\chi}_1^0$ の質量差が小さい場合においても、原子核の核種変換が強く生じるためである。 $\tilde{\tau}$ は $\tilde{\chi}_1^0$ との質量差がパイオン (π^-) より大きくなると、以下の反応で崩壊する。

$$\tilde{\tau}^- \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 + \nu_\tau + \pi^- \tag{3-2-2}$$

このとき放出される π^- が原子核とハドロニック-カレント相互作用する事で、原子核の核種変換が起きる。しかし、この反応は $\tilde{\tau}$ と $\tilde{\chi}_1^0$ の質量差が π^- の質量より大きくなければ力学的に禁止される。今考えているシナリオでは、 $\tilde{\tau}$ と $\tilde{\chi}_1^0$ の質量差が小さくなるほど $\tilde{\tau}$ の寿命が長くなるため、この質量差が π^- の質量より小さい領域が重要となる。そこで、 $\tilde{\tau}$ が原子核と束縛状態を形成している事が重要になる。 $\tilde{\tau}$ が原子核と束縛状態を形成すると、 $\tilde{\tau}$ と原子核の距離が非常に近くなる。そのため、 $\tilde{\tau}$ と $\tilde{\chi}_1^0$ の質量差が π^- 以下の場合でも、仮想的に放出される π^- と原子核のハドロニック-カレント相互作用が可能になり、原子核の核種変換反応が強く生じると考えられるのである。

3.3 ${}^4\text{He}$ 破砕反応

次に、 $\tilde{\tau}$ による ${}^4\text{He}$ 破砕反応について詳しく説明していく。本論文で調べた ${}^4\text{He}$ 破砕反応は以下の三つである。

$$(\tilde{\tau}^4\text{He}) \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 + \nu_\tau + t + n \tag{3-3-1}$$

$$(\tilde{\tau}^4\text{He}) \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 + \nu_\tau + d + n + n \tag{3-3-2}$$

$$(\tilde{\tau}^4\text{He}) \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 + \nu_\tau + p + n + n + n \tag{3-3-3}$$

これらの反応は図 3.1 で表されている。これらの反応は条件により、反応 (3-1-1) よりも強く起こると予想される。その理由は以下のように考えられる。反応 (3-1-1) は $(\tilde{\tau}^4\text{He})$ の束縛状態に d が衝突することで起きる反応である。そのためこの反応の強さは d の個数密度 (n_d) に依存すると考えられるが、元素合成時代の n_d はそれほど高くないと考えられる。対して、上記した反応 (3-3-1)、(3-3-2) は $\tilde{\tau}$ が ${}^4\text{He}$ と束縛状態を形成した後、他の原子核との衝突などを考えることなく起こる反応であるため、3.2 で述べた理由と同じ理由で強い反応となると考えられる。

もしも上記したように ${}^4\text{He}$ 破砕反応が $\tilde{\tau}$ による ${}^6\text{Li}$ 触媒合成反応より優勢となるとすると、(3-1-1) による ${}^6\text{Li}$ の過剰生成は抑制されると考えられる。また、その際には ${}^4\text{He}$ 破砕反応により d, t の過剰生成が起こりうると考えられる。

そのため、以下では具体的に (3-3-1)、(3-3-2) の起こるタイムスケールを求め、これらを (3-1-1) のタイムスケールと比較し、 ${}^4\text{He}$ 破砕反応が $\tilde{\tau}$ 触媒合成反応より優勢になる条件を求める事にする。

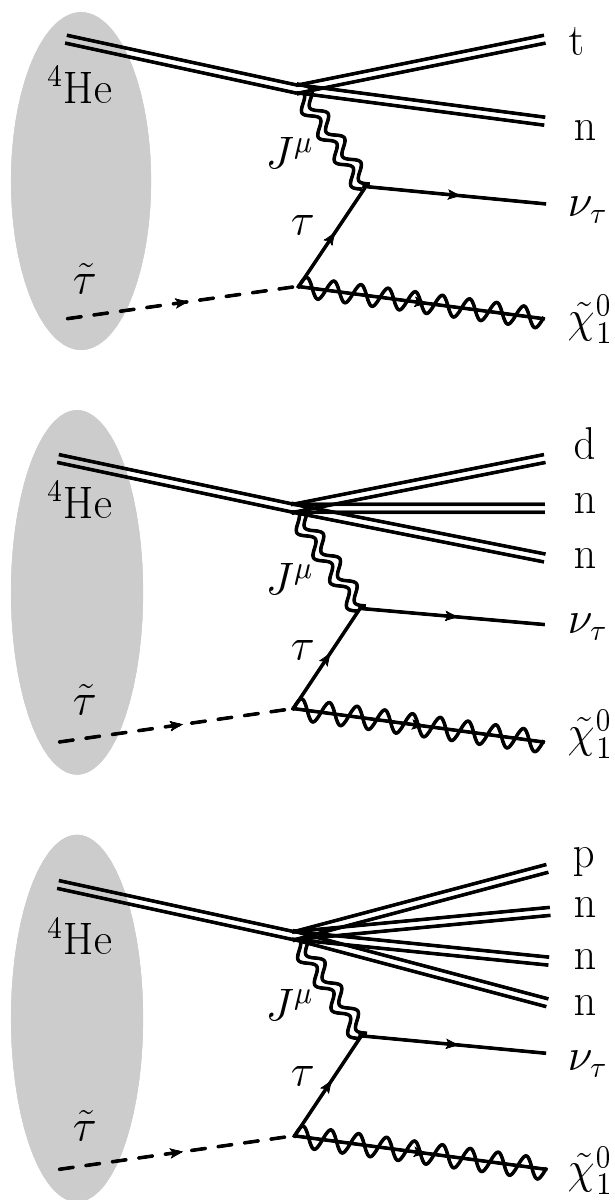


図 3.1: ${}^4\text{He}$ 破砕反応を表した図

まず初めに、反応 (3-3-1)、(3-3-2) を記述するラグランジアンを表す。

$$\mathcal{L} = \bar{\tau} \tilde{\chi}_1^0 (g_L P_L + g_R P_R) \tau + \sqrt{2} G_F \nu_\tau \gamma^\mu P_L \tau J_\mu + \text{h.c.}, \quad (3-3-4)$$

この式において、 $G_F = 1.166 \times 10^{-5} \text{GeV}^{-2}$ はフェルミ定数、 $P_{L(R)}$ はカイラル射影演算子、 J_μ はハドロニックカレントを表している。 g_L, g_R は有効結合定数であり、以下で表される。

$$g_L = \frac{g}{\sqrt{2} \cos \theta_W} \sin \theta_W \cos \theta_\tau \quad (3-3-5)$$

$$g_R = \frac{\sqrt{2} g}{\cos \theta_W} \sin \theta_W \sin \theta_\tau \quad (3-3-6)$$

ここで g は $SU(2)_L$ 結合定数であり、 θ_W はワインバーグ角を表している。

3.3.1 $(\tilde{\tau}^4\text{He}) \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 + \nu_\tau + \text{t} + \text{n}$

初めに、反応 $(\tilde{\tau}^4\text{He}) \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 + \nu_\tau + \text{t} + \text{n}$ の反応断面積、タイムスケールを計算する。この反応の反応断面積は、反応振幅の自乗を全ての終状態粒子の全運動量空間で積分することで得られる。式で表すと、以下のようになる。

$$\begin{aligned} (\sigma v)_{\text{tn}} &\equiv \sigma v((\tilde{\tau}^4\text{He}) \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 + \nu_\tau + \text{t} + \text{n}) \\ &= \frac{1}{2E_{\tilde{\tau}}} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_\nu}{(2\pi)^3 2E_\nu} \frac{d^3 \mathbf{p}_{\tilde{\chi}_1^0}}{(2\pi)^3 2E_{\tilde{\chi}_1^0}} \frac{d^3 \mathbf{p}_n}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \mathbf{p}_t}{(2\pi)^3} \\ &\quad \times |\mathcal{M}((\tilde{\tau}^4\text{He}) \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 \nu_\tau \text{tn})|^2 \\ &\quad \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{\tilde{\tau}} + p_{\text{He}} - p_\nu - p_t - p_n) \end{aligned} \quad (3-3-7)$$

この式において、 p_i, E_i は粒子 i の運動量、エネルギーを表している。反応振幅 $|\mathcal{M}((\tilde{\tau}^4\text{He}) \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 \nu_\tau \text{tn})|$ は以下のようにハドロニックカレントによる部分 (hadronic part) とレプトニックカレントによる部分 (leptonic part) に分かれる。

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}((\tilde{\tau}^4\text{He}) \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 \nu_\tau \text{tn})| &= \langle \text{tn} | \tilde{\chi}_1^0 \nu_\tau | \mathcal{L}_{\text{int}} | {}^4\text{He} \tilde{\tau} \rangle \\ &= \langle \text{tn} | J^\mu | {}^4\text{He} \rangle \langle \tilde{\chi}_1^0 \nu_\tau | j_\mu | \tilde{\tau} \rangle \end{aligned} \quad (3-3-8)$$

この計算については全て付録に記載する事とする。

この反応のタイムスケールは、反応断面積から以下のように求められる。

$$\tau_{\text{tn}} = \frac{1}{|\psi|^2 \cdot (\sigma v)_{\text{tn}}} \quad (3-3-9)$$

ここで $|\psi|^2$ は $\tilde{\tau}$ と ${}^4\text{He}$ の波動関数の重なりを表している。今、 $\tilde{\tau}$ の質量が He の質量に比べて非常に大きいことから、 $\tilde{\tau}$ を点電荷であるとし、その周りを He が周回している描像を考える。すると、 $|\psi|^2$ は以下の様に表せる。

$$|\psi(0)|^2 \sim R^{-3} = \frac{(Z\alpha m_{\text{He}})^3}{\pi} \quad (3-3-10)$$

ここで Z, m_{He} は各々 ${}^4\text{He}$ の質量数と質量を表している。

3.3.2 $(\tilde{\tau}^4\text{He}) \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 + \nu_\tau + \mathbf{d} + \mathbf{n} + \mathbf{n}$

この計算も、 $(\tilde{\tau}^4\text{He}) \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 + \nu_\tau + \mathbf{t} + \mathbf{n}$ の計算と同様に行う事が出来る。初めに、この反応の反応断面積を表すと、次のようになる。

$$\begin{aligned}
(\sigma v)_{\text{dnn}} &\equiv \sigma v((\tilde{\tau}^4\text{He}) \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 + \nu_\tau + \mathbf{d} + \mathbf{n} + \mathbf{n}) \\
&= \frac{1}{2E_{\tilde{\tau}}} \int \frac{d^3\mathbf{p}_\nu}{(2\pi)^3 2E_\nu} \frac{d^3\mathbf{p}_{\tilde{\chi}_1^0}}{(2\pi)^3 2E_{\tilde{\chi}_1^0}} \frac{d^3\mathbf{p}_{n1}}{(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{p}_{n2}}{(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{p}_d}{(2\pi)^3} \\
&\times |\mathcal{M}((\tilde{\tau}^4\text{He}) \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 \nu_\tau \text{dnn})|^2 \\
&\times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{\tilde{\tau}} + p_{\text{He}} - p_\nu - p_d - p_{n1} - p_{n2})
\end{aligned} \tag{3-3-11}$$

反応振幅 $|\mathcal{M}((\tilde{\tau}^4\text{He}) \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 \nu_\tau \text{dnn})|$ は、 $(\tilde{\tau}^4\text{He}) \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 + \nu_\tau + \mathbf{t} + \mathbf{n}$ の場合と同じく、以下のようにハドロニックカレントによる部分 (hadronic part) とレプトニックカレントによる部分 (leptonic part) に分かれる。

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}((\tilde{\tau}^4\text{He}) \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 \nu_\tau \text{dnn})| &= \langle \text{dnn} \tilde{\chi}_1^0 \nu_\tau | \mathcal{L}_{\text{int}} | {}^4\text{He} \tilde{\tau} \rangle \\
&= \langle \text{dnn} | J^\mu | {}^4\text{He} \rangle \langle \tilde{\chi}_1^0 \nu_\tau | j_\mu | \tilde{\tau} \rangle
\end{aligned} \tag{3-3-12}$$

この計算も同様に付録に記載する事とする。

反応のタイムスケールは、以下で表される。

$$\tau_{\text{dnn}} = \frac{1}{|\psi|^2 \cdot (\sigma v)_{\text{dnn}}} \tag{3-3-13}$$

3.3.3 $(\tilde{\tau}^4\text{He}) \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 + \nu_\tau + \mathbf{p} + \mathbf{n} + \mathbf{n} + \mathbf{n}$

同様に計算を行う。初めに、この反応の反応断面積を表すと、次のようになる。

$$\begin{aligned}
(\sigma v)_{\text{pnnn}} &\equiv \sigma v((\tilde{\tau}^4\text{He}) \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 + \nu_\tau + \mathbf{d} + \mathbf{n} + \mathbf{n}) \\
&= \frac{1}{2E_{\tilde{\tau}}} \int \frac{d^3\mathbf{p}_\nu}{(2\pi)^3 2E_\nu} \frac{d^3\mathbf{p}_{\tilde{\chi}_1^0}}{(2\pi)^3 2E_{\tilde{\chi}_1^0}} \frac{d^3\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{p}_3}{(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{p}_4}{(2\pi)^3} \\
&\times |\mathcal{M}((\tilde{\tau}^4\text{He}) \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 \nu_\tau \text{pnnn})|^2 \\
&\times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{\tilde{\tau}} + p_{\text{He}} - p_\nu - p_1 - p_2 - p_3 - p_4)
\end{aligned} \tag{3-3-14}$$

反応振幅 $|\mathcal{M}((\tilde{\tau}^4\text{He}) \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 \nu_\tau \text{pnnn})|$ は、 $(\tilde{\tau}^4\text{He}) \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 + \nu_\tau + \mathbf{t} + \mathbf{n}$ の場合と同じく、以下のようにハドロニックカレントによる部分 (hadronic part) とレプトニックカレントによる部分 (leptonic part) に分かれる。

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}((\tilde{\tau}^4\text{He}) \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 \nu_\tau \text{pnnn})| &= \langle \text{pnnn} \tilde{\chi}_1^0 \nu_\tau | \mathcal{L}_{\text{int}} | {}^4\text{He} \tilde{\tau} \rangle \\
&= \langle \text{pnnn} | J^\mu | {}^4\text{He} \rangle \langle \tilde{\chi}_1^0 \nu_\tau | j_\mu | \tilde{\tau} \rangle
\end{aligned} \tag{3-3-15}$$

この計算も同様に付録に記載する事とする。

反応のタイムスケールは、以下で表される。

$$\tau_{\text{pnnn}} = \frac{1}{|\psi|^2 \cdot (\sigma v)_{\text{pnnn}}} \tag{3-3-16}$$

3.3.4 結果

以上計算した ${}^4\text{He}$ 破碎反応 (3-3-1)、(3-3-2)、(3-3-3) のタイムスケールと、 $\bar{\tau}$ 触媒合成反応 (3-1-1) のタイムスケールを同時に表すと、図 3.2 のようになる。

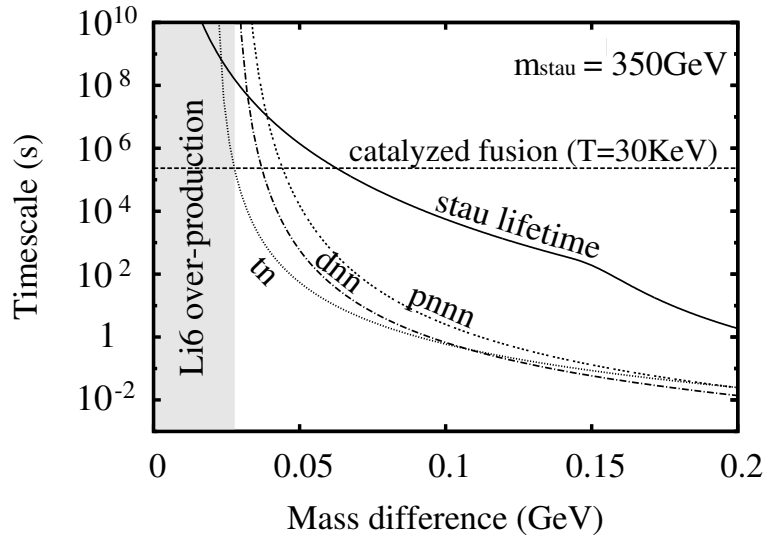


図 3.2: 各反応の Time scale を表した図

横軸は $\tilde{\tau}$ と $\tilde{\chi}_1^0$ の質量差 (δm) を MeV 表示しており、縦軸の単位は [Sec] となっている。点曲線は tn への ${}^4\text{He}$ 破碎反応 (3-3-1) のタイムスケールを、一点鎖曲線は dnn への ${}^4\text{He}$ 破碎反応 (3-3-2) のタイムスケールを、横軸に水平な黒い点線は $\tilde{\tau}$ 触媒合成反応 (3-1-1) のタイムスケールを、実線はスタウの寿命を表している。尚、ここでは $\tilde{\tau}$ のパラメーターとして、 $m_{\tilde{\tau}} = 350\text{GeV}$ 、 $\theta_{\tilde{\tau}} = 0$ 、 $\gamma_{\tilde{\tau}} = 0$ としている。

図より、 tn への ${}^4\text{He}$ 破碎反応 (3-3-1) のタイムスケールの方が dnn への ${}^4\text{He}$ 破碎反応 (3-3-2) のタイムスケールより小さいことから、 He は $\tilde{\tau}$ と束縛状態を形成したのち、 dnn に壊れるよりも、 tn に壊れやすいと考えられる。

またこの図より δm が 25MeV 以上の領域で、 ${}^4\text{He}$ 破碎反応のタイムスケールの方が $\tilde{\tau}$ 触媒合成反応のタイムスケールより短くなることから、これはその領域において、 ${}^4\text{He}$ 破碎反応の方が優勢に起こることを意味しており、 He は $\tilde{\tau}$ と束縛状態を形成したのち、 d と反応する前に $\tilde{\tau}$ により壊れる事を意味する。

3.4 軽元素合成量の説明

${}^4\text{He}$ 破碎反応が $\tilde{\tau}$ 触媒合成反応より優勢になるとすると、この反応により d 、 t が観測量に比べて過剰に合成されてしまう恐れがある。そのため、この反応の影響を初期宇宙軽元素合成理論に組み込んだ際に、これらの軽元素の観測量を再現できるか確かめなければならない。それを確かめたのが図 3.3 と図 3.4 である。

この図は $\tilde{\tau}$ 触媒合成反応 (3-1-1)、 $\tilde{\tau}$ による原子核核種変換反応 (3-2-1)、さらに本研究で計算した ${}^4\text{He}$ 破碎反応 (3-3-1),(3-3-2) の影響を含めて軽元素合成量を計算し、初期宇宙に合成された ${}^7\text{Li}$ の存在量のみならず、全ての軽元素合成量を矛盾なく説明できる $\tilde{\tau}$ のパラメーター領域を表している。

まず初めに図 3.3 の説明を行う。この図の横軸は $\tilde{\tau}$ と $\tilde{\chi}_1^0$ の質量差を MeV 表示しており、縦軸は初期宇宙に存在する $\tilde{\tau}$ の relic density(Y_p) を表している。左側の大きな濃い水色の領域は $\tilde{\tau}$ 触媒合成反応により ${}^6\text{Li}$ の過剰生成され、 ${}^6\text{Li}$ の観測量から禁止される領域を表している。また中央の δm が 0.03-0.1GeV、 Y_p が 5.0×10^{-15} より大きい赤い領域は ${}^4\text{He}$ 破碎反応により ${}^3\text{He}$ が過剰生成され、 ${}^3\text{He}$ の観測量から禁止される領域を表しており、 δm が 0.06-0.1GeV、 Y_p が 8.0×10^{-15} より大きい青の領域は ${}^4\text{He}$ 破碎反応により d が過剰生成され、d の観測量から禁止される領域を表している。各々の元素の観測量は以下の値を用いた。

$$d : d/H = (2.80 \pm 0.20) \times 10^{-5} [14]$$

$$\text{He} : {}^3\text{He}/d < 0.87 + 0.27 [31]$$

$${}^6\text{Li} : {}^6\text{Li}/{}^7\text{Li} < 0.046 + 0.022 [17]$$

また、この図において ${}^7\text{Li}/H$ の値は [29] の値である $\text{Log}_{10}({}^7\text{Li}/H) = -9.63 \pm 0.06$ を引用しており、細い線は 2σ 、太い線は 3σ を表している。中央のオレンジ色の線はスタウのパラメーターとして $m_{\tilde{\tau}} = 350\text{GeV}$ 、 $\theta_{\tau} = 0$ 、 $\gamma_{\tau} = 0$ を与えた時の熱平均化したスタウの存在量を表している。このオレンジ色の線と 3σ の線が交わる点が ${}^7\text{Li}$ の観測量を再現できる点である。

次に図 3.4 の説明を行う。この図も表しているものは図 3.3 と同じである。しかし、こちらの図では ${}^7\text{Li}/H$ の値として [29] のものより小さい [30] の値 $\text{Log}_{10}({}^7\text{Li}/H) = -9.63 \pm 0.06$ を引用している。そのため、熱平均化したスタウの存在量では矛盾なく軽元素の存在量を説明できない。

以上から、 ${}^7\text{Li}/H$ の値として [29] を引用した時、 3σ で軽元素の存在量と暗黒物質の存在量を同時に説明できるスタウのパラメーター領域が存在することが求められた。このようにして ${}^7\text{Li}$ 問題は解決することが出来るのである。

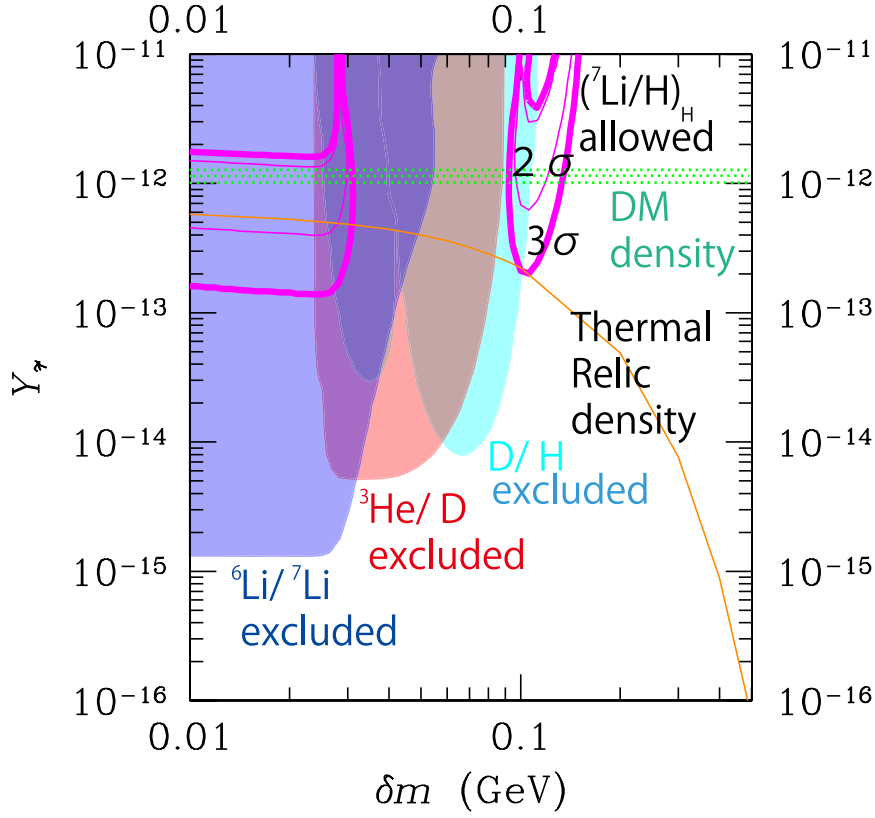


図 3.3: 観測された軽元素の存在量を再現するスタウのパラメーター領域を表した図
 横軸は $\tilde{\tau}$ と $\tilde{\chi}_1^0$ の質量差を MeV 表示しており、縦軸は初期宇宙に存在する $\tilde{\tau}$ の relic density (Y_p) を表している。左側の大きな濃い水色の領域は $\tilde{\tau}$ 触媒合成反応により ${}^6\text{Li}$ の過剰生成され、 ${}^6\text{Li}$ の観測量から禁止される領域を表している。また中央の δm が 0.03-0.1 GeV、 Y_p が 5.0×10^{-15} より大きい赤い領域は ${}^4\text{He}$ 破砕反応により ${}^3\text{He}$ が過剰生成され、 ${}^3\text{He}$ の観測量から禁止される領域を表しており、 δm が 0.06-0.1 GeV、 Y_p が 8.0×10^{-15} より大きい青の領域は ${}^4\text{He}$ 破砕反応により d が過剰生成され、d の観測量から禁止される領域を表している。また、この図において ${}^7\text{Li}/\text{H}$ の値は [29] の値である $\text{Log}_{10}({}^7\text{Li}/\text{H}) = -9.63 \pm 0.06$ を引用しており、細い線は 2σ 、太い線は 3σ を表している。中央のオレンジ色の線はスタウのパラメーターとして $m_{\tilde{\tau}} = 350\text{GeV}$ 、 $\theta_{\tilde{\tau}} = 0$ 、 $\gamma_{\tilde{\tau}} = 0$ を与えた時の熱平均化したスタウの存在量を表している。ここで $\theta_{\tilde{\tau}}$ は $\tilde{\tau}$ の混合角であり、 $\gamma_{\tilde{\tau}}$ は $\tilde{\tau}$ の CP 位相を表している。このオレンジ色の線と 3σ の線が交わる点が ${}^7\text{Li}$ の観測量を再現できる点である。

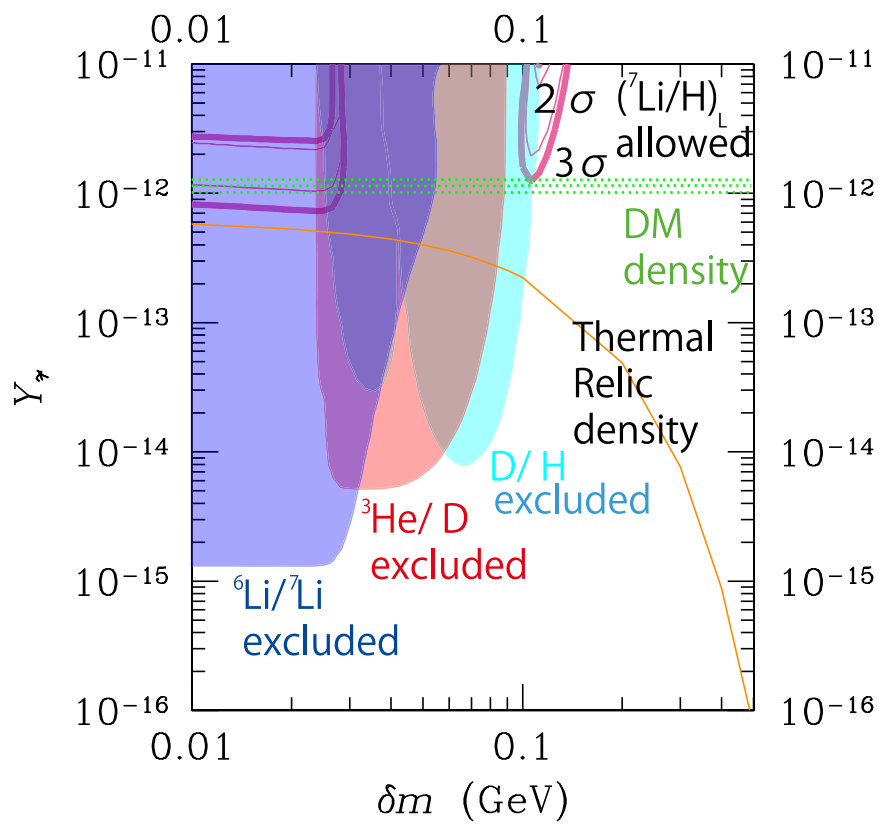


図 3.4: 図 3.3 と同じ。ただし、 ${}^7\text{Li}/\text{H}$ の値として [29] より小さい [30] を引用している。

第4章 まとめ

本論文ではまず初めに、初期宇宙において軽元素が合成される過程を説明する理論である、初期宇宙元素合成理論について説明を行った。そして、WMAP の観測から導出される η_b の値として最新の値を用いた時に、この理論に基づいて予言される軽元素合成量の予言値を紹介した。さらに現在の軽元素の観測量として最新の値を紹介し、リチウム問題が未だ解決されていない事を説明した。

第二章では、Li 問題の解決策を天文学的な観点から考察した場合に解かれ得るかを説明した。その際、特に星内部の活動について説明を行い、この影響で現在の ${}^7\text{Li}$ の観測量が初期宇宙における合成量より少なくなる事を説明した。そして、この観点からは Li 問題を解決することが出来ない事を説明した。

第三章では、リチウム問題に対して素粒子論的な観点から考察し、素粒子物理学における新たなモデルである MSSM の枠組みで考える事により解決を図った。特に本研究では長寿命 $\tilde{\tau}$ が引き起こす新奇な元素合成反応である ${}^4\text{He}$ 破砕反応に注目し、反応の断面積とタイムスケールの計算を行った。そして計算の結果から、 $\tilde{\tau}$ と $\tilde{\chi}_1^0$ の質量差が 25MeV 以上となる領域でこの反応が ${}^6\text{Li}$ の過剰生成を引き起こす $\tilde{\tau}$ 触媒合成反応より優勢になる事を明らかにした。さらに本研究では、初期宇宙における軽元素合成量の計算に新たに ${}^4\text{He}$ 破砕反応の影響を含め、再計算を行った。その結果、 ${}^7\text{Li}/\text{H}$ の値として [29] を引用した時に、 ${}^7\text{Li}$ のみならず、全ての軽元素合成量を説明できるパラメーター領域が存在することを示し、この枠組みにおいてリチウム i 問題が解決可能であることを明らかにした。

謝辞

本論文を作成するにあたり、指導教官である佐藤丈准教授には終始熱心にご指導して頂きました。深く御礼申し上げます。

また、谷井義彰教授をはじめ、物理学科の諸先生方には、講義、輪講を通じて大変お世話になりました。KEKの郡和範氏、山中真人氏、理研の矢崎紘一氏、埼玉大学の小池正史氏、実藤俊史氏には、本研究を進める中で共同研究者として多くの議論をして頂き、また有益なアドバイスをいただきました。さらにいつも笑顔の絶えない埼玉大学素粒子論研究室の皆さま、生活面で私を支えてくれた家族、友人には大変お世話になりました。これらの方々に支えられたからこそ、修士論文を書くことが出来ました。心から感謝いたします。

また本研究は日本科学協会による笹川科学研究助成制度に支えられ、遂行することが出来ました。。助成して頂いた事に深謝の意を表します。

付 録 A 原子核反応率の計算

ここでは初期宇宙元素合成を考える上で必要となる原子核反応率がどのように表されるかについて、簡単に説明を行う。尚、この説明では文献 [9] を参考にした。

A.1 熱核反応の運動学

初めに、温度 T のプラズマ中での原子核反応率についてみていく。反応に関する粒子の質量を m_i 、数密度を n_i とする。速度分布関数はマクスウェル分布で与えられ、非相対論的な温度では

$$n_i v_i d^3 v_i = n_i \left(\frac{m_i}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left(-\frac{m_i v_i^2}{2k_B T} \right) d^3 v_i \quad (\text{A-1-1})$$

となる。相対速度を $v = |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|$ 、反応の断面積を $\sigma(v)$ とすると、単位時間、単位体積当たりの反応率は

$$I = \int n_1(v_1) n_2(v_2) \sigma(v) v d^3 v_1 d^3 v_2 \quad (\text{A-1-2})$$

となる。速度 $\mathbf{v}_1$ と $\mathbf{v}_2$ を、相対速度 $\mathbf{v}$ と重心速度 $\mathbf{V}$ に変数変換し、全質量 $m = m_1 + m_2$ と換算質量 $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ を使うと

$$\begin{aligned} I &= \int n_1 n_2 \frac{(m_1 m_2)^{\frac{3}{2}}}{(2\pi k_B T)^3} \exp \left(-\frac{m V^2 + \mu v^2}{2k_B T} \right) \sigma(v) v d^3 v d^3 V \\ &= n_1 n_2 \left(\frac{\mu}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \int \exp \left(-\frac{\mu v^2}{2\pi k_B T} \right) \sigma(v) v d^3 v \end{aligned} \quad (\text{A-1-3})$$

$$\equiv n_1 n_2 \langle \sigma v \rangle \quad (\text{A-1-4})$$

となる。同種粒子の衝突の場合、これに因子 $\frac{1}{2}$ がかかる。

A.2 核反応率

次に原子核反応率がどのように記述されるかを説明する。原子核は正の電荷を持っているためクーロン力が働き、それが反応を妨げると考えられる。電荷 $Z_1 e$ と $Z_2 e$ の間のクーロンエネルギーは二つの原子核の間の距離を r として

$$\frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} = 1.4 Z_1 Z_2 \left(\frac{r}{1 \text{ fm}} \right)^{-1} [\text{MeV}] \quad (\text{A-2-1})$$

よって、古典的には温度が 10^{10} K ($\sim 1 [\text{MeV}]$) 以上まで上がらないと反応は起きない。これに対し、主系列性の中心温度は $(1 \sim 3) \times 10^7 \text{ K}$ 程度までしかないので、核反応は起こらないように見える。しかし、量子力学的にはトンネル効果によりクーロン障壁を透過する確率があり、これにより 10^{10} K より低温でも核反応が起こり得る。

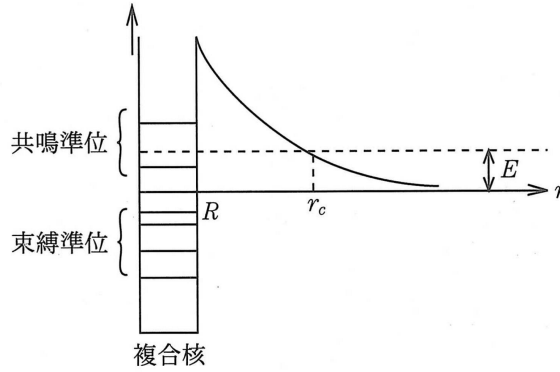


図 A.1: 原子核反応の概念図 [9]

半径 R 以内では核力によるポテンシャルにより二つの入射粒子の複合状態が出来る。エネルギーが負の順位は束縛準位であり、最低エネルギーの準位が安定な原子核である。エネルギーが正の準位は共鳴準位と呼ばれるが、この準位は二つの原子核が分離した状態とトンネル効果により結合しており、共鳴準位にある複合核は有限の寿命で崩壊する。

図 A.1 に示されるように、古典力学的な反射点 $r_c = \frac{2Z_1 Z_2 e^2}{\mu v^2}$ から原子核の半径 R までの透過確率は

$$P_{\text{coul}} = \frac{p_0}{v} \exp(-2\pi\eta) \quad (\text{A-2-2})$$

$$\eta = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v} \quad (\text{A-2-3})$$

$$p_0 = \left(\frac{2Z_1 Z_2 e^2}{\mu R} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A-2-4})$$

と近似される。ここで式 (A-2-2) も右辺の指数因子は Wentzel-Kramers-Brillouin(WKB) 法で得られる透過因子であり、係数 $\frac{p_0}{v}$ は透過確率が単位入射流束当りで定義された事を考慮した因子である。クーロン障壁の効果を除いた核反応の部分の断面積を σ_N と記して、核反応の断面積を以下で表すと便利である。

$$\sigma = P_{\text{Coul}} \sigma_N = \frac{S(E)}{E} \exp(-2\pi\eta) \quad (\text{A-2-5})$$

この S が通常 S 因子と呼ばれる量である。 $\frac{1}{E}$ をくくりだしたのは、低エネルギーの極限で断面積がドブロイ波長の二乗に比例する事を考慮したためである。

クーロン障壁を透過した原子核は様々な原子核反応を起こすが、その様子は各々の場合に大きく異なる。熱核反応において興味があるのは、非弾性散乱のうち核種が変化する場合である。この場合には、一度二つの粒子の複合核ができ、それが異なる複数の原子核に分かれると考えられる。このとき、入射粒子のエネルギーと一致するような複合核の共鳴準位が存在する時、 S 因子が大きな値をとる。入射粒子のエネルギーと一致するような共鳴準位が存在しない場合には、 S 因子はほぼ一定の

値をとると近似できるため、反応断面積は以下のように表せる。

$$\begin{aligned}\langle\sigma v\rangle &= \left(\frac{\mu}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{2S}{\mu} \int \exp\left(-\frac{\mu v^2}{2k_B T} - 2\pi\eta\right) 4\pi v dv \\ &= \frac{2\sqrt{2}S}{\sqrt{\pi\mu}(k_B T)^{\frac{3}{2}}} \int \exp\left(-\frac{E}{k_B T} - \left(\frac{E_G}{E}\right)^{\frac{1}{2}}\right) dE\end{aligned}\quad (\text{A-2-6})$$

ここで

$$E_G = \frac{\mu}{2} \left(\frac{2\pi Z_1 Z_2 e^2}{\hbar^2}\right)^2 \quad (\text{A-2-7})$$

と定義した。

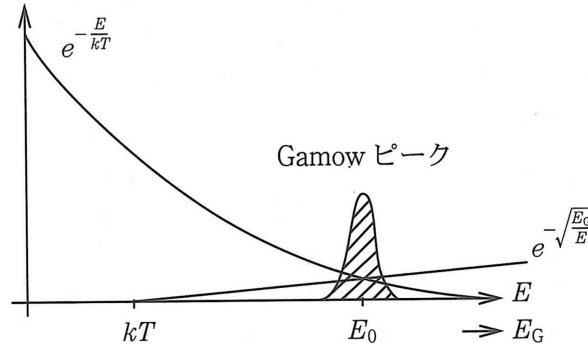


図 A.2: Gamow ピークの概念図 [9]

図 A.2 で示すように、被積分関数は

$$E = E_0 = \left(\frac{\sqrt{E_G k_B T}}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (\text{A-2-8})$$

にて最大値

$$\exp\left(-\frac{3E_0}{k_B T}\right) \quad (\text{A-2-9})$$

をとり、両側で急激に減少する関数となる。これを Gamow ピークと呼ぶ。被積分関数を E_0 の周りでガウス型として近似し積分すると、Gamow ピークの幅は

$$\Delta E_0 = \left(\frac{4E_0 k_B T}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A-2-10})$$

であり、

$$\langle\sigma v\rangle = \frac{8S}{\sqrt{6}k_B T} \left(\frac{E_0}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{3E_0}{k_B T}\right) \quad (\text{A-2-11})$$

となる。

複合核に共鳴準位が芯材する場合に断面積は Breit-Wigner の公式

$$\sigma(E) = \pi \left(\frac{\hbar}{\mu v}\right)^2 \frac{\omega \Gamma_{12} \Gamma_{34}}{(E - E_{\text{res}})^2 + \Gamma^2/4} \quad (\text{A-2-12})$$

と表される。ここで E_{res} は共鳴エネルギー、 Γ は共鳴幅、 Γ_{12} は入射粒子の部分幅であり、クーロン障壁はここに含まれる。 Γ_{34} は形成される粒子の部分幅であり、 $\Gamma = \Gamma_{12} + \Gamma_{34}$ が成り立つ。 ω はスピン因子であり、複合核のスピンを s^* とすると

$$\omega = \frac{2s^* + 1}{(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)} \quad (\text{A-2-13})$$

となる。一般に、共鳴幅は Gamow ピークの幅よりも小さいので、共鳴の効果はデルタ関数的に寄与し、

$$\langle \sigma v \rangle = \left(\frac{2\pi}{\mu k_{\text{BT}}} \right)^{\frac{3}{2}} \hbar^2 \omega \frac{\Gamma_{12} \Gamma_{34}}{\Gamma} \exp \left(-\frac{E_{\text{res}}}{k_{\text{B}} T} \right) \quad (\text{A-2-14})$$

と表される。

付 録 B $\tilde{\tau}$ 触媒合成反応のタイムスケール計算

ここでは [23] を参考にして、 $\tilde{\tau}$ 触媒合成反応 (3-1-1) のタイムスケールを計算する。(3-1-1) の反応断面積は [23] により以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} N_A \langle \sigma_{CFv} \rangle &= 2.37 \times 10^8 \times \underbrace{(1 - 0.34T_9) T_9^{-\frac{2}{3}} \exp\left(-5.33T_9^{-\frac{1}{3}}\right)}_{\equiv K} \quad [\text{cm}^3 \text{ s}^{-1} \text{ mol}] \\ &= 2.37 \times 10^8 \times K \end{aligned} \quad (\text{B-0-1})$$

この式において、 $N_A = 6.02 \times 10^{23}$ はアボガドロ定数、 $T_9 = \frac{T}{10^9 \text{K}}$ として T を無次元化したものを表している。

(3-1-1) は $\tilde{\tau}$ と He の束縛状態に対して d が反応する事で生じる。そのため ($\tilde{\tau}^4\text{He}$) 一つ当りの反応率を求めるためには、元素合成時代の d の個数密度 (n_d) が必要となる。ここでは宇宙温度が 30 keV¹ の時の反応のタイムスケール (τ_{CF}) を求めるとして、この時の n_d を以下のように求める。

Sec. 1.4 に記したように、宇宙に存在しているバリオンと光子の比 η_b の値は精度良く求められている。また、Subsec. 1.5.2 で記したように、 d と p との比 (d/H) も観測から求められている。ここでは η_b 、 d/H の値が元素合成の終わりから現在まで変わらないことを用いて、30 keV の時代の γ の密度 (n_γ) の値を求め、それをを用いて宇宙温度が 30 keV の時代の n_d の値を求める。

初めに、現在の d/H の値は以下のように与えられる [14]。

$$d/H = (2.80 \pm 0.10) \times 10^{-5} \quad (\text{1-5-6})$$

この値から、宇宙の温度が 30 keV の時代の d の個数密度を計算する。また、現在の η_b の値は以下ようになる [10]。

$$\eta_b = \frac{n_b}{n_\gamma} = (6.23 \pm 0.17) \times 10^{-10} \quad (\text{1-4-1})$$

n_γ は温度の関数として、以下のように与えられる。

$$n_\gamma = \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g_\gamma T^3 \quad (\text{B-0-2})$$

ここで $\zeta(3) = 1.2021$ となる。 g_γ は γ の内部自由度を表しており、ここでは 2 をとる。

次に、バリオンの個数密度 (n_b) について考える。 n_b は、 p と He の個数密度を用いて、以下のように表される。

$$n_b = n_p + n_{\text{He}} = n_p + 0.249n_p = 1.249n_p \quad (\text{B-0-3})$$

ここで、 n_p と n_{He} の比として [12] のものを用いた。以上から、30keV の時代の n_p を以下で求められる。

$$\begin{aligned} n_p &= \frac{6.23 \times 10^{-10}}{1.249} n_\gamma \\ &= \frac{6.23 \times 10^{-10}}{1.249} \times \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} 30^3 [\text{keV}^{-3}] \end{aligned} \quad (\text{B-0-4})$$

¹ スタウが ^4He と束縛状態を形成し始める時期としてこの値を用いている

これを $[\text{cm}^{-3}]$ の表記に直すと ($\hbar c = 197.33[\text{MeV fm}]$ を用いる。)、以下の値が求められる。

$$n_p = 4.2695 \times 10^{17} [\text{cm}^{-3}] \quad (\text{B-0-5})$$

さらに n_d は

$$\begin{aligned} n_d &= 4.2695 \times 10^{17} \times 2.82 \times 10^{-5} [\text{cm}^{-3}] \\ &= 1.2040 \times 10^{13} [\text{cm}^{-3}] \end{aligned} \quad (\text{B-0-6})$$

となる。

次に、もとめられた n_d の値を用いて、宇宙温度が 30keV の時代の τ_{CF} を求める。まず、この反応の反応率は (B-0-1) を用いると、以下のように計算される。

$$n_d \langle \sigma_{\text{CF}} v \rangle = 4.3239 \times 10^{-6} [\text{s}^{-1}]$$

この逆数が τ_{CF} となる。

$$\tau_{\text{CF}} = (4.3239 \times 10^{-6})^{-1} [\text{s}] = 2.3127 \times 10^5 [\text{s}] \quad (\text{B-0-7})$$

となる。

付 録 C ^4He 破砕反応の計算

ここでは本章で説明しなかった ^4He 破砕反応の反応断面積の計算について詳しく説明を行う。本章で記したように、各反応 (3-3-1)、(3-3-2) の反応振幅は leptonic part と hadronic part に分かれる。この反応振幅の leptonic part は各反応 (3-3-1)、(3-3-2) において共通であるため、まず初めにこの説明を行う。そして次に hadronic part の計算についてみていく。ここでは初めに hadronic part の計算に必要な各原子核の波動関数の構成方法について説明を行う。その後、各反応の hadronic part を計算し、反応断面積を計算します。

C.1 反応振幅計算-leptonic part-

まず初めに反応振幅 (3-3-8)、(3-3-12) の leptonic part の計算を行う。 ^4He 破砕反応を記述するラグランジアンは (3-3-4) で記したとおり、以下のように表される。

$$\mathcal{L} = \tilde{\tau}^* \tilde{\chi}_1^0 (g_L P_L + g_R P_R) \tau + \sqrt{2} G_F \nu_\tau \gamma^\mu P_L \tau J_\mu + \text{h.c.}, \quad (3-3-4)$$

これを元に振幅を計算する。

始状態に $\tilde{\tau}$, 終状態に $\tilde{\chi}_1^0, \nu_\tau$ が存在すると考えると、振幅の leptonic part は以下のように記述される。

$$\begin{aligned} & \langle \tilde{\chi}_1^0 \nu_\tau | j_\mu | \tilde{\tau} \rangle \\ &= \sqrt{2} G_F \langle \tilde{\chi}_1^0 \nu_\tau | [\bar{\nu}_\tau \gamma_\mu P_L \tau] [\bar{\tau} (g_L P_R + g_R^* P_L) \tilde{\chi}_1^0 \tilde{\tau}] | \tilde{\tau} \rangle \end{aligned} \quad (C-1-1)$$

これを計算していく。まず、縮約をとると

$$= \sqrt{2} G_F \bar{u}^s(p_{\nu\tau}) \gamma_\mu P_L \frac{i(q_\tau^\nu \gamma_\nu + m_\tau)}{q_\tau^2 - m_\tau^2} (g_L P_R + g_R^* P_L) v^{s'}(p_{\tilde{\chi}_1^0})$$

となる。ここでタウ粒子の質量がその運動量より遥かに大きい $q_\tau \gg m_\tau$ という近似を用いると

$$= -\frac{i\sqrt{2}G_F}{m_\tau} \bar{u}^s(p_{\nu\tau}) \gamma_\mu P_L (g_L P_R + g_R^* P_L) v^{s'}(p_{\tilde{\chi}_1^0})$$

となる。さらに、 $P_L P_R = 0, P_L P_L = P_L$ であることを用いると、

$$= -\frac{i\sqrt{2}G_F g_R^*}{m_\tau} \bar{u}^s(p_{\nu\tau}) \gamma_\mu P_L v^{s'}(p_{\tilde{\chi}_1^0}) \quad (C-1-2)$$

となる。ここで、この式の複素共役を考えると、これは以下で表される。

$$(\langle \tilde{\chi}_1^0 \nu_\tau | j_\mu | \tilde{\tau} \rangle)^* = \frac{i\sqrt{2}G_F g_R}{m_\tau} \bar{v}^{s'}(p_{\tilde{\chi}_1^0}) P_R \gamma_\mu u^s(p_{\nu\tau}) \quad (C-1-3)$$

今、 $u^s(p_{\nu\tau}), v^{s'}(p_{\tilde{\chi}_1^0})$ の形をスピノール $\xi^s(\nu_\tau$ の波動関数を記述する) , $\eta^{s'}(\tilde{\chi}_1^0$ の波動関数を記述する) であらわに表してやる。

まず、 $u^s(p_{\nu\tau})$ の方は、以下で表される。

$$u^s(p_{\nu\tau}) = \begin{pmatrix} \sqrt{p_{\nu\tau} \cdot \sigma} \xi^s \\ \sqrt{p_{\nu\tau} \cdot \bar{\sigma}} \xi^s \end{pmatrix} \quad (\text{C-1-4})$$

次に、 $v^{s'}(p_{\tilde{\chi}_1^0})$ を記述する。こちらは、 $\tilde{\chi}_1^0$ が非相対論的粒子 ($|\mathbf{p}_{\tilde{\chi}_1^0}| \ll m_{\tilde{\chi}_1^0}$) であることを用いると、以下のように記述する事ができる。

$$v^{s'}(p_{\tilde{\chi}_1^0}) = \sqrt{m_{\tilde{\chi}_1^0}} \begin{pmatrix} \eta^{s'} \\ -\eta^{s'} \end{pmatrix} \quad (\text{C-1-5})$$

以上の式を用いて、式の計算を部分的に行っていく。

初めに、複素共役ではない普通の部分の計算を行う。

$$\begin{aligned} & \bar{u}^s(p_{\nu\tau}) \gamma_\mu P_L v^{s'}(p_{\tilde{\chi}_1^0}) \\ &= (\xi^{\dagger s} \sqrt{p_{\nu\tau} \cdot \sigma}, \xi^{\dagger s} \sqrt{p_{\nu\tau} \cdot \bar{\sigma}}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\mu \\ \bar{\sigma}_\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sqrt{m_{\tilde{\chi}_1^0}} \begin{pmatrix} \eta^{s'} \\ -\eta^{s'} \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{m_{\tilde{\chi}_1^0}} \xi^{\dagger s} \sqrt{p_{\nu\tau} \cdot \sigma} \bar{\sigma}_\mu \eta^{s'} \end{aligned} \quad (\text{C-1-6})$$

次に、複素共役の対応する部分を計算する。

$$\begin{aligned} & \bar{v}^{s'}(p_{\tilde{\chi}_1^0}) P_R \gamma_\mu u^s(p_{\nu\tau}) \\ &= \sqrt{m_{\tilde{\chi}_1^0}} (\eta^{\dagger s'}, -\eta^{\dagger s'}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\mu \\ \bar{\sigma}_\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{p_{\nu\tau} \cdot \sigma} \xi^s \\ \sqrt{p_{\nu\tau} \cdot \bar{\sigma}} \xi^s \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{m_{\tilde{\chi}_1^0}} \eta^{\dagger s'} \bar{\sigma}_\mu \sqrt{p_{\nu\tau} \cdot \sigma} \xi^s \end{aligned} \quad (\text{C-1-7})$$

となります。

以上を用いると、振幅の二乗は以下のように表す事が出来る。

$$\begin{aligned} & (\langle \tilde{\chi}_1^0 \nu_\tau | j_\mu | \tilde{\tau} \rangle) (\langle \tilde{\chi}_1^0 \nu_\tau | j_\nu | \tilde{\tau} \rangle)^* \\ &= \frac{2G_F^2 |g_R|^2}{m_\tau^2} \bar{u}^s(p_{\nu\tau}) \gamma_\mu P_L v^{s'}(p_{\tilde{\chi}_1^0}) \times \bar{v}^{s'}(p_{\tilde{\chi}_1^0}) P_R \gamma_\nu u^s(p_{\nu\tau}) \\ &= \frac{2m_{\tilde{\chi}_1^0} G_F^2 |g_R|^2}{m_\tau^2} \xi^{\dagger s} \sqrt{p_{\nu\tau} \cdot \sigma} \bar{\sigma}_\mu \eta^{s'} \times \eta^{\dagger s'} \bar{\sigma}_\nu \sqrt{p_{\nu\tau} \cdot \sigma} \xi^s \end{aligned}$$

各々を成分表示して表す。

$$= \frac{2m_{\tilde{\chi}_1^0} G_F^2 |g_R|^2}{m_\tau^2} (\xi^{\dagger s})^i \left(\sqrt{p_{\nu\tau} \cdot \sigma} \bar{\sigma}_\mu \right)_i^j (\eta^{s'})_j \times (\eta^{\dagger s'})^k \left(\bar{\sigma}_\nu \sqrt{p_{\nu\tau} \cdot \sigma} \right)_k^l (\xi^s)_l$$

これを次のように表し、スピンドで和を取ると以下のように式変形する事ができる。

$$\begin{aligned}
&= \frac{2m_{\tilde{\chi}_1^0} G_F^2 |g_R|^2}{m_\tau^2} (\xi^s)_l (\xi^{\dagger s})^i \left(\sqrt{p_{\nu\tau} \cdot \sigma} \bar{\sigma}_\mu \right)_i^j (\eta^{s'})_j \times (\eta^{\dagger s'})^k \left(\bar{\sigma}_\nu \sqrt{p_{\nu\tau} \cdot \sigma} \right)_k^l \\
&= \frac{2m_{\tilde{\chi}_1^0} G_F^2 |g_R|^2}{m_\tau^2} \left(\sqrt{p_{\nu\tau} \cdot \sigma} \bar{\sigma}_\mu \right)_i^j \left(\bar{\sigma}_\nu \sqrt{p_{\nu\tau} \cdot \sigma} \right)_j^i \\
&= \frac{2m_{\tilde{\chi}_1^0} G_F^2 |g_R|^2}{m_\tau^2} \text{tr} \left(\sqrt{p_{\nu\tau} \cdot \sigma} \bar{\sigma}_\mu \bar{\sigma}_\nu \sqrt{p_{\nu\tau} \cdot \sigma} \right) \\
&= \frac{2m_{\tilde{\chi}_1^0} G_F^2 |g_R|^2}{m_\tau^2} \text{tr} (\bar{\sigma}_\mu \bar{\sigma}_\nu (p_{\nu\tau} \cdot \sigma))
\end{aligned}$$

このトレース部分を計算する事を考える。 ν_τ の運動方向を第三成分に限定して考えると、

$$\sqrt{p \cdot \sigma} = \sqrt{E + p_3} \begin{pmatrix} 1 - \sigma_3 \\ 2 \end{pmatrix} + \sqrt{E - p_3} \begin{pmatrix} 1 + \sigma_3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

となる。あらわに表すと

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{E - p_3} & 0 \\ 0 & \sqrt{E + p_3} \end{pmatrix} \quad (\text{C-1-8})$$

同じように

$$\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sqrt{E + p_3} & 0 \\ 0 & \sqrt{E - p_3} \end{pmatrix} \quad (\text{C-1-9})$$

となる。

以上を用いて、振幅計算を行う。今、求める反応振幅へのレプトニックな部分からの寄与を λ_μ , ハドロニックな部分からの寄与を V^0, A^i と定めてやると、求める反応振幅は以下で表される。

$$m = \lambda_0 V^0 + \lambda_1 A^1 + \lambda_2 A^2 + \lambda_3 A^3 \quad (\text{C-1-10})$$

ここで、各振幅の部分を改めて以下で表す。

$$\lambda_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda_1 \pm i\lambda_2) \quad A_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (A^1 \pm iA^2) \quad (\text{C-1-11})$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda_+ + \lambda_-) \quad A^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (A^+ + A^-) \quad (\text{C-1-12})$$

$$\lambda_2 = -\frac{i}{\sqrt{2}} (\lambda_+ - \lambda_-) \quad A^2 = -\frac{i}{\sqrt{2}} (A^+ - A^-) \quad (\text{C-1-13})$$

これを用いて振幅を表してやると、次のようになる。

$$m = \lambda_0 V^0 + \lambda_- A^+ + \lambda_+ A^- + \lambda_3 A^3 \quad (\text{C-1-14})$$

また、この複素共役は以下で表される。

$$m^* = \lambda_0^* V^0 + \lambda_-^* A^+ + \lambda_+^* A^- + \lambda_3^* A^3 \quad (\text{C-1-15})$$

ここで、ハドロニックな部分からの寄与は既に計算されているものを使うとし (詳細は後の章にて記す)、全て実数値で表されることを用いた。これより、振幅の二乗を計算してやると、次のように表さ

れる。

$$\begin{aligned}
|m|^2 = & |\lambda_0|^2 (V^0)^2 + \lambda_- \lambda_0^* V^0 A^+ + \lambda_+ \lambda_0^* V^0 A^- + \lambda_3 \lambda_0^* V^0 A^3 \\
& + \lambda_0 \lambda_-^* V^0 A^+ + |\lambda_-|^2 (A^+)^2 + \lambda_+ \lambda_-^* A^+ A^- + \lambda_3 \lambda_-^* A^+ A^3 \\
& + \lambda_0 \lambda_+^* V^0 A^- + \lambda_- \lambda_+^* A^+ A^- + |\lambda_+|^2 (A^-)^2 + \lambda_3 \lambda_+^* A^- A^3 \\
& + \lambda_0 \lambda_3^* V^0 A^3 + \lambda_- \lambda_3^* A^+ A^3 + \lambda_+ \lambda_3^* A^- A^3 + |\lambda_3|^2 (A^3)^2
\end{aligned} \tag{C-1-16}$$

ここで、 $\lambda_\mu \lambda_\nu^*$ は、今まで行ってきた計算から以下のように表される。

$$\lambda_\mu \lambda_\nu^* = \frac{2m_{\tilde{\chi}_1^0} G_F^2 |g_R|^2}{m_\tau^2} \text{tr}(\bar{\sigma}_\mu \bar{\sigma}_\nu (p_{\nu\tau} \cdot \sigma)) \tag{C-1-17}$$

以上を用いて、計算を行う。

初めに pauli 行列について次を定義する。

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

また σ_+, σ_- を次で定義する。

$$\sigma_+ = \frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_- = \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

次が成り立つ事は明らかである。

$$\bar{\sigma}_+ = -\sigma_+$$

$$\bar{\sigma}_- = -\sigma_-$$

以上より、振幅の計算を行う。(C-1-17) より、各 $\lambda_\mu \lambda_\nu^*$ に対する $\bar{\sigma}_\mu \bar{\sigma}_\nu$ を計算する。値は以下のように

表される。

$$\begin{aligned}
|\lambda_0|^2 &\Rightarrow \bar{\sigma}_0 \bar{\sigma}_0 = \mathbf{1} \\
\lambda_- \lambda_0^* &\Rightarrow \sqrt{2} \bar{\sigma}_- \bar{\sigma}_0 = - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \\
\lambda_+ \lambda_0^* &\Rightarrow \sqrt{2} \bar{\sigma}_+ \bar{\sigma}_0 = - \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\lambda_3 \lambda_0^* &\Rightarrow \bar{\sigma}_3 \bar{\sigma}_0 = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
\lambda_0 \lambda_-^* &\Rightarrow \sqrt{2} \bar{\sigma}_0 \bar{\sigma}_+ = - \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
|\lambda_-|^2 &\Rightarrow 2 \bar{\sigma}_- \bar{\sigma}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\
\lambda_+ \lambda_-^* &\Rightarrow 2 \bar{\sigma}_+ \bar{\sigma}_+ = \mathbf{0} \\
\lambda_3 \lambda_-^* &\Rightarrow \sqrt{2} \bar{\sigma}_3 \bar{\sigma}_+ = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\lambda_0 \lambda_+^* &\Rightarrow \sqrt{2} \bar{\sigma}_0 \bar{\sigma}_- = - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \\
\lambda_- \lambda_+^* &\Rightarrow 2 \bar{\sigma}_- \bar{\sigma}_- = \mathbf{0} \\
|\lambda_+|^2 &\Rightarrow 2 \bar{\sigma}_+ \bar{\sigma}_- = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\lambda_3 \lambda_+^* &\Rightarrow \sqrt{2} \bar{\sigma}_3 \bar{\sigma}_+ = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\lambda_0 \lambda_3^* &\Rightarrow \bar{\sigma}_0 \bar{\sigma}_3 = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
\lambda_- \lambda_3^* &\Rightarrow \sqrt{2} \bar{\sigma}_- \bar{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \\
\lambda_+ \lambda_3^* &\Rightarrow \sqrt{2} \bar{\sigma}_+ \bar{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
|\lambda_3|^2 &\Rightarrow \bar{\sigma}_3 \bar{\sigma}_3 = \mathbf{1}
\end{aligned}$$

これより、tr をとることを考えると残る項は少なくなると考えられる。tr-part として残る部分だけをとると、振幅は以下で表される。

$$|m|^2 = |\lambda_0|^2 (V_0)^2 + \lambda_3 \lambda_0^* V^0 A^3 + |\lambda_-|^2 (A^+)^2 + |\lambda_+|^2 (A^-)^2 + \lambda_0 \lambda_3^* V^0 A^3 + |\lambda_3|^2 (A^3)^2 \quad (\text{C-1-18})$$

さらに残る項の tr-part を計算してやると、以下ようになる。

$$\begin{aligned}
|\lambda_0|^2 &\Rightarrow 2E_{\nu\tau} \\
\lambda_3\lambda_0^* &\Rightarrow 2p_{\nu\tau} \\
|\lambda_-|^2 &\Rightarrow 2(E_{\nu\tau} + p_{\nu\tau}) \\
|\lambda_+|^2 &\Rightarrow 2(E_{\nu\tau} - p_{\nu\tau}) \\
\lambda_0\lambda_3^* &\Rightarrow 2p_{\nu\tau} \\
|\lambda_3|^2 &\Rightarrow 2E_{\nu\tau}
\end{aligned}$$

以上の事を用いて反応の振幅を表すと、以下ようになる。

$$\begin{aligned}
|\lambda_0|^2(V^0)^2 &= \frac{2m_{\tilde{\chi}_1^0}G_F^2|g_R|^2}{m_\tau^2} \times 2E_{\nu\tau} \times (V^0)^2 \\
&= \frac{4m_{\tilde{\chi}_1^0}G_F^2|g_R|^2}{m_\tau^2} E_{\nu\tau}(V^0)^2
\end{aligned} \tag{C-1-19}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_3\lambda_0^*V^0A^3 &= \lambda_0\lambda_3^*V^0A^3 \\
&= \frac{2m_{\tilde{\chi}_1^0}G_F^2|g_R|^2}{m_\tau^2} \times 2p_{\nu\tau} \times (V^0A^3) \\
&= \frac{4g_A m_{\tilde{\chi}_1^0}G_F^2|g_R|^2}{m_\tau^2} p_{\nu\tau} V^0A^3
\end{aligned} \tag{C-1-20}$$

$$\begin{aligned}
|\lambda_-|^2(A^+)^2 &= \frac{2m_{\tilde{\chi}_1^0}G_F^2|g_R|^2}{m_\tau^2} \times 2(E_{\nu\tau} + p_{\nu\tau}) \times (A^+)^2 \\
&= \frac{4g_A^2 m_{\tilde{\chi}_1^0}G_F^2|g_R|^2}{m_\tau^2} (E_{\nu\tau} + p_{\nu\tau})(A^+)^2
\end{aligned} \tag{C-1-21}$$

$$\begin{aligned}
|\lambda_+|^2(A^-)^2 &= \frac{2m_{\tilde{\chi}_1^0}G_F^2|g_R|^2}{m_\tau^2} \times 2(E_{\nu\tau} - p_{\nu\tau}) \times (A^-)^2 \\
&= \frac{4g_A^2 m_{\tilde{\chi}_1^0}G_F^2|g_R|^2}{m_\tau^2} (E_{\nu\tau} - p_{\nu\tau})(A^-)^2
\end{aligned} \tag{C-1-22}$$

$$\begin{aligned}
|\lambda_3|^2(A^3)^2 &= \frac{2m_{\tilde{\chi}_1^0}G_F^2|g_R|^2}{m_\tau^2} \times 2E_{\nu\tau} \times (A^3)^2 \\
&= \frac{4g_A^2 m_{\tilde{\chi}_1^0}G_F^2|g_R|^2}{m_\tau^2} E_{\nu\tau}(A^3)^2
\end{aligned} \tag{C-1-23}$$

この計算において、反応により生じる ν_τ の運動方向を z 成分として計算を行ったため、 ν_τ の運動量成分 $p_{\nu z}$ が現れてくる。しかし、反応断面積計算においては p_ν を全運動量空間で積分するため、 $p_{\nu z}$ による寄与は消失すると考えられる。

以上から、各反応 (3-3-1)、(3-3-2) の反応振幅の leptonic part は計算された。

C.2 反応振幅計算-hadronic part-

反応振幅 (3-3-8)、(3-3-12) の leptonic part の計算を行う。これらの hadronic part を計算するためには、ハドロニックカレントと原子核の波動関数を表す必要がある。ハドロニックカレント J^μ は次

のようにベクトルカレント V^μ と軸性ベクトルカレント A^μ で構成され则认为られる。

$$J^\mu = V^\mu + g_A A^\mu \quad (\text{C-2-1})$$

ここで $g_A = 1.26$ は軸性ベクトルカレントの結合定数を表している。今考えているエネルギースケール $O(10 \sim 100)\text{MeV}$ では、原子核は非相対論的粒子であると考えられるため、各カレントの関連する成分は V_0 と $A_i (i = 1, 2, 3)$ となる。本論文では、これらのカレントを以下のような核子演算子で表す。

$$V_0 = \sum_{a=1}^4 \tau_a^- e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_a}, \quad A_i = \sum_{a=1}^4 \tau_a^- \sigma_{ai} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_a} \quad (\text{C-2-2})$$

ここで $\mathbf{q}$ はカレントにより運ばれる運動量、 $\mathbf{r}_a$ は各核子の空間座標を表している。また、 τ_a^- は核子のアイソスピンを下げる演算子、 σ_{ai} は核子のスピン演算子を表している。以下では、これらの演算子を作用させる原子核の波動関数を構成していく。

C.2.1 原子核の波動関数

以下では、計算に必要な d、t、He 波動関数の組み方について説明する。まず初めに、一般的な原子核の波動関数の空間成分の組み方について説明する。次に、具体的に d、t、He 波動関数のスピンアイソスピン成分の組み方について説明する。そして、各反応 (3-3-1)、(3-3-2) について始状態、終状態の各原子核の波動関数の組み方について説明する。最後に、原子核の波動関数を求める上で必要な原子核の広がり具合を表す因子の求め方について説明する。

原子核の波動関数の空間成分

二体の波動関数 まず、核子二つで構成される一般的な原子核の波動関数の構成を行う。二体の波動関数は、相対座標だけに依存するとして次の形をとる。

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = N \exp \left\{ -a \left[\mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2 - \frac{(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)^2}{2} \right] \right\} = N \exp \left[-\frac{a}{2} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2 \right] \quad (\text{C-2-3})$$

これは単純に規格化積分を行うと発散してしまう。それを示すために、まず座標系としてヤコビ座標を導入する。ヤコビ座標は以下のように表される。

$$\mathbf{s}_0 = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}, \quad \mathbf{s}_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \quad (\text{C-2-4})$$

今導入したヤコビ座標を用いて、二体の波動関数の規格化を行う事を考える。積分測度の変換に必要なヤコビアンは以下のように 1 となる。

$$\frac{\partial(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{\partial(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1)} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = -1 \quad (\text{C-2-5})$$

よって、

$$\int d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 |\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|^2 = |N|^2 \int d^3\mathbf{s}_0 d^3\mathbf{s}_1 e^{-as_1^2} = |N|^2 V \left(\frac{\pi}{a} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (\text{C-2-6})$$

となる。全体積 V は、重心の位置の自由度に対応している。これを避けるため、重心を原点に固定して規格化を行う。これは上記の体積を落とすとも考えられるし、規格化条件を以下のようにすると考えられる。

$$\int d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 |\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|^2 \delta^{(3)} \left(\frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2} \right) = 1 \quad (\text{C-2-7})$$

いずれにせよ、 $N = \left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{3}{4}}$ ととることができ、結果、二体の波動関数は以下のように表す事ができる。

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{3}{4}} \exp \left\{ -a \left[\mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2 - \frac{(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)^2}{2} \right] \right\} = \left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{3}{4}} \exp \left[-\frac{a}{2} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2 \right] \\ &= \left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{3}{4}} \exp \left(-\frac{a}{2} \mathbf{s}_1^2 \right)\end{aligned}\quad (\text{C-2-8})$$

三体の波動関数 二体の場合と同様にして、三体の原子核の波動関数を構成する事を考える。まず、ヤコビ座標を次で定義する。

$$\mathbf{s}_0 = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3}{3}, \quad \mathbf{s}_1 = \mathbf{r}_1 - \frac{\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3}{2}, \quad \mathbf{s}_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3 \quad (\text{C-2-9})$$

三体の波動関数は次で定義する。

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = N \exp \left\{ -a \left[\mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2 + \mathbf{r}_3^2 - \frac{(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3)^2}{3} \right] \right\} = N \exp \left[-a \left(\frac{2}{3} \mathbf{s}_1^2 + \frac{1}{2} \mathbf{s}_2^2 \right) \right] \quad (\text{C-2-10})$$

このとき、規格化条件を次のようにする。

$$I \equiv \int d^3 \mathbf{r}_1 d^3 \mathbf{r}_2 d^3 \mathbf{r}_3 |\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)|^2 \delta^{(3)} \left(\frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3}{3} \right) = 1 \quad (\text{C-2-11})$$

位置座標を $\mathbf{r}$ からヤコビ座標 $\mathbf{s}$ に変える際、ヤコビアンは以下のように表される。

$$\frac{\partial(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)}{\partial(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)} = \det \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = 1 \quad (\text{C-2-12})$$

よって、

$$\begin{aligned}I &= |N|^2 \int d^3 \mathbf{s}_0 d^3 \mathbf{s}_1 d^3 \mathbf{s}_2 \exp \left(-\frac{4}{3} a \mathbf{s}_1^2 \right) \exp(-a \mathbf{s}_2^2) \delta^{(3)}(\mathbf{s}_0) \\ &= |N|^2 \left(\frac{3\pi}{4a} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\pi}{a} \right)^{\frac{3}{2}} = |N|^2 \left(\frac{3}{4} \frac{\pi^2}{a^2} \right)^{\frac{3}{2}}\end{aligned}\quad (\text{C-2-13})$$

ゆえに $N = \left(\frac{4}{3} \frac{a^2}{\pi^2} \right)^{\frac{3}{4}}$ ととることができ、三体の波動関数は以下で表す事が出来る。

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) &= \left(\frac{4}{3} \frac{a^2}{\pi^2} \right)^{\frac{3}{4}} \exp \left\{ -a \left[\mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2 + \mathbf{r}_3^2 - \frac{(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3)^2}{3} \right] \right\} \\ &= \left(\frac{4}{3} \frac{a^2}{\pi^2} \right)^{\frac{3}{4}} \exp \left[-a \left(\frac{2}{3} \mathbf{s}_1^2 + \frac{1}{2} \mathbf{s}_2^2 \right) \right]\end{aligned}\quad (\text{C-2-14})$$

四体の波動関数 まずヤコビ座標を次で定義する。

$$\mathbf{s}_0 = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4}{4}, \quad \mathbf{s}_1 = \mathbf{r}_1 - \frac{\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4}{3}, \quad \mathbf{s}_2 = \mathbf{r}_2 - \frac{\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4}{2}, \quad \mathbf{s}_3 = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4 \quad (\text{C-2-15})$$

四体の波動関数は次で定義する。

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) &= N \exp \left\{ -a \left[\mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2 + \mathbf{r}_3^2 + \mathbf{r}_4^2 - \frac{(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4)^2}{4} \right] \right\} \\ &= N \exp \left[-a \left(\frac{3}{4} \mathbf{s}_1^2 + \frac{2}{3} \mathbf{s}_2^2 + \frac{1}{2} \mathbf{s}_3^2 \right) \right]\end{aligned}\quad (\text{C-2-16})$$

位置座標 r からヤコビ座標 s へと変換する際のヤコビアンは $\frac{\partial(r_1, r_2, r_3, r_4)}{\partial(s_0, s_1, s_2, s_3)} = -1$ であり、規格化は

$$I \equiv \int d^3r_1 d^3r_2 d^3r_3 d^3r_4 |\psi(r_1, r_2, r_3, r_4)|^2 \delta^{(3)}\left(\frac{(r_1 + r_2 + r_3 + r_4)}{4}\right) = 1 \quad (\text{C-2-17})$$

および、

$$I = |N|^2 \left(\frac{2\pi}{3a}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{3\pi}{4a}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{3}{2}} = |N|^2 \left(\frac{1}{2} \frac{\pi^3}{a^3}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (\text{C-2-18})$$

となります。よって、 $N = \left(2 \frac{a^3}{\pi^3}\right)^{\frac{3}{4}}$ ととることが出来、四体の波動関数は次のようになる。

$$\begin{aligned} \psi(r_1, r_2, r_3, r_4) &= \left(2 \frac{a^3}{\pi^3}\right)^{\frac{3}{4}} \exp \left\{ -a \left[r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 - \frac{(r_1 + r_2 + r_3 + r_4)^2}{4} \right] \right\} \\ &= \left(2 \frac{a^3}{\pi^3}\right)^{\frac{3}{4}} \exp \left[-a \left(\frac{3}{4} s_1^2 + \frac{2}{3} s_2^2 + \frac{1}{2} s_3^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{C-2-19})$$

原子核の波動関数のスピンアイソスピン成分

ここでは、d、t、He 波動関数のスピンアイソスピン成分の組み方を説明する。

d 波動関数のスピンアイソスピン成分 まず初めに、d 波動関数のスピンアイソスピン成分について考える。これを考えるにあたって、本論文では原子核を構成する核子の状態を、以下のように表す。

$$\begin{aligned} |p \uparrow\rangle & \text{陽子のスピンアップ状態} \\ |p \downarrow\rangle & \text{陽子のスピンダウン状態} \\ |n \uparrow\rangle & \text{中性子のスピンアップ状態} \\ |n \downarrow\rangle & \text{中性子のスピンダウン状態} \end{aligned}$$

これを用いて d 波動関数のスピンアイソスピン成分を記述する。d は p が一つ、n が一つの計 2 つの核子から構成されている。そして d はスピン (S) とアイソスピン (I) の固有値として、各々 $S = 1$ 、 $I = 0$ を持つ。よって、スピンの量子化軸に沿って三成分存在しており、以下のようになる。

$$S_z = 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|p \uparrow\rangle|n \uparrow\rangle - |n \uparrow\rangle|p \uparrow\rangle) \equiv |d_1\rangle \quad (\text{C-2-20})$$

$$S_z = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(|p \uparrow\rangle|n \downarrow\rangle - |n \uparrow\rangle|p \downarrow\rangle + |p \downarrow\rangle|n \uparrow\rangle - |n \downarrow\rangle|p \uparrow\rangle) \equiv |d_0\rangle \quad (\text{C-2-21})$$

$$S_z = -1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|p \downarrow\rangle|n \downarrow\rangle - |n \downarrow\rangle|p \downarrow\rangle) \equiv |d_{-1}\rangle \quad (\text{C-2-22})$$

上で表した状態は、粒子の入れ換えに対して反対称になっている。

t 波動関数のスピンアイソスピン成分 次に t 波動関数のスピンアイソスピン成分について考える。t は、p が 1 つ、n が 2 つの計 3 つの核子から構成されている。そして、t は S と I の固有値として、各々 $S = \frac{1}{2}$ 、 $I = \frac{1}{2}$ を持ち、またその構成条件から I の第三成分 (I_z) の値として $I_z = -\frac{1}{2}$ を持つ。

t 波動関数は核子三つの状態から構成されるので、その表現方法は S,I についてそれぞれ以下のように表される。

$$I : 2 \otimes 2 \otimes 2 = (3 \oplus 1) \otimes 2 = \underbrace{4}_S \oplus \underbrace{2}_{M_S} \oplus \underbrace{2}_{M_A}$$

$$S : 2 \otimes 2 \otimes 2 = (3 \oplus 1) \otimes 2 = \underbrace{4}_S \oplus \underbrace{2}_{M_S} \oplus \underbrace{2}_{M_A}$$

ここで数字の下の S, M_S, M_A はそれぞれ、全ての核子の入れ換えについて完全対称 (すなわち核子 (1,2)、(1,3)、(2,3) の各々の入れ替えに対して対称)、1,2 粒子の入れ換えについてのみ対称、1,2 粒子の入れ換えについてのみ反対称である表現を表している。

S について考えると、 S, M_S, M_A は以下を表している。

$$S : S = 1 \text{ と } S = \frac{1}{2} \text{ の状態を合成して } S = \frac{3}{2} \text{ の状態を作る表現}$$

$$M_S : S = 1 \text{ と } S = \frac{1}{2} \text{ の状態を合成して } S = \frac{1}{2} \text{ の状態を作る表現}$$

$$M_A : S = 0 \text{ と } S = \frac{1}{2} \text{ の状態を合成して } S = \frac{1}{2} \text{ の状態を作る表現}$$

また、I のものも、これと同様のものを表している。

t 波動関数は $S = \frac{1}{2}, S_z = \pm \frac{1}{2}, I = \frac{1}{2}, I_z = -\frac{1}{2}$ (S, I の第三成分をそれぞれ S_z, I_z とした) であり、全体で完全反対称 (1,2 粒子の入れ替え、2,3 粒子の入れ替え、3,1 粒子の入れ替え、各々に対して反対称) となっているので、以下のように構成する。

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (I(M_A) \otimes S(M_S) - I(M_S) \otimes S(M_A)) \quad (\text{C-2-23})$$

ここで $I(M_A)$ は I として表現 M_A をとったもの、 $S(M_S)$ は S として表現 M_S をとったものを表し、核子の状態はそれを掛け合わせたもので表される。

この状態を計算する。まずは S の第三成分 S_z が $+\frac{1}{2}$ であるものを表す。

$$(C-2-23)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} (pnn - npn) \otimes \frac{1}{\sqrt{6}} (2 \uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow) - \frac{1}{\sqrt{6}} (pnn + npn - 2nnp) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow) \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \{ pnn(\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow) - npn(\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow) + nnp(\uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow) \} \quad (\text{C-2-24})$$

$$(*pnn(\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow) \equiv |p \uparrow\rangle |n \uparrow\rangle |n \downarrow\rangle - |p \uparrow\rangle |n \downarrow\rangle |n \uparrow\rangle)$$

この状態が完全反対称になっている事は、実際に粒子を入れ替えてみれば分かる。

上記の結果は $S_z = \frac{1}{2}$ の状態のものだが、 $S_z = -\frac{1}{2}$ の状態のものも同様の計算で求める事ができる。

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} (pnn - npn) \otimes \frac{1}{\sqrt{6}} (\uparrow\downarrow\downarrow + \downarrow\uparrow\downarrow - 2\downarrow\downarrow\uparrow) - \frac{1}{\sqrt{6}} (pnn + npn - 2nnp) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow) \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \{ pnn(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow) - npn(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow) + nnp(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow) \} \quad (\text{C-2-25})$$

以上の計算から、t の波動関数のスピンアイソスピン成分を求める事ができる。

He 波動関数のスピンアイソスピン成分 次に He 波動関数のスピンアイソスピン成分について考える。He は、p² つ、n² つの計 4 つの核子から構成されている。また、He は S、I の固有値として、ともに 0 を持つ。

He の波動関数は粒子 4 つの状態から構成されるので、その表現方法は S, I についてそれぞれ以下のように表される。

$$I : 2 \otimes 2 \otimes 2 \otimes 2 = (3 \oplus 1) \otimes (3 \oplus 1) = \underbrace{5}_S \oplus \underbrace{3}_{M_{1S}} \oplus \underbrace{1}_{M_{2S}} \oplus \underbrace{3}_{M_{3S}} \oplus \underbrace{1}_{M_A}$$

$$S : 2 \otimes 2 \otimes 2 \otimes 2 = (3 \oplus 1) \otimes (3 \oplus 1) = \underbrace{5}_S \oplus \underbrace{3}_{M_{1S}} \oplus \underbrace{1}_{M_{2S}} \oplus \underbrace{3}_{M_{3S}} \oplus \underbrace{1}_{M_A}$$

S, M_S, M_A の意味は、今回は核子が 4 つあるので、S は全粒子について完全対称 (すなわち核子 (1,2)、(1,3)、(1,4)、(2,3)、(2,4)、(3,4) の各々の入れ替えに対して対称)、 M_S は核子 (1,2) と (3,4) の各々の入れ替えについて対称、 M_A は核子 (1,2) と (3,4) の各々の入れ替えについて反対称となる。

t の場合と同じく、スピンについてのみ考えると以下のように考えられる。

$$\begin{aligned} S : S = 1 \text{ と } S = 1 \text{ を合成して } S = 2 \text{ を作ったもの} \\ M_{1S} : S = 1 \text{ と } S = 1 \text{ を合成して } S = 1 \text{ を作ったもの} \\ M_{2S} : S = 1 \text{ と } S = 1 \text{ を合成して } S = 0 \text{ を作ったもの} \\ M_{3S} : S = 1 \text{ と } S = 0 \text{ を合成して } S = 1 \text{ を作ったもの} \\ M_A : S = 0 \text{ と } S = 0 \text{ を合成して } S = 0 \text{ を作ったもの} \end{aligned}$$

また、アイソスピンもこれと同様に考える事ができる。

He については t と異なり、全体としてスピンアイソスピンの固有値が $S=0, I=0$ となっている。よって、完全反対称の波動関数を以下のように、 $S=0, I=0$ の表現を用いて構成する。

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(I(M_A) \otimes S(M_{2S}) - I(M_{2S}) \otimes S(M_A)) \quad (C-2-26)$$

この状態の計算は以下ようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{2}(pnpn - pnnp - nppn + npnp) \otimes \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow + \downarrow\downarrow\uparrow\uparrow - \frac{1}{2}(\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow) \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{\sqrt{3}} \left(ppnn + nnpp - \frac{1}{2}(pnpn + pnnp + nppn + npnp) \right) \otimes \frac{1}{2}(\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow) \right\} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \left\{ \begin{aligned} & (pnpn)(\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow + \downarrow\downarrow\uparrow\uparrow - \uparrow\downarrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow\downarrow) + (pnnp)(-\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow\uparrow + \uparrow\downarrow\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\uparrow\downarrow) \\ & + (nppn)(-\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow\uparrow + \uparrow\downarrow\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\uparrow\downarrow) + (npnp)(\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow + \downarrow\downarrow\uparrow\uparrow - \uparrow\downarrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow\downarrow) \\ & + (ppnn)(-\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow) + (nnpp)(-\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow) \end{aligned} \right\} \quad (C-2-27) \end{aligned}$$

となる。

今、この波動関数が核子の入れ換えについて、完全反対称になっている事を見してみる。

pnnp の項 (4 つ) を A、pnnp の項を B、nppn の項を C、npnp の項を D、ppnn の項を E、nnpp の項を F で表すと、この波動関数の各核子の入れ換えと各項の関係は以下ようになる。

$$\begin{aligned}
1,2 \text{ 粒子の入れ換え} &\Rightarrow A \leftrightarrow -C \quad B \leftrightarrow -D \quad E \rightarrow -E \quad F \rightarrow -F \\
1,3 \text{ 粒子の入れ換え} &\Rightarrow A \rightarrow -A \quad B \leftrightarrow -F \quad C \leftrightarrow -E \quad D \rightarrow -D \\
1,4 \text{ 粒子の入れ換え} &\Rightarrow A \leftrightarrow -F \quad B \rightarrow -B \quad C \rightarrow -C \quad D \leftrightarrow -E \\
2,3 \text{ 粒子の入れ換え} &\Rightarrow A \leftrightarrow -E \quad B \rightarrow -B \quad C \rightarrow -C \quad D \leftrightarrow -F \\
2,4 \text{ 粒子の入れ換え} &\Rightarrow A \rightarrow -A \quad B \leftrightarrow -E \quad C \leftrightarrow -F \quad D \rightarrow -D \\
3,4 \text{ 粒子の入れ換え} &\Rightarrow A \leftrightarrow -B \quad C \leftrightarrow -D \quad E \rightarrow -E \quad F \rightarrow -F
\end{aligned}$$

以上から、この波動関数が核子の入れ換えについて完全反対称になっている事が分かる。

C.2.2 始状態、終状態の各原子核の波動関数

ここでは今まで述べた内容も含めて、各反応 (3-3-1)、(3-3-2) について始状態、終状態の各原子核の波動関数の組み方について説明する。

始状態の原子核の波動関数

反応 (3-3-1)、(3-3-2) の始状態の原子核は共通して ${}^4\text{He}$ であるため、初めに ${}^4\text{He}$ 波動関数を表す。初めにスピンアイソスピン成分について記す。これは前節で求めたとおり、以下ようになる。

$$\begin{aligned}
&|{}^4\text{He}\rangle \\
&= \frac{1}{2\sqrt{6}} \left\{ \begin{aligned} &(pnpn)(\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow + \downarrow\downarrow\uparrow\uparrow - \uparrow\downarrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow) + (pnnp)(-\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow\uparrow + \uparrow\downarrow\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow) \\ &+(nppn)(-\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow\uparrow + \uparrow\downarrow\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow) + (npnp)(\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow + \downarrow\downarrow\uparrow\uparrow - \uparrow\downarrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow) \\ &+(ppnn)(-\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow) + (nnpp)(-\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow) \end{aligned} \right\}
\end{aligned}$$

空間成分は p 二つ、n 二つで四体なので、以下ようになる。

$$\begin{aligned}
\psi_{\text{He}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) &= \left(2 \frac{a_{\text{He}}^3}{\pi^3}\right)^{\frac{3}{4}} \exp \left\{ -a_{\text{He}}(\mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2 + \mathbf{r}_3^2 + \mathbf{r}_4^2 - \frac{(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4)^2}{4}) \right\} \\
&= \left(2 \frac{a_{\text{He}}^3}{\pi^3}\right)^{\frac{3}{4}} \exp \left\{ -a_{\text{He}} \left(\frac{3}{4}s_1^2 + \frac{2}{3}s_2^2 + \frac{1}{2}s_3^2 \right) \right\} \quad (\text{C-2-28})
\end{aligned}$$

ここで a_{He} は He の広がり具合を表している因子で、その次元は自然単位系でエネルギーの二乗で表される。この因子は原子核の平均自乗物質半径 (R_m) を用いて以下のように表される。

$$a_{\text{He}} = \frac{9}{16} \frac{1}{(R_m)_{\text{He}}^2} \quad (\text{C-2-29})$$

本論文では $(R_m)_{\text{He}}$ の値を引用して、反応断面積の計算を行う。尚、この a_{He} と $(R_m)_{\text{He}}$ の関係の導出については後に記述する。また今考えている反応では、始状態として He は静止していると考えているため、重心運動の要素を入れていない。 r_i は i 番目の粒子の座標を表しており、 s_i はヤコビ座標を表している。

四体の波動関数を考える際、ヤコビ座標として以下のものが考えられる。

$$s_0 = \frac{r_1 + r_2 + r_3 + r_4}{4} \quad s_1 = r_1 - \frac{r_2 + r_3 + r_4}{3} \quad s_2 = r_2 - \frac{r_3 + r_4}{2} \quad s_3 = r_3 - r_4 \quad (\text{C-2-30})$$

$$s_1 = r_2 - \frac{r_3 + r_4 + r_1}{3} \quad s_2 = r_3 - \frac{r_4 + r_1}{2} \quad s_3 = r_4 - r_1 \quad (\text{C-2-31})$$

$$s_1 = r_3 - \frac{r_4 + r_1 + r_2}{3} \quad s_2 = r_4 - \frac{r_1 + r_2}{2} \quad s_3 = r_1 - r_2 \quad (\text{C-2-32})$$

$$s_1 = r_4 - \frac{r_1 + r_2 + r_3}{3} \quad s_2 = r_1 - \frac{r_2 + r_3}{2} \quad s_3 = r_2 - r_3 \quad (\text{C-2-33})$$

このように定義の仕方の違いにより、様々な形で表す事が出来る。この座標の取り方の違いは、積分計算を実行する際に役に立つ。

r を s で表すと以下ようになる。

$$r_1 = s_0 + \frac{3}{4}s_1, \quad r_2 = s_0 - \frac{1}{4}s_1 + \frac{2}{3}s_2, \quad r_3 = s_0 - \frac{1}{4}s_1 - \frac{1}{3}s_2 + \frac{1}{2}s_3, \quad r_4 = s_0 - \frac{1}{4}s_1 - \frac{1}{3}s_2 - \frac{1}{2}s_3 \quad (\text{C-2-34})$$

$$r_2 = s_0 + \frac{3}{4}s_1, \quad r_3 = s_0 - \frac{1}{4}s_1 + \frac{2}{3}s_2, \quad r_4 = s_0 - \frac{1}{4}s_1 - \frac{1}{3}s_2 + \frac{1}{2}s_3, \quad r_1 = s_0 - \frac{1}{4}s_1 - \frac{1}{3}s_2 - \frac{1}{2}s_3 \quad (\text{C-2-35})$$

$$r_3 = s_0 + \frac{3}{4}s_1, \quad r_4 = s_0 - \frac{1}{4}s_1 + \frac{2}{3}s_2, \quad r_1 = s_0 - \frac{1}{4}s_1 - \frac{1}{3}s_2 + \frac{1}{2}s_3, \quad r_2 = s_0 - \frac{1}{4}s_1 - \frac{1}{3}s_2 - \frac{1}{2}s_3 \quad (\text{C-2-36})$$

$$r_4 = s_0 + \frac{3}{4}s_1, \quad r_1 = s_0 - \frac{1}{4}s_1 + \frac{2}{3}s_2, \quad r_2 = s_0 - \frac{1}{4}s_1 - \frac{1}{3}s_2 + \frac{1}{2}s_3, \quad r_3 = s_0 - \frac{1}{4}s_1 - \frac{1}{3}s_2 - \frac{1}{2}s_3 \quad (\text{C-2-37})$$

反応 (3-3-1) の終状態の原子核の波動関数

次に反応 (3-3-1) の終状態の原子核の波動関数について記述する。この反応について、ベクトルカレントが当たった場合は始状態、終状態でスピンの値に変化はありませんが、軸性ベクトルカレントが当たった場合には始状態と終状態との間でスピンの値に変化が生じる。それを考慮して、終状態は以下のように表す事ができる。

$S = 1$ の時

$$\begin{cases} \cdot |t \uparrow\rangle |n \uparrow\rangle & S_z = 1 \\ \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(|t \uparrow\rangle |n \downarrow\rangle + |t \downarrow\rangle |n \uparrow\rangle) & S_z = 0 \\ \cdot |t \downarrow\rangle |n \downarrow\rangle & S_z = -1 \end{cases} \quad (\text{C-2-38})$$

$S = 0$ の時

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|t \uparrow\rangle |n \downarrow\rangle - |t \downarrow\rangle |n \uparrow\rangle) \quad (\text{C-2-39})$$

t の波動関数 $|t \uparrow\rangle, |t \downarrow\rangle$ のスピン、アイソスピン成分は以下ようになる。

$$|t \uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \{pnn(\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow) - npn(\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow) + nnp(\uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow)\} \quad (\text{C-2-40})$$

$$|t \downarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \{pnn(\downarrow\uparrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow) - npn(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow) + nnp(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow)\} \quad (\text{C-2-41})$$

空間成分は三体なので、以下ようになる。

$$\psi_t(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = \left(\frac{4a_t^2}{3\pi^2} \right)^{\frac{3}{4}} \exp \left\{ i\mathbf{p}_t \cdot \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3}{3} - a_t \left(\mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2 + \mathbf{r}_3^2 - \frac{(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3)^2}{3} \right) \right\} \quad (\text{C-2-42})$$

ここで、 $\mathbf{p}_t$ は t の重心の運動量を表す因子で、この項は t の重心運動を表している。また、 a_t は t の広がり具合を表している因子である。He の場合と同じく、この因子は原子核の平均自乗物質半径を用いて以下のように表される。

$$a_t = \frac{1}{2} \frac{1}{(R_m)_t^2} \quad (\text{C-2-43})$$

この因子の計算についても後に記述する。

三体のヤコビ座標を以下で定義する。

$$\mathbf{s}_0 = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3}{3}, \quad \mathbf{s}_1 = \mathbf{r}_1 - \frac{\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3}{2}, \quad \mathbf{s}_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3 \quad (\text{C-2-44})$$

この式を用いて空間成分を表すと、以下ようになる。

$$\psi_t(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = \left(\frac{4a_t^2}{3\pi^2} \right)^{\frac{3}{4}} \exp \left\{ i\mathbf{p}_t \cdot \mathbf{s}_0 - a_t \left(\frac{2}{3}\mathbf{s}_1^2 + \frac{1}{2}\mathbf{s}_2^2 \right) \right\} \quad (\text{C-2-45})$$

n の波動関数 最後に、 $|n \downarrow\rangle, |n \uparrow\rangle$ について考える。空間成分は平面波で表せるので、その運動量を $\mathbf{p}_n$ とすると、以下ようになる。

$$\psi_n(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{p}_n \cdot \mathbf{r}} \quad (\text{C-2-46})$$

終状態の波動関数 以上を考慮して、終状態を核子に入れ換えに対して反対称になるように組むと以下ようになる。

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4 | t \ n \rangle \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} & \psi_n(\mathbf{r}_1)\psi_t(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4)|n \rangle_1 |t \rangle_{2,3,4} - \psi_n(\mathbf{r}_2)\psi_t(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4)|n \rangle_2 |t \rangle_{1,3,4} \\ & + \psi_n(\mathbf{r}_3)\psi_t(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_4)|n \rangle_3 |t \rangle_{1,2,4} - \psi_n(\mathbf{r}_4)\psi_t(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)|n \rangle_4 |t \rangle_{1,2,3} \end{aligned} \right\} \quad (\text{C-2-47}) \end{aligned}$$

ここで $|n \rangle_i$ はアイソスピンの成分を表しており、ここにスピン t 成分として $\uparrow$ か $\downarrow$ が入る。また、添え字の i は終状態の単体の n が何番目の核子かを表している。 t についても同様である。

反応 (3-3-2) の終状態の原子核の波動関数

次に反応 (3-3-2) の終状態の原子核の波動関数について記述する。

d の波動関数 d の波動関数について、スピンアイソスピン成分は前述したとおり、以下のように記述される。

$$S_z = 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|p \uparrow\rangle|n \uparrow\rangle - |n \uparrow\rangle|p \uparrow\rangle) \equiv |d_1\rangle \quad (\text{C-2-48})$$

$$S_z = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(|p \uparrow\rangle|n \downarrow\rangle - |n \uparrow\rangle|p \downarrow\rangle + |p \downarrow\rangle|n \uparrow\rangle - |n \downarrow\rangle|p \uparrow\rangle) \equiv |d_0\rangle \quad (\text{C-2-49})$$

$$S_z = -1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|p \downarrow\rangle|n \downarrow\rangle - |n \downarrow\rangle|p \downarrow\rangle) \equiv |d_{-1}\rangle \quad (\text{C-2-50})$$

空間成分については、二体であることから、以下のようになる。

$$\psi_d(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = \left(\frac{a_d}{\pi}\right)^{\frac{3}{4}} \exp\left[-\frac{a_d}{2}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2\right] \exp\left[i\mathbf{p}_d\left(\frac{\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j}{2}\right)\right] \quad (\text{C-2-51})$$

ここで q_d は d の重心の運動量を表す因子で、この項は d の重心運動を表している。また、 i, j は何番目の核子かを表している。 a_d は平均自乗半径を用いて以下のように表される。

$$a_d = \frac{3}{8} \frac{1}{\langle r^2 \rangle_d} \quad (\text{C-2-52})$$

この因子の計算については後で記述する。

n 二つの波動関数 まず空間成分について、以下の関数を定義し。

$$\psi_n(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \exp[i(\mathbf{p}_{n1}\mathbf{r}_i + \mathbf{p}_{n2}\mathbf{r}_j)] - \exp[i(\mathbf{p}_{n2}\mathbf{r}_i + \mathbf{p}_{n1}\mathbf{r}_j)] \} \quad (\text{C-2-53})$$

$$\psi'_n(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \exp[i(\mathbf{p}_{n1}\mathbf{r}_i + \mathbf{p}_{n2}\mathbf{r}_j)] + \exp[i(\mathbf{p}_{n2}\mathbf{r}_i + \mathbf{p}_{n1}\mathbf{r}_j)] \} \quad (\text{C-2-54})$$

添え字の i, j は何番目の核子かを表している。式 (C-2-53) は核子の入れ換えに対して反対称、式 (C-2-54) は対称になっている。

n 二つの状態はスピンの値によって異なる。

$$\begin{cases} \text{スピンの値が } 1 \rightarrow \text{スピンの入れ換えに対して対称、全量子数の同時入れ換えに対して反対称} \\ \text{スピンの値が } 0 \rightarrow \text{スピンの入れ換えに対して反対称、全量子数の同時入れ換えに対して対称} \end{cases}$$

となる。

- スピンの値が 1 の時、スピン、アイソスピンの成分は以下のようになる。

$$S_z = 1 \Rightarrow |n \uparrow\rangle_i |n \uparrow\rangle_j \equiv |n_1\rangle_{ij} \quad (\text{C-2-55})$$

$$S_z = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|n \uparrow\rangle_i |n \downarrow\rangle_j + |n \downarrow\rangle_i |n \uparrow\rangle_j) \equiv |n_0\rangle_{ij} \quad (\text{C-2-56})$$

$$S_z = -1 \Rightarrow |n \downarrow\rangle_i |n \downarrow\rangle_j \equiv |n_{-1}\rangle_{ij} \quad (\text{C-2-57})$$

- スピンの値が 0 の時、スピンアイソスピンの成分は以下のようになる。

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|n \uparrow\rangle_i |n \downarrow\rangle_j - |n \downarrow\rangle_i |n \uparrow\rangle_j) \equiv |n'_0\rangle_{ij} \quad (\text{C-2-58})$$

この式についても、添え字の i, j は何番目の粒子かを表している。

n の波動関数の空間成分は、スピンの値によって異なる。スピンの値が 1 の時は、空間成分は核子の入れ換えに対して反対称になるため (全体で反対称になるので)、空間成分は式 (C-2-53) となる。対してスピンの値が 0 の時は、空間成分は核子の入れ換えに対して対称になるため、空間成分は式 (C-2-54) となる。

終状態の波動関数 以上を考慮して、終状態を粒子の入れ換えに対して完全反対称になるように組むと以下ようになる。

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4 | d, n, n \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \left\{ \begin{aligned} & \psi_n(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \psi_d(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) |n\rangle_{1,2} |d\rangle_{3,4} - \psi_n(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) \psi_d(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_4) |n\rangle_{1,3} |d\rangle_{2,4} \\ & + \psi_n(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_4) \psi_d(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) |n\rangle_{1,4} |d\rangle_{2,3} + \psi_n(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \psi_d(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_4) |n\rangle_{2,3} |d\rangle_{1,4} \\ & - \psi_n(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_4) \psi_d(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) |n\rangle_{2,4} |d\rangle_{1,3} + \psi_n(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \psi_d(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) |n\rangle_{3,4} |d\rangle_{1,2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{C-2-59}) \end{aligned}$$

$|n\rangle, |d\rangle$ はスピンアイソスピン成分を表しています。ここにスピンの z 成分として -1 から 1 が入る。

原子核の平均自乗物質半径とガウス関数の広がり因子

最後に、 d 、 t 、 He の広がり具合を表す因子 a_d, a_t, a_{He} と平均自乗物質半径 $(R_m)_d, (R_m)_t, (R_m)_{\text{He}}$ との関係を表す。実際の計算では $\langle r^2 \rangle$ の値から各々の a の値を調べて用いる。

この計算を行う前に、初めに原子核の形状因子について定義を行う。まず、考えている原子核の電荷密度を電荷分布関数 f を用いて $\rho(x) = Ze f(x)$ によって表す。ここで電荷分布関数 f は規格化条件として

$$\int f(x) d^3x = 1$$

を満たすように定義される。このとき、原子核の形状因子は以下で定義される。

$$F(q) = \int e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} f(x) d^3x \quad (\text{C-2-60})$$

すなわち形状因子は『全電荷 Ze で規格化された電荷分布関数 $f(x)$ のフーリエ変換』と定義される。

いま考えている運動量移行量のスケールと原子核の広がり具合のスケールについて、以下の関係

$$|\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}| \ll 1$$

が成り立つ時、形状因子を以下のように展開することが出来る。

$$\begin{aligned} F(q^2) &= \int f(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i|\mathbf{q}||\mathbf{x}| \cos \theta}{\hbar} \right)^n d^3x \\ &= \int_0^{\infty} \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} f(r) \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{|\mathbf{q}|r}{\hbar} \right)^2 \cos^2 \theta + \dots \right] d\phi d \cos \theta r^2 dr \\ &= 4\pi \int_0^{\infty} f(r) r^2 dr - \frac{1}{6} \frac{q^2}{\hbar^2} 4\pi \int_0^{\infty} f(r) r^4 dr + \dots \end{aligned}$$

ここで規格化条件に対応して、原子核の平均自乗半径を定義する。

$$\langle r^2 \rangle = 4\pi \int_0^{\infty} r^2 f(r) r^2 dr$$

すると、形状因子を以下のように表すことが出来る。

$$F(q^2) = 1 - \frac{1}{6} \frac{q^2 \langle r^2 \rangle}{\hbar^2} + \dots \quad (\text{C-2-61})$$

これを用いて考える。

a_d の計算 d について、 a_d と $(R_m)_d$ との関係を見ていく。

まず初めに、原子核に作用するハドロニックカレントは以下のように表されている。

$$V_0 = \sum_{i \in \text{nucleons}} \tau_i^- e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_i}$$

$$A_k = \sum_{i \in \text{nucleons}} \tau_i^- \sigma_{ik} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_i}$$

ここでは特に、ハドロニックカレントが粒子 1 に作用する場合について考える事にする。尚、この計算は粒子 1 を他の粒子に変えても変化しない。また、この計算は空間成分の波動関数のみに関係するものであるため、 τ_i^- , σ_{ik} などの演算子については考えない事にする。

作用するハドロニックカレントを原子核の質量中心系からみると、次のようになる。

$$\exp \left\{ i\mathbf{q} \cdot \left(\mathbf{r}_1 - \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2} \right) \right\} = \exp \left(i\mathbf{q} \cdot \frac{1}{2} \mathbf{s}_1 \right)$$

これを用いて形状因子を計算すると、以下のようになる。

$$\begin{aligned} F(q^2) &= \int d\mathbf{s}_0 d\mathbf{s}_1 \exp \left(i\mathbf{q} \cdot \frac{1}{2} \mathbf{s}_1 \right) |\psi_d(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1)|^2 \delta^{(3)}(\mathbf{s}_0) \\ &= \left(\frac{a_d}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \int d\mathbf{s}_0 d\mathbf{s}_1 \exp \left\{ i\mathbf{q} \cdot \frac{1}{2} \mathbf{s}_1 \right\} \exp \left[-a_d \mathbf{s}_1^2 \right] \delta^{(3)}(\mathbf{s}_0) \\ &= \left(\frac{a_d}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \int d\mathbf{s}_1 \exp \left[-a_d \mathbf{s}_1^2 + i\frac{1}{2} \mathbf{q} \cdot \mathbf{s}_1 \right] \\ &= \left(\frac{a_d}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \int d\mathbf{s}_1 \exp \left[-a_d \left(\mathbf{s}_1 - \frac{i}{4a_d} \mathbf{q} \right)^2 - \frac{1}{16a_d} \mathbf{q}^2 \right] \\ &= \exp \left(-\frac{1}{16a_d} \mathbf{q}^2 \right) \simeq 1 - \frac{1}{16a_d} \mathbf{q}^2 \end{aligned}$$

これは形状因子なので、平均自乗物質半径を $(R_m)_d$ として以下で表せる。

$$= 1 - \frac{1}{6} \mathbf{q}^2 (R_m)_d^2$$

これより、平均自乗半径と a_d との関係は以下のようになる。

$$(R_m)_d^2 = \frac{3}{8a_d}, \quad a_d = \frac{3}{8(R_m)_d^2} \quad (\text{C-2-62})$$

a_t の計算 同様の手順を行って、 a_t について計算を行う。d の場合と同様に、粒子 1 に作用するハドロニックカレントを原子核の質量中心系からみると、以下のようになる。

$$\exp \left\{ i\mathbf{q} \cdot \left(\mathbf{r}_1 - \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3}{3} \right) \right\} = \exp \left(i\mathbf{q} \cdot \frac{2}{3} \mathbf{s}_1 \right)$$

ここで $\mathbf{s}_1$ は t の波動関数の空間成分を定める際に用いたヤコビ座標を表す。これを用いて形状因子を計算すると、以下のようになる。

$$\begin{aligned} F(q^2) &= \int d\mathbf{s}_0 d\mathbf{s}_1 d\mathbf{s}_2 \exp \left(i\mathbf{q} \cdot \frac{2}{3} \mathbf{s}_1 \right) |\psi_t(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)|^2 \delta^{(3)}(\mathbf{s}_0) \\ &= \left(\frac{4}{3} \frac{a_t^2}{\pi^2} \right)^{\frac{3}{2}} \int d\mathbf{s}_0 d\mathbf{s}_1 d\mathbf{s}_2 \exp \left(i\mathbf{q} \cdot \frac{2}{3} \mathbf{s}_1 \right) \exp \left[-a_t \left(\frac{4}{3} \mathbf{s}_1^2 + \mathbf{s}_2^2 \right) \right] \delta^{(3)}(\mathbf{s}_0) \end{aligned}$$

s_0 についての積分は δ 関数を用いて消去出来る。すると、以下のようになる。

$$= \left(\frac{4}{3} \frac{a_t^2}{\pi^2} \right)^{\frac{3}{2}} \int d\mathbf{s}_1 d\mathbf{s}_2 \exp \left[-a_t s_2^2 - \frac{4}{3} a_t s_1^2 + \frac{2}{3} i \mathbf{q} \cdot \mathbf{s}_1 \right]$$

s_2 についての積分も実行することが出来る。それを行い、また s_1 について整理してやると、以下のようになる。

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{4}{3} \frac{a_t}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \int d\mathbf{s}_1 \exp \left[-\frac{4}{3} a_t \left(\mathbf{s}_1 - \frac{i}{4a_t} \mathbf{q} \right)^2 - \frac{1}{12a_t} \mathbf{q}^2 \right] \\ &= \exp \left(-\frac{1}{12a_t} \mathbf{q}^2 \right) \simeq 1 - \frac{1}{12a_t} \mathbf{q}^2 \end{aligned}$$

a_d の場合と同じく、平均自乗物質半径で表す事にする。

$$= 1 - \frac{1}{6} \mathbf{q}^2 (R_m)_t^2$$

これより、平均自乗物質半径と a_t との関係は、以下のようになる。

$$(R_m)_t^2 = \frac{1}{2a_t}, \quad a_t = \frac{1}{2(R_m)_t^2} \quad (\text{C-2-63})$$

a_{He} の計算 最後に、 a_{He} の計算を行う。d、t の場合と同様に、粒子 1 に作用するハドロニックカレントを原子核の質量中心系からみると、以下のようになる。

$$\exp \left\{ i \mathbf{q} \cdot \left(\mathbf{r}_1 - \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4}{4} \right) \right\} = \exp \left\{ i \mathbf{q} \cdot \frac{3}{4} \mathbf{s}_1 \right\}$$

ここで s_1 は He 波動関数の空間成分を定める際に用いたヤコビ座標を表している。これを用いて形状因子を計算すると、以下のようになる。

$$\begin{aligned} F(\mathbf{q}^2) &= \int d\mathbf{s}_0 d\mathbf{s}_1 d\mathbf{s}_2 d\mathbf{s}_3 \exp \left(i \mathbf{q} \cdot \frac{3}{4} \mathbf{s}_1 \right) |\psi_{\text{He}}(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3)|^2 \delta^{(3)}(\mathbf{s}_0) \\ &= \left(2 \frac{a_{\text{He}}^3}{\pi^3} \right)^{\frac{3}{2}} \int d\mathbf{s}_0 d\mathbf{s}_1 d\mathbf{s}_2 d\mathbf{s}_3 \exp \left\{ i \mathbf{q} \cdot \frac{3}{4} \mathbf{s}_1 \right\} \exp \left[-a_{\text{He}} \left(\frac{3}{2} \mathbf{s}_1^2 + \frac{4}{3} \mathbf{s}_2^2 + \mathbf{s}_3^2 \right) \right] \delta^{(3)}(\mathbf{s}_0) \\ &= \left(2 \frac{a_{\text{He}}^3}{\pi^3} \right)^{\frac{3}{2}} \int d\mathbf{s}_1 d\mathbf{s}_2 d\mathbf{s}_3 \exp \left[-a_{\text{He}} \frac{4}{3} \mathbf{s}_2^2 - a_{\text{He}} \mathbf{s}_3^2 - \frac{3}{2} a_{\text{He}} \mathbf{s}_1^2 + \frac{3}{4} i \mathbf{q} \cdot \mathbf{s}_1 \right] \\ &= \left(\frac{3}{2} \frac{a_{\text{He}}}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \int d\mathbf{s}_1 \exp \left[-\frac{3}{2} a_{\text{He}} \left(\mathbf{s}_1 - \frac{i}{4a_{\text{He}}} \mathbf{q} \right)^2 - \frac{3}{32a_{\text{He}}} \mathbf{q}^2 \right] \\ &= \exp \left(-\frac{3}{32a_{\text{He}}} \mathbf{q}^2 \right) \simeq 1 - \frac{3}{32a_{\text{He}}} \mathbf{q}^2 \end{aligned}$$

これは形状因子なので、平均自乗物質半径を $(R_m)_{\text{He}}^2$ として以下で表せる。

$$= 1 - \frac{1}{6} \mathbf{q}^2 (R_m)_{\text{He}}^2$$

これより、平均自乗半径と a_{He} との関係は、以下のようになる。

$$(R_m)_{\text{He}}^2 = \frac{9}{16a_{\text{He}}}, \quad a_{\text{He}} = \frac{9}{16(R_m)_{\text{He}}^2} \quad (\text{C-2-64})$$

C.2.3 $(\tilde{\tau}^4\text{He}) \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 + \nu_\tau + \mathbf{t} + \mathbf{n}$ の hadronic part

以上を用いて、(3-3-1) の hadronic part の計算をする。

ベクトルカレントによる反応

終状態が $|\mathbf{t} \uparrow, n \downarrow\rangle$ の場合 始状態、終状態について記述する事が出来たので、反応の振幅の計算を行う。

ベクトルカレントによるスピン・アイソスピンの状態変化 まず初めに、ベクトルカレントが始状態の He に当たった時のスピン、アイソスピンの状態の変化を調べる。He の i 番目の粒子に当たるカレントを τ_i として、以下のように計算を行う。

$$\begin{aligned}\tau_1^- |^4\text{He}\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \left\{ \begin{aligned} &nnpn(\uparrow\uparrow\downarrow + \downarrow\downarrow\uparrow\uparrow - \uparrow\downarrow\uparrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow\downarrow) \\ &+nnnp(-\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow\uparrow + \uparrow\downarrow\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow) \\ &+npnn(-\uparrow\downarrow\uparrow + \uparrow\downarrow\uparrow\uparrow + \downarrow\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow) \end{aligned} \right\} \\ \tau_2^- |^4\text{He}\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \left\{ \begin{aligned} &nnpn(-\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow\uparrow + \uparrow\downarrow\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow) \\ &+nnnp(\uparrow\uparrow\downarrow + \downarrow\downarrow\uparrow\uparrow - \uparrow\downarrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow) \\ &+pnnn(-\uparrow\downarrow\uparrow + \uparrow\downarrow\uparrow\uparrow + \downarrow\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow) \end{aligned} \right\} \\ \tau_3^- |^4\text{He}\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \left\{ \begin{aligned} &pnnn(\uparrow\uparrow\downarrow + \downarrow\downarrow\uparrow\uparrow - \uparrow\downarrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow) \\ &+npnn(-\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow\uparrow + \uparrow\downarrow\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow) \\ &+nnnp(-\uparrow\downarrow\uparrow + \uparrow\downarrow\uparrow\uparrow + \downarrow\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow) \end{aligned} \right\} \\ \tau_4^- |^4\text{He}\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \left\{ \begin{aligned} &pnnn(-\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow\uparrow + \uparrow\downarrow\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow) \\ &+npnn(\uparrow\uparrow\downarrow + \downarrow\downarrow\uparrow\uparrow - \uparrow\downarrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow) \\ &+nnpn(-\uparrow\downarrow\uparrow + \uparrow\downarrow\uparrow\uparrow + \downarrow\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow) \end{aligned} \right\}\end{aligned}$$

これと、終状態の $|\mathbf{t} \uparrow, n \downarrow\rangle$ との内積を調べる。今、考えている終状態は以下のように表す事ができる。

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4 | \mathbf{t} \uparrow, n \downarrow \rangle \\ = \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} &\psi_n(\mathbf{r}_1)\psi_t(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4)|n \downarrow\rangle_1|\mathbf{t} \uparrow\rangle_{2,3,4} - \psi_n(\mathbf{r}_2)\psi_t(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4)|n \downarrow\rangle_2|\mathbf{t} \uparrow\rangle_{1,3,4} \\ &+ \psi_n(\mathbf{r}_3)\psi_t(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_4)|n \downarrow\rangle_3|\mathbf{t} \uparrow\rangle_{1,2,4} - \psi_n(\mathbf{r}_4)\psi_t(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)|n \downarrow\rangle_4|\mathbf{t} \uparrow\rangle_{1,2,3} \end{aligned} \right\}\end{aligned}$$

内積をとるにあたり、まずは空間成分を考えないようにしてスピンアイソスピン成分のみを考えることにする。初めに n との内積をとり、次に t との内積をとると考えると、以下のように表す事ができる。

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{t} \uparrow, n \downarrow | \tau_1^- |^4\text{He}\rangle &= \frac{1}{4\sqrt{6}} \left\{ \begin{aligned} &[npn(\downarrow\uparrow\uparrow - \uparrow\uparrow\downarrow) + nnp(-\downarrow\uparrow\uparrow + \uparrow\downarrow\uparrow) + pnn(\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow)]_{n=1} \\ &-[npn(\downarrow\uparrow\uparrow - \uparrow\uparrow\downarrow) + nnp(-\downarrow\uparrow\uparrow + \uparrow\downarrow\uparrow)]_{n=2} \\ &+[nnp(-\uparrow\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\uparrow) + npn(\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow)]_{n=3} \\ &-[nnp(\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow) + npn(-\uparrow\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\uparrow)]_{n=4} \end{aligned} \right\} \\ &\otimes \frac{1}{\sqrt{6}} \{pnn(\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow) - npn(\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow) + nnp(\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow)\} \\ &= \frac{1}{24} ([6]_{n=1} - [2]_{n=2} - [2]_{n=3} - [2]_{n=4})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle t \uparrow, n \downarrow | \tau_2^- | \text{He} \rangle &= \frac{1}{4\sqrt{6}} \left\{ \begin{aligned} &[npn(-\downarrow\uparrow\uparrow + \uparrow\downarrow\uparrow) + nnp(\downarrow\uparrow\uparrow - \uparrow\downarrow\uparrow)]_{n=1} \\ &-[npn(-\downarrow\uparrow\uparrow + \uparrow\downarrow\uparrow) + nnp(\downarrow\uparrow\uparrow - \uparrow\downarrow\uparrow) + pnn(-\uparrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\uparrow)]_{n=2} \\ &+[nnp(\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow) + pnn(\uparrow\uparrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow)]_{n=3} \\ &-[nnp(-\uparrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\uparrow) + pnn(-\uparrow\uparrow\uparrow + \downarrow\uparrow\uparrow)]_{n=4} \end{aligned} \right\} \\
&\otimes \frac{1}{\sqrt{6}} \{ pnn(\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow) - npn(\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow) + nnp(\uparrow\uparrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow) \} \\
&= \frac{1}{24} (-[2]_{n=1} + [6]_{n=2} - [2]_{n=3} - [2]_{n=4}) \\
\langle t \uparrow, n \downarrow | \tau_3^- | \text{He} \rangle &= \frac{1}{4\sqrt{6}} \left\{ \begin{aligned} &[pnn(-\downarrow\uparrow\uparrow + \uparrow\downarrow\uparrow) + nnp(\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow)]_{n=1} \\ &-[pnn(\downarrow\uparrow\uparrow - \uparrow\downarrow\uparrow) + nnp(-\uparrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\uparrow)]_{n=2} \\ &+[pnn(\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow) + npn(-\uparrow\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\uparrow) + nnp(\uparrow\uparrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow)]_{n=3} \\ &-[pnn(\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow) + npn(-\uparrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\uparrow)]_{n=4} \end{aligned} \right\} \\
&\otimes \frac{1}{\sqrt{6}} \{ pnn(\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow) - npn(\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow) + nnp(\uparrow\uparrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow) \} \\
&= \frac{1}{24} (-[2]_{n=1} - [2]_{n=2} + [6]_{n=3} - [2]_{n=4}) \\
\langle t \uparrow, n \downarrow | \tau_4^- | \text{He} \rangle &= \frac{1}{4\sqrt{6}} \left\{ \begin{aligned} &[pnn(\downarrow\uparrow\uparrow - \uparrow\downarrow\uparrow) + npn(\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow)]_{n=1} \\ &-[pnn(-\downarrow\uparrow\uparrow + \uparrow\downarrow\uparrow) + npn(-\uparrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\uparrow)]_{n=2} \\ &+[pnn(-\uparrow\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\uparrow) + npn(\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow)]_{n=3} \\ &-[pnn(-\uparrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\uparrow) + npn(\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow) + nnp(-\uparrow\uparrow\uparrow + \downarrow\uparrow\uparrow)]_{n=4} \end{aligned} \right\} \\
&\otimes \frac{1}{\sqrt{6}} \{ pnn(\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow) - npn(\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow) + nnp(\uparrow\uparrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow) \} \\
&= \frac{1}{24} (-[2]_{n=1} - [2]_{n=2} - [2]_{n=3} + [6]_{n=4})
\end{aligned}$$

ここで $[\]$ の下の添え字は、He 中の何番目の n と終状態の n との内積をとるかを表している。

核子 1 にカレントが当たる場合

初めに、カレントとして τ_1^- が当たった時の振幅を $\mathcal{M}_1$ とし、この計算を行う。

$\mathcal{M}_1$ の計算において、初めにスピンアイソスピン成分のみを考える。スピンアイソスピン成分で内積をとったものは、上記の計算から以下のように表せる。

$$\langle t \uparrow, n \downarrow | \tau_1^- | ^4\text{He} \rangle = \frac{1}{24} \left(\underbrace{[6]_{n=1}}_{(Ct1.1)} - \underbrace{[2]_{n=2}}_{(Ct1.2)} - \underbrace{[2]_{n=3}}_{(Ct1.3)} - \underbrace{[2]_{n=4}}_{(Ct1.4)} \right)$$

この $(Ct1.1) \sim (Ct1.4)$ を順次計算していきます。

核子 1 が終状態の n の場合 初めに $(Ct1.1)$ の計算を行う。この計算では、 n を 1 番目の粒子、 t を構成する三つの核子を 2,3,4 番目の粒子として扱う。よって、終状態の波動関数の空間成分は (C-2-42) を考慮すると、以下のように表す事が出来る。

$$\left(\frac{4a_t^2}{3\pi^2} \right)^{\frac{3}{4}} \exp \left\{ -i\mathbf{p}_n \mathbf{r}_1 - i\mathbf{p}_t \left(\frac{\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4}{3} \right) - a_t \left[\mathbf{r}_2^2 + \mathbf{r}_3^2 + \mathbf{r}_4^2 - \frac{(\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4)^2}{3} \right] \right\}$$

これより、 $\mathcal{M}_1$ への (Ct1.1) からの寄与は以下のように計算出来る。

$$(Ct1.1) = 6 \left(2 \frac{a_{\text{He}}^3}{\pi^3} \right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{4a_{\text{t}}^2}{3\pi^2} \right)^{\frac{3}{4}} \iiint dr_1 dr_2 dr_3 dr_4 \\ \times \exp \left\{ i\mathbf{q}\mathbf{r}_1 - a_{\text{He}} \left(\mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2 + \mathbf{r}_3^2 + \mathbf{r}_4^2 - \frac{(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4)^2}{4} \right) - i\mathbf{p}_n \mathbf{r}_1 \right. \\ \left. - i\mathbf{p}_t \left(\frac{\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4}{3} \right) - a_t \left[\mathbf{r}_2^2 + \mathbf{r}_3^2 + \mathbf{r}_4^2 - \frac{(\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4)^2}{3} \right] \right\}$$

exp の中身をヤコビ座標を用いて書き直すこととする。

$$i(\mathbf{q} - \mathbf{p}_n)(\mathbf{s}_0 + \frac{3}{4}\mathbf{s}_1) - a_{\text{He}} \left(\frac{3}{4}\mathbf{s}_1^2 + \frac{2}{3}\mathbf{s}_2^2 + \frac{1}{2}\mathbf{s}_3^2 \right) - i\mathbf{p}_t(\mathbf{s}_0 - \frac{1}{4}\mathbf{s}_1) - a_t \left(\frac{2}{3}\mathbf{s}_2^2 + \frac{1}{2}\mathbf{s}_3^2 \right) \\ = i(\mathbf{q} - \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_t)\mathbf{s}_0 - \frac{3}{4}a_{\text{He}} \left(\mathbf{s}_1 - \frac{i}{6a_{\text{He}}} (3(\mathbf{q} - \mathbf{p}_n) + \mathbf{p}_t) \right)^2 \\ - \frac{1}{48a_{\text{He}}} (3(\mathbf{q} - \mathbf{p}_n) + \mathbf{p}_t)^2 - \frac{2}{3}(a_{\text{He}} + a_t)\mathbf{s}_2^2 - \frac{1}{2}(a_{\text{He}} + a_t)\mathbf{s}_3^2$$

よって、積分変数をヤコビ座標に変えて積分を実行すると、以下ようになる。

$$(Ct1.1) = 6 \left(2 \frac{a_{\text{He}}^3}{\pi^3} \right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{4a_{\text{t}}^2}{3\pi^2} \right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{4\pi}{3a_{\text{He}}} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{3\pi}{2(a_{\text{He}} + a_t)} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2\pi}{a_{\text{He}} + a_t} \right)^{\frac{3}{2}} \\ \times (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_t) \exp \left\{ -\frac{1}{48a_{\text{He}}} (3(\mathbf{q} - \mathbf{p}_n) + \mathbf{p}_t)^2 \right\}$$

係数を計算して、又、 δ 関数の条件を用いると

$$= 6(2\pi)^3 \left(\frac{128\pi}{3} \frac{a_{\text{He}}a_{\text{t}}^2}{(a_{\text{He}} + a_t)^4} \right)^{\frac{3}{4}} \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_t) \exp \left\{ -\frac{\mathbf{p}_t^2}{3a_{\text{He}}} \right\}$$

となる。

核子 2 が終状態の $\mathbf{n}$ の場合 次に (Ct1.2) の計算を行う。この計算では、 $\mathbf{n}$ を 2 番目の粒子、 $\mathbf{t}$ を構成する三つの核子を 1,3,4 番目の粒子として扱う。よって、終状態の空間成分は以下のように表す事が出来る。

$$\left(\frac{4a_{\text{t}}^2}{3\pi^2} \right)^{\frac{3}{4}} \exp \left\{ -i\mathbf{p}_n \mathbf{r}_2 - i\mathbf{p}_t \left(\frac{\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4 + \mathbf{r}_1}{3} \right) - a_t \left[\mathbf{r}_3^2 + \mathbf{r}_4^2 + \mathbf{r}_1^2 - \frac{(\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4 + \mathbf{r}_1)^2}{3} \right] \right\}$$

これより、 $\mathcal{M}_1$ への (Ct1.2) からの寄与は以下のように計算出来る。

$$(Ct1.2) = 2 \left(2 \frac{a_{\text{t}}^3}{\pi^3} \right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{4a_{\text{t}}^2}{3\pi^2} \right)^{\frac{3}{4}} \iiint dr_1 dr_2 dr_3 dr_4 \\ \times \exp \left\{ i\mathbf{q}\mathbf{r}_1 - a_{\text{He}} \left(\mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2 + \mathbf{r}_3^2 + \mathbf{r}_4^2 - \frac{(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4)^2}{4} \right) - i\mathbf{p}_n \mathbf{r}_2 \right. \\ \left. - i\mathbf{p}_t \left(\frac{\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4 + \mathbf{r}_1}{3} \right) - a_t \left[\mathbf{r}_3^2 + \mathbf{r}_4^2 + \mathbf{r}_1^2 - \frac{(\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4 + \mathbf{r}_1)^2}{3} \right] \right\}$$

$\exp$ の中身をヤコビ座標を用いて書き直す事にする。

$$\begin{aligned}
& i\mathbf{q} \left(s_0 - \frac{1}{4}s_1 - \frac{1}{3}s_2 - \frac{1}{2}s_3 \right) - a_{\text{He}} \left(\frac{3}{4}s_1^2 + \frac{2}{3}s_2^2 + \frac{1}{2}s_3^2 \right) - i\mathbf{p}_n \left(s_0 + \frac{3}{4}s_1 \right) \\
& - i\mathbf{p}_t \left(s_0 - \frac{1}{4}s_1 \right) - a_t \left(\frac{2}{3}s_2^2 + \frac{1}{2}s_3^2 \right) \\
& = i(\mathbf{q} - \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_t)s_0 - \frac{i}{4}(3\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_t + \mathbf{q})s_1 - \frac{i}{3}\mathbf{q}s_2 - \frac{i\mathbf{q}}{2}s_3 - a_{\text{He}}(\cdots) - a_t(\cdots)
\end{aligned}$$

第二項で第一項から生じるデルタ関数から $\mathbf{q} = \mathbf{q}_t + \mathbf{p}_n$ とおく。さらに a_{He}, a_t の項も合わせて考えると

$$\begin{aligned}
& = i(\mathbf{q} - \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_t)s_0 - \frac{3}{4}a_{\text{He}} \left(s_1 + \frac{2i}{3a_{\text{He}}}\mathbf{p}_n \right)^2 - \frac{\mathbf{p}_n^2}{3a_{\text{He}}} \\
& - \frac{2}{3}(a_{\text{He}} + a_t) \left(s_2 + \frac{i\mathbf{q}}{4(a_{\text{He}} + a_t)} \right)^2 - \frac{\mathbf{q}^2}{24(a_{\text{He}} + a_t)} \\
& - \frac{1}{2}(a_{\text{He}} + a_t) \left(s_3 + \frac{i\mathbf{q}}{2(a_{\text{He}} + a_t)} \right)^2 - \frac{\mathbf{q}^2}{8(a_{\text{He}} + a_t)}
\end{aligned}$$

となる。よって、積分変数をヤコビ座標に変えて積分を実行すると、以下ようになる。

$$(Ct1.2) = 2(2\pi)^3 \left(\frac{128\pi}{3} \frac{a_{\text{He}}a_t^2}{(a_1 + a_2)^4} \right)^{\frac{3}{4}} \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_t) \exp \left\{ -\frac{\mathbf{p}_n^2}{3a_{\text{He}}} - \frac{1}{6} \frac{\mathbf{q}^2}{(a_{\text{He}} + a_t)} \right\}$$

核子 3 が終状態の $\mathbf{n}$ の場合 次に (Ct1.3) の計算を行う。この計算では、 $\mathbf{n}$ を 3 番目の粒子、 $\mathbf{t}$ を構成する三つの核子を 1,2,4 番目の粒子として扱う。よって、終状態の空間成分は以下のように表す事が出来る。

$$\left(\frac{4a_t^2}{3\pi^2} \right)^{\frac{3}{4}} \exp \left\{ -i\mathbf{p}_n \mathbf{r}_3 - i\mathbf{p}_t \left(\frac{\mathbf{r}_4 + \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{3} \right) - a_t \left[\mathbf{r}_4^2 + \mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2 - \frac{(\mathbf{r}_4 + \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)^2}{3} \right] \right\}$$

これより、 $\mathcal{M}_1$ への (Ct1.3) からの寄与は以下のように計算出来る。

$$\begin{aligned}
(Ct1.3) & = 2 \left(2 \frac{a_{\text{He}}^3}{\pi^3} \right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{4a_t^2}{3\pi^2} \right)^{\frac{3}{4}} \iiint d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 \\
& \times \exp \left\{ i\mathbf{q}\mathbf{r}_1 - a_{\text{He}} \left(\mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2 + \mathbf{r}_3^2 + \mathbf{r}_4^2 - \frac{(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4)^2}{4} \right) - i\mathbf{p}_n \mathbf{r}_3 \right. \\
& \left. - i\mathbf{p}_t \left(\frac{\mathbf{r}_4 + \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{3} \right) - a_t \left[\mathbf{r}_4^2 + \mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2 - \frac{(\mathbf{r}_4 + \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)^2}{3} \right] \right\}
\end{aligned}$$

$\exp$ の中身をヤコビ座標を用いて書き直す。

$$\begin{aligned}
& i\mathbf{q} \left(s_0 - \frac{1}{4}s_1 - \frac{1}{3}s_2 + \frac{1}{2}s_3 \right) - a_{\text{He}} \left(\frac{3}{4}s_1^2 + \frac{2}{3}s_2^2 + \frac{1}{2}s_3^2 \right) - i\mathbf{p}_n \left(s_0 + \frac{3}{4}s_1 \right) \\
& - i\mathbf{p}_t \left(s_0 - \frac{1}{4}s_1 \right) - a_t \left(\frac{2}{3}s_2^2 + \frac{1}{2}s_3^2 \right) \\
& = i(\mathbf{q} - \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_t)s_0 - \frac{i}{4}(3\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_t + \mathbf{q})s_1 - \frac{i}{3}\mathbf{q}s_2 + \frac{i\mathbf{q}}{2}s_3 - a_{\text{He}}(\cdots) - a_t(\cdots)
\end{aligned}$$

第二項で第一項から生じるデルタ関数から $q = p_t + p_n$ とおく。さらに a_{He}, a_t の項も合わせて考えると

$$\begin{aligned}
&= i(q - p_n - p_t)s_0 - \frac{3}{4}a_{\text{He}} \left(s_1 + \frac{2i}{3a_{\text{He}}}p_n \right)^2 - \frac{p_n^2}{3a_{\text{He}}} \\
&\quad - \frac{2}{3}(a_{\text{He}} + a_t) \left(s_2 + \frac{iq}{4(a_{\text{He}} + a_t)} \right)^2 - \frac{q^2}{24(a_{\text{He}} + a_t)} \\
&\quad - \frac{1}{2}(a_{\text{He}} + a_t) \left(s_3 - \frac{iq}{2(a_{\text{He}} + a_t)} \right)^2 - \frac{q^2}{8(a_{\text{He}} + a_t)}
\end{aligned}$$

となる。よって、積分変数をヤコビ座標に変えて積分を実行すると、以下ようになる。

$$(Ct1.3) = 2(2\pi)^3 \left(\frac{128\pi}{3} \frac{a_{\text{He}}a_t^2}{(a_{\text{He}} + a_t)^4} \right)^{\frac{3}{4}} \delta^{(3)}(q - p_n - p_t) \exp \left\{ -\frac{p_n^2}{3a_{\text{He}}} - \frac{1}{6} \frac{q^2}{(a_{\text{He}} + a_t)} \right\}$$

結果は (Ct1.2) と同じになる事が分かる。

核子 4 が終状態の n の場合 最後に (Ct1.4) を計算する。この計算では、 n を 4 番目の粒子、 t を構成する三つの核子を 1,2,3 番目の粒子として扱う。よって、終状態の空間成分は以下のように表す事が出来る。

$$\left(\frac{4a_t^2}{3\pi^2} \right)^{\frac{3}{4}} \exp \left\{ -ip_n r_4 - ip_t \left(\frac{r_1 + r_2 + r_3}{3} \right) - a_t \left[r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 - \frac{(r_1 + r_2 + r_3)^2}{3} \right] \right\}$$

これより、 $\mathcal{M}_1$ への (Ct1.4) からの寄与は以下のように計算出来る。

$$\begin{aligned}
(Ct1.4) &= 2 \left(2 \frac{a_{\text{He}}^3}{\pi^3} \right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{4a_t^2}{3\pi^2} \right)^{\frac{3}{4}} \iiint dr_1 dr_2 dr_3 dr_4 \\
&\quad \times \exp \left\{ iq r_1 - a_{\text{He}} \left(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 - \frac{(r_1 + r_2 + r_3 + r_4)^2}{4} \right) - ip_n r_4 \right. \\
&\quad \left. - ip_t \left(\frac{r_1 + r_2 + r_3}{3} \right) - a_t \left[r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 - \frac{(r_1 + r_2 + r_3)^2}{3} \right] \right\}
\end{aligned}$$

$\exp$ の中身をヤコビ座標を用いて書き直すことにする。

$$\begin{aligned}
&iq \left(s_0 - \frac{1}{4}s_1 + \frac{2}{3}s_2 \right) - a_{\text{He}} \left(\frac{3}{4}s_1^2 + \frac{2}{3}s_2^2 + \frac{1}{2}s_3^2 \right) - ip_n \left(s_0 + \frac{3}{4}s_1 \right) \\
&\quad - ip_t \left(s_0 - \frac{1}{4}s_1 \right) - a_{\text{He}} \left(\frac{2}{3}s_2^2 + \frac{1}{2}s_3^2 \right) \\
&= i(q - p_n - p_t)s_0 - \frac{i}{4}(3p_n - p_t + q)s_1 + \frac{2i}{3}qs_2 - a_{\text{He}}(\cdots) - a_t(\cdots)
\end{aligned}$$

第二項で第一項から生じるデルタ関数から $q = p_t + p_n$ とおく。さらに a_{He}, a_t の項も合わせて考えると

$$\begin{aligned}
&= i(q - p_n - p_t)s_0 - \frac{3}{4}a_{\text{He}} \left(s_1 + \frac{2i}{3a_{\text{He}}}p_n \right)^2 - \frac{p_n^2}{3a_{\text{He}}} \\
&\quad - \frac{2}{3}(a_{\text{He}} + a_t) \left(s_2 - \frac{iq}{2(a_{\text{He}} + a_t)} \right)^2 - \frac{q^2}{6(a_{\text{He}} + a_t)} \\
&\quad - \frac{a_{\text{He}} + a_t}{2}s_3^2
\end{aligned}$$

となる。よって、積分変数をヤコビ座標に変えて積分を実行すると、以下のようになる。

$$(Ct1.4) = 2(2\pi)^3 \left(\frac{128\pi}{3} \frac{a_{\text{He}} a_t^2}{(a_{\text{He}} + a_t)^4} \right)^{\frac{3}{4}} \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_t) \exp \left\{ -\frac{\mathbf{p}_n^2}{3a_{\text{He}}} - \frac{1}{6} \frac{\mathbf{q}^2}{(a_{\text{He}} + a_t)} \right\}$$

結果のまとめ 以上の計算から

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 &= \frac{1}{24} \{ (Ct1.1) - (Ct1.2) - (Ct1.3) - (Ct1.4) \} \\ &= \frac{(2\pi)^3}{4} \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_t) \left(\frac{128\pi}{3} \frac{a_{\text{He}} a_t^2}{(a_{\text{He}} + a_t)^4} \right)^{\frac{3}{4}} \\ &\quad \left[\exp \left(-\frac{\mathbf{p}_t^2}{3a_{\text{He}}} \right) - \exp \left(-\frac{\mathbf{p}_n^2}{3a_{\text{He}}} - \frac{\mathbf{q}^2}{6(a_{\text{He}} + a_t)} \right) \right] \end{aligned} \quad (C-2-65)$$

となる。

核子 2 にカレントが当たる場合

次に、カレントとして τ_2^- が当たった時の振幅を $\mathcal{M}_2$ として、この計算を行う。

$\mathcal{M}_2$ に関して、スピンアイソスピン成分で内積をとったものは以下のように表す事が出来る。

$$\langle t \uparrow, n \downarrow | \tau_2^- | ^4\text{He} \rangle = \frac{1}{24} \left(-\underbrace{[2]_{n=1}}_{(Ct2.1)} + \underbrace{[6]_{n=2}}_{(Ct2.2)} - \underbrace{[2]_{n=3}}_{(Ct2.3)} - \underbrace{[2]_{n=4}}_{(Ct2.4)} \right)$$

この (Ct2.1) ~ (Ct2.4) を順次計算する。

核子 1 が終状態の n の場合 初めに (Ct2.1) の計算を行います。この計算では、 n を 1 番目の粒子、 t を構成する三つの核子を 2,3,4 番目の粒子として扱う。よって、終状態の空間成分は以下のように表す事が出来る。

$$\left(\frac{4a_t^2}{3\pi^2} \right)^{\frac{3}{4}} \exp \left\{ -i\mathbf{p}_n \mathbf{r}_1 - i\mathbf{p}_t \left(\frac{\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4}{3} \right) - a_t \left[\mathbf{r}_2^2 + \mathbf{r}_3^2 + \mathbf{r}_4^2 + \frac{(\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4)^2}{3} \right] \right\}$$

これより、 $\mathcal{M}_2$ への (Ct2.1) からの寄与は以下のように計算出来る。

$$\begin{aligned} (Ct2.1) &= 2 \left(2 \frac{a_{\text{He}}^3}{\pi^3} \right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{4a_t^2}{3\pi^2} \right)^{\frac{3}{4}} \iiint d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 \\ &\quad \times \exp \left\{ i\mathbf{q} \mathbf{r}_2 - a_{\text{He}} \left(\mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2 + \mathbf{r}_3^2 + \mathbf{r}_4^2 - \frac{(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4)^2}{4} \right) - i\mathbf{p}_n \mathbf{r}_1 \right. \\ &\quad \left. - i\mathbf{p}_t \left(\frac{\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4}{3} \right) - a_t \left[\mathbf{r}_2^2 + \mathbf{r}_3^2 + \mathbf{r}_4^2 + \frac{(\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4)^2}{3} \right] \right\} \end{aligned}$$

exp の中身をヤコビ座標を用いて書き直すことにする。

$$\begin{aligned}
& i\mathbf{q} \left(\mathbf{s}_0 - \frac{1}{4}\mathbf{s}_1 + \frac{2}{3}\mathbf{s}_2 \right) - a_{\text{He}} \left(\frac{3}{4}\mathbf{s}_1^2 + \frac{2}{3}\mathbf{s}_2^2 + \frac{1}{2}\mathbf{s}_3^2 \right) - i\mathbf{p}_n \left(\mathbf{s}_0 + \frac{3}{4}\mathbf{s}_1 \right) \\
& - i\mathbf{p}_t \left(\mathbf{s}_0 - \frac{1}{4}\mathbf{s}_1 \right) - a_t \left(\frac{2}{3}\mathbf{s}_2^2 + \frac{1}{2}\mathbf{s}_3^2 \right) \\
& = i(\mathbf{q} - \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_t)\mathbf{s}_0 - \frac{i}{4}(3\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_t + \mathbf{q})\mathbf{s}_1 + \frac{2i}{3}\mathbf{q}\mathbf{s}_2 - a_{\text{He}}(\cdots) - a_t(\cdots)
\end{aligned}$$

これは、 $\mathcal{M}_1$ における (Ct1.4) と同じ形を取っている事が分かる。よって寄与も (Ct1.4) と等しく、

$$(Ct2.1) = 2(2\pi)^3 \left(\frac{128\pi}{3} \frac{a_{\text{He}}a_t^2}{(a_{\text{He}} + a_t)^4} \right)^{\frac{3}{4}} \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_t) \exp \left\{ -\frac{\mathbf{p}_n^2}{3a_{\text{He}}} - \frac{1}{6} \frac{\mathbf{q}^2}{(a_{\text{He}} + a_t)} \right\}$$

となる。

核子 2 が終状態の $\mathbf{n}$ の場合 次に (Ct2.2) の計算を行う。この計算では、 $\mathbf{n}$ を 2 番目の粒子、 $\mathbf{t}$ を構成する三つの核子を 1,3,4 番目の粒子として扱う。よって、終状態の空間成分は以下のように表す事が出来る。

$$\left(\frac{4a_t^2}{3\pi^2} \right)^{\frac{3}{4}} \exp \left\{ -i\mathbf{p}_n\mathbf{r}_2 - i\mathbf{p}_t \left(\frac{\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4 + \mathbf{r}_1}{3} \right) - a_t \left[\mathbf{r}_3^2 + \mathbf{r}_4^2 + \mathbf{r}_1^2 - \frac{(\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4 + \mathbf{r}_1)^2}{3} \right] \right\}$$

これより、 $\mathcal{M}_2$ への (Ct2.2) からの寄与は以下のように計算出来る。

$$\begin{aligned}
(Ct2.2) &= 6 \left(2 \frac{a_{\text{He}}^3}{\pi^3} \right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{4a_t^2}{3\pi^2} \right)^{\frac{3}{4}} \iiint d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 \\
&\times \exp \left\{ i\mathbf{q}\mathbf{r}_2 - a_{\text{He}} \left(\mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2 + \mathbf{r}_3^2 + \mathbf{r}_4^2 - \frac{(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4)^2}{4} \right) - i\mathbf{p}_n\mathbf{r}_2 \right. \\
&\quad \left. - i\mathbf{p}_t \left(\frac{\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4 + \mathbf{r}_1}{3} \right) - a_t \left[\mathbf{r}_3^2 + \mathbf{r}_4^2 + \mathbf{r}_1^2 - \frac{(\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4 + \mathbf{r}_1)^2}{3} \right] \right\}
\end{aligned}$$

exp の中身をヤコビ座標を用いて書き直すことにする。

$$\begin{aligned}
& i(\mathbf{q} - \mathbf{p}_n)(\mathbf{s}_0 + \frac{3}{4}\mathbf{s}_1) - a_{\text{He}} \left(\frac{3}{4}\mathbf{s}_1^2 + \frac{2}{3}\mathbf{s}_2^2 + \frac{1}{2}\mathbf{s}_3^2 \right) - i\mathbf{p}_t(\mathbf{s}_0 - \frac{1}{4}\mathbf{s}_1) - a_t \left(\frac{2}{3}\mathbf{s}_2^2 + \frac{1}{2}\mathbf{s}_3^2 \right) \\
& = i(\mathbf{q} - \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_t)\mathbf{s}_0 - \frac{3}{4}a_{\text{He}} \left(\mathbf{s}_1 - \frac{i}{6a_{\text{He}}}(3(\mathbf{q} - \mathbf{p}_n) + \mathbf{p}_t) \right)^2 \\
& \quad - \frac{1}{48a_{\text{He}}}(3(\mathbf{q} - \mathbf{p}_n) + \mathbf{p}_t)^2 - \frac{2}{3}(a_{\text{He}} + a_t)\mathbf{s}_2^2 - \frac{1}{2}(a_{\text{He}} + a_t)\mathbf{s}_3^2
\end{aligned}$$

となる。これは、 $\mathcal{M}_1$ における (Ct1.1) に等しいので、寄与も (Ct1.1) と同じになる。

$$(Ct2.2) = 6(2\pi)^3 \left(\frac{128\pi}{3} \frac{a_{\text{He}}a_t^2}{(a_{\text{He}} + a_t)^4} \right)^{\frac{3}{4}} \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_t) \exp \left\{ -\frac{\mathbf{p}_t^2}{3a_{\text{He}}} \right\}$$

核子 3 が終状態の n の場合 次に (Ct2.2) の計算を行います。この計算では、 n を 3 番目の粒子、 t を構成する三つの核子を 1,2,4 番目の粒子として扱う。よって、終状態の空間成分は以下のように表す事が出来る。

$$\left(\frac{4a_t^2}{3\pi^2}\right)^{\frac{3}{4}} \exp \left\{ -i\mathbf{p}_n \mathbf{r}_3 - i\mathbf{p}_t \left(\frac{\mathbf{r}_4 + \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{3} \right) - a_t \left[\mathbf{r}_4^2 + \mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2 - \frac{(\mathbf{r}_4 + \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)^2}{3} \right] \right\}$$

これより、 $\mathcal{M}_2$ への (Ct2.3) からの寄与は以下のように計算出来る。

$$\begin{aligned} (Ct2.3) &= 2 \left(2 \frac{a_{\text{He}}^3}{\pi^3} \right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{4a_t^2}{3\pi^2} \right)^{\frac{3}{4}} \iiint d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 \\ &\times \exp \left\{ i\mathbf{q}\mathbf{r}_2 - a_{\text{He}} \left(\mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2 + \mathbf{r}_3^2 + \mathbf{r}_4^2 - \frac{(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4)^2}{4} \right) - i\mathbf{p}_n \mathbf{r}_3 \right. \\ &\quad \left. - i\mathbf{p}_t \left(\frac{\mathbf{r}_4 + \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{3} \right) - a_t \left[\mathbf{r}_4^2 + \mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2 - \frac{(\mathbf{r}_4 + \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)^2}{3} \right] \right\} \end{aligned}$$

$\exp$ の中身をヤコビ座標を用いて書き直すことにする。

$$\begin{aligned} &i\mathbf{q} \left(\mathbf{s}_0 - \frac{1}{4}\mathbf{s}_1 - \frac{1}{3}\mathbf{s}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{s}_3 \right) - a_{\text{He}} \left(\frac{3}{4}\mathbf{s}_1^2 + \frac{2}{3}\mathbf{s}_2^2 + \frac{1}{2}\mathbf{s}_3^2 \right) - i\mathbf{p}_n \left(\mathbf{s}_0 + \frac{3}{4}\mathbf{s}_1 \right) \\ &\quad - i\mathbf{p}_t \left(\mathbf{s}_0 - \frac{1}{4}\mathbf{s}_1 \right) - a_t \left(\frac{2}{3}\mathbf{s}_2^2 + \frac{1}{2}\mathbf{s}_3^2 \right) \\ &= i(\mathbf{q} - \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_t)\mathbf{s}_0 - \frac{i}{4}(3\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_t + \mathbf{q})\mathbf{s}_1 - \frac{i}{3}\mathbf{q}\mathbf{s}_2 - \frac{i\mathbf{q}}{2}\mathbf{s}_3 - a_{\text{He}}(\cdots) - a_t(\cdots) \end{aligned}$$

となる。これは、 $\mathcal{M}_1$ における (Ct1.2) に等しいので、寄与も (2.1.2b) と同じになる。

$$(Ct2.3) = 2(2\pi)^3 \left(\frac{128\pi}{3} \frac{a_{\text{He}} a_t^2}{(a_{\text{He}} + a_t)^4} \right)^{\frac{3}{4}} \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_t) \exp \left\{ -\frac{\mathbf{p}_n^2}{3a_{\text{He}}} - \frac{1}{6} \frac{\mathbf{q}^2}{(a_{\text{He}} + a_t)} \right\}$$

核子 4 が終状態の n の場合 最後に (Ct2.4) の計算を行う。この計算では、 n を 4 番目の粒子、 t を構成する三つの核子を 1,2,3 番目の粒子として扱う。よって、終状態の空間成分は以下のように表す事が出来る。

$$\left(\frac{4a_t^2}{3\pi^2}\right)^{\frac{3}{4}} \exp \left\{ -i\mathbf{p}_n \mathbf{r}_4 - i\mathbf{p}_t \left(\frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3}{3} \right) - a_t \left[\mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2 + \mathbf{r}_3^2 - \frac{(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3)^2}{3} \right] \right\}$$

これより、 $\mathcal{M}_2$ への (Ct2.4) からの寄与は以下のように計算出来る。

$$\begin{aligned} (Ct2.4) &= 2 \left(2 \frac{a_{\text{He}}^3}{\pi^3} \right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{4a_t^2}{3\pi^2} \right)^{\frac{3}{4}} \iiint d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 \\ &\times \exp \left\{ i\mathbf{q}\mathbf{r}_2 - a_{\text{He}} \left(\mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2 + \mathbf{r}_3^2 + \mathbf{r}_4^2 - \frac{(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4)^2}{4} \right) - i\mathbf{p}_n \mathbf{r}_4 \right. \\ &\quad \left. - i\mathbf{p}_t \left(\frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3}{3} \right) - a_t \left[\mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2 + \mathbf{r}_3^2 - \frac{(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3)^2}{3} \right] \right\} \end{aligned}$$

$\exp$ の中身をヤコビ座標を用いて書き直す。

$$\begin{aligned}
& i\mathbf{q} \left(s_0 - \frac{1}{4}s_1 - \frac{1}{3}s_2 + \frac{1}{2}s_3 \right) - a_{\text{He}} \left(\frac{3}{4}s_1^2 + \frac{2}{3}s_2^2 + \frac{1}{2}s_3^2 \right) - i\mathbf{p}_n \left(s_0 + \frac{3}{4}s_1 \right) \\
& \quad - i\mathbf{p}_t \left(s_0 - \frac{1}{4}s_1 \right) - a_t \left(\frac{2}{3}s_2^2 + \frac{1}{2}s_3^2 \right) \\
& = i(\mathbf{q} - \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_t)s_0 - \frac{i}{4}(3\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_t + \mathbf{q})s_1 - \frac{i}{3}\mathbf{q}s_2 + \frac{i\mathbf{q}}{2}s_3 - a_{\text{He}}(\cdots) - a_t(\cdots)
\end{aligned}$$

となる。これは、 $\mathcal{M}_1$ における (Ct1.3) と等しく、寄与は同じになる。

$$(Ct2.4) = 2(2\pi)^3 \left(\frac{128\pi}{3} \frac{a_{\text{He}}a_t^2}{(a_{\text{He}} + a_t)^4} \right)^{\frac{3}{4}} \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_t) \exp \left\{ -\frac{\mathbf{p}_n^2}{3a_{\text{He}}} - \frac{1}{6} \frac{\mathbf{q}^2}{(a_{\text{He}} + a_t)} \right\}$$

結果のまとめ 以上の計算から

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_2 &= \frac{1}{24} \{ -(Ct2.1) + (Ct2.2) - (Ct2.3) - (Ct2.4) \} \\
&= \frac{(2\pi)^3}{4} \left(\frac{128\pi}{3} \frac{a_{\text{He}}a_t^2}{(a_{\text{He}} + a_t)^4} \right)^{\frac{3}{4}} \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_t) \\
&\quad \left[\exp \left(-\frac{\mathbf{p}_t^2}{3a_{\text{He}}} \right) - \exp \left(-\frac{\mathbf{p}_n^2}{3a_{\text{He}}} - \frac{\mathbf{q}^2}{6(a_{\text{He}} + a_t)} \right) \right] \quad (C-2-66)
\end{aligned}$$

となり、 $\mathcal{M}_1$ と同じになる事が分かる。

計算結果

$\mathcal{M}_3, \mathcal{M}_4$ の値も同様に、 $\mathcal{M}_1$ の値と同じになる。よって

$$\begin{aligned}
& \mathcal{M}(^4\text{He} \rightarrow n \downarrow, t \uparrow) \\
&= \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 + \mathcal{M}_3 + \mathcal{M}_4 \\
&= \left(\frac{128\pi}{3} \frac{a_{\text{He}}a_t^2}{(a_{\text{He}} + a_t)^4} \right)^{\frac{3}{4}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_t) \left\{ \exp \left[-\frac{\mathbf{p}_t^2}{3a_{\text{He}}} \right] - \exp \left[-\frac{\mathbf{p}_n^2}{3a_{\text{He}}} - \frac{\mathbf{q}^2}{6(a_{\text{He}} + a_t)} \right] \right\} \\
&\equiv \mathcal{M}_{\text{tn}} \quad (C-2-67)
\end{aligned}$$

後の便宜のために、この値を $\mathcal{M}_{\text{tn}}$ と定義しておく。

終状態が $|t \downarrow, n \uparrow\rangle$ の場合 次に終状態が $|t \downarrow, n \uparrow\rangle$ の計算を $|t \uparrow, n \downarrow\rangle$ と同様に行う。

ベクトルカレントによるスピン・アイソスピンの状態変化

始状態にベクトルカレントが当たった状態と終状態との間の内積を考える。前回と同様に、スピンアイソスピンの成分のみを考えると、以下のように表す事が出来る。

$$\begin{aligned}
& \langle n \uparrow, t \downarrow | \tau_1^- | {}^4\text{He} \rangle \\
&= \frac{1}{4\sqrt{6}} \left\{ \begin{aligned} & [npn(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow) - nnp(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow) - pnn(\downarrow\uparrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow)]_{n=1} \\ & - [npn(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow) - nnp(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow)]_{n=2} \\ & + [-nnp(\downarrow\downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow\downarrow) - npn(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow)]_{n=3} \\ & - [nnp(\downarrow\downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow\downarrow) + npn(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow)]_{n=4} \end{aligned} \right\} \\
&\times \frac{1}{\sqrt{6}} \{ pnn(\downarrow\uparrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow) - npn(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow) + nnp(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow) \} \\
&= \frac{1}{24} \{ -[6]_{n=1} + [2]_{n=2} + [2]_{n=3} + [2]_{n=4} \} \\
\\
& \langle n \uparrow, t \downarrow | \tau_2^- | {}^4\text{He} \rangle \\
&= \frac{1}{4\sqrt{6}} \left\{ \begin{aligned} & [-npn(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow) + nnp(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow)]_{n=1} \\ & - [-npn(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow) + nnp(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow) + pnn(\downarrow\uparrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow)]_{n=2} \\ & + [nnp(\downarrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\downarrow) - pnn(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow)]_{n=3} \\ & - [-nnp(\downarrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\downarrow) + pnn(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow)]_{n=4} \end{aligned} \right\} \\
&\times \frac{1}{\sqrt{6}} \{ pnn(\downarrow\uparrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow) - npn(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow) + nnp(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow) \} \\
&= \frac{1}{24} \{ [2]_{n=1} - [6]_{n=2} + [2]_{n=3} + [2]_{n=4} \} \\
\\
& \langle n \uparrow, t \downarrow | \tau_3^- | {}^4\text{He} \rangle \\
&= \frac{1}{4\sqrt{6}} \left\{ \begin{aligned} & [-pnn(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow) - nnp(\downarrow\uparrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow)]_{n=1} \\ & - [pnn(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow) + nnp(\downarrow\uparrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow)]_{n=2} \\ & + [pnn(\downarrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\downarrow) - npn(\downarrow\downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow\downarrow) - nnp(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow)]_{n=3} \\ & - [pnn(\downarrow\downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow\downarrow) - npn(\downarrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\downarrow)]_{n=4} \end{aligned} \right\} \\
&\times \frac{1}{\sqrt{6}} \{ pnn(\downarrow\uparrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow) - npn(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow) + nnp(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow) \} \\
&= \frac{1}{24} \{ [2]_{n=1} + [2]_{n=2} - [6]_{n=3} + [2]_{n=4} \} \\
\\
& \langle n \uparrow, t \downarrow | \tau_4^- | {}^4\text{He} \rangle \\
&= \frac{1}{4\sqrt{6}} \left\{ \begin{aligned} & [pnn(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow) - npn(\downarrow\uparrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow)]_{n=1} \\ & - [-pnn(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow) + npn(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow)]_{n=2} \\ & + [-pnn(\downarrow\downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow\downarrow) + npn(\downarrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\downarrow)]_{n=3} \\ & - [-pnn(\downarrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\downarrow) + npn(\downarrow\downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow\downarrow) + nnp(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow)]_{n=4} \end{aligned} \right\} \\
&\times \frac{1}{\sqrt{6}} \{ pnn(\downarrow\uparrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow) - npn(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow) + nnp(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow) \} \\
&= \frac{1}{24} \{ [2]_{n=1} + [2]_{n=2} + [2]_{n=3} - [6]_{n=4} \}
\end{aligned}$$

結果

空間成分についての計算は、 $t \uparrow, n \downarrow$ の時と同様に行うことが出来る。よって

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}(^4\text{He} \rightarrow n \uparrow t \downarrow) &= - \left(\frac{128\pi}{3} \frac{a_{\text{He}} a_t^2}{(a_{\text{He}} + a_t)^4} \right)^{\frac{3}{4}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_t) \\
 &\quad \left\{ \exp \left[-\frac{\mathbf{p}_t^2}{3a_{\text{He}}} \right] - \exp \left[-\frac{\mathbf{p}_n^2}{3a_{\text{He}}} - \frac{\mathbf{q}^2}{6(a_{\text{He}} + a_t)} \right] \right\} \\
 &= -\mathcal{M}_{\text{tn}}
 \end{aligned} \tag{C-2-68}$$

となる。

ベクトルカレントによる破砕反応

ベクトルカレントによる破砕反応では、終状態のスピン値は $S = 0$ となるので、終状態のスピンアイソスピン成分は以下になると考えられる。

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|t \uparrow\rangle |n \downarrow\rangle - |t \downarrow\rangle |n \uparrow\rangle) \tag{C-2-39}$$

よって、振幅は前述の計算を用いて、以下のように表せる。

$$\mathcal{M}_V = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathcal{M}(^4\text{He} \rightarrow t \uparrow, n \downarrow) - \mathcal{M}(^4\text{He} \rightarrow t \downarrow, n \uparrow)) = \sqrt{2} \mathcal{M}_{\text{tn}} \tag{C-2-69}$$

となる。

軸性ベクトルカレントによる反応

次に、He に軸性ベクトルカレントが作用して生じる破砕反応を考える。

軸性ベクトルカレントは $A_k = \sum_a e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_a} \tau_a^- \sigma_{ak}$ と表される。これを昇降演算子の形で表すと、次のようになる。

$$\begin{aligned} A_{\pm} &= \frac{1}{\sqrt{2}} g_A \sum_a e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_a} \tau_a^- (\sigma_{a1} \pm i\sigma_{a2}) \\ &= \sqrt{2} g_A \sum_a e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_a} \tau_a^- \sigma_{a\pm} \end{aligned} \quad (\text{C-2-70})$$

$$A_z = g_A \sum_a e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_a} \tau_a^- \sigma_{az} \quad (\text{C-2-71})$$

ここで現れる因子 g_A は、軸性ベクトルカレントの軸性結合定数で、その値は $g_A = 1.26$ となる。

今まで考えてきた破砕反応はベクトルカレントが作用した場合であり、このとき変化するのはアイソスピン成分のみだった。しかし、今回計算する破砕反応、すなわち軸性ベクトルカレントが作用した場合には、スピン、アイソスピンの両成分が変化する。運動量の保存から、He に作用する軸性ベクトルカレントの種類により、終状態がどうなるか予想する事が出来る。

$$\begin{aligned} A_+ &\Rightarrow |t \uparrow\rangle |n \uparrow\rangle \quad S = 1, S_z = 1 \\ A_z &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|t \uparrow\rangle |n \downarrow\rangle + |t \downarrow\rangle |n \uparrow\rangle) \quad S = 1, S_z = 0 \\ A_- &\Rightarrow |t \downarrow\rangle |n \downarrow\rangle \quad S = 1, S_z = -1 \end{aligned}$$

まず初めに、軸性ベクトルカレントとして A_+ が作用した反応を考える。

A_+ が作用した場合

軸性ベクトルカレントによるスピン・アイソスピンの状態変化

始状態の He に軸性ベクトルカレント A_+ の要素 $\tau_a^- \sigma_{a+}$ が作用すると、スピンアイソスピンの状態は以下に変化する。

$$\begin{aligned} \tau_1^- \sigma_{1+} |^4\text{He}\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \{nnpn(\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow - \uparrow\uparrow\downarrow\downarrow) + nnnp(-\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow + \uparrow\uparrow\downarrow\uparrow) + npnn(\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow - \uparrow\uparrow\downarrow\uparrow)\} \\ \tau_2^- \sigma_{2+} |^4\text{He}\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \{nnpn(-\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow + \uparrow\uparrow\downarrow\downarrow) + nnnp(\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow - \uparrow\uparrow\downarrow\uparrow) + pnnn(-\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow + \uparrow\uparrow\downarrow\uparrow)\} \\ \tau_3^- \sigma_{3+} |^4\text{He}\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \{pnnn(\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow\uparrow) + npnn(-\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow + \downarrow\uparrow\uparrow\uparrow) + nnnp(\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow\uparrow)\} \\ \tau_4^- \sigma_{4+} |^4\text{He}\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \{pnnn(-\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow + \uparrow\downarrow\uparrow\uparrow) + npnn(\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow\uparrow) + nnpn(-\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow + \downarrow\uparrow\uparrow\uparrow)\} \end{aligned}$$

この状態と、終状態との内積をとる。終状態は前述から $|n \uparrow, t \uparrow\rangle$ となる。

$$\begin{aligned}
& \langle n \uparrow, t \uparrow | \tau_1^- \sigma_{1+} | {}^4\text{He} \rangle \\
&= \frac{1}{4\sqrt{6}} \left\{ \begin{aligned} & [npn(\downarrow\uparrow\uparrow - \uparrow\uparrow\downarrow) + nnp(-\downarrow\uparrow\uparrow + \uparrow\downarrow\uparrow) + pnn(\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow)]_{n=1} \\ & -[nnp(\uparrow\downarrow\uparrow) - npn(\uparrow\uparrow\downarrow)]_{n=2} \\ & -[nnp(\uparrow\downarrow\uparrow) - npn(\uparrow\uparrow\downarrow)]_{n=3} \\ & -[nnp(\uparrow\downarrow\uparrow) - npn(\uparrow\uparrow\downarrow)]_{n=4} \end{aligned} \right\} \\
&\times \frac{1}{\sqrt{6}} \{ pnn(\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow) - npn(\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow) + nnp(\uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow) \} \\
&= \frac{1}{24} \{ [6]_{n=1} - [2]_{n=2} - [2]_{n=3} - [2]_{n=4} \} \\
\\
& \langle n \uparrow, t \uparrow | \tau_2^- \sigma_{2+} | {}^4\text{He} \rangle \\
&= \frac{1}{4\sqrt{6}} \left\{ \begin{aligned} & [npn(\uparrow\uparrow\downarrow) - nnp(\uparrow\downarrow\uparrow)]_{n=1} \\ & -[nnp(-\downarrow\uparrow\uparrow + \uparrow\uparrow\downarrow) + nnp(\downarrow\uparrow\uparrow - \uparrow\downarrow\uparrow) + pnn(-\uparrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\uparrow)]_{n=2} \\ & +[nnp(\downarrow\uparrow\uparrow) - pnn(\uparrow\uparrow\downarrow)]_{n=3} \\ & +[nnp(\downarrow\uparrow\uparrow) - pnn(\uparrow\uparrow\downarrow)]_{n=4} \end{aligned} \right\} \\
&\times \frac{1}{\sqrt{6}} \{ pnn(\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow) - npn(\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow) + nnp(\uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow) \} \\
&= \frac{1}{24} \{ -[2]_{n=1} + [6]_{n=2} - [2]_{n=3} - [2]_{n=4} \} \\
\\
& \langle n \uparrow, t \uparrow | \tau_3^- \sigma_{3+} | {}^4\text{He} \rangle \\
&= \frac{1}{4\sqrt{6}} \left\{ \begin{aligned} & [-pnn(\uparrow\uparrow\downarrow) + nnp(\downarrow\uparrow\uparrow)]_{n=1} \\ & +[nnp(\downarrow\uparrow\uparrow) - pnn(\uparrow\uparrow\downarrow)]_{n=2} \\ & +[pnn(\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow) + npn(-\uparrow\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\uparrow) + nnp(\uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow)]_{n=3} \\ & -[-pnn(\uparrow\uparrow\downarrow) + npn(\downarrow\uparrow\uparrow)]_{n=4} \end{aligned} \right\} \\
&\times \frac{1}{\sqrt{6}} \{ pnn(\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow) - npn(\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow) + nnp(\uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow) \} \\
&= \frac{1}{24} \{ -[2]_{n=1} - [2]_{n=2} + [6]_{n=3} - [2]_{n=4} \} \\
\\
& \langle n \uparrow, t \uparrow | \tau_4^- \sigma_{4+} | {}^4\text{He} \rangle \\
&= \frac{1}{4\sqrt{6}} \left\{ \begin{aligned} & [pnn(\uparrow\uparrow\downarrow) - npn(\downarrow\uparrow\uparrow)]_{n=1} \\ & +[pnn(\uparrow\downarrow\uparrow) - npn(\downarrow\uparrow\uparrow)]_{n=2} \\ & +[pnn(\uparrow\downarrow\uparrow) - npn(\downarrow\uparrow\uparrow)]_{n=3} \\ & -[pnn(-\uparrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\uparrow) + npn(\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow) + nnp(-\uparrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\uparrow)]_{n=4} \end{aligned} \right\} \\
&\times \frac{1}{\sqrt{6}} \{ pnn(\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow) - npn(\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow) + nnp(\uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow) \} \\
&= \frac{1}{24} \{ -[2]_{n=1} - [2]_{n=2} - [2]_{n=3} + [6]_{n=4} \}
\end{aligned}$$

[] の下の添え字は前セクションと同様に、He の中の何番目の n と終状態の n との内積をとったかを表す。

A_+ が作用した場合の結果

空間成分の計算については、ベクトルカレントが作用した際の反応計算と同様に行うことが出来る。
以上、全ての計算を行い、(C-2-70) に注意し $\sqrt{2}$ をかけると、振幅として以下を得る事が出来る。

$$\begin{aligned}
& \mathcal{M}_{A_+} \\
&= \sqrt{2}g_A \left(\frac{128\pi}{3} \frac{a_{\text{He}}a_t^2}{(a_{\text{He}} + a_t)^4} \right)^{\frac{3}{4}} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{q} - \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_t) \\
&\quad \times \left\{ \exp \left[-\frac{\mathbf{p}_t^2}{3a_{\text{He}}} \right] - \exp \left[-\frac{\mathbf{p}_n^2}{3a_{\text{He}}} - \frac{\mathbf{q}^2}{6(a_{\text{He}} + a_t)} \right] \right\} \\
&\equiv \sqrt{2}g_A \mathcal{M}_{\text{tn}} \tag{C-2-72}
\end{aligned}$$

A_- が作用した場合

軸性ベクトルカレントによるスピン・スピンアイソスピンの状態変化

始状態の He に軸性ベクトルカレント A_- の要素 $\tau_a^- \sigma_{a-}$ が作用した際のスピンアイソスピンの状態は以下ようになる。

$$\begin{aligned}
\tau_1^- \sigma_{1-} |^4\text{He}\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \{nnpn(\downarrow\uparrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow) + nnnp(-\downarrow\uparrow\downarrow + \downarrow\downarrow\uparrow) + npnn(-\downarrow\downarrow\uparrow + \downarrow\downarrow\uparrow)\} \\
\tau_2^- \sigma_{2-} |^4\text{He}\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \{nnpn(-\uparrow\downarrow\downarrow + \downarrow\downarrow\uparrow) + nnnp(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow) + pnnn(\downarrow\downarrow\uparrow - \downarrow\downarrow\uparrow)\} \\
\tau_3^- \sigma_{3-} |^4\text{He}\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \{pnnn(\downarrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\downarrow) + npnn(-\downarrow\downarrow\uparrow + \uparrow\downarrow\downarrow) + nnnp(-\uparrow\downarrow\downarrow + \downarrow\uparrow\downarrow)\} \\
\tau_4^- \sigma_{4-} |^4\text{He}\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \{pnnn(-\downarrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\downarrow) + npnn(\downarrow\downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow\downarrow) + nnpn(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow)\}
\end{aligned}$$

この状態と、終状態との内積をとる。終状態は前述から $n \downarrow, t \downarrow$ となる。

$$\begin{aligned}
& \langle n \downarrow, t \downarrow | \tau_1^- \sigma_{1-} | {}^4\text{He} \rangle \\
&= \frac{1}{4\sqrt{6}} \left\{ \begin{aligned} & [npn(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow) + nnp(-\uparrow\downarrow\downarrow + \downarrow\uparrow\downarrow) + pnn(-\downarrow\uparrow\downarrow + \downarrow\downarrow\uparrow)]_{n=1} \\ & -[-nnp(\downarrow\downarrow\uparrow) + nnp(\downarrow\uparrow\downarrow)]_{n=2} \\ & +[-nnp(\downarrow\uparrow\downarrow) + npn(\downarrow\downarrow\uparrow)]_{n=3} \\ & -[nnp(\downarrow\uparrow\downarrow) - npn(\downarrow\downarrow\uparrow)]_{n=4} \end{aligned} \right\} \\
&\times \frac{1}{\sqrt{6}} \{ pnn(\downarrow\uparrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow) - npn(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow) + nnp(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow) \} \\
&= \frac{1}{24} \{ -[6]_{n=1} + [2]_{n=2} + [2]_{n=3} + [2]_{n=4} \} \\
\\
& \langle n \downarrow, t \downarrow | \tau_2^- \sigma_{2-} | {}^4\text{He} \rangle \\
&= \frac{1}{4\sqrt{6}} \left\{ \begin{aligned} & [npn(\downarrow\downarrow\uparrow) - nnp(\downarrow\uparrow\downarrow)]_{n=1} \\ & -[nnp(-\uparrow\downarrow\downarrow + \downarrow\uparrow\downarrow) + nnp(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow) + pnn(\downarrow\uparrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow)]_{n=2} \\ & +[nnp(\uparrow\downarrow\downarrow) - pnn(\downarrow\downarrow\uparrow)]_{n=3} \\ & -[-nnp(\uparrow\downarrow\downarrow) + pnn(\downarrow\downarrow\uparrow)]_{n=4} \end{aligned} \right\} \\
&\times \frac{1}{\sqrt{6}} \{ pnn(\downarrow\uparrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow) - npn(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow) + nnp(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow) \} \\
&= \frac{1}{24} \{ [2]_{n=1} - [6]_{n=2} + [2]_{n=3} + [2]_{n=4} \} \\
\\
& \langle n \downarrow, t \downarrow | \tau_3^- \sigma_{3-} | {}^4\text{He} \rangle \\
&= \frac{1}{4\sqrt{6}} \left\{ \begin{aligned} & [-pnn(\downarrow\downarrow\uparrow) + nnp(\uparrow\downarrow\downarrow)]_{n=1} \\ & -[pnn(\downarrow\downarrow\uparrow) - nnp(\uparrow\downarrow\downarrow)]_{n=2} \\ & +[pnn(\downarrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\downarrow) - npn(\downarrow\downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow\downarrow) - nnp(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow)]_{n=3} \\ & +[pnn(\downarrow\uparrow\downarrow) - npn(\uparrow\downarrow\downarrow)]_{n=4} \end{aligned} \right\} \\
&\times \frac{1}{\sqrt{6}} \{ pnn(\downarrow\uparrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow) - npn(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow) + nnp(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow) \} \\
&= \frac{1}{24} \{ [2]_{n=1} + [2]_{n=2} - [6]_{n=3} + [2]_{n=4} \} \\
\\
& \langle n \downarrow, t \downarrow | \tau_4^- \sigma_{4-} | {}^4\text{He} \rangle \\
&= \frac{1}{4\sqrt{6}} \left\{ \begin{aligned} & [pnn(\downarrow\uparrow\downarrow) - npn(\uparrow\downarrow\downarrow)]_{n=1} \\ & -[-pnn(\downarrow\uparrow\downarrow) + nnp(\uparrow\downarrow\downarrow)]_{n=2} \\ & +[pnn(\downarrow\uparrow\downarrow) - npn(\uparrow\downarrow\downarrow)]_{n=3} \\ & -[pnn(-\downarrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\downarrow) + npn(\downarrow\downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow\downarrow) + nnp(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow)]_{n=4} \end{aligned} \right\} \\
&\times \frac{1}{\sqrt{6}} \{ pnn(\downarrow\uparrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow) - npn(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow) + nnp(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow) \} \\
&= \frac{1}{24} \{ [2]_{n=1} + [2]_{n=2} + [2]_{n=3} - [6]_{n=4} \}
\end{aligned}$$

[] の下の添え字は前セクションと同様に、He 中の何番目の n と終状態の n との内積をとったかを表す。

A_- が作用した場合の結果

空間成分の計算については、ベクトルカレントが作用した反応計算と同じになる。よって、振幅は以下ようになる。

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_{A_-} &= -\sqrt{2}g_A \left(\frac{128\pi}{3} \frac{a_{\text{He}}a_t^2}{(a_{\text{He}} + a_t)^4} \right)^{\frac{3}{4}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_t) \\
 &\quad \times \left\{ \exp \left[-\frac{\mathbf{p}_t^2}{3a_{\text{He}}} \right] - \exp \left[-\frac{\mathbf{p}_n^2}{3a_{\text{He}}} - \frac{\mathbf{q}^2}{6(a_{\text{He}} + a_t)} \right] \right\} \\
 &= -\sqrt{2}g_A \mathcal{M}_{\text{tn}}
 \end{aligned} \tag{C-2-73}$$

A_z が作用した場合

軸性ベクトルカレントによるスピン・アイソスピンの状態変化

始状態の He に軸性ベクトルカレントとして A_z が作用した際のスピンアイソスピンの状態は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
 \tau_1^- \sigma_{1z} |^4\text{He}\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \left\{ \begin{aligned} &nnpn(\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow\downarrow + \downarrow\uparrow\uparrow) \\ &+nnnp(-\uparrow\uparrow\downarrow + \downarrow\downarrow\uparrow + \uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow) \\ &+npnn(-\uparrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\uparrow) \end{aligned} \right\} \\
 \tau_2^- \sigma_{2z} |^4\text{He}\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \left\{ \begin{aligned} &nnpn(-\uparrow\uparrow\downarrow + \downarrow\downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow\downarrow + \downarrow\uparrow\uparrow) \\ &+nnnp(\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow + \uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow) \\ &+pnnn(\uparrow\downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow\downarrow + \downarrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow) \end{aligned} \right\} \\
 \tau_3^- \sigma_{3z} |^4\text{He}\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \left\{ \begin{aligned} &pnnn(-\uparrow\uparrow\downarrow + \downarrow\downarrow\uparrow + \uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow) \\ &+npnn(\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow + \uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow) \\ &+nnnp(-\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\uparrow) \end{aligned} \right\} \\
 \tau_4^- \sigma_{4z} |^4\text{He}\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \left\{ \begin{aligned} &pnnn(\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow\downarrow + \downarrow\uparrow\uparrow) \\ &+npnn(-\uparrow\uparrow\downarrow + \downarrow\downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow\downarrow + \downarrow\uparrow\uparrow) \\ &+nnpn(\uparrow\downarrow\uparrow + \uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow) \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

角運動量保存則から、終状態として許されるのは、 $(t \uparrow, n \downarrow)$ か $(t \downarrow, n \uparrow)$ のどちらかになる。

終状態が $(t \uparrow, n \downarrow)$ の場合 始状態にカレントが作用した状態と、終状態との間の内積をとる。

$$\begin{aligned}
 \langle t \uparrow, n \downarrow | \tau_1^- \sigma_{1z} |^4\text{He}\rangle &= \frac{1}{4\sqrt{6}} \left\{ \begin{aligned} &[nnp(\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow) + nnp(\downarrow\downarrow\uparrow - \uparrow\uparrow\downarrow) - pnn(\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow)]_{n=1} \\ &+[nnp(\downarrow\downarrow\uparrow + \uparrow\uparrow\downarrow) - nnp(\downarrow\downarrow\uparrow + \uparrow\uparrow\downarrow)]_{n=2} \\ &+[-nnp(\uparrow\uparrow\downarrow + \downarrow\downarrow\uparrow) + nnp(\uparrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\downarrow)]_{n=3} \\ &-[nnp(\uparrow\uparrow\downarrow + \downarrow\downarrow\uparrow) - nnp(\uparrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\downarrow)]_{n=4} \end{aligned} \right\} \\
 &\quad \otimes \frac{1}{\sqrt{6}} \{ pnn(\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow) - nnp(\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow) + nnp(\uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\downarrow) \} \\
 &= \frac{1}{24} (-[6]_{n=1} + [2]_{n=2} + [2]_{n=3} + [2]_{n=4})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle t \uparrow, n \downarrow | \tau_2^- \sigma_{2z} | \text{He} \rangle &= \frac{1}{4\sqrt{6}} \left\{ \begin{aligned} &[npn(\downarrow\uparrow\uparrow + \uparrow\downarrow\uparrow) - nnp(\downarrow\uparrow\uparrow + \uparrow\uparrow\downarrow)]_{n=1} \\ &- [npn(\downarrow\uparrow\uparrow - \uparrow\uparrow\downarrow) - nnp(\downarrow\uparrow\uparrow - \uparrow\downarrow\uparrow) + pnn(\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow)]_{n=2} \\ &+ [nnp(\uparrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\uparrow) - pnn(\uparrow\uparrow\uparrow + \downarrow\uparrow\uparrow)]_{n=3} \\ &- [-nnp(\uparrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\uparrow) + pnn(\uparrow\uparrow\uparrow + \downarrow\uparrow\uparrow)]_{n=4} \end{aligned} \right\} \\
&\otimes \frac{1}{\sqrt{6}} \{ pnn(\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow) - npn(\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow) + nnp(\uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow) \} \\
&= \frac{1}{24} ([2]_{n=1} - [6]_{n=2} + [2]_{n=3} + [2]_{n=4}) \\
\\
\langle t \uparrow, n \downarrow | \tau_3^- \sigma_{3z} | \text{He} \rangle &= \frac{1}{4\sqrt{6}} \left\{ \begin{aligned} &[-pnn(\downarrow\uparrow\uparrow + \uparrow\downarrow\uparrow) + nnp(\uparrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\uparrow)]_{n=1} \\ &- [pnn(\downarrow\uparrow\uparrow + \uparrow\downarrow\uparrow) - nnp(\uparrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\uparrow)]_{n=2} \\ &+ [-pnn(\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow) + npn(\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow) - nnp(\uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow)]_{n=3} \\ &- [-pnn(\uparrow\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\uparrow) + npn(\uparrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\uparrow)]_{n=4} \end{aligned} \right\} \\
&\otimes \frac{1}{\sqrt{6}} \{ pnn(\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow) - npn(\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow) + nnp(\uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow) \} \\
&= \frac{1}{24} ([2]_{n=1} + [2]_{n=2} - [6]_{n=3} + [2]_{n=4}) \\
\\
\langle t \uparrow, n \downarrow | \tau_4^- \sigma_{4z} | \text{He} \rangle &= \frac{1}{4\sqrt{6}} \left\{ \begin{aligned} &[pnn(\downarrow\uparrow\uparrow + \uparrow\downarrow\uparrow) - npn(\uparrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\uparrow)]_{n=1} \\ &- [-pnn(\downarrow\uparrow\uparrow + \uparrow\downarrow\uparrow) + npn(\uparrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\uparrow)]_{n=2} \\ &+ [pnn(\uparrow\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\uparrow) - npn(\uparrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\uparrow)]_{n=3} \\ &- [pnn(\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow) - npn(\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow) + nnp(\uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow)]_{n=4} \end{aligned} \right\} \\
&\otimes \frac{1}{\sqrt{6}} \{ pnn(\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow) - npn(\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow) + nnp(\uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow) \} \\
&= \frac{1}{24} ([2]_{n=1} + [2]_{n=2} + [2]_{n=3} - [6]_{n=4})
\end{aligned}$$

結果 空間成分についての計算は、ベクトルカレントが作用した際の反応計算と同じであり、結果は以下ようになる。

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}_{A_z}({}^4\text{He} \rightarrow n \uparrow, t \downarrow) \\
&= g_A \left(\frac{128\pi}{3} \frac{a_{\text{He}} a_t^2}{(a_{\text{He}} + a_t)^4} \right)^{\frac{3}{4}} (2\pi)^3 \delta^{(2)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_t) \\
&\quad \times \left\{ -\exp \left[-\frac{\mathbf{p}_t^2}{3a_{\text{He}}} \right] + \exp \left[-\frac{\mathbf{p}_n^2}{3a_{\text{He}}} - \frac{\mathbf{q}^2}{6(a_{\text{He}} + a_t)} \right] \right\} \\
&= -g_A \mathcal{M}_{tn}
\end{aligned} \tag{C-2-74}$$

($t \downarrow, n \uparrow$) の場合 始状態にカレントが作用した状態と、終状態との間の内積を考える。

$$\begin{aligned}
& \langle t \downarrow, n \uparrow | \tau_1^- \sigma_{1z} | {}^4\text{He} \rangle \\
&= \frac{1}{4\sqrt{6}} \left\{ \begin{aligned} & [npn(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow) - nnp(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow) - pnn(\downarrow\uparrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow)]_{n=1} \\ & - [npn(\uparrow\downarrow\downarrow + \downarrow\uparrow\downarrow) - nnp(\uparrow\downarrow\downarrow + \downarrow\downarrow\uparrow)]_{n=2} \\ & + [nnp(\downarrow\downarrow\uparrow + \uparrow\downarrow\downarrow) - npn(\uparrow\downarrow\downarrow + \downarrow\uparrow\downarrow)]_{n=3} \\ & - [-nnp(\downarrow\downarrow\uparrow + \uparrow\downarrow\downarrow) + npn(\uparrow\downarrow\downarrow + \downarrow\uparrow\downarrow)]_{n=4} \end{aligned} \right\} \\
&\times \frac{1}{\sqrt{6}} \{ pnn(\downarrow\uparrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow) - npn(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow) + nnp(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow) \} \\
&= \frac{1}{24} \{ -[6]_{n=1} + [2]_{n=2} + [2]_{n=3} + [2]_{n=4} \} \\
\\
& \langle t \downarrow, n \uparrow | \tau_2^- \sigma_{2z} | {}^4\text{He} \rangle \\
&= \frac{1}{4\sqrt{6}} \left\{ \begin{aligned} & [-npn(\uparrow\downarrow\downarrow + \downarrow\uparrow\downarrow) + nnp(\uparrow\downarrow\downarrow + \downarrow\downarrow\uparrow)]_{n=1} \\ & - [-npn(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow) + nnp(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow) + pnn(\downarrow\uparrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow)]_{n=2} \\ & + [-nnp(\downarrow\downarrow\uparrow + \uparrow\uparrow\downarrow) + pnn(\uparrow\downarrow\downarrow + \downarrow\uparrow\downarrow)]_{n=3} \\ & - [nnp(\downarrow\downarrow\uparrow + \uparrow\uparrow\downarrow) - pnn(\uparrow\downarrow\downarrow + \downarrow\uparrow\downarrow)]_{n=4} \end{aligned} \right\} \\
&\times \frac{1}{\sqrt{6}} \{ pnn(\downarrow\uparrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow) - npn(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow) + nnp(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow) \} \\
&= \frac{1}{24} \{ [2]_{n=1} - [6]_{n=2} + [2]_{n=3} + [2]_{n=4} \} \\
\\
& \langle t \downarrow, n \uparrow | \tau_3^- \sigma_{3z} | {}^4\text{He} \rangle \\
&= \frac{1}{4\sqrt{6}} \left\{ \begin{aligned} & [pnn(\uparrow\downarrow\downarrow + \downarrow\uparrow\downarrow) - nnp(\downarrow\uparrow\downarrow + \downarrow\downarrow\uparrow)]_{n=1} \\ & - [-pnn(\uparrow\downarrow\downarrow + \downarrow\uparrow\downarrow) + nnp(\downarrow\uparrow\downarrow + \downarrow\downarrow\uparrow)]_{n=2} \\ & + [pnn(\downarrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\downarrow) - npn(\downarrow\downarrow\uparrow - \uparrow\uparrow\downarrow) - nnp(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow)]_{n=3} \\ & - [pnn(\downarrow\downarrow\uparrow + \uparrow\uparrow\downarrow) - npn(\downarrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\downarrow)]_{n=4} \end{aligned} \right\} \\
&\times \frac{1}{\sqrt{6}} \{ pnn(\downarrow\uparrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow) - npn(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow) + nnp(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow) \} \\
&= \frac{1}{24} \{ [2]_{n=1} + [2]_{n=2} - [6]_{n=3} + [2]_{n=4} \} \\
\\
& \langle t \downarrow, n \uparrow | \tau_4^- \sigma_{4z} | {}^4\text{He} \rangle \\
&= \frac{1}{4\sqrt{6}} \left\{ \begin{aligned} & [-pnn(\uparrow\downarrow\downarrow + \downarrow\downarrow\uparrow) + npn(\downarrow\uparrow\downarrow + \downarrow\downarrow\uparrow)]_{n=1} \\ & - [pnn(\uparrow\downarrow\downarrow + \downarrow\downarrow\uparrow) - npn(\downarrow\uparrow\downarrow + \downarrow\downarrow\uparrow)]_{n=2} \\ & + [-pnn(\downarrow\downarrow\uparrow + \uparrow\uparrow\downarrow) + npn(\downarrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\downarrow)]_{n=3} \\ & - [-pnn(\downarrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\downarrow) + npn(\downarrow\downarrow\uparrow - \uparrow\uparrow\downarrow) + nnp(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow)]_{n=4} \end{aligned} \right\} \\
&\times \frac{1}{\sqrt{6}} \{ pnn(\downarrow\uparrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow) - npn(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow) + nnp(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow) \} \\
&= \frac{1}{24} \{ [2]_{n=1} + [2]_{n=2} + [2]_{n=3} - [6]_{n=4} \}
\end{aligned}$$

結果 空間成分についての計算は、ベクトルカレントのが作用した際の反応計算と同じであり、結果は以下になる。

$$\begin{aligned}
& \mathcal{M}_{A_z}({}^4\text{He} \rightarrow n \downarrow, t \uparrow) \\
&= -g_A \left(\frac{128\pi}{3} \frac{a_{\text{He}} a_t^2}{(a_{\text{He}} + a_t)^4} \right)^{\frac{3}{4}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_t) \\
&\quad \times \left\{ \exp \left[-\frac{\mathbf{p}_t^2}{3a_{\text{He}}} \right] - \exp \left[-\frac{\mathbf{p}_n^2}{3a_{\text{He}}} - \frac{\mathbf{q}^2}{6(a_{\text{He}} + a_t)} \right] \right\} \\
&= -g_A \mathcal{M}_{\text{tn}}
\end{aligned} \tag{C-2-75}$$

A_z が作用した場合の結果

ここで、軸性ベクトルカレントの第三成分が作用した時の終状態はスピンの成分を考えると以下のようになる。

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(t \uparrow n \downarrow + t \downarrow n \uparrow) \quad S = 1, S_z = 0 \tag{C-2-76}$$

よって振幅は

$$\mathcal{M}_{A_z} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathcal{M}_{A_z}({}^4\text{He} \rightarrow n \uparrow, t \downarrow) + \mathcal{M}_{A_z}({}^4\text{He} \rightarrow n \downarrow, t \uparrow)) = -\sqrt{2}g_A \mathcal{M} \tag{C-2-77}$$

となる。

まとめ

結果をまとめると、以下のように表せる。

$$\langle t \uparrow n \downarrow | V^0 | {}^4\text{He} \rangle = \sqrt{2} \mathcal{M}_{\text{tn}} \tag{C-2-78}$$

$$\langle t \uparrow n \downarrow | A^+ | {}^4\text{He} \rangle = \sqrt{2} g_A \mathcal{M}_{\text{tn}} \tag{C-2-79}$$

$$\langle t \uparrow n \downarrow | A^- | {}^4\text{He} \rangle = -\sqrt{2} g_A \mathcal{M}_{\text{tn}} \tag{C-2-80}$$

$$\langle t \uparrow n \downarrow | A^z | {}^4\text{He} \rangle = -\sqrt{2} g_A \mathcal{M}_{\text{tn}} \tag{C-2-81}$$

この式において、 $\mathcal{M}_{\text{tn}}$ は以下の式で表される。

$$\mathcal{M}_{\text{tn}} \equiv \left(\frac{128\pi}{3} \frac{a_{\text{He}} a_t^2}{(a_{\text{He}} + a_t)^4} \right)^{\frac{3}{4}} \left\{ \exp \left[-\frac{\mathbf{p}_t^2}{3a_{\text{He}}} \right] - \exp \left[-\frac{\mathbf{p}_n^2}{3a_{\text{He}}} - \frac{\mathbf{p}^2}{6(a_{\text{He}} + a_t)} \right] \right\} \tag{C-2-82}$$

この式で、 $\mathbf{p}$ はハドロニックカレントが運ぶ運動量を表している。

C.2.4 $(\tilde{\tau}^4\text{He}) \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 + \nu_\tau + \mathbf{d} + \mathbf{n} + \mathbf{n}$ の hadronic part

次に、(3-3-2) の hadronic part の計算を行う。

ベクトルカレントによる反応

ベクトルカレントによる反応では始状態、終状態においてスピンの値に変化が生じない。そのため、始状態であるヘリウム原子核のスピンの値が 0 であることから、終状態のスピンの値も 0 になる。終状態のスピンの値が 0 であり、d がスピン 1 を持つことから、終状態の n のスピンの値として 0 は許されず、1 となる。これより、スピンの値が 1 である二つの波動関数を合成し、スピンの値が 0 の波動関数を作ると考え、終状態のスピンアイソスピン成分は以下のように表される。

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(|n_1\rangle|d_{-1}\rangle - |n_0\rangle|d_0\rangle + |n_{-1}\rangle|d_1\rangle) \quad (\text{C-2-83})$$

終状態が $|d_1, n_{-1}\rangle$ の場合

ベクトルカレントによるスピン・アイソスピンの状態変化

まず初めに、ベクトルカレントが始状態の He に当たったときのスピンアイソスピンの状態変化について調べる。He の i 番目の粒子に作用するカレントを τ_i として、以下のように計算を行う。

$$\begin{aligned} \tau_1^- |^4\text{He}\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \left\{ \begin{array}{l} nnpn(\uparrow\uparrow\downarrow + \downarrow\downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\downarrow) \\ +nnnp(-\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow + \uparrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\downarrow) \\ +npnn(-\uparrow\downarrow\uparrow + \uparrow\downarrow\downarrow + \downarrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow) \end{array} \right\} \\ \tau_2^- |^4\text{He}\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \left\{ \begin{array}{l} nnpn(-\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow + \uparrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\downarrow) \\ +nnnp(\uparrow\uparrow\downarrow + \downarrow\downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\downarrow) \\ +pnnn(-\uparrow\downarrow\uparrow + \uparrow\downarrow\downarrow + \downarrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow) \end{array} \right\} \\ \tau_3^- |^4\text{He}\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \left\{ \begin{array}{l} pnnn(\uparrow\uparrow\downarrow + \downarrow\downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\downarrow) \\ +npnn(-\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow + \uparrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\downarrow) \\ +nnnp(-\uparrow\downarrow\uparrow + \uparrow\downarrow\downarrow + \downarrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow) \end{array} \right\} \\ \tau_4^- |^4\text{He}\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \left\{ \begin{array}{l} pnnn(-\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow + \uparrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\downarrow) \\ +npnn(\uparrow\uparrow\downarrow + \downarrow\downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\downarrow) \\ +nnpn(-\uparrow\downarrow\uparrow + \uparrow\downarrow\downarrow + \downarrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

この状態と終状態の $|d_1, n_{-1}\rangle$ との間の内積を考える。これを考えるに当たり、初めに終状態の n 二つとの内積を考え、次に d との内積を考える事にする。するとこの内積は (C-2-59) を考慮して、以下

のように表す事が出来る。

$$\begin{aligned}
& \langle d_1, n_{-1} | \tau_1^- | ^4\text{He} \rangle \\
&= \frac{1}{12} \{ (p \uparrow n \uparrow - n \uparrow p \uparrow)_{n=1,2} - (n \uparrow p \uparrow - p \uparrow n \uparrow)_{n=1,3} + (-n \uparrow p \uparrow + p \uparrow n \uparrow)_{n=1,4} \} \\
&\otimes \frac{1}{\sqrt{2}} [(p \uparrow n \uparrow) - (n \uparrow p \uparrow)] \\
&= \frac{1}{12\sqrt{2}} ([2]_{n=1,2} + [2]_{n=1,3} + [2]_{n=1,4}) \tag{C-2-84}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \langle d_1, n_{-1} | \tau_2^- | ^4\text{He} \rangle \\
&= \frac{1}{12} \{ (-p \uparrow n \uparrow + n \uparrow p \uparrow)_{n=1,2} + (-n \uparrow p \uparrow + p \uparrow n \uparrow)_{n=2,3} - (n \uparrow p \uparrow - p \uparrow n \uparrow)_{n=2,4} \} \\
&\otimes \frac{1}{\sqrt{2}} [(p \uparrow n \uparrow) - (n \uparrow p \uparrow)] \\
&= \frac{1}{12\sqrt{2}} (-[2]_{n=1,2} + [2]_{n=2,3} + [2]_{n=2,4}) \tag{C-2-85}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \langle d_1, n_{-1} | \tau_3^- | ^4\text{He} \rangle \\
&= \frac{1}{12} \{ -(p \uparrow n \uparrow - n \uparrow p \uparrow)_{n=1,3} + (-p \uparrow n \uparrow + n \uparrow p \uparrow)_{n=2,3} + (p \uparrow n \uparrow - n \uparrow p \uparrow)_{n=3,4} \} \\
&\otimes \frac{1}{\sqrt{2}} [(p \uparrow n \uparrow) - (n \uparrow p \uparrow)] \\
&= \frac{1}{12\sqrt{2}} (-[2]_{n=1,3} - [2]_{n=2,3} + [2]_{n=3,4}) \tag{C-2-86}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \langle d_1, n_{-1} | \tau_4^- | ^4\text{He} \rangle \\
&= \frac{1}{12} \{ (-p \uparrow n \uparrow + n \uparrow p \uparrow)_{n=1,4} - (p \uparrow n \uparrow - n \uparrow p \uparrow)_{n=2,4} + (-p \uparrow n \uparrow + n \uparrow p \uparrow)_{n=3,4} \} \\
&\otimes \frac{1}{\sqrt{2}} [(p \uparrow n \uparrow) - (n \uparrow p \uparrow)] \\
&= \frac{1}{12\sqrt{2}} (-[2]_{n=1,4} - [2]_{n=2,4} - [2]_{n=3,4}) \tag{C-2-87}
\end{aligned}$$

ここで [] の下の添え字は、He 中の何番目の n と終状態の二つの n との内積を取ったかを表す。上の式 (C-2-84) ~ (C-2-87) は一見すると、全て足しあわすことにより 0 になるように見える。しかし、この式は空間成分について考えていない。空間成分を考えた時、(C-2-84) ~ (C-2-87) では計算方法が異なるため、ここで安易に足し合わせる事は出来ない。以下で空間成分の計算を見ていくことにする。

核子 1 にカレントが作用する場合

初めに、カレントとして τ_1^- が作用した時の振幅を $\mathcal{M}_1$ として、この計算を行う。 $\mathcal{M}_1$ について、上記の計算からスピンアイソスピン成分で内積をとったものは、以下のように表す事が出来る。

$$\langle d_1, n_{-1} | \tau_1^- | ^4\text{He} \rangle = \frac{1}{12\sqrt{2}} \left(\underbrace{[2]_{n=1,2}}_{(\text{Cd1.1})} + \underbrace{[2]_{n=1,3}}_{(\text{Cd1.2})} + \underbrace{[2]_{n=1,4}}_{(\text{Cd1.3})} \right)$$

この (Cd1.1) ~ (Cd1.3) を順に計算する。

核子 1,2 が終状態の n の場合 初めに (Cd1.1) の計算を行います。この計算では、 n を 1,2 番目の粒子、 d を 3,4 番目の粒子として扱う。よって、終状態の空間成分は (C-2-51)、(C-2-53) を考慮すると以下の様に表せる。

$$\sqrt{2} \left(\frac{a_d}{\pi} \right)^{\frac{3}{4}} (\exp[-i(\mathbf{p}_{n1}\mathbf{r}_1 + \mathbf{p}_{n2}\mathbf{r}_2)] - \exp[-i(\mathbf{p}_{n2}\mathbf{r}_1 + \mathbf{p}_{n1}\mathbf{r}_2)]) \\ \times \exp \left[-\frac{a_d}{2}(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4)^2 \right] \exp \left[-i\mathbf{p}_d \left(\frac{\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4}{2} \right) \right]$$

これより $\mathcal{M}_1$ への (Cd1.1) からの寄与は以下のように計算出来る。

$$(\text{Cd1.1}) = \sqrt{2} \left(2 \frac{a_{\text{He}}^3}{\pi^3} \right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{a_d}{\pi} \right)^{\frac{3}{4}} \iiint d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 \\ \times \exp \left\{ i\mathbf{q}\mathbf{r}_1 - a_{\text{He}}(\dots) - \frac{a_d}{2}(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4)^2 - i\mathbf{p}_d \left(\frac{\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4}{2} \right) \right\} \\ \times \{ \exp[-i(\mathbf{p}_{n1}\mathbf{r}_1 + \mathbf{p}_{n2}\mathbf{r}_2)] - \exp[-i(\mathbf{p}_{n2}\mathbf{r}_1 + \mathbf{p}_{n1}\mathbf{r}_2)] \}$$

この積分をヤコビ座標を用いて実行する。今は二つ目の $\{ \}$ 内の一項目についてのみ計算を行うことにする。第二項については、 $\mathbf{p}_{n1} \leftrightarrow \mathbf{p}_{n2}$ と置き換えればすぐに結果が得られるためである。 $\exp$ の中身をあらわに表し、ヤコビ座標 (C-2-30)、(C-2-34) を用いて変形をする。

$$i\mathbf{q}\mathbf{r}_1 - a_{\text{He}}(\dots) - \frac{a_d}{2}(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4)^2 - i\mathbf{p}_d \left(\frac{\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4}{2} \right) - i(\mathbf{p}_{n1}\mathbf{r}_1 + \mathbf{p}_{n2}\mathbf{r}_2)$$

ヤコビ座標 (C-2-30),(C-2-34) を用いて $\mathbf{r}$ を $\mathbf{s}$ で表すと

$$= i(\mathbf{q} - \mathbf{p}_{n1}) \left(\mathbf{s}_0 + \frac{3}{4}\mathbf{s}_1 \right) - \frac{a_d}{2}\mathbf{s}_3^2 - i\mathbf{p}_d \left(\mathbf{s}_0 - \frac{1}{4}\mathbf{s}_1 - \frac{1}{3}\mathbf{s}_2 \right) \\ - i\mathbf{p}_{n2} \left(\mathbf{s}_0 - \frac{1}{4}\mathbf{s}_1 + \frac{2}{3}\mathbf{s}_2 \right) - a_{\text{He}} \left(\frac{3}{4}\mathbf{s}_1^2 + \frac{2}{3}\mathbf{s}_2^2 + \frac{1}{2}\mathbf{s}_3^2 \right) \\ = i(\mathbf{q} - \mathbf{p}_{n1} - \mathbf{p}_{n2} - \mathbf{p}_d)\mathbf{s}_0 + \frac{i}{4}\{3(\mathbf{q} - \mathbf{p}_{n1}) + \mathbf{p}_d + \mathbf{p}_{n2}\}\mathbf{s}_1 + \frac{2i}{3}\left(\frac{\mathbf{p}_d}{2} - \mathbf{p}_{n2}\right)\mathbf{s}_2 \\ - \frac{3}{4}a_{\text{He}}\mathbf{s}_1^2 - \frac{2}{3}a_{\text{He}}\mathbf{s}_2^2 - \frac{a_{\text{He}} + a_d}{2}\mathbf{s}_3^2 \\ = i(\mathbf{q} - \mathbf{p}_{n1} - \mathbf{p}_{n2} - \mathbf{p}_d)\mathbf{s}_0 \\ - \frac{3}{4}a_{\text{He}} \left(\mathbf{s}_1 - \frac{i}{6a_{\text{He}}} (3(\mathbf{q} - \mathbf{p}_{n1}) + \mathbf{p}_d + \mathbf{p}_{n2}) \right)^2 - \frac{1}{48a_{\text{He}}} (3(\mathbf{q} - \mathbf{p}_{n1}) + \mathbf{p}_d + \mathbf{p}_{n2})^2 \\ - \frac{2}{3}a_{\text{He}} \left(\mathbf{s}_2 - \frac{i}{2a_{\text{He}}} \left(\frac{\mathbf{p}_d}{2} - \mathbf{p}_{n2} \right) \right)^2 - \frac{1}{6a_{\text{He}}} \left(\frac{\mathbf{p}_d}{2} - \mathbf{p}_{n2} \right)^2 - \frac{a_{\text{He}} + a_d}{2}\mathbf{s}_3^2$$

二項目については、この表現で $\mathbf{p}_{n1} \leftrightarrow \mathbf{p}_{n2}$ としたものになる。これよりヤコビ座標で積分を実行すると、

$$(2.1.2a) \\ = \sqrt{2} \left(2 \frac{a_{\text{He}}^3}{\pi^3} \right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{a_d}{\pi} \right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{4\pi}{3a_{\text{He}}} \frac{3\pi}{2a_{\text{He}}} \frac{2\pi}{a_{\text{He}} + a_d} \right)^{\frac{3}{2}} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{q} - \mathbf{p}_{n1} - \mathbf{p}_{n2} - \mathbf{p}_d) \\ \times \left[\exp \left\{ -\frac{(3(\mathbf{q} - \mathbf{p}_{n1}) + \mathbf{p}_d + \mathbf{p}_{n2})^2}{48a_{\text{He}}} - \frac{(\frac{\mathbf{p}_d}{2} - \mathbf{p}_{n2})^2}{6a_{\text{He}}} \right\} \right. \\ \left. - \exp \left\{ -\frac{(3(\mathbf{q} - \mathbf{p}_{n2}) + \mathbf{p}_d + \mathbf{p}_{n1})^2}{48a_{\text{He}}} - \frac{(\frac{\mathbf{p}_d}{2} - \mathbf{p}_{n1})^2}{6a_{\text{He}}} \right\} \right]$$

係数を整理し、また δ 関数の条件を用いて $\exp$ の中身をかえると

$$= \sqrt{2}(2\pi)^3 \left(\frac{32\pi^2 a_d}{a_{\text{He}}(a_{\text{He}} + a_d)^2} \right)^{\frac{3}{4}} \delta(\mathbf{q} - \mathbf{p}_{n1} - \mathbf{p}_{n2} - \mathbf{p}_d) \\ \times \left[\exp \left(-\frac{4\mathbf{p}_{n2}^2 + 4\mathbf{p}_{n2} \cdot \mathbf{p}_d + 3\mathbf{p}_d^2}{8a_{\text{He}}} \right) \right. \\ \left. - \exp \left(-\frac{4\mathbf{p}_{n1}^2 + 4\mathbf{p}_{n1} \cdot \mathbf{p}_d + 3\mathbf{p}_d^2}{8a_{\text{He}}} \right) \right]$$

となる。ここで現れる δ 関数 $\delta(\mathbf{q} - \mathbf{p}_{n1} - \mathbf{p}_{n2} - \mathbf{p}_d)$ は運動量の保存を表している。すなわち、運動量 $\mathbf{q}$ をもつカレントが He に作用し、その運動量が d と二つの n に分配されている事を表す。

核子 1,3 が終状態の n の場合 次に (Cd1.2) の計算を行う。この計算では、n を 1,3 番目の粒子、d を 2,4 番目の粒子として扱う。よって、終状態の空間成分は (C-2-51),(C-2-53) を考慮する事で以下のように表す事ができる。

$$\sqrt{2} \left(\frac{a_d}{\pi} \right)^{\frac{3}{4}} (\exp[-i(\mathbf{p}_{n1}\mathbf{r}_1 + \mathbf{p}_{n2}\mathbf{r}_3)] - \exp[-i(\mathbf{p}_{n2}\mathbf{r}_1 + \mathbf{p}_{n1}\mathbf{r}_3)]) \\ \times \exp \left[-\frac{a_d}{2}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4)^2 \right] \exp \left[-i\mathbf{p}_d \left(\frac{\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_4}{2} \right) \right]$$

これより、 $\mathcal{M}_1$ への (Cd1.2) からの寄与は以下のように計算出来る。

$$(\text{Cd1.2}) = \sqrt{2} \left(2\frac{a_{\text{He}}^3}{\pi^3} \right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{a_d}{\pi} \right)^{\frac{3}{4}} \iiint d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 \\ \times \exp \left\{ i\mathbf{q}\mathbf{r}_1 - a_{\text{He}}(\dots) - \frac{a_d}{2}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4)^2 - i\mathbf{p}_d \left(\frac{\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_4}{2} \right) \right\} \\ \times \{ \exp[-i(\mathbf{p}_{n1}\mathbf{r}_1 + \mathbf{p}_{n2}\mathbf{r}_3)] - \exp[-i(\mathbf{p}_{n2}\mathbf{r}_1 + \mathbf{p}_{n1}\mathbf{r}_3)] \}$$

(Cd1.1) と同じように計算をしていく。ここでは、ヤコビ座標として、以下のものを用いる。

$$s_0 = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4}{4} \quad s_1 = \mathbf{r}_1 - \frac{\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4}{3} \quad (\text{C-2-88})$$

$$s_2 = \mathbf{r}_3 - \frac{\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_4}{2} \quad s_3 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4 \\ \mathbf{r}_1 = s_0 + \frac{3}{4}s_1 \quad \mathbf{r}_2 = s_0 - \frac{1}{4}s_1 - \frac{1}{3}s_2 + \frac{1}{2}s_3 \quad (\text{C-2-89})$$

$$\mathbf{r}_3 = s_0 - \frac{1}{4}s_1 + \frac{2}{3}s_2 \quad \mathbf{r}_4 = s_0 - \frac{1}{4}s_1 - \frac{1}{3}s_2 - \frac{1}{2}s_3$$

これはヤコビ座標 (C-2-30),(C-2-34) において、 $\mathbf{r}_2 \leftrightarrow \mathbf{r}_3$ としたものである。このとき、ヤコビアン¹の絶対値は 1 になり、 a_{He} の項の () の値も前回の計算と同様に表す事が出来る。これを用いて、二つ目の { } の第一項についての $\exp$ の中身を計算する。

$$i\mathbf{q}\mathbf{r}_1 - a_{\text{He}}(\dots) - \frac{a_d}{2}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4)^2 - i\mathbf{p}_d \left(\frac{\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_4}{2} \right) - i(\mathbf{p}_{n1}\mathbf{r}_1 + \mathbf{p}_{n2}\mathbf{r}_3)$$

ヤコビ座標 (C-2-88),(C-2-89) を用いて $\mathbf{r}$ を $\mathbf{s}$ で表すと

$$= i(\mathbf{q} - \mathbf{p}_{n1}) \left(s_0 + \frac{3}{4}s_1 \right) - \frac{a_d}{2}s_3^2 - i\mathbf{p}_d \left(s_0 - \frac{1}{4}s_1 - \frac{1}{3}s_2 \right) \\ - i\mathbf{p}_{n2} \left(s_0 - \frac{1}{4}s_1 + \frac{2}{3}s_2 \right) - a_{\text{He}} \left(\frac{3}{4}s_1^2 + \frac{2}{3}s_2^2 + \frac{1}{2}s_3^2 \right)$$

これは (Cd1.1) の計算と同じになる。よって、 $\mathcal{M}_1$ への (Cd1.2) からの寄与は (Cd1.1) と等しくなる。

$$(\text{Cd1.2}) = \sqrt{2}(2\pi)^3 \left(\frac{32\pi^3 a_d}{a_{\text{He}}(a_{\text{He}} + a_d)^2} \right)^{\frac{3}{4}} \delta(\mathbf{q} - \mathbf{p}_{n1} - \mathbf{p}_{n2} - \mathbf{p}_d) \\ \left[\exp \left(-\frac{4\mathbf{p}_{n2}^2 + 4\mathbf{p}_{n2} \cdot \mathbf{p}_d + 3\mathbf{p}_d^2}{8a_{\text{He}}} \right) - \exp \left(-\frac{4\mathbf{p}_{n1}^2 + 4\mathbf{p}_{n1} \cdot \mathbf{p}_d + 3\mathbf{p}_d^2}{8a_{\text{He}}} \right) \right]$$

となる。

核子 1,4 が終状態の $\mathbf{n}$ の場合 最後に (Cd1.3) の計算を行う。この計算では、 $\mathbf{n}$ を 1,4 番目の粒子、 $\mathbf{d}$ を 2,3 番目の粒子として扱う。よって、終状態の空間成分は (C-2-51),(C-2-53) を考慮する事で以下のように表す事が出来る。

$$\sqrt{2} \left(\frac{a_d}{\pi} \right)^{\frac{3}{4}} (\exp[-i(\mathbf{p}_{n1}\mathbf{r}_1 + \mathbf{p}_{n2}\mathbf{r}_4)] - \exp[-i(\mathbf{p}_{n2}\mathbf{r}_1 + \mathbf{p}_{n1}\mathbf{r}_4)]) \\ \times \exp \left[-\frac{a_d}{2}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3)^2 \right] \exp \left[-i\mathbf{p}_d \left(\frac{\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3}{2} \right) \right]$$

これより、 $\mathcal{M}_1$ への (Cd1.3) からの寄与は以下のように計算出来る。

$$(\text{Cd1.3}) = \sqrt{2} \left(2 \frac{a_{\text{He}}^3}{\pi^3} \right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{a_d}{\pi} \right)^{\frac{3}{4}} \iiint d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 \\ \times \exp \left\{ i\mathbf{q}\mathbf{r}_1 - a_{\text{He}}(\dots) - \frac{a_d}{2}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3)^2 - i\mathbf{p}_d \left(\frac{\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3}{2} \right) \right\} \\ \times \{ \exp[-i(\mathbf{p}_{n1}\mathbf{r}_1 + \mathbf{p}_{n2}\mathbf{r}_4)] - \exp[-i(\mathbf{p}_{n2}\mathbf{r}_1 + \mathbf{p}_{n1}\mathbf{r}_4)] \}$$

(Cd1.1) と同じように、二つ目の $\{ \}$ の第一項の計算を行う。

$$i\mathbf{q}\mathbf{r}_1 - a_{\text{He}}(\dots) - \frac{a_d}{2}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3)^2 - i\mathbf{p}_d \left(\frac{\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3}{2} \right) - i(\mathbf{p}_{n1}\mathbf{r}_1 + \mathbf{p}_{n2}\mathbf{r}_4)$$

ヤコビ座標 (C-2-33),(C-2-37) を用いて $\mathbf{r}$ を $\mathbf{s}$ で表すと

$$= i(\mathbf{q} - \mathbf{p}_{n1}) \left(\mathbf{s}_0 - \frac{1}{4}\mathbf{s}_1 + \frac{2}{3}\mathbf{s}_2 \right) - \frac{a_d}{2}\mathbf{s}_3^2 - i\mathbf{p}_d \left(\mathbf{s}_0 - \frac{1}{4}\mathbf{s}_1 - \frac{1}{3}\mathbf{s}_2 \right) \\ - i\mathbf{p}_{n2} \left(\mathbf{s}_0 + \frac{3}{4}\mathbf{s}_1 \right) - a_{\text{He}} \left(\frac{3}{4}\mathbf{s}_1^2 + \frac{2}{3}\mathbf{s}_2^2 + \frac{1}{2}\mathbf{s}_3^2 \right)$$

これは (Cd1.2) の計算において、 $\mathbf{p}_{n1} \rightarrow \mathbf{p}_{n2} + \mathbf{q}, \mathbf{p}_{n2} \rightarrow \mathbf{p}_{n1} - \mathbf{q}$ としたものである。また、第二項については $\mathbf{p}_{n1} \leftrightarrow \mathbf{p}_{n2}$ の置き換えをするので、 $\mathbf{p}_{n1} \rightarrow \mathbf{p}_{n2} - \mathbf{q}, \mathbf{p}_{n2} \rightarrow \mathbf{p}_{n1} + \mathbf{q}$ と置き換えを行うことにする。すると、 $\mathcal{M}_1$ への (Cd1.3) からの寄与は以下になる。

$$(\text{Cd1.3}) = \sqrt{2}(2\pi)^3 \left(\frac{32\pi^2 a_d}{a_{\text{He}}(a_{\text{He}} + a_d)^2} \right)^{\frac{3}{4}} \delta(\mathbf{q} - \mathbf{p}_{n1} - \mathbf{p}_{n2} - \mathbf{p}_d) \\ \times \left[\exp \left\{ -\frac{4(\mathbf{p}_{n1} - \mathbf{q})^2 + 4(\mathbf{p}_{n1} - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{p}_d + 3\mathbf{p}_d^2}{8a_{\text{He}}} \right\} \right. \\ \left. - \exp \left\{ -\frac{4(\mathbf{p}_{n2} - \mathbf{q})^2 + 4(\mathbf{p}_{n2} - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{p}_d + 3\mathbf{p}_d^2}{8a_{\text{He}}} \right\} \right] \\ = \sqrt{2}(2\pi)^3 \left(\frac{32\pi^2 a_d}{a_{\text{He}}(a_{\text{He}} + a_d)^2} \right)^{\frac{3}{4}} \delta(\mathbf{q} - \mathbf{p}_{n1} - \mathbf{p}_{n2} - \mathbf{p}_d) \\ \times \left[\exp \left(-\frac{4\mathbf{p}_{n2}^2 + 4\mathbf{p}_{n2} \cdot \mathbf{p}_d + 3\mathbf{p}_d^2}{8a_{\text{He}}} \right) - \exp \left(-\frac{4\mathbf{p}_{n1}^2 + 4\mathbf{p}_{n1} \cdot \mathbf{p}_d + 3\mathbf{p}_d^2}{8a_{\text{He}}} \right) \right]$$

となり、(Cd1.1),(Cd1.2) と等しくなる事が分かる。

結果のまとめ 以上の計算から

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_1 &= \frac{1}{12\sqrt{2}} \{(\text{Cd1.1}) + (\text{Cd1.2}) + (\text{Cd1.3})\} \\
&= \frac{(2\pi)^3}{4} \left(\frac{32\pi^2 a_d}{a_{\text{He}}(a_{\text{He}} + a_d)^2} \right)^{\frac{3}{4}} \delta(\mathbf{q} - \mathbf{p}_{n1} - \mathbf{p}_{n2} - \mathbf{p}_d) \\
&\quad \times \left[\exp \left(-\frac{4\mathbf{p}_{n2}^2 + 4\mathbf{p}_{n2} \cdot \mathbf{p}_d + 3\mathbf{p}_d^2}{8a_{\text{He}}} \right) - \exp \left(-\frac{4\mathbf{p}_{n1}^2 + 4\mathbf{p}_{n1} \cdot \mathbf{p}_d + 3\mathbf{p}_d^2}{8a_{\text{He}}} \right) \right] \quad (\text{C-2-90})
\end{aligned}$$

となる。

核子 2 にカレントが作用する場合

次にカレントとして τ_2^- が作用した際の振幅を $\mathcal{M}_2$ として計算を行う。 $\mathcal{M}_2$ に関して、スピンアイソスピン成分で内積をとったものは以下のように表す事ができる。

$$\langle d_1, n, n | \tau_2^- | ^4\text{He} \rangle = \frac{1}{12\sqrt{2}} \left(-\underbrace{[2]_{n=1,2}}_{(\text{Cd2.1})} + \underbrace{[2]_{n=2,3}}_{(\text{Cd2.2})} + \underbrace{[2]_{n=2,4}}_{(\text{Cd2.3})} \right)$$

この (Cd2.1) ~ (Cd2.3) の計算を行います。計算過程は核子 1 にカレントが作用する反応計算とほぼ同じで、以下が成り立つ。

$$-(\text{Cd2.1}) = (\text{Cd2.2}) = (\text{Cd2.3}) = (\text{Cd1.1})$$

よって、結果も $\mathcal{M}_1$ と同じになる。

計算結果

$\mathcal{M}_3, \mathcal{M}_4$ の値も $\mathcal{M}_1$ と等しくなる。よって、

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}(^4\text{He} \rightarrow d_1, n_{-1}) \\
&= \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 + \mathcal{M}_3 + \mathcal{M}_4 \\
&= (2\pi)^3 \left(\frac{32\pi^2 a_d}{a_{\text{He}}(a_{\text{He}} + a_d)^2} \right)^{\frac{3}{4}} \delta(\mathbf{q} - \mathbf{p}_{n1} - \mathbf{p}_{n2} - \mathbf{p}_d) \\
&\quad \times \left[\exp \left(-\frac{4\mathbf{p}_{n2}^2 + 4\mathbf{p}_{n2} \cdot \mathbf{p}_d + 3\mathbf{p}_d^2}{8a_{\text{He}}} \right) - \exp \left(-\frac{4\mathbf{p}_{n1}^2 + 4\mathbf{p}_{n1} \cdot \mathbf{p}_d + 3\mathbf{p}_d^2}{8a_{\text{He}}} \right) \right] \\
&\equiv \mathcal{M}_{\text{dnn}} \quad (\text{C-2-91})
\end{aligned}$$

後の便宜のため、この値を $\mathcal{M}_{\text{dnn}}$ と定義する。

終状態が $|d_{-1}, n_1\rangle$ の場合

ベクトルカレントによるスピンアイソスピンの状態変化

始状態にベクトルカレントが作用した状態と終状態との内積を考える。前回と同様、スピンアイソスピン成分のみを考えると、以下のように表す事が出来る。

$$\begin{aligned}
& \langle d_{-1}, n_1 | \tau_1^- | ^4\text{He} \rangle \\
&= \frac{1}{12} \{ (p \downarrow n \downarrow - n \downarrow p \downarrow)_{n=1,2} - (n \downarrow p \downarrow - p \downarrow n \downarrow)_{n=1,3} + (-n \downarrow p \downarrow + p \downarrow n \downarrow)_{n=1,4} \} \\
&\otimes \frac{1}{\sqrt{2}} [(p \downarrow n \downarrow) - (n \downarrow p \downarrow)] \\
&= \frac{1}{12\sqrt{2}} ([2]_{n=1,2} + [2]_{n=1,3} + [2]_{n=1,4}) \\
& \langle d_{-1}, n_1 | \tau_2^- | ^4\text{He} \rangle \\
&= \frac{1}{12} \{ (-p \downarrow n \downarrow + n \downarrow p \downarrow)_{n=1,2} + (-n \downarrow p \downarrow + p \downarrow n \downarrow)_{n=2,3} - (n \downarrow p \downarrow - p \downarrow n \downarrow)_{n=2,4} \} \\
&\otimes \frac{1}{\sqrt{2}} [(p \downarrow n \downarrow) - (n \downarrow p \downarrow)] \\
&= \frac{1}{12\sqrt{2}} (-[2]_{n=1,2} + [2]_{n=2,3} + [2]_{n=2,4}) \\
& \langle d_{-1}, n_1 | \tau_3^- | ^4\text{He} \rangle \\
&= \frac{1}{12} \{ -(p \downarrow n \downarrow - n \downarrow p \downarrow)_{n=1,3} + (-p \downarrow n \downarrow + n \downarrow p \downarrow)_{n=2,3} + (p \downarrow n \downarrow - n \downarrow p \downarrow)_{n=3,4} \} \\
&\otimes \frac{1}{\sqrt{2}} [(p \downarrow n \downarrow) - (n \downarrow p \downarrow)] \\
&= \frac{1}{12\sqrt{2}} (-[2]_{n=1,3} - [2]_{n=2,3} + [2]_{n=3,4}) \\
& \langle d_{-1}, n_1 | \tau_4^- | ^4\text{He} \rangle \\
&= \frac{1}{12} \{ (-p \downarrow n \downarrow + n \downarrow p \downarrow)_{n=1,4} - (p \downarrow n \downarrow - n \downarrow p \downarrow)_{n=2,4} + (-p \downarrow n \downarrow + n \downarrow p \downarrow)_{n=3,4} \} \\
&\otimes \frac{1}{\sqrt{2}} [(p \downarrow n \downarrow) - (n \downarrow p \downarrow)] \\
&= \frac{1}{12\sqrt{2}} (-[2]_{n=1,4} - [2]_{n=2,4} - [2]_{n=3,4})
\end{aligned}$$

計算結果

空間成分の計算は終状態が $|d_1, n_{-1}\rangle$ の時と全く同じで、結果も同じになる。

$$\mathcal{M}(^4\text{He} \rightarrow d_{-1}, n_1) = \mathcal{M}_{\text{dnn}} \quad (\text{C-2-92})$$

終状態が $|d_0, n_0\rangle$ の場合

ベクトルカレントによるスピンアイソスピンの状態変化

始状態にベクトルカレントが作用した状態と終状態との内積を考える。前回と同様に、スピンアイソスピン成分のみを考えると、以下のように表す事が出来る。

$$\begin{aligned}
& \langle d_0, n_0 | \tau_1^- | ^4\text{He} \rangle \\
&= \frac{1}{12\sqrt{2}} \left\{ \begin{array}{l} (-p \downarrow n \uparrow + n \uparrow p \downarrow - p \uparrow n \downarrow + n \downarrow p \uparrow)_{n=1,2} \\ -(-n \uparrow p \downarrow + p \downarrow n \uparrow - n \downarrow p \uparrow + p \uparrow n \downarrow)_{n=1,3} \\ +(n \uparrow p \downarrow - p \downarrow n \uparrow + n \downarrow p \uparrow - p \uparrow n \downarrow)_{n=1,4} \end{array} \right\} \\
&\otimes \frac{1}{2} [p \uparrow n \downarrow - n \uparrow p \downarrow + p \downarrow n \uparrow - n \downarrow p \uparrow] \\
&= \frac{1}{24\sqrt{2}} (-[4]_{n=1,2} - [4]_{n=1,3} - [4]_{n=1,4}) \\
&\langle d_0, n_0 | \tau_2^- | ^4\text{He} \rangle \\
&= \frac{1}{12\sqrt{2}} \left\{ \begin{array}{l} (p \uparrow n \downarrow - n \downarrow p \uparrow + p \downarrow n \uparrow - n \uparrow p \downarrow)_{n=1,2} \\ +(n \uparrow p \downarrow - p \downarrow n \uparrow + n \downarrow p \uparrow - p \uparrow n \downarrow)_{n=2,3} \\ -(-n \uparrow p \downarrow + p \downarrow n \uparrow - n \downarrow p \uparrow + p \uparrow n \downarrow)_{n=2,4} \end{array} \right\} \\
&\otimes \frac{1}{2} [p \uparrow n \downarrow - n \uparrow p \downarrow + p \downarrow n \uparrow - n \downarrow p \uparrow] \\
&= \frac{1}{24\sqrt{2}} ([4]_{n=1,2} - [4]_{n=2,3} - [4]_{n=2,4}) \\
&\langle d_0, n_0 | \tau_3^- | ^4\text{He} \rangle \\
&= \frac{1}{12\sqrt{2}} \left\{ \begin{array}{l} -(-p \uparrow n \downarrow + n \downarrow p \uparrow - p \downarrow n \uparrow + n \uparrow p \downarrow)_{n=1,3} \\ +(p \uparrow n \downarrow - n \downarrow p \uparrow + p \downarrow n \uparrow - n \uparrow p \downarrow)_{n=2,3} \\ +(-p \downarrow n \uparrow + n \uparrow p \downarrow - p \uparrow n \downarrow + n \downarrow p \uparrow)_{n=3,4} \end{array} \right\} \\
&\otimes \frac{1}{2} [p \uparrow n \downarrow - n \uparrow p \downarrow + p \downarrow n \uparrow - n \downarrow p \uparrow] \\
&= \frac{1}{24\sqrt{2}} ([4]_{n=1,3} + [4]_{n=2,3} - [4]_{n=3,4}) \\
&\langle d_0, n_0 | \tau_1^- | ^4\text{He} \rangle \\
&= \frac{1}{12\sqrt{2}} \left\{ \begin{array}{l} (-p \uparrow n \downarrow - n \downarrow p \uparrow + p \downarrow n \uparrow - n \uparrow p \downarrow)_{n=1,4} \\ -(-p \uparrow n \downarrow + n \downarrow p \uparrow - p \downarrow n \uparrow + n \uparrow p \downarrow)_{n=2,4} \\ +(p \uparrow n \downarrow - n \downarrow p \uparrow + p \downarrow n \uparrow - n \uparrow p \downarrow)_{n=3,4} \end{array} \right\} \\
&\otimes \frac{1}{2} [p \uparrow n \downarrow - n \uparrow p \downarrow + p \downarrow n \uparrow - n \downarrow p \uparrow] \\
&= \frac{1}{24\sqrt{2}} ([4]_{n=1,4} + [4]_{n=2,4} + [4]_{n=3,4})
\end{aligned}$$

計算結果

空間成分の計算は終状態が $|d_1, n_{-1}\rangle$ の時と全く同じで、結果は符号が異なる形で出てくる。

$$\mathcal{M}(^4\text{He} \rightarrow d_0, n_0) = -\mathcal{M}_{\text{dnn}} \quad (\text{C-2-93})$$

ベクトルカレントによる破砕反応

ベクトルカレントによる破砕反応では、終状態のスピン値は $S = 0$ になるので、終状態は前述の通り、以下の形になる。

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(|n_1\rangle|d_{-1}\rangle - |n_0\rangle|d_0\rangle + |n_{-1}\rangle|d_1\rangle) \quad (\text{C-2-83})$$

故に、振幅の値は

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_V &= \frac{1}{\sqrt{3}}[\mathcal{M}(^4\text{He} \rightarrow d_{-1}, n_1) - \mathcal{M}(^4\text{He} \rightarrow d_0, n_0) + \mathcal{M}(^4\text{He} \rightarrow d_1, n_{-1})] \\ &= \sqrt{3}(2\pi)^3 \left(\frac{32\pi^2 a_d}{a_{\text{He}}(a_{\text{He}} + a_d)^2} \right)^{\frac{3}{4}} \delta(\mathbf{q} - \mathbf{p}_{n1} - \mathbf{p}_{n2} - \mathbf{p}_d) \\ &\quad \times \left[\exp\left(-\frac{4\mathbf{p}_{n2}^2 + 4\mathbf{p}_{n2} \cdot \mathbf{p}_d + 3\mathbf{p}_d^2}{8a_{\text{He}}}\right) - \exp\left(-\frac{4\mathbf{p}_{n1}^2 + 4\mathbf{p}_{n1} \cdot \mathbf{p}_d + 3\mathbf{p}_d^2}{8a_{\text{He}}}\right) \right] \\ &= \sqrt{3}\mathcal{M}_{\text{dnn}} \end{aligned} \quad (\text{C-2-94})$$

となる。

軸性ベクトルカレントによる反応

次に、軸性ベクトルカレントが作用する事で生じる破砕反応を考える。今まで考えてきた破砕反応はベクトルカレントが作用した場合に生じる反応であり、このとき変化するのはアイソスピン成分のみである。しかし、今回考える破砕反応、すなわち軸性ベクトルカレントが作用した場合に生じる反応では、スピン、アイソスピンの両成分が変化する。ベクトルカレントが作用する反応と同様に、スピンの合成を考える事で、He に作用する軸性ベクトルカレントの種類により、どのような終状態になるかを定める事が出来る。

$$A_+ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|d_0, n_1\rangle - |d_1, n_0\rangle), |d_1, n'_0\rangle \quad S = 1, S_z = 1 \quad (\text{C-2-95})$$

$$A_z \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|d_{-1}, n_1\rangle - |d_1, n_{-1}\rangle), |d_0, n'_0\rangle \quad S = 1, S_z = 0 \quad (\text{C-2-96})$$

$$A_- \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|d_{-1}, n_0\rangle - |d_0, n_{-1}\rangle), |d_{-1}, n'_0\rangle \quad S = 1, S_z = -1 \quad (\text{C-2-97})$$

ここで (C-2-95) ~ (C-2-97) までの式の第一項は d, n のスピンの値が共に 1 であり、これらを合成してスピン 1 の状態を形成する。対して、第二項は d のスピンの値が 1 であり、n のスピンの値が 0 となっており、これらを合成する事でスピン 1 の状態を形成する。

まず初めに、終状態の n のスピンの値が 1 の時の反応率を計算し、次に 0 の時の反応率を計算する。

A_+ が作用した場合 (終状態の n のスピンの値が 1)

軸性ベクトルカレントによるスピン・アイソスピン成分の状態変化

始状態の He に軸性ベクトルカレント A_+ の $\tau_a^- \sigma_{a+}$ が作用すると、スピンアイソスピンの状態は以下のように変化する。

$$\begin{aligned}\tau_1^- \sigma_{1+} |^4\text{He}\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \{nnpn(\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow - \uparrow\uparrow\downarrow\downarrow) + nnnp(-\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow + \uparrow\uparrow\downarrow\downarrow) + npnn(\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow - \uparrow\uparrow\downarrow\uparrow)\} \\ \tau_2^- \sigma_{2+} |^4\text{He}\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \{nnpn(-\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow + \uparrow\uparrow\downarrow\downarrow) + nnnp(\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow - \uparrow\uparrow\downarrow\downarrow) + pnnn(-\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow + \uparrow\uparrow\downarrow\uparrow)\} \\ \tau_3^- \sigma_{3+} |^4\text{He}\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \{pnnn(\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow\uparrow) + npnn(-\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow + \downarrow\uparrow\uparrow\uparrow) + nnnp(\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow\uparrow)\} \\ \tau_4^- \sigma_{4+} |^4\text{He}\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \{pnnn(-\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow + \uparrow\downarrow\uparrow\uparrow) + npnn(\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow\uparrow) + nnpn(-\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow + \downarrow\uparrow\uparrow\uparrow)\}\end{aligned}$$

この状態と終状態との内積をとる。終状態は前述したとおり、 $|d_0, n_1\rangle$ と $|d_1, n_0\rangle$ の二つが考えられる。ここでは順に計算を行う。

終状態が $|d_0, n_1\rangle$ の場合 内積は、(C-2-59) を考慮すると、以下ようになる。

$$\begin{aligned}\langle d_0, n_1 | \tau_1^- \sigma_{1+} |^4\text{He}\rangle &= \frac{1}{12} \{(-p \uparrow n \downarrow + n \downarrow p \uparrow)_{n=1,2} - (-n \downarrow p \uparrow + p \uparrow n \downarrow)_{n=1,3} + (n \downarrow p \uparrow - p \uparrow n \downarrow)_{n=1,4}\} \\ &\quad \otimes \frac{1}{2} [p \uparrow n \downarrow - n \uparrow p \downarrow + p \downarrow n \uparrow - n \downarrow p \uparrow] \\ &= \frac{1}{24} (-[2]_{n=1,2} - [2]_{n=1,3} - [2]_{n=1,4}) \\ \langle d_0, n_1 | \tau_2^- \sigma_{2+} |^4\text{He}\rangle &= \frac{1}{12} \{(p \uparrow n \downarrow - n \downarrow p \uparrow)_{n=1,2} + (n \downarrow p \uparrow - p \uparrow n \downarrow)_{n=2,3} - (-n \downarrow p \uparrow + p \uparrow n \downarrow)_{n=2,4}\} \\ &\quad \otimes \frac{1}{2} [p \uparrow n \downarrow - n \uparrow p \downarrow + p \downarrow n \uparrow - n \downarrow p \uparrow] \\ &= \frac{1}{24} ([2]_{n=1,2} - [2]_{n=2,3} - [2]_{n=2,4}) \\ \langle d_0, n_1 | \tau_3^- \sigma_{3+} |^4\text{He}\rangle &= \frac{1}{12} \{(-p \uparrow n \downarrow + n \downarrow p \uparrow)_{n=1,3} + (p \uparrow n \downarrow - n \downarrow p \uparrow)_{n=2,3} + (-p \uparrow n \downarrow + n \downarrow p \uparrow)_{n=3,4}\} \\ &\quad \otimes \frac{1}{2} [p \uparrow n \downarrow - n \uparrow p \downarrow + p \downarrow n \uparrow - n \downarrow p \uparrow] \\ &= \frac{1}{24} ([2]_{n=1,3} + [2]_{n=2,3} - [2]_{n=3,4}) \\ \langle d_0, n_1 | \tau_4^- \sigma_{4+} |^4\text{He}\rangle &= \frac{1}{12} \{(p \uparrow n \downarrow - n \downarrow p \uparrow)_{n=1,4} - (-p \uparrow n \downarrow + n \downarrow p \uparrow)_{n=2,4} + (p \uparrow n \downarrow - n \downarrow p \uparrow)_{n=3,4}\} \\ &\quad \otimes \frac{1}{2} [p \uparrow n \downarrow - n \uparrow p \downarrow + p \downarrow n \uparrow - n \downarrow p \uparrow] \\ &= \frac{1}{24} ([2]_{n=1,4} + [2]_{n=2,4} + [2]_{n=3,4})\end{aligned}$$

計算結果 空間成分については前回同様に求める事が出来る。C-2-70 を考慮し、 $\sqrt{2}$ をかけると、結果は、以下ようになる。

$$\mathcal{M}_{A_+}(^4\text{He} \rightarrow d_0, n_1) = -\frac{1}{\sqrt{2}} g_A \mathcal{M}_{\text{dnn}} \quad (\text{C-2-98})$$

終状態が $|d_1, n_0\rangle$ の場合 初めに内積をとった結果を表すと、以下のようになる。

$$\begin{aligned}
& \langle d_1, n_0 | \tau_1^- \sigma_{1+} | ^4\text{He} \rangle \\
&= \frac{1}{12\sqrt{2}} \{ (p \uparrow n \uparrow - n \uparrow p \uparrow)_{n=1,2} - (n \uparrow p \uparrow - p \uparrow n \uparrow)_{n=1,3} + (-n \uparrow p \uparrow + p \uparrow n \uparrow)_{n=1,4} \} \\
&\otimes \frac{1}{\sqrt{2}} [p \uparrow n \uparrow - n \uparrow p \uparrow] \\
&= \frac{1}{24} ([2]_{n=1,2} + [2]_{n=1,3} + [2]_{n=1,4}) \\
& \langle d_1, n_0 | \tau_2^- \sigma_{2+} | ^4\text{He} \rangle \\
&= \frac{1}{12\sqrt{2}} \{ (-p \uparrow n \uparrow + n \uparrow p \uparrow)_{n=1,2} + (-n \uparrow p \uparrow + p \uparrow n \uparrow)_{n=2,3} - (n \uparrow p \uparrow - p \uparrow n \uparrow)_{n=2,4} \} \\
&\otimes \frac{1}{\sqrt{2}} [p \uparrow n \uparrow - n \uparrow p \uparrow] \\
&= \frac{1}{24} (-[2]_{n=1,2} + [2]_{n=2,3} + [2]_{n=2,4}) \\
& \langle d_1, n_0 | \tau_3^- \sigma_{3+} | ^4\text{He} \rangle \\
&= \frac{1}{12\sqrt{2}} \{ -(p \uparrow n \uparrow - n \uparrow p \uparrow)_{n=1,3} + (-p \uparrow n \uparrow + n \uparrow p \uparrow)_{n=2,3} + (p \uparrow n \uparrow - n \uparrow p \uparrow)_{n=3,4} \} \\
&\otimes \frac{1}{\sqrt{2}} [p \uparrow n \uparrow - n \uparrow p \uparrow] \\
&= \frac{1}{24} (-[2]_{n=1,3} - [2]_{n=2,3} + [2]_{n=3,4}) \\
& \langle d_1, n_0 | \tau_4^- \sigma_{4+} | ^4\text{He} \rangle \\
&= \frac{1}{12\sqrt{2}} \{ (-p \uparrow n \uparrow + n \uparrow p \uparrow)_{n=1,4} - (p \uparrow n \uparrow - n \uparrow p \uparrow)_{n=2,4} + (-p \uparrow n \uparrow + n \uparrow p \uparrow)_{n=3,4} \} \\
&\otimes \frac{1}{\sqrt{2}} [p \uparrow n \uparrow - n \uparrow p \uparrow] \\
&= \frac{1}{24} (-[2]_{n=1,4} - [2]_{n=2,4} - [2]_{n=3,4})
\end{aligned}$$

計算結果 この式においても、空間成分については前回同様に求める事が出来る。結果は以下のようになる。

$$\mathcal{M}_{A_+}(^4\text{He} \rightarrow d_1, n_0) = g_A \mathcal{M}_{\text{dnn}} \quad (\text{C-2-99})$$

A_+ が作用した場合の結果 (終状態の n のスピンの1)

前述のとおり、カレントとして A_+ が作用した場合の終状態のスピンアイソスピン成分は以下で表す事が出来る。

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|d_0, n_1\rangle - |d_1, n_0\rangle) \quad S=1, S_z=1 \quad (\text{C-2-95})$$

よって振幅は

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{A_+} &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\mathcal{M}_{A_+}(^4\text{He} \rightarrow d_0, n_1) - \mathcal{M}_{A_+}(^4\text{He} \rightarrow d_1, n_0)] \\
&= -\sqrt{2} g_A \mathcal{M}_{\text{dnn}} \quad (\text{C-2-100})
\end{aligned}$$

となる。

A_- が作用した場合 (終状態の n のスピンの 1)

軸性ベクトルカレントによるスピン・アイソスピンの状態変化 始状態の He に軸性ベクトルカレント A_- の要素 $\tau_a^- \sigma_{a-}$ が作用した場合のスピン・アイソスピンの状態は以下になる。

$$\begin{aligned}\tau_1^- \sigma_{1-} |^4\text{He}\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \{nnpn(\downarrow\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\downarrow\downarrow\uparrow) + nnnp(-\downarrow\uparrow\downarrow\downarrow + \downarrow\downarrow\uparrow\downarrow) + npnn(-\downarrow\downarrow\uparrow\downarrow + \downarrow\downarrow\downarrow\uparrow)\} \\ \tau_2^- \sigma_{2-} |^4\text{He}\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \{nnpn(-\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow + \downarrow\downarrow\downarrow\uparrow) + nnnp(\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow\downarrow) + pnnn(\downarrow\downarrow\uparrow\downarrow - \downarrow\downarrow\downarrow\uparrow)\} \\ \tau_3^- \sigma_{3-} |^4\text{He}\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \{pnnn(\downarrow\downarrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\downarrow\downarrow) + npnn(-\downarrow\downarrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\downarrow\downarrow) + nnnp(-\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow + \downarrow\uparrow\downarrow\downarrow)\} \\ \tau_4^- \sigma_{4-} |^4\text{He}\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \{pnnn(-\downarrow\downarrow\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\downarrow\downarrow) + npnn(\downarrow\downarrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\downarrow\downarrow) + nnpn(\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow\downarrow)\}\end{aligned}$$

この状態と終状態との内積をとる。終状態は前述したとおり、 $|d_{-1}, n_0\rangle$ と $|d_0, n_{-1}\rangle$ がある。ここでは順に計算を行う。

終状態が $|d_{-1}, n_0\rangle$ の場合 内積は、(C-2-59) を考慮すると、以下になる。

$$\begin{aligned}\langle d_{-1}, n_0 | \tau_1^- \sigma_{1-} |^4\text{He}\rangle &= \frac{1}{12\sqrt{2}} \{(p \downarrow n \downarrow - n \downarrow p \downarrow)_{n=1,2} - (n \downarrow p \downarrow - p \downarrow n \downarrow)_{n=1,3} + (-n \downarrow p \downarrow + p \downarrow n \downarrow)_{n=1,4}\} \\ &\quad \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} [p \downarrow n \downarrow - n \downarrow p \downarrow] \\ &= \frac{1}{24} ([2]_{n=1,2} + [2]_{n=1,3} + [2]_{n=1,4}) \\ \langle d_{-1}, n_0 | \tau_2^- \sigma_{2-} |^4\text{He}\rangle &= \frac{1}{12\sqrt{2}} \{(-p \downarrow n \downarrow + n \downarrow p \downarrow)_{n=1,2} + (-n \downarrow p \downarrow + p \downarrow n \downarrow)_{n=2,3} - (n \downarrow p \downarrow - p \downarrow n \downarrow)_{n=2,4}\} \\ &\quad \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} [p \downarrow n \downarrow - n \downarrow p \downarrow] \\ &= \frac{1}{24} (-[2]_{n=1,2} + [2]_{n=2,3} + [2]_{n=2,4}) \\ \langle d_{-1}, n_0 | \tau_3^- \sigma_{3-} |^4\text{He}\rangle &= \frac{1}{12\sqrt{2}} \{-(p \downarrow n \downarrow - n \downarrow p \downarrow)_{n=1,3} + (-p \downarrow n \downarrow + n \downarrow p \downarrow)_{n=2,3} + (p \downarrow n \downarrow - n \downarrow p \downarrow)_{n=3,4}\} \\ &\quad \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} [p \downarrow n \downarrow - n \downarrow p \downarrow] \\ &= \frac{1}{24} (-[2]_{n=1,3} - [2]_{n=2,3} + [2]_{n=3,4}) \\ \langle d_{-1}, n_0 | \tau_4^- \sigma_{4-} |^4\text{He}\rangle &= \frac{1}{12\sqrt{2}} \{(-p \downarrow n \downarrow + n \downarrow p \downarrow)_{n=1,4} - (p \downarrow n \downarrow - n \downarrow p \downarrow)_{n=2,4} + (-p \downarrow n \downarrow + n \downarrow p \downarrow)_{n=3,4}\} \\ &\quad \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} [p \downarrow n \downarrow - n \downarrow p \downarrow] \\ &= \frac{1}{24} (-[2]_{n=1,4} - [2]_{n=2,4} - [2]_{n=3,4})\end{aligned}$$

計算結果 空間成分については前回と同様に求める事が出来る。結果は、以下となる。

$$\mathcal{M}_{A-}({}^4\text{He} \rightarrow d_{-1}, n_0) = g_A \mathcal{M}_{\text{dnn}} \quad (\text{C-2-101})$$

終状態が $|d_0, n_{-1}\rangle$ の場合 内積は、(C-2-59) を考慮すると、以下のようになる。

$$\begin{aligned} & \langle d_0, n_{-1} | \tau_1^- \sigma_{1-} | {}^4\text{He} \rangle \\ &= \frac{1}{12} \{ (-p \downarrow n \uparrow + n \uparrow p \downarrow)_{n=1,2} - (-n \uparrow p \downarrow + p \downarrow n \uparrow)_{n=1,3} + (n \uparrow p \downarrow - p \downarrow n \uparrow)_{n=1,4} \} \\ &\otimes \frac{1}{2} [p \uparrow n \downarrow - n \uparrow p \downarrow + p \downarrow n \uparrow - n \downarrow p \uparrow] \\ &= \frac{1}{24} (-[2]_{n=1,2} - [2]_{n=1,3} - [2]_{n=1,4}) \\ & \langle d_0, n_{-1} | \tau_2^- \sigma_{2-} | {}^4\text{He} \rangle \\ &= \frac{1}{12} \{ (p \downarrow n \uparrow - n \uparrow p \downarrow)_{n=1,2} + (n \uparrow p \downarrow - p \downarrow n \uparrow)_{n=2,3} - (-n \uparrow p \downarrow + p \downarrow n \uparrow)_{n=2,4} \} \\ &\otimes \frac{1}{2} [p \uparrow n \downarrow - n \uparrow p \downarrow + p \downarrow n \uparrow - n \downarrow p \uparrow] \\ &= \frac{1}{24} ([2]_{n=1,2} - [2]_{n=2,3} - [2]_{n=2,4}) \\ & \langle d_0, n_{-1} | \tau_3^- \sigma_{3-} | {}^4\text{He} \rangle \\ &= \frac{1}{12} \{ -(-p \downarrow n \uparrow + n \uparrow p \downarrow)_{n=1,3} + (p \downarrow n \uparrow - n \uparrow p \downarrow)_{n=2,3} + (-p \downarrow n \uparrow + n \uparrow p \downarrow)_{n=3,4} \} \\ &\otimes \frac{1}{2} [p \uparrow n \downarrow - n \uparrow p \downarrow + p \downarrow n \uparrow - n \downarrow p \uparrow] \\ &= \frac{1}{24} ([2]_{n=1,3} + [2]_{n=2,3} - [2]_{n=3,4}) \\ & \langle d_0, n_{-1} | \tau_4^- \sigma_{4-} | {}^4\text{He} \rangle \\ &= \frac{1}{12} \{ (p \downarrow n \uparrow - n \uparrow p \downarrow)_{n=1,4} - (-p \downarrow n \uparrow + n \uparrow p \downarrow)_{n=2,4} + (p \downarrow n \uparrow - n \uparrow p \downarrow)_{n=3,4} \} \\ &\otimes \frac{1}{2} [p \uparrow n \downarrow - n \uparrow p \downarrow + p \downarrow n \uparrow - n \downarrow p \uparrow] \\ &= \frac{1}{24} ([2]_{n=1,4} + [2]_{n=2,4} + [2]_{n=3,4}) \end{aligned}$$

計算結果 空間成分については前回同様に求める事が出来る。結果は、以下のようになる。

$$\mathcal{M}_{A-}({}^4\text{He} \rightarrow d_0, n_{-1}) = -g_A \mathcal{M}_{\text{dnn}} \quad (\text{C-2-102})$$

A_- が作用した場合の結果 (終状態の n のスピンの 1)

前述したとおり、カレントとして A_- が当たった時の終状態のスピンアイソスピン成分は以下で表される。

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|d_{-1}, n_0\rangle - |d_0, n_{-1}\rangle) \quad S = 1, S_z = -1 \quad (\text{C-2-97})$$

よって振幅は

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{A-} &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\mathcal{M}_{A-}({}^4\text{He} \rightarrow d_{-1}, n_0) - \mathcal{M}_{A-}({}^4\text{He} \rightarrow d_0, n_{-1})] \\ &= \sqrt{2} g_A \mathcal{M}_{\text{dnn}} \end{aligned} \quad (\text{C-2-103})$$

A_z が作用した場合 (終状態の n のスピンの 1)

軸性ベクトルカレントによるスピンアイソスピンの状態変化 始状態の He に軸性ベクトルカレントとして A_z が作用した場合のスピンアイソスピンの状態は以下になる。

$$\tau_1^- \sigma_{1z} |^4\text{He}\rangle = \frac{1}{2\sqrt{6}} \left\{ \begin{array}{l} nnpn(\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow\uparrow - \uparrow\downarrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\uparrow\downarrow) \\ +nnnp(-\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow + \downarrow\downarrow\uparrow\uparrow + \uparrow\downarrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow) \\ +npnn(-\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow) \end{array} \right\}$$

$$\tau_2^- \sigma_{2z} |^4\text{He}\rangle = \frac{1}{2\sqrt{6}} \left\{ \begin{array}{l} nnpn(-\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow + \downarrow\downarrow\uparrow\uparrow - \uparrow\downarrow\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow) \\ +nnnp(\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow\uparrow + \uparrow\downarrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow\downarrow) \\ +pnnn(\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow) \end{array} \right\}$$

$$\tau_3^- \sigma_{3z} |^4\text{He}\rangle = \frac{1}{2\sqrt{6}} \left\{ \begin{array}{l} pnnn(-\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow + \downarrow\downarrow\uparrow\uparrow + \uparrow\downarrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow\downarrow) \\ +npnn(\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow\uparrow + \uparrow\downarrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow) \\ +nnnp(-\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow) \end{array} \right\}$$

$$\tau_4^- \sigma_{4z} |^4\text{He}\rangle = \frac{1}{2\sqrt{6}} \left\{ \begin{array}{l} pnnn(\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow\uparrow - \uparrow\downarrow\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow) \\ +npnn(-\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow + \downarrow\downarrow\uparrow\uparrow - \uparrow\downarrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\uparrow\downarrow) \\ +nnpn(\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow) \end{array} \right\}$$

この状態と、終状態との内積をとる。終状態は前述したとおり、 $|d_{-1}, n_1\rangle$ と $|d_1, n_{-1}\rangle$ の二つがある。
ここでは順に計算を行う。

$$\begin{aligned}
& \langle d_{-1}, n_1 | \tau_1^- \sigma_{1z} | ^4\text{He} \rangle \\
&= \frac{1}{12} \{ (p \downarrow n \downarrow - n \downarrow p \downarrow)_{n=1,2} - (n \downarrow p \downarrow - p \downarrow n \downarrow)_{n=1,3} + (-n \downarrow p \downarrow + p \downarrow n \downarrow)_{n=1,4} \} \\
&\otimes \frac{1}{\sqrt{2}} [p \downarrow n \downarrow - n \downarrow p \downarrow] \\
&= \frac{1}{12\sqrt{2}} ([2]_{n=1,2} + [2]_{n=1,3} + [2]_{n=1,4}) \\
& \langle d_{-1}, n_1 | \tau_2^- \sigma_{2z} | ^4\text{He} \rangle \\
&= \frac{1}{12} \{ (-p \downarrow n \downarrow + n \downarrow p \downarrow)_{n=1,2} + (-n \downarrow p \downarrow + p \downarrow n \downarrow)_{n=2,3} - (n \downarrow p \downarrow - p \downarrow n \downarrow)_{n=2,4} \} \\
&\otimes \frac{1}{\sqrt{2}} [p \downarrow n \downarrow - n \downarrow p \downarrow] \\
&= \frac{1}{12\sqrt{2}} (-[2]_{n=1,2} + [2]_{n=2,3} + [2]_{n=2,4}) \\
& \langle d_{-1}, n_1 | \tau_3^- \sigma_{3z} | ^4\text{He} \rangle \\
&= \frac{1}{12} \{ -(p \downarrow n \downarrow - n \downarrow p \downarrow)_{n=1,3} + (-p \downarrow n \downarrow + n \downarrow p \downarrow)_{n=2,3} + (p \downarrow n \downarrow - n \downarrow p \downarrow)_{n=3,4} \} \\
&\otimes \frac{1}{\sqrt{2}} [p \downarrow n \downarrow - n \downarrow p \downarrow] \\
&= \frac{1}{12\sqrt{2}} (-[2]_{n=1,3} - [2]_{n=2,3} + [2]_{n=3,4}) \\
& \langle d_{-1}, n_1 | \tau_4^- \sigma_{4z} | ^4\text{He} \rangle \\
&= \frac{1}{12} \{ (-p \downarrow n \downarrow + n \downarrow p \downarrow)_{n=1,4} - (p \downarrow n \downarrow - n \downarrow p \downarrow)_{n=2,4} + (-p \downarrow n \downarrow + n \downarrow p \downarrow)_{n=3,4} \} \\
&\otimes \frac{1}{\sqrt{2}} [p \downarrow n \downarrow - n \downarrow p \downarrow] \\
&= \frac{1}{12\sqrt{2}} (-[2]_{n=1,4} - [2]_{n=2,4} - [2]_{n=3,4})
\end{aligned}$$

となる。

計算結果 空間成分については前回同様に求める事が出来る。結果は、以下のようになる。

$$\mathcal{M}_{A_z}(^4\text{He} \rightarrow d_{-1}, n_1) = \sqrt{2} g_A \mathcal{M}_{\text{dnn}} \quad (\text{C-2-104})$$

終状態が $|d_1, n_{-1}\rangle$ の場合 内積は以下になる。

$$\begin{aligned}
& \langle d_1, n_{-1} | \tau_1^- \sigma_{1z} | ^4\text{He} \rangle \\
&= \frac{1}{12} \{ (-p \uparrow n \uparrow + n \uparrow p \uparrow)_{n=1,2} - (-n \uparrow p \uparrow + p \uparrow n \uparrow)_{n=1,3} + (n \uparrow p \uparrow - p \uparrow n \uparrow)_{n=1,4} \} \\
&\otimes \frac{1}{\sqrt{2}} [p \uparrow n \uparrow - n \uparrow p \uparrow] \\
&= \frac{1}{12\sqrt{2}} (-[2]_{n=1,2} - [2]_{n=1,3} - [2]_{n=1,4}) \\
&\langle d_1, n_{-1} | \tau_2^- \sigma_{2z} | ^4\text{He} \rangle \\
&= \frac{1}{12} \{ (p \uparrow n \uparrow - n \uparrow p \uparrow)_{n=1,2} + (n \uparrow p \uparrow - p \uparrow n \uparrow)_{n=2,3} - (-n \uparrow p \uparrow + p \uparrow n \uparrow)_{n=2,4} \} \\
&\otimes \frac{1}{\sqrt{2}} [p \uparrow n \uparrow - n \uparrow p \uparrow] \\
&= \frac{1}{12\sqrt{2}} ([2]_{n=1,2} - [2]_{n=2,3} - [2]_{n=2,4}) \\
&\langle d_1, n_{-1} | \tau_3^- \sigma_{3z} | ^4\text{He} \rangle \\
&= \frac{1}{12} \{ -(-p \uparrow n \uparrow + n \uparrow p \uparrow)_{n=1,3} + (p \uparrow n \uparrow - n \uparrow p \uparrow)_{n=2,3} + (-p \uparrow n \uparrow + n \uparrow p \uparrow)_{n=3,4} \} \\
&\otimes \frac{1}{\sqrt{2}} [p \uparrow n \uparrow - n \uparrow p \uparrow] \\
&= \frac{1}{12\sqrt{2}} ([2]_{n=1,3} + [2]_{n=2,3} - [2]_{n=3,4}) \\
&\langle d_1, n_{-1} | \tau_4^- \sigma_{4z} | ^4\text{He} \rangle \\
&= \frac{1}{12} \{ (p \uparrow n \uparrow - n \uparrow p \uparrow)_{n=1,4} - (-p \uparrow n \uparrow + n \uparrow p \uparrow)_{n=2,4} + (p \uparrow n \uparrow - n \uparrow p \uparrow)_{n=3,4} \} \\
&\otimes \frac{1}{\sqrt{2}} [p \uparrow n \uparrow - n \uparrow p \uparrow] \\
&= \frac{1}{12\sqrt{2}} ([2]_{n=1,4} + [2]_{n=2,4} + [2]_{n=3,4})
\end{aligned}$$

となる。

計算結果 空間成分については前回同様に求める事が出来る。結果は、以下になる。

$$\mathcal{M}_{A_z} (^4\text{He} \rightarrow d_1, n_{-1}) = -g_A \mathcal{M}_{\text{dnn}} \quad (\text{C-2-105})$$

前述したとおり、カレントとして A_z が作用した場合の終状態のスピンアイソスピン成分は以下で表される。

$$A_z \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|d_{-1}, n_1\rangle - |d_1, n_{-1}\rangle) \quad S = 1, S_z = 0 \quad (\text{C-2-96})$$

よって振幅の値は

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{A_z} &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\mathcal{M}_{A_z} (^4\text{He} \rightarrow d_{-1}, n_1) - \mathcal{M}_{A_z} (^4\text{He} \rightarrow d_1, n_{-1})] \\
&= \sqrt{2} g_A \mathcal{M}_{\text{dnn}}
\end{aligned} \quad (\text{C-2-106})$$

となる。

軸性ベクトルカレントが作用した場合の He 破砕反応 (終状態の n のスピンの値が 0 の場合)

始状態、終状態

スピンの値が 0 の n が 2 つの状態 次に、終状態の n のスピンの値が 0 の場合の破砕反応を考える。n の状態は、以下の様に表される。

- スピンアイソスピン成分

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|n \uparrow\rangle_i |n \downarrow\rangle_j - |n \downarrow\rangle_i |n \uparrow\rangle_j) \equiv |n_0'\rangle_{ij} \quad (\text{C-2-58})$$

- 空間成分

$$\psi'_n(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \exp[i(\mathbf{p}_{n1}\mathbf{r}_i + \mathbf{p}_{n2}\mathbf{r}_j)] + \exp[i(\mathbf{p}_{n2}\mathbf{r}_i + \mathbf{p}_{n1}\mathbf{r}_j)] \} \quad (\text{C-2-54})$$

終状態 これらの状態を用いて終状態の波動関数を形成すると、以下の様になる。

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4 | d, n, n \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \left\{ \begin{aligned} & \psi'_n(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \psi_d(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) |n_0'\rangle_{1,2} |d\rangle_{3,4} - \psi'_n(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) \psi_d(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_4) |n_0'\rangle_{1,3} |d\rangle_{2,4} \\ & + \psi'_n(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_4) \psi_d(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) |n_0'\rangle_{1,4} |d\rangle_{2,3} + \psi'_n(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \psi_d(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_4) |n_0'\rangle_{2,3} |d\rangle_{1,4} \\ & - \psi'_n(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_4) \psi_d(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) |n_0'\rangle_{2,4} |d\rangle_{1,3} + \psi'_n(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \psi_d(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) |n_0'\rangle_{3,4} |d\rangle_{1,2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{C-2-107}) \end{aligned}$$

ここで $|n\rangle, |d\rangle$ はスピンアイソスピン成分を表している。ここでは n の状態としてスピン 0 の値のときのものをとっている。d のスピンの値は 1 なので、こちらはスピンの z 成分として -1 から 1 を取り得る。

A_+ が作用した場合 (終状態の n のスピンの値が 0)

軸性ベクトルカレントによるスピン・アイソスピン成分の状態変化 始状態の He に軸性ベクトルカレント A_+ の要素 $\tau_a^- \sigma_{a+}$ が作用した場合のスピンアイソスピンの状態は以下のように変化する。これは終状態の n のスピンの値が 1 の場合と変わらない。

$$\begin{aligned} \tau_1^- \sigma_{1+} |^4\text{He}\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \{ nnpn(\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow - \uparrow\uparrow\downarrow\downarrow) + nnnp(-\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow + \uparrow\uparrow\downarrow\downarrow) + npnn(\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow - \uparrow\uparrow\downarrow\uparrow) \} \\ \tau_2^- \sigma_{2+} |^4\text{He}\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \{ nnpn(-\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow + \uparrow\uparrow\downarrow\downarrow) + nnnp(\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow - \uparrow\uparrow\downarrow\downarrow) + pnnn(-\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow + \uparrow\uparrow\downarrow\uparrow) \} \\ \tau_3^- \sigma_{3+} |^4\text{He}\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \{ pnnn(\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow\uparrow) + npnn(-\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow + \downarrow\uparrow\uparrow\uparrow) + nnnp(\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow\uparrow) \} \\ \tau_4^- \sigma_{4+} |^4\text{He}\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \{ pnnn(-\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow + \uparrow\downarrow\uparrow\uparrow) + npnn(\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow\uparrow) + nnpn(-\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow + \downarrow\uparrow\uparrow\uparrow) \} \end{aligned}$$

この状態と終状態との内積を取る。終状態は前述したとおり、 $|d_1, n_0'\rangle$ となる。初めに n2 つの状態と内積を取った後に d の状態と内積をとると考える。(C-2-107) を考慮して考えると、以下のように表される。

$$\begin{aligned}
& \langle d_1, n'_0 | \tau_1^- \sigma_{1+} | ^4\text{He} \rangle \\
&= \frac{1}{12\sqrt{2}} \left\{ (p \uparrow n \uparrow - n \uparrow p \uparrow)_{n=1,2} - (n \uparrow p \uparrow - p \uparrow n \uparrow)_{n=1,3} + (-n \uparrow p \uparrow + p \uparrow n \uparrow)_{n=1,4} \right. \\
&\quad \left. + (2n \uparrow p \uparrow)_{n=2,3} - (-2n \uparrow p \uparrow)_{n=2,4} + (2n \uparrow p \uparrow)_{n=3,4} \right\} \\
&\otimes \frac{1}{\sqrt{2}} [p \uparrow n \uparrow - n \uparrow p \uparrow] \\
&= \frac{1}{24} \{ (2)_{n=1,2} + (2)_{n=1,3} + (2)_{n=1,4} - (2)_{n=2,3} - (2)_{n=2,4} - (2)_{n=3,4} \} \quad (\text{C-2-108})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \langle d_1, n'_0 | \tau_2^- \sigma_{2+} | ^4\text{He} \rangle \\
&= \frac{1}{12\sqrt{2}} \left\{ (p \uparrow n \uparrow - n \uparrow p \uparrow)_{n=1,2} - (-2n \uparrow p \uparrow)_{n=1,3} + (2n \uparrow p \uparrow)_{n=1,4} \right. \\
&\quad \left. + (p \uparrow n \uparrow - n \uparrow p \uparrow)_{n=2,3} - (-p \uparrow n \uparrow + n \uparrow p \uparrow)_{n=2,4} - (2p \uparrow n \uparrow)_{n=3,4} \right\} \\
&\otimes \frac{1}{\sqrt{2}} [p \uparrow n \uparrow - n \uparrow p \uparrow] \\
&= \frac{1}{24} \{ (2)_{n=1,2} - (2)_{n=1,3} - (2)_{n=1,4} + (2)_{n=2,3} + (2)_{n=2,4} - (2)_{n=3,4} \} \quad (\text{C-2-109})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \langle d_1, n'_0 | \tau_3^- \sigma_{3+} | ^4\text{He} \rangle \\
&= \frac{1}{12\sqrt{2}} \left\{ (2n \uparrow p \uparrow)_{n=1,2} - (-p \uparrow n \uparrow + n \uparrow p \uparrow)_{n=1,3} - (2p \uparrow n \uparrow)_{n=1,4} \right. \\
&\quad \left. + (p \uparrow n \uparrow - n \uparrow p \uparrow)_{n=2,3} - (2p \uparrow n \uparrow)_{n=2,4} + (p \uparrow n \uparrow - n \uparrow p \uparrow)_{n=3,4} \right\} \\
&\otimes \frac{1}{\sqrt{2}} [p \uparrow n \uparrow - n \uparrow p \uparrow] \\
&= \frac{1}{24} \{ -(2)_{n=1,2} + (2)_{n=1,3} - (2)_{n=1,4} + (2)_{n=2,3} - (2)_{n=2,4} + (2)_{n=3,4} \} \quad (\text{C-2-110})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \langle d_1, n'_0 | \tau_4^- \sigma_{4+} | ^4\text{He} \rangle \\
&= \frac{1}{12\sqrt{2}} \left\{ -(2p \uparrow n \uparrow)_{n=1,2} - (2p \uparrow n \uparrow)_{n=1,3} + (p \uparrow n \uparrow - n \uparrow p \uparrow)_{n=1,4} \right. \\
&\quad \left. - (2p \uparrow n \uparrow)_{n=2,3} - (-p \uparrow n \uparrow + n \uparrow p \uparrow)_{n=2,4} + (p \uparrow n \uparrow - n \uparrow p \uparrow)_{n=3,4} \right\} \\
&\otimes \frac{1}{\sqrt{2}} [p \uparrow n \uparrow - n \uparrow p \uparrow] \\
&= \frac{1}{24} \{ -(2)_{n=1,2} - (2)_{n=1,3} + (2)_{n=1,4} - (2)_{n=2,3} + (2)_{n=2,4} + (2)_{n=3,4} \} \quad (\text{C-2-111})
\end{aligned}$$

下についている添え字は、He の中の何番目の n と終状態の n との間で内積をとるかを表している。(C-2-108) ~ (C-2-111) の全ての項を足し合わせると、一見 0 になるように見える。しかし、実際には簡単に計算出来ない。各式ではカレントが作用する核子が異なるため、空間成分の計算が異なり、添え字が同じでも同じ値を出すとは限らなくなるためである。よって、単純に足し合わせる事ができず、一つずつ空間成分を計算する必要がある。

ここで言う空間成分についての計算は、 n の波動関数の値が異なるため、前回のものと異なる。よって、一つずつ詳細をおって計算する。

核子 1 にカレントが作用する場合

初めに、カレントとして $\tau_1^- \sigma_{1+}$ が作用した場合の振幅を $\mathcal{M}'_1$ として、この計算を行う。 $\mathcal{M}'_1$ について、上の計算からスピンアイソスピン成分で内積をとったものは、以下のように表す事が出来る。

$$\langle d_1, n'_0 | \tau_1^- \sigma_{1+} | ^4\text{He} \rangle = \frac{1}{24} \{ \underbrace{(2)_{n=1,2}}_{(\text{Cd3.1})} + \underbrace{(2)_{n=1,3}}_{(\text{Cd3.2})} + \underbrace{(2)_{n=1,4}}_{(\text{Cd3.3})} - \underbrace{(2)_{n=2,3}}_{(\text{Cd3.4})} - \underbrace{(2)_{n=2,4}}_{(\text{Cd3.5})} - \underbrace{(2)_{n=3,4}}_{(\text{Cd3.6})} \}$$

(Cd3.1) ~ (Cd3.6) の計算 この計算は前回行った計算と同様に行う事が出来る。n の空間成分の波動関数の第二項の符号が前回と逆になっている事に気をつけると、値は以下になることが分かる。

$$\begin{aligned}
 & (\text{Cd3.1}) \sim (\text{Cd3.3}) \\
 & = \sqrt{2} g_A (2\pi)^3 \left(\frac{32\pi^2 a_d}{a_{\text{He}}(a_{\text{He}} + a_d)^2} \right)^{\frac{3}{4}} \delta(\mathbf{q} - \mathbf{p}_{n1} - \mathbf{p}_{n2} - \mathbf{p}_d) \\
 & \quad \times \left[\exp \left(-\frac{4\mathbf{p}_{n2}^2 + 4\mathbf{p}_{n2} \cdot \mathbf{p}_d + 3\mathbf{p}_d^2}{8a_{\text{He}}} \right) + \exp \left(-\frac{4\mathbf{p}_{n1}^2 + 4\mathbf{p}_{n1} \cdot \mathbf{p}_d + 3\mathbf{p}_d^2}{8a_{\text{He}}} \right) \right]
 \end{aligned}$$

(Cd3.4) の計算 この計算については、前回行った場合と異なるため、注意深く行う必要がある。

この計算では、n を 2,3 番目の粒子、d を 1,4 番目の粒子として扱う。よって、終状態の空間成分は以下のように表される。

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{2} \left(\frac{a_d}{\pi} \right)^{\frac{3}{4}} (\exp[-i(\mathbf{p}_{n1}\mathbf{r}_2 + \mathbf{p}_{n2}\mathbf{r}_3)] + \exp[-i(\mathbf{p}_{n2}\mathbf{r}_2 + \mathbf{p}_{n1}\mathbf{r}_3)]) \\
 & \quad \exp \left[-\frac{a_d}{2}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4)^2 \right] \exp \left[-i\mathbf{p}_d \left(\frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_4}{2} \right) \right] \quad (\text{C-2-112})
 \end{aligned}$$

これより M'_1 への (Cd3.4) からの寄与は以下のように計算出来る。

$$\begin{aligned}
 (\text{Cd3.4}) & = \sqrt{2} g_{\text{He}} \left(2 \frac{a_{\text{He}}^3}{\pi^3} \right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{a_d}{\pi} \right)^{\frac{3}{4}} \iiint d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 \\
 & \quad \times \exp \left\{ i\mathbf{q}\mathbf{r}_1 - a_{\text{He}}(\dots) - \frac{a_d}{2}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4)^2 - i\mathbf{p}_d \left(\frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_4}{2} \right) \right\} \\
 & \quad \times \{ \exp[-i(\mathbf{p}_{n1}\mathbf{r}_2 + \mathbf{p}_{n2}\mathbf{r}_3)] + \exp[-i(\mathbf{p}_{n2}\mathbf{r}_2 + \mathbf{p}_{n1}\mathbf{r}_3)] \}
 \end{aligned}$$

この積分をヤコビ座標を用いて実行する。今は二つ目の { } 内の一項目についてのみ計算を行う。これは第二項については、 $\mathbf{p}_{n1} \leftrightarrow \mathbf{p}_{n2}$ と置き換えれば結果が得られるためである。exp の中身をあらわに表し、ヤコビ座標 (C-2-31)、(C-2-35) を用いて変形を行う。

$$i\mathbf{q}\mathbf{r}_1 - a_{\text{He}}(\dots) - \frac{a_d}{2}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4)^2 - i\mathbf{p}_d \left(\frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_4}{2} \right) - i(\mathbf{p}_{n1}\mathbf{r}_2 + \mathbf{p}_{n2}\mathbf{r}_3)$$

これを上で挙げたヤコビ座標を用いて表すと以下ようになる。

$$\begin{aligned}
 & = i\mathbf{q} \left(s_0 - \frac{1}{4}s_1 - \frac{1}{3}s_2 - \frac{1}{2}s_3 \right) - a_{\text{He}} \left(\frac{3}{4}s_1^2 + \frac{2}{3}s_2^2 + \frac{1}{2}s_3^2 \right) - \frac{a_d}{2}s_3^2 \\
 & - i\mathbf{p}_d \left(s_0 - \frac{1}{4}s_1 - \frac{1}{3}s_2 \right) - i\mathbf{p}_{n1} \left(s_0 + \frac{3}{4}s_1 \right) - i\mathbf{p}_{n2} \left(s_0 - \frac{1}{4}s_1 + \frac{2}{3}s_2 \right)
 \end{aligned}$$

この式を変形する。同じヤコビ座標の項をまとめると

$$\begin{aligned}
 & = i(\mathbf{q} - \mathbf{p}_{n1} - \mathbf{p}_{n2} - \mathbf{p}_d)s_0 + \left(-\frac{3}{4}a_{\text{He}}s_1^2 - \frac{i\mathbf{q}}{4}s_1 + \frac{i\mathbf{p}_d}{4}s_1 - \frac{3i\mathbf{p}_{n1}}{4}s_1 + \frac{i\mathbf{p}_{n2}}{4}s_1 \right) \\
 & + \left(-\frac{2}{3}a_{\text{He}}s_2^2 - \frac{i\mathbf{q}}{3}s_2 + \frac{i\mathbf{p}_d}{3}s_2 - \frac{2i\mathbf{p}_{n2}}{3}s_2 \right) + \left(-\frac{a_{\text{He}} + a_d}{2}s_3^2 - \frac{i\mathbf{q}}{2}s_3 \right)
 \end{aligned}$$

となる。次に、この式を平方完成する。途中計算も書き記すと、以下のようになる。

$$\begin{aligned}
&= i(\mathbf{q} - \mathbf{p}_{n1} - \mathbf{p}_{n2} - \mathbf{p}_d) s_0 \\
&- \frac{3}{4} a_{\text{He}} \left(s_1^2 - \frac{i}{3a_{\text{He}}} (-\mathbf{q} + \mathbf{p}_d - 3\mathbf{p}_{n1} + \mathbf{p}_{n2}) s_1 \right) \\
&- \frac{2}{3} a_{\text{He}} \left(s_2^2 - \frac{i}{2a_{\text{He}}} (-\mathbf{q} + \mathbf{p}_d - 2\mathbf{p}_{n2}) s_2 \right) \\
&- \frac{a_{\text{He}} + a_d}{2} \left(s_3^2 + \frac{i}{a_{\text{He}} + a_d} \mathbf{q} s_3 \right)
\end{aligned}$$

よって、式は次のようになる。

$$\begin{aligned}
&= i(\mathbf{q} - \mathbf{p}_{n1} - \mathbf{p}_{n2} - \mathbf{p}_d) s_0 \\
&- \frac{3}{4} a_{\text{He}} \left(s_1 - \frac{i}{6a_{\text{He}}} (-\mathbf{q} + \mathbf{p}_d - 3\mathbf{p}_{n1} + \mathbf{p}_{n2}) \right)^2 - \frac{1}{48a_{\text{He}}} (-\mathbf{q} + \mathbf{p}_d - 3\mathbf{p}_{n1} + \mathbf{p}_{n2})^2 \\
&- \frac{2}{3} a_{\text{He}} \left(s_2 - \frac{i}{4a_{\text{He}}} (-\mathbf{q} + \mathbf{p}_d - 2\mathbf{p}_{n2}) \right)^2 - \frac{1}{24a_{\text{He}}} (-\mathbf{q} + \mathbf{p}_d - 2\mathbf{p}_{n2})^2 \\
&- \frac{a_{\text{He}} + a_d}{2} \left(s_3 + \frac{1}{2} \frac{i\mathbf{q}}{a_{\text{He}} + a_d} \right)^2 - \frac{1}{8} \frac{\mathbf{q}^2}{a_{\text{He}} + a_d}
\end{aligned}$$

ヤコビ座標で積分を行うと、この項からの寄与は以下になる。

$$\begin{aligned}
&\sqrt{2} g_A \left(2 \frac{a_{\text{He}}^3}{\pi^3} \right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{a_d}{\pi} \right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{4\pi}{3a_{\text{He}}} \frac{3\pi}{2a_{\text{He}}} \frac{2\pi}{a_{\text{He}} + a_d} \right)^{\frac{3}{2}} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{q} - \mathbf{p}_{n1} - \mathbf{p}_{n2} - \mathbf{p}_d) \\
&\times \left[\exp \left\{ -\frac{(-\mathbf{q} + \mathbf{p}_d - 3\mathbf{p}_{n1} + \mathbf{p}_{n2})^2}{48a_{\text{He}}} - \frac{(-\mathbf{q} + \mathbf{p}_d - 2\mathbf{p}_{n2})^2}{24a_{\text{He}}} - \frac{1}{8} \frac{\mathbf{q}^2}{a_{\text{He}} + a_d} \right\} \right]
\end{aligned}$$

係数を整理し、 δ 関数の条件 ($\mathbf{q} = \mathbf{p}_{n1} + \mathbf{p}_{n2} + \mathbf{p}_d$) を用いて $\exp$ の中身を変更すると

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{2} g_A (2\pi)^3 \left(\frac{32\pi^2 a_d}{a_{\text{He}}(a_{\text{He}} + a_d)^2} \right)^{\frac{3}{4}} \delta(\mathbf{q} - \mathbf{p}_{n1} - \mathbf{p}_{n2} - \mathbf{p}_d) \\
&\times \left[\exp \left(-\frac{3\mathbf{p}_{n1}^2 + 2\mathbf{p}_{n1} \cdot \mathbf{p}_{n2} + 3\mathbf{p}_{n2}^2}{8a_{\text{He}}} - \frac{1}{8} \frac{\mathbf{q}^2}{a_{\text{He}} + a_d} \right) \right]
\end{aligned}$$

となる。

(C-2-112) の第二項からの寄与は、上で得られた結果について $\mathbf{p}_{n1} \leftrightarrow \mathbf{p}_{n2}$ とすれば得られるため、すぐに結果が同じである事が分かります。よって、(Cd3.4) からの寄与は、以下のようになる。

$$\begin{aligned}
(\text{Cd3.4}) &= 2\sqrt{2} g_A (2\pi)^3 \left(\frac{32\pi^2 a_d}{a_{\text{He}}(a_{\text{He}} + a_d)^2} \right)^{\frac{3}{4}} \delta(\mathbf{q} - \mathbf{p}_{n1} - \mathbf{p}_{n2} - \mathbf{p}_d) \\
&\times \left[\exp \left(-\frac{3\mathbf{p}_{n1}^2 + 2\mathbf{p}_{n1} \cdot \mathbf{p}_{n2} + 3\mathbf{p}_{n2}^2}{8a_{\text{He}}} - \frac{1}{8} \frac{\mathbf{q}^2}{a_{\text{He}} + a_d} \right) \right]
\end{aligned}$$

(Cd3.5) の計算 (Cd3.5) の計算と同じように行う。

この計算では、 $\mathbf{n}$ を 2,4 番目の粒子、 $\mathbf{d}$ を 1,3 番目の粒子として扱う。よって、終状態の空間成分は以下のように表される。

$$\begin{aligned}
&\sqrt{2} \left(\frac{a_d}{\pi} \right)^{\frac{3}{4}} (\exp[-i(\mathbf{p}_{n1}\mathbf{r}_2 + \mathbf{p}_{n2}\mathbf{r}_4)] + \exp[-i(\mathbf{p}_{n2}\mathbf{r}_2 + \mathbf{p}_{n1}\mathbf{r}_4)]) \\
&\times \exp \left[-\frac{a_d}{2} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3)^2 \right] \exp \left[-i\mathbf{p}_d \left(\frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3}{2} \right) \right]
\end{aligned}$$

これより $\mathcal{M}'_1$ への (Cd3.5) からの寄与は以下のように計算できる。

$$\begin{aligned}
(\text{Cd3.5}) &= \sqrt{2}g_A \left(2\frac{a_{\text{He}}^3}{\pi^3}\right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{a_d}{\pi}\right)^{\frac{3}{4}} \iiint dr_1 dr_2 dr_3 dr_4 \\
&\times \exp \left\{ i\mathbf{q}\mathbf{r}_1 - a_{\text{He}}(\dots) - \frac{a_d}{2}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3)^2 - i\mathbf{p}_d \left(\frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3}{2}\right) \right\} \\
&\times \{ \exp[-i(\mathbf{p}_{n1}\mathbf{r}_2 + \mathbf{p}_{n2}\mathbf{r}_4)] + \exp[-i(\mathbf{p}_{n2}\mathbf{r}_2 + \mathbf{p}_{n1}\mathbf{r}_4)] \}
\end{aligned}$$

(Cd3.4) と同様に、この積分をヤコビ座標を用いて実行する。ここでは一項目のみを考え、 $\exp$ の中身をあらわに表す。ヤコビ座標は (C-2-32)、(C-2-36) において、 $\mathbf{r}_2 \leftrightarrow \mathbf{r}_3$ としたものをを用いる。

$$i\mathbf{q}\mathbf{r}_1 - a_{\text{He}}(\dots) - \frac{a_d}{2}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3)^2 - i\mathbf{p}_d \left(\frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3}{2}\right) - i(\mathbf{p}_{n1}\mathbf{r}_2 + \mathbf{p}_{n2}\mathbf{r}_4)$$

これを上で挙げたヤコビ座標を用いて表すと、以下になる。

$$\begin{aligned}
&= i\mathbf{q} \left(s_0 - \frac{1}{4}s_1 - \frac{1}{3}s_2 + \frac{1}{2}s_3 \right) - a_{\text{He}} \left(\frac{3}{4}s_1^2 + \frac{2}{3}s_2^2 + \frac{1}{2}s_3^2 \right) - \frac{a_d}{2}s_3^2 \\
&- i\mathbf{p}_d \left(s_0 - \frac{1}{4}s_1 - \frac{1}{3}s_2 \right) - i\mathbf{p}_{n1} \left(s_0 + \frac{3}{4}s_1 \right) - i\mathbf{p}_{n2} \left(s_0 - \frac{1}{4}s_1 + \frac{2}{3}s_2 \right)
\end{aligned}$$

この式は (Cd3.4) の対応する項と比べると、第一項目括弧内部の最後の項の符号が異なっているだけで、ほぼ同じであることが分かる。この符号の反転は積分計算に影響を与えないため、結果は (Cd3.4) のものと同じになる事が分かる。

(Cd3..6) の計算 最後に (Cd3..6) の計算を行う。

この計算では、 n を 3,4 番目の粒子、 d を 1,2 番目の粒子として扱う。よって、終状態の空間成分は以下のように表される。

$$\begin{aligned}
&\sqrt{2} \left(\frac{a_d}{\pi}\right)^{\frac{3}{4}} (\exp[-i(\mathbf{p}_{n1}\mathbf{r}_3 + \mathbf{p}_{n2}\mathbf{r}_4)] + \exp[-i(\mathbf{p}_{n2}\mathbf{r}_3 + \mathbf{p}_{n1}\mathbf{r}_4)]) \\
&\times \exp \left[-\frac{a_d}{2}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2 \right] \exp \left[-i\mathbf{p}_d \left(\frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}\right) \right]
\end{aligned}$$

これより $\mathcal{M}'_1$ への (Cd3.6) からの寄与は以下のように計算出来る。

$$\begin{aligned}
((\text{Cd3..6})) &= \sqrt{2}g_A \left(2\frac{a_{\text{He}}^3}{\pi^3}\right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{a_d}{\pi}\right)^{\frac{3}{4}} \iiint dr_1 dr_2 dr_3 dr_4 \\
&\times \exp \left\{ i\mathbf{q}\mathbf{r}_1 - a_{\text{He}}(\dots) - \frac{a_d}{2}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2 - i\mathbf{p}_d \left(\frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}\right) \right\} \\
&\times \{ \exp[-i(\mathbf{p}_{n1}\mathbf{r}_3 + \mathbf{p}_{n2}\mathbf{r}_4)] + \exp[-i(\mathbf{p}_{n2}\mathbf{r}_3 + \mathbf{p}_{n1}\mathbf{r}_4)] \} \quad (\text{C-2-113})
\end{aligned}$$

(Cd3.4) と同様に、この積分をヤコビ座標を用いて実行する。一項目のみを考え、 $\exp$ の中身をあらわに表す。ヤコビ座標は (C-2-32)、(C-2-36) を用いる。

$$i\mathbf{q}\mathbf{r}_1 - a_{\text{He}}(\dots) - \frac{a_d}{2}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2 - i\mathbf{p}_d \left(\frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}\right) - i(\mathbf{p}_{n1}\mathbf{r}_3 + \mathbf{p}_{n2}\mathbf{r}_4) \quad (\text{C-2-114})$$

これを上で挙げたヤコビ座標を用いて表すと、以下になる。

$$\begin{aligned}
&= i\mathbf{q} \left(s_0 - \frac{1}{4}s_1 - \frac{1}{3}s_2 + \frac{1}{2}s_3 \right) - a_{\text{He}} \left(\frac{3}{4}s_1^2 + \frac{2}{3}s_2^2 + \frac{1}{2}s_3^2 \right) - \frac{a_d}{2}s_3^2 \\
&- i\mathbf{p}_d \left(s_0 - \frac{1}{4}s_1 - \frac{1}{3}s_2 \right) - i\mathbf{p}_{n1} \left(s_0 + \frac{3}{4}s_1 \right) - i\mathbf{p}_{n2} \left(s_0 - \frac{1}{4}s_1 + \frac{2}{3}s_2 \right) \quad (\text{C-2-115})
\end{aligned}$$

この式は (Cd3.4) の対応する項と比べると、全く同じになる。よって、寄与も同じになる事が分かる。

カレントが核子 1 に作用する場合 (まとめ) (C-2-108) からの寄与をまとめて表すと、以下で表す事が出来る。

$$(C-2-108) = \frac{\sqrt{2}g_A}{8}(2\pi)^3 \left(\frac{32\pi^2 a_d}{a_{\text{He}}(a_{\text{He}} + a_d)^2} \right)^{\frac{3}{4}} \delta(\mathbf{q} - \mathbf{p}_{n1} - \mathbf{p}_{n2} - \mathbf{p}_d) \\ \times \left[\exp \left(-\frac{4\mathbf{p}_{n2}^2 + 4\mathbf{p}_{n2} \cdot \mathbf{p}_d + 3\mathbf{p}_d^2}{8a_{\text{He}}} \right) + \exp \left(-\frac{4\mathbf{p}_{n1}^2 + 4\mathbf{p}_{n1} \cdot \mathbf{p}_d + 3\mathbf{p}_d^2}{8a_{\text{He}}} \right) \right. \\ \left. - 2 \exp \left(-\frac{3\mathbf{p}_{n1}^2 + 2\mathbf{p}_{n1} \cdot \mathbf{p}_{n2} + 3\mathbf{p}_{n2}^2}{8a_{\text{He}}} - \frac{1}{8} \frac{\mathbf{q}^2}{a_{\text{He}} + a_d} \right) \right] \quad (C-2-116)$$

A_+ が作用した場合 カレントが核子 2~4 に作用した場合も同様に計算することができ、結果は核子 1 に作用した場合と同じになる。よって、カレントとして A_+ が作用した場合の振幅は、C-2-70 を考慮して以下のようになる。

$$\langle d_1 n'_0 | A_+ | ^4\text{He} \rangle \\ = g_A (2\pi)^3 \left(\frac{32\pi^2 a_d}{a_{\text{He}}(a_{\text{He}} + a_d)^2} \right)^{\frac{3}{4}} \delta(\mathbf{q} - \mathbf{p}_{n1} - \mathbf{p}_{n2} - \mathbf{p}_d) \\ \times \left[\exp \left(-\frac{4\mathbf{p}_{n2}^2 + 4\mathbf{p}_{n2} \cdot \mathbf{p}_d + 3\mathbf{p}_d^2}{8a_{\text{He}}} \right) + \exp \left(-\frac{4\mathbf{p}_{n1}^2 + 4\mathbf{p}_{n1} \cdot \mathbf{p}_d + 3\mathbf{p}_d^2}{8a_{\text{He}}} \right) \right. \\ \left. - 2 \exp \left(-\frac{3\mathbf{p}_{n1}^2 + 2\mathbf{p}_{n1} \cdot \mathbf{p}_{n2} + 3\mathbf{p}_{n2}^2}{8a_{\text{He}}} - \frac{1}{8} \frac{\mathbf{q}^2}{a_{\text{He}} + a_d} \right) \right] \equiv g_A \mathcal{M}'_{\text{dnn}} \quad (C-2-117)$$

後の便宜のため、この振幅を M' として定義する。

A_- が作用した場合 (終状態の n のスピンの 0)

軸性ベクトルカレントによるスピン・アイソスピン成分の状態変化

始状態のヘリウム原子核に軸性ベクトルカレント A_- の要素 $\tau_a^- \sigma_{a-}$ が作用した際、スピンアイソスピンの状態は、以下のように変化する。

$$\tau_1^- \sigma_{1-} | ^4\text{He} \rangle = \frac{1}{2\sqrt{6}} \{ nnpn(\downarrow\uparrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow) + nnnp(-\downarrow\uparrow\downarrow + \downarrow\downarrow\uparrow) + npnn(-\downarrow\downarrow\uparrow + \downarrow\downarrow\uparrow) \} \\ \tau_2^- \sigma_{2-} | ^4\text{He} \rangle = \frac{1}{2\sqrt{6}} \{ nnpn(-\uparrow\downarrow\downarrow + \downarrow\downarrow\uparrow) + nnnp(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow) + pnnn(\downarrow\downarrow\uparrow - \downarrow\downarrow\uparrow) \} \\ \tau_3^- \sigma_{3-} | ^4\text{He} \rangle = \frac{1}{2\sqrt{6}} \{ pnnn(\downarrow\downarrow\uparrow - \downarrow\downarrow\uparrow) + npnn(-\downarrow\downarrow\uparrow + \uparrow\downarrow\downarrow) + nnnp(-\uparrow\downarrow\downarrow + \downarrow\downarrow\uparrow) \} \\ \tau_4^- \sigma_{4-} | ^4\text{He} \rangle = \frac{1}{2\sqrt{6}} \{ pnnn(-\downarrow\downarrow\uparrow + \downarrow\downarrow\uparrow) + npnn(\downarrow\downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow\downarrow) + nnpn(\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow) \}$$

この状態と終状態との内積を取る。終状態は前述したとおり、 $|d_{-1}, n'_0\rangle$ となる。初めに n 2 つの状態と内積を取った後に d の状態と内積をとると考える。(C-2-107) を考慮すると、以下のように表される。

$$\begin{aligned}
& \langle d_{-1}, n'_0 | \tau_1^- \sigma_{1-} | ^4\text{He} \rangle \\
&= \frac{1}{12\sqrt{2}} \left\{ \begin{aligned} & (-p \downarrow n \downarrow + n \downarrow p \downarrow)_{n=1,2} - (-n \downarrow p \downarrow + p \downarrow n \downarrow)_{n=1,3} + (n \downarrow p \downarrow - p \downarrow n \downarrow)_{n=1,4} \\ & + (-2n \downarrow p \downarrow)_{n=2,3} - (2n \downarrow p \downarrow)_{n=2,4} + (-2n \downarrow p \downarrow)_{n=3,4} \end{aligned} \right\} \\
&\otimes \frac{1}{\sqrt{2}} [p \downarrow n \downarrow - n \downarrow p \downarrow] \\
&= \frac{1}{24} \{ -(2)_{n=1,2} - (2)_{n=1,3} - (2)_{n=1,4} + (2)_{n=2,3} + (2)_{n=2,4} + (2)_{n=3,4} \} \tag{C-2-118}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \langle d_{-1}, n'_0 | \tau_2^- \sigma_{2-} | ^4\text{He} \rangle \\
&= \frac{1}{12\sqrt{2}} \left\{ \begin{aligned} & (-p \downarrow n \downarrow + n \downarrow p \downarrow)_{n=1,2} - (2n \downarrow p \downarrow)_{n=1,3} + (-2n \downarrow p \downarrow)_{n=1,4} \\ & + (n \downarrow p \downarrow - p \downarrow n \downarrow)_{n=2,3} - (-n \downarrow p \downarrow + p \downarrow n \downarrow)_{n=2,4} + (2p \downarrow n \downarrow)_{n=3,4} \end{aligned} \right\} \\
&\otimes \frac{1}{\sqrt{2}} [p \downarrow n \downarrow - n \downarrow p \downarrow] \\
&= \frac{1}{24} \{ -(2)_{n=1,2} + (2)_{n=1,3} + (2)_{n=1,4} - (2)_{n=2,3} - (2)_{n=2,4} + (2)_{n=3,4} \} \tag{C-2-119}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \langle d_{-1}, n'_0 | \tau_3^- \sigma_{3-} | ^4\text{He} \rangle \\
&= \frac{1}{12\sqrt{2}} \left\{ \begin{aligned} & (-2n \downarrow p \downarrow)_{n=1,2} - (p \downarrow n \downarrow - n \downarrow p \downarrow)_{n=1,3} + (2p \downarrow n \downarrow)_{n=1,4} \\ & + (-p \downarrow n \downarrow + n \downarrow p \downarrow)_{n=2,3} - (-2p \downarrow n \downarrow)_{n=2,4} + (-p \downarrow n \downarrow + n \downarrow p \downarrow)_{n=3,4} \end{aligned} \right\} \\
&\otimes \frac{1}{\sqrt{2}} [p \downarrow n \downarrow - n \downarrow p \downarrow] \\
&= \frac{1}{24} \{ (2)_{n=1,2} - (2)_{n=1,3} + (2)_{n=1,4} - (2)_{n=2,3} + (2)_{n=2,4} - (2)_{n=3,4} \} \tag{C-2-120}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \langle d_{-1}, n'_0 | \tau_4^- \sigma_{4-} | ^4\text{He} \rangle \\
&= \frac{1}{12\sqrt{2}} \left\{ \begin{aligned} & (2p \downarrow n \downarrow)_{n=1,2} - (-2p \downarrow n \downarrow)_{n=1,3} + (-p \downarrow n \downarrow + n \downarrow p \downarrow)_{n=1,4} \\ & + (2p \downarrow n \downarrow)_{n=2,3} - (p \downarrow n \downarrow - n \downarrow p \downarrow)_{n=2,4} + (-p \downarrow n \downarrow + n \downarrow p \downarrow)_{n=3,4} \end{aligned} \right\} \\
&\otimes \frac{1}{\sqrt{2}} [p \downarrow n \downarrow - n \downarrow p \downarrow] \\
&= \frac{1}{24} \{ (2)_{n=1,2} + (2)_{n=1,3} - (2)_{n=1,4} + (2)_{n=2,3} - (2)_{n=2,4} - (2)_{n=3,4} \} \tag{C-2-121}
\end{aligned}$$

この結果は、 A_+ が作用した場合の計算結果の全ての項で符号の反転したものである事がわかる。空間成分の計算は A_+ のものと同じである事から、振幅の値は A_+ のものと符号が異なるだけで、他は同じになる。よって、

$$\langle d_{-1} n'_0 | A_- | ^4\text{He} \rangle = -\sqrt{2} g_A \mathcal{M}'_{\text{dnn}} \tag{C-2-122}$$

となる。

A_z が作用した場合 (終状態の n のスピンの 0)

軸性ベクトルカレントによるスピン・アイソスピン成分の状態変化

始状態のヘリウム原子核に軸性ベクトルカレントとして A_z が作用した場合、スピンアイソスピンの状態は以下のように変化する。

$$\tau_1^- \sigma_{1z} |^4\text{He}\rangle = \frac{1}{2\sqrt{6}} \left\{ \begin{array}{l} nnpn(\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\downarrow) \\ +nnnp(-\uparrow\uparrow\downarrow + \downarrow\downarrow\uparrow + \uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\downarrow) \\ +npnn(-\uparrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\downarrow) \end{array} \right\}$$

$$\tau_2^- \sigma_{2z} |^4\text{He}\rangle = \frac{1}{2\sqrt{6}} \left\{ \begin{array}{l} nnpn(-\uparrow\uparrow\downarrow + \downarrow\downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\downarrow) \\ +nnnp(\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow + \uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\downarrow) \\ +pnnn(\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow + \downarrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\downarrow) \end{array} \right\}$$

$$\tau_3^- \sigma_{3z} |^4\text{He}\rangle = \frac{1}{2\sqrt{6}} \left\{ \begin{array}{l} pnnn(-\uparrow\uparrow\downarrow + \downarrow\downarrow\uparrow + \uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\downarrow) \\ +npnn(\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow + \uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\downarrow) \\ +nnnp(-\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow + \downarrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\downarrow) \end{array} \right\}$$

$$\tau_4^- \sigma_{4z} |^4\text{He}\rangle = \frac{1}{2\sqrt{6}} \left\{ \begin{array}{l} pnnn(\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\downarrow) \\ +npnn(-\uparrow\uparrow\downarrow + \downarrow\downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\downarrow) \\ +nnpn(\uparrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\downarrow) \end{array} \right\}$$

この状態と終状態との内積をとる。終状態は前述したとおり、 $|d_0, n'_0\rangle$ となる。初めに n 2 つの状態と内積を取った後に d の状態と内積をとると考える。(C-2-107) を考慮すると、以下のように表される。

$$\begin{aligned}
& \langle d_0, n'_0 | \tau_1^- \sigma_{1z} | ^4\text{He} \rangle \\
&= \frac{1}{12\sqrt{2}} \left\{ \begin{aligned} & (-p \downarrow n \uparrow - p \uparrow n \downarrow + n \uparrow p \downarrow + n \downarrow p \uparrow)_{n=1,2} \\ & + (n \uparrow p \downarrow + n \downarrow p \uparrow - p \downarrow n \uparrow - p \uparrow n \downarrow)_{n=1,3} \\ & + (n \uparrow p \downarrow + n \downarrow p \uparrow - p \downarrow n \uparrow - p \uparrow n \downarrow)_{n=1,4} \\ & + (-2n \uparrow p \downarrow - 2n \downarrow p \uparrow)_{2,3} \\ & - (2n \uparrow p \downarrow + 2n \downarrow p \uparrow)_{n=2,4} \\ & + (-2n \uparrow p \downarrow - 2n \downarrow p \uparrow)_{n=3,4} \end{aligned} \right\} \\
&\otimes \frac{1}{2} [p \uparrow n \downarrow - n \uparrow p \downarrow + p \downarrow n \uparrow - n \downarrow p \uparrow] \\
&= \frac{1}{24\sqrt{2}} \{ -(4)_{n=1,2} - (4)_{n=1,3} - (4)_{n=1,4} + (4)_{n=2,3} + (4)_{n=2,4} + (4)_{n=3,4} \} \quad (\text{C-2-123})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \langle d_0, n'_0 | \tau_2^- \sigma_{2z} | ^4\text{He} \rangle \\
&= \frac{1}{12\sqrt{2}} \left\{ \begin{aligned} & (-p \uparrow n \downarrow - p \downarrow n \uparrow + n \downarrow p \uparrow + n \uparrow p \downarrow)_{n=1,2} \\ & - (2n \uparrow p \downarrow + 2n \downarrow p \uparrow)_{n=1,3} \\ & + (-2n \uparrow p \downarrow - 2n \downarrow p \uparrow)_{n=1,4} \\ & + (n \uparrow p \downarrow + n \downarrow p \uparrow - p \uparrow n \downarrow - p \downarrow n \uparrow)_{n=2,3} \\ & - (-n \uparrow p \downarrow - n \downarrow p \uparrow + p \uparrow n \downarrow + p \downarrow n \uparrow)_{n=2,4} \\ & + (2p \uparrow n \downarrow + 2p \downarrow n \uparrow)_{n=3,4} \end{aligned} \right\} \\
&\otimes \frac{1}{2} [p \uparrow n \downarrow - n \uparrow p \downarrow + p \downarrow n \uparrow - n \downarrow p \uparrow] \\
&= \frac{1}{24\sqrt{2}} \{ -(4)_{n=1,2} + (4)_{n=1,3} + (4)_{n=1,4} - (4)_{n=2,3} - (4)_{n=2,4} + (4)_{n=3,4} \} \quad (\text{C-2-124})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \langle d_0, n'_0 | \tau_3^- \sigma_{3z} | ^4\text{He} \rangle \\
&= \frac{1}{12\sqrt{2}} \left\{ \begin{aligned} & (-2n \uparrow p \downarrow - 2n \downarrow p \uparrow)_{n=1,2} \\ & - (p \uparrow n \downarrow + p \downarrow n \uparrow - n \downarrow p \uparrow - n \uparrow p \downarrow)_{n=1,3} \\ & + (2p \uparrow n \downarrow + 2p \downarrow n \uparrow)_{n=1,4} \\ & + (-p \uparrow n \downarrow - p \downarrow n \uparrow + n \uparrow p \downarrow + n \downarrow p \uparrow)_{n=2,3} \\ & - (-2p \uparrow n \downarrow - 2p \downarrow n \uparrow)_{n=2,4} \\ & + (-p \uparrow n \downarrow - p \downarrow n \uparrow + n \uparrow p \downarrow + n \downarrow p \uparrow)_{n=3,4} \end{aligned} \right\} \\
&\otimes \frac{1}{2} [p \uparrow n \downarrow - n \uparrow p \downarrow + p \downarrow n \uparrow - n \downarrow p \uparrow] \\
&= \frac{1}{24\sqrt{2}} \{ (4)_{n=1,2} - (4)_{n=1,3} + (4)_{n=1,4} - (4)_{n=2,3} + (4)_{n=2,4} - (4)_{n=3,4} \} \quad (\text{C-2-125})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \langle d_0, n'_0 | \tau_4^- \sigma_{4z} | ^4\text{He} \rangle \\
&= \frac{1}{12\sqrt{2}} \left\{ \begin{aligned} & (2p \uparrow n \downarrow + 2p \downarrow n \uparrow)_{n=1,2} \\ & - (-2p \uparrow n \downarrow - 2p \downarrow n \uparrow)_{n=1,3} \\ & + (-p \uparrow n \downarrow - p \downarrow n \uparrow + n \downarrow p \uparrow + n \uparrow p \downarrow)_{n=1,4} \\ & + (2p \uparrow n \downarrow + 2p \downarrow n \uparrow)_{n=2,3} \\ & - (p \uparrow n \downarrow + p \downarrow n \uparrow - n \uparrow p \downarrow - n \downarrow p \uparrow)_{n=2,4} \\ & - (p \uparrow n \downarrow + p \downarrow n \uparrow - n \uparrow p \downarrow - n \downarrow p \uparrow)_{n=3,4} \end{aligned} \right\} \\
&\otimes \frac{1}{2} [p \uparrow n \downarrow - n \uparrow p \downarrow + p \downarrow n \uparrow - n \downarrow p \uparrow] \\
&= \frac{1}{24\sqrt{2}} \{ (4)_{n=1,2} + (4)_{n=1,3} - (4)_{n=1,4} + (4)_{n=2,3} - (4)_{n=2,4} - (4)_{n=3,4} \} \quad (\text{C-2-126})
\end{aligned}$$

この結果は、 $A+$ が作用した場合の計算結果の全ての項で符号の反転したものである事がわかる。空間成分の計算は $A+$ のものと同じである事から、振幅の値は $A+$ のものと符号が異なるだけで、他は同じになる。よって、

$$\langle d_0 n'_0 | A_z | {}^4\text{He} \rangle = -\sqrt{2} g_A \mathcal{M}'_{\text{dnn}} \quad (\text{C-2-127})$$

となる。

まとめ

以上の結果をまとめて以下で表す。

$$\langle \text{dn} | V^0 | {}^4\text{He} \rangle = \sqrt{3} \mathcal{M}_{\text{dnn}} \quad (\text{C-2-128})$$

$$\langle \text{dn} | g_A A^+ | {}^4\text{He} \rangle = -\sqrt{2} g_A \mathcal{M}_{\text{dnn}} \quad (\text{C-2-129})$$

$$\langle \text{dn} | g_A A^- | {}^4\text{He} \rangle = \sqrt{2} g_A \mathcal{M}_{\text{dnn}} \quad (\text{C-2-130})$$

$$\langle \text{dn} | g_A A^z | {}^4\text{He} \rangle = \sqrt{2} g_A \mathcal{M}_{\text{dnn}} \quad (\text{C-2-131})$$

$$\langle \text{dn}' | g_A A^+ | {}^4\text{He} \rangle = \sqrt{2} g_A \mathcal{M}'_{\text{dnn}} \quad (\text{C-2-132})$$

$$\langle \text{dn}' | g_A A^- | {}^4\text{He} \rangle = -\sqrt{2} g_A \mathcal{M}'_{\text{dnn}} \quad (\text{C-2-133})$$

$$\langle \text{dn}' | g_A A^z | {}^4\text{He} \rangle = -\sqrt{2} g_A \mathcal{M}'_{\text{dnn}} \quad (\text{C-2-134})$$

計算結果は終状態の n のスピンの 0 か 1 かで異なった形で表される。この式では n' が n のスピンの 0 の終状態を表している。ここで、 $\mathcal{M}$ と $\mathcal{M}'$ は以下で定義される。

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\text{dnn}} = & \left(\frac{32\pi^2 a_d}{a_{\text{He}}(a_{\text{He}} + a_d)^2} \right)^{\frac{3}{4}} \\ & \times \left[\exp \left(-\frac{4\mathbf{p}_{n2}^2 + 4\mathbf{p}_{n2} \cdot \mathbf{p}_d + 3\mathbf{p}_d^2}{8a_{\text{He}}} \right) - \exp \left(-\frac{4\mathbf{p}_{n1}^2 + 4\mathbf{p}_{n1} \cdot \mathbf{p}_d + 3\mathbf{p}_d^2}{8a_{\text{He}}} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{C-2-135})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}'_{\text{dnn}} = & \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{32\pi^2 a_d}{a_{\text{He}}(a_{\text{He}} + a_d)^2} \right)^{\frac{3}{4}} \\ & \times \left[\exp \left(-\frac{4\mathbf{p}_{n2}^2 + 4\mathbf{p}_{n2} \cdot \mathbf{p}_d + 3\mathbf{p}_d^2}{8a_{\text{He}}} \right) + \exp \left(-\frac{4\mathbf{p}_{n1}^2 + 4\mathbf{p}_{n1} \cdot \mathbf{p}_d + 3\mathbf{p}_d^2}{8a_{\text{He}}} \right) \right. \\ & \left. - 2 \exp \left(-\frac{3\mathbf{p}_{n1}^2 + 2\mathbf{p}_{n1} \cdot \mathbf{p}_{n2} + 3\mathbf{p}_{n2}^2}{8a_{\text{He}}} - \frac{1}{8} \frac{\mathbf{p}^2}{a_{\text{He}} + a_d} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{C-2-136})$$

C.2.5 $(\tilde{\tau}^4\text{He}) \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 + \nu_\tau + \mathbf{p} + \mathbf{n} + \mathbf{n} + \mathbf{n}$ の hadronic part

次に、(3-3-3) の hadronic part の計算を行う。ここでは初めに、終状態がどのように表されるかをスレーター行列式を用いて記述する。

ここでは終状態として、ベクトルカレントが作用する場合は $I_z = -1, S_z = 0$ 、軸性ベクトルカレントが作用する場合は $I_z = -1, S_z = -1, 0, 1$ となるものを考え、粒子の入れ替えに対して反対称の状態を形成し、振幅の計算を行う事にする。

$S_z = 0$ の状態

スレーター行列を用いて $S_z = 0$ の状態を形成する。まず初めに、陽子のスピンの状態を形成すると、次のように表される。

$$|nnn \uparrow p \downarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{4!}} \begin{vmatrix} \varphi_1(1) \uparrow_1 & \varphi_2(1) \uparrow_1 & \varphi_3(1) \downarrow_1 & \varphi_4(1) \downarrow'_1 \\ \varphi_1(2) \uparrow_2 & \varphi_2(2) \uparrow_2 & \varphi_3(2) \downarrow_2 & \varphi_4(2) \downarrow'_2 \\ \varphi_1(3) \uparrow_3 & \varphi_2(3) \uparrow_3 & \varphi_3(3) \downarrow_3 & \varphi_4(3) \downarrow'_3 \\ \varphi_1(4) \uparrow_4 & \varphi_2(4) \uparrow_4 & \varphi_3(4) \downarrow_4 & \varphi_4(4) \downarrow'_4 \end{vmatrix} \quad (\text{C-2-137})$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{vmatrix} (11) \uparrow_1 & (21) \uparrow_1 & (31) \downarrow_1 & (41) \downarrow'_1 \\ (12) \uparrow_2 & (22) \uparrow_2 & (32) \downarrow_2 & (42) \downarrow'_2 \\ (13) \uparrow_3 & (23) \uparrow_3 & (33) \downarrow_3 & (43) \downarrow'_3 \\ (14) \uparrow_4 & (24) \uparrow_4 & (34) \downarrow_4 & (44) \downarrow'_4 \end{vmatrix} \quad (\text{C-2-138})$$

ここで φ は粒子の波動関数の空間成分を表しており、() 内の数字と矢印の添え字は粒子に付けた番号を表している。今、粒子の波動関数の空間成分は平面波で表されるため、(C-2-138) 中の () の定義は $(ij) \equiv \exp(i\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_j)$ となる。

(C-2-138) の式を余因子を用いて展開すると次のようになる。

$$|nnn \uparrow p \downarrow\rangle = \frac{1}{2\sqrt{6}} \left\{ \begin{aligned} &+(11) \uparrow_1 \begin{vmatrix} (22) \uparrow_2 & (32) \downarrow_2 & (42) \downarrow'_2 \\ (23) \uparrow_3 & (33) \downarrow_3 & (43) \downarrow'_3 \\ (24) \uparrow_4 & (34) \downarrow_4 & (44) \downarrow'_4 \end{vmatrix} - (21) \uparrow_1 \begin{vmatrix} (12) \uparrow_2 & (32) \downarrow_2 & (42) \downarrow'_2 \\ (13) \uparrow_3 & (33) \downarrow_3 & (43) \downarrow'_3 \\ (14) \uparrow_4 & (34) \downarrow_4 & (44) \downarrow'_4 \end{vmatrix} \\ &+(31) \downarrow_1 \begin{vmatrix} (12) \uparrow_2 & (22) \uparrow_2 & (42) \downarrow'_2 \\ (13) \uparrow_3 & (23) \uparrow_3 & (43) \downarrow'_3 \\ (14) \uparrow_4 & (24) \uparrow_4 & (44) \downarrow'_4 \end{vmatrix} - (41) \downarrow'_1 \begin{vmatrix} (12) \uparrow_2 & (22) \uparrow_2 & (32) \downarrow_2 \\ (13) \uparrow_3 & (23) \uparrow_3 & (33) \downarrow_3 \\ (14) \uparrow_4 & (24) \uparrow_4 & (34) \downarrow_4 \end{vmatrix} \end{aligned} \right\}$$

さらに展開すると次が得られる。

$$= \frac{1}{2\sqrt{6}} \left\{ \begin{aligned} &+(11) \uparrow_1 \left\{ \begin{aligned} &\uparrow\downarrow\downarrow' (234) + \downarrow\downarrow'\uparrow (342) + \downarrow'\uparrow\downarrow (423) \\ &- \uparrow\downarrow'\downarrow (243) - \downarrow\uparrow\downarrow' (324) - \downarrow'\downarrow\uparrow (432) \end{aligned} \right\} \\ &-(21) \uparrow_1 \left\{ \begin{aligned} &\uparrow\downarrow\downarrow' (134) + \downarrow\downarrow'\uparrow (341) + \downarrow'\uparrow\downarrow (413) \\ &- \uparrow\downarrow'\downarrow (143) - \downarrow\uparrow\downarrow' (314) - \downarrow'\downarrow\uparrow (431) \end{aligned} \right\} \\ &+(31) \downarrow_1 \left\{ \begin{aligned} &\uparrow\uparrow\downarrow' (124) + \uparrow\downarrow'\uparrow (241) + \downarrow'\uparrow\uparrow (412) \\ &- \uparrow\downarrow'\uparrow (142) - \uparrow\uparrow\downarrow' (214) - \downarrow'\uparrow\uparrow (421) \end{aligned} \right\} \\ &-(41) \downarrow'_1 \left\{ \begin{aligned} &\uparrow\uparrow\downarrow (123) + \uparrow\downarrow\uparrow (231) + \downarrow\uparrow\uparrow (312) \\ &- \uparrow\downarrow\uparrow (132) - \uparrow\uparrow\downarrow (213) - \downarrow\uparrow\uparrow (321) \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\}$$

ここで、数字が2つある () は前述した定義のものを表している。対して小さい { } 中の数字が3つある () は次で定義される。

$$(ijk) \equiv \exp[i(\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_2 + \mathbf{p}_j \cdot \mathbf{r}_3 + \mathbf{p}_k \cdot \mathbf{r}_4)]$$

さらに展開すると、次のように表される。

$$|nnn \uparrow p \downarrow\rangle = \frac{1}{2\sqrt{6}} \left\{ \begin{array}{l} + \uparrow\uparrow\downarrow' (1234) + \uparrow\downarrow\downarrow' (1342) + \uparrow\downarrow'\downarrow (1423) \\ - \uparrow\uparrow\downarrow' (1243) - \uparrow\downarrow\downarrow' (1324) - \uparrow\downarrow'\downarrow (1432) \\ - \uparrow\uparrow\downarrow' (2134) - \uparrow\downarrow\downarrow' (2341) - \uparrow\downarrow'\downarrow (2413) \\ + \uparrow\uparrow\downarrow' (2143) + \uparrow\downarrow\downarrow' (2314) + \uparrow\downarrow'\downarrow (2431) \\ + \downarrow\uparrow\downarrow' (3124) + \downarrow\uparrow\downarrow' (3241) + \downarrow\downarrow'\uparrow (3412) \\ - \downarrow\uparrow\downarrow' (3142) - \downarrow\uparrow\downarrow' (3214) - \downarrow\downarrow'\uparrow (3421) \\ - \downarrow'\uparrow\downarrow (4123) - \downarrow'\uparrow\downarrow (4231) - \downarrow'\downarrow\uparrow (4312) \\ + \downarrow'\uparrow\downarrow (4132) + \downarrow'\uparrow\downarrow (4213) + \downarrow'\downarrow\uparrow (4321) \end{array} \right\}$$

この式において、(ijkl) は次のように定義されている。

$$(ijkl) \equiv \exp[i(\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_1 + \mathbf{p}_j \cdot \mathbf{r}_2 + \mathbf{p}_k \cdot \mathbf{r}_3 + \mathbf{p}_l \cdot \mathbf{r}_4)]$$

さらにスピンアイソスピン成分でまとめると、次のようになる。

$$|nnn \uparrow p \downarrow\rangle = \frac{1}{2\sqrt{6}} \left\{ \begin{array}{l} + \uparrow\uparrow\downarrow' ((1234) - (2134)) + \uparrow\downarrow\downarrow' ((1342) - (2341)) \\ + \uparrow\downarrow'\downarrow ((1423) - (2413)) + \uparrow\uparrow\downarrow' ((2143) - (1243)) \\ + \uparrow\uparrow\downarrow' ((2314) - (1324)) + \uparrow\downarrow'\downarrow ((2431) - (1432)) \\ + \downarrow\uparrow\downarrow' ((3124) - (3214)) + \downarrow\uparrow\downarrow' ((3241) - (3142)) \\ + \downarrow\downarrow'\uparrow ((3412) - (3421)) + \downarrow'\uparrow\downarrow ((4132) - (4231)) \\ + \downarrow'\downarrow\uparrow ((4213) - (4123)) + \downarrow'\downarrow\uparrow ((4321) - (4312)) \end{array} \right\} \quad (\text{C-2-139})$$

次に、陽子のスピンのアップの状態を表すと、次のようになる。

$$|nnn \downarrow p \uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{4!}} \left| \begin{array}{cccc} \varphi_1(1) \downarrow_1 & \varphi_2(1) \downarrow_1 & \varphi_3(1) \uparrow_1 & \varphi_4(1) \uparrow'_1 \\ \varphi_1(2) \downarrow_2 & \varphi_2(2) \downarrow_2 & \varphi_3(2) \uparrow_2 & \varphi_4(2) \uparrow'_2 \\ \varphi_1(3) \downarrow_3 & \varphi_2(3) \downarrow_3 & \varphi_3(3) \uparrow_3 & \varphi_4(3) \uparrow'_3 \\ \varphi_1(4) \downarrow_4 & \varphi_2(4) \downarrow_4 & \varphi_3(4) \uparrow_4 & \varphi_4(4) \uparrow'_4 \end{array} \right| \quad (\text{C-2-140})$$

これは陽子のスピンのダウンの状態に対して、全てのスピンを逆転した形となっている。よって、この状態は次で表される。

$$|nnn \downarrow p \uparrow\rangle = \frac{1}{2\sqrt{6}} \left\{ \begin{array}{l} + \downarrow\downarrow\uparrow' ((1234) - (2134)) + \downarrow\uparrow'\downarrow ((1342) - (2341)) \\ + \downarrow\uparrow'\downarrow ((1423) - (2413)) + \downarrow\downarrow'\uparrow ((2143) - (1243)) \\ + \downarrow\downarrow'\uparrow ((2314) - (1324)) + \downarrow'\uparrow\downarrow ((2431) - (1432)) \\ + \uparrow\downarrow\downarrow' ((3124) - (3214)) + \uparrow\downarrow\downarrow' ((3241) - (3142)) \\ + \uparrow'\uparrow\downarrow ((3412) - (3421)) + \uparrow'\uparrow\downarrow ((4132) - (4231)) \\ + \uparrow'\uparrow\downarrow ((4213) - (4123)) + \uparrow'\uparrow\downarrow ((4321) - (4312)) \end{array} \right\} \quad (\text{C-2-141})$$

$S_z = 0$ の状態は $|nnnp(0, +1/2)\rangle$ と $|nnnp(0, -1/2)\rangle$ の状態を足し合わせる事で表される。規格化定数をつけて表すと、以下になる。

$$|nnnp(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|nnn \uparrow p \downarrow\rangle + |nnn \downarrow p \uparrow\rangle) \quad (\text{C-2-142})$$

$$S_z = +1$$

次に軸性ベクトルカレントが作用した場合の終状態を考える。初めに A_+ が作用した場合の状態を考えると、次のようになる。

$$|nnnp(+1)\rangle = \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{vmatrix} \varphi_1(1) \uparrow_1 & \varphi_2(1) \uparrow_1 & \varphi_3(1) \downarrow_1 & \varphi_4(1) \uparrow'_1 \\ \varphi_1(2) \uparrow_2 & \varphi_2(2) \uparrow_2 & \varphi_3(2) \downarrow_2 & \varphi_4(2) \uparrow'_2 \\ \varphi_1(3) \uparrow_3 & \varphi_2(3) \uparrow_3 & \varphi_3(3) \downarrow_3 & \varphi_4(3) \uparrow'_3 \\ \varphi_1(4) \uparrow_4 & \varphi_2(4) \uparrow_4 & \varphi_3(4) \downarrow_4 & \varphi_4(4) \uparrow'_4 \end{vmatrix} \quad (\text{C-2-143})$$

この状態は (C-2-137) の状態の陽子のスピンを逆転した状態であるので、(C-2-139) を参考にして次のように表される。

$$|nnnp(+1)\rangle = \frac{1}{2\sqrt{6}} \left\{ \begin{array}{l} + \uparrow\uparrow\downarrow' ((1234) - (2134)) + \uparrow\downarrow'\uparrow ((1342) - (2341)) \\ + \uparrow\uparrow'\downarrow ((1423) - (2413)) + \uparrow\uparrow'\downarrow ((2143) - (1243)) \\ + \uparrow\downarrow\uparrow' ((2314) - (1324)) + \uparrow\uparrow'\downarrow ((2431) - (1432)) \\ + \downarrow\uparrow\uparrow' ((3124) - (3214)) + \downarrow\uparrow'\uparrow ((3241) - (3142)) \\ + \downarrow\uparrow'\uparrow ((3412) - (3421)) + \uparrow'\uparrow\downarrow ((4132) - (4231)) \\ + \uparrow'\downarrow\uparrow ((4213) - (4123)) + \uparrow'\downarrow\uparrow ((4321) - (4312)) \end{array} \right\} \quad (\text{C-2-144})$$

$$S_z = -1$$

次に A_- が作用した場合の状態を考えると、次のようになる。

$$|nnnp(-1)\rangle = \frac{1}{\sqrt{4!}} \begin{vmatrix} \varphi_1(1) \downarrow_1 & \varphi_2(1) \downarrow_1 & \varphi_3(1) \uparrow_1 & \varphi_4(1) \downarrow'_1 \\ \varphi_1(2) \downarrow_2 & \varphi_2(2) \downarrow_2 & \varphi_3(2) \uparrow_2 & \varphi_4(2) \downarrow'_2 \\ \varphi_1(3) \downarrow_3 & \varphi_2(3) \downarrow_3 & \varphi_3(3) \uparrow_3 & \varphi_4(3) \downarrow'_3 \\ \varphi_1(4) \downarrow_4 & \varphi_2(4) \downarrow_4 & \varphi_3(4) \uparrow_4 & \varphi_4(4) \downarrow'_4 \end{vmatrix} \quad (\text{C-2-145})$$

この状態は (C-2-140) の状態の陽子のスピンを逆転した状態であるので、(C-2-141) を参考にして次のように表される。

$$|nnn \uparrow p \downarrow\rangle = \frac{1}{2\sqrt{6}} \left\{ \begin{array}{l} + \downarrow\downarrow\downarrow' ((1234) - (2134)) + \downarrow\downarrow'\downarrow ((1342) - (2341)) \\ + \downarrow\downarrow'\uparrow ((1423) - (2413)) + \downarrow\downarrow'\uparrow ((2143) - (1243)) \\ + \downarrow\downarrow\downarrow' ((2314) - (1324)) + \downarrow\downarrow'\downarrow ((2431) - (1432)) \\ + \uparrow\downarrow\downarrow' ((3124) - (3214)) + \uparrow\downarrow'\downarrow ((3241) - (3142)) \\ + \uparrow\downarrow'\downarrow ((3412) - (3421)) + \downarrow'\downarrow\downarrow ((4132) - (4231)) \\ + \downarrow'\uparrow\downarrow ((4213) - (4123)) + \downarrow'\uparrow\downarrow ((4321) - (4312)) \end{array} \right\} \quad (\text{C-2-146})$$

振幅計算

次に、上記した状態を用いて振幅の計算を行う。初めに、ベクトルカレントが作用した場合を考えると、始状態と終状態の内積は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 & \langle nnn \uparrow p \downarrow | V_0 | \text{He} \rangle \\
 &= \langle nnn \downarrow p \uparrow | V_0 | \text{He} \rangle \\
 &= \frac{1}{24} \left\{ \begin{aligned} & +(-① + ②)((1234) - (2134)) + (-① + ④)((1342) - (2341)) \\ & +(-① + ③)((1423) - (2413)) + (-② + ①)((2143) - (1243)) \\ & +(-③ + ①)((2314) - (1324)) + (-④ + ①)((2431) - (1432)) \\ & +(-② + ③)((3124) - (3214)) + (-④ + ②)((3241) - (3142)) \\ & +(-③ + ④)((3412) - (3421)) + (-② + ④)((4132) - (4231)) \\ & +(-③ + ②)((4213) - (4123)) + (-④ + ③)((4321) - (4312)) \end{aligned} \right\} \quad (\text{C-2-147})
 \end{aligned}$$

一項目の位置座標を (1234) とラベル付けした場合、二項目以降は次のように表される。

$$\begin{aligned}
 & \langle nnn \uparrow p \downarrow | V_0 | \text{He} \rangle \\
 &= \langle nnn \downarrow p \uparrow | V_0 | \text{He} \rangle \\
 &= \frac{1}{24} \left\{ \begin{aligned} & +(-① + ②)(1234) + (-① + ④)(1423) \\ & +(-① + ③)(1342) + (-② + ①)(2143) \\ & +(-③ + ①)(3124) + (-④ + ①)(1423) \\ & +(-② + ③)(2314) + (-④ + ②)(4213) \\ & +(-③ + ④)(3412) + (-② + ④)(2431) \\ & +(-③ + ②)(3241) + (-④ + ③)(4321) \end{aligned} \right\} \quad (\text{C-2-148})
 \end{aligned}$$

となる。ここでは①(1234) の計算を行う。

①(1234) (1234) は終状態の空間成分の波動関数を表しており、以下の形で表される。

$$\exp(-i(p_1 r_1 + p_2 r_2 + p_3 r_3 + p_4 r_4))$$

また、始状態の ^4He の波動関数の空間成分は以下で与えられている。

$$\left(2 \frac{a_{\text{He}}^3}{\pi^3}\right)^{\frac{3}{4}} \exp \left\{ -a_{\text{He}} \left(\frac{3}{4} s_1^2 + \frac{2}{3} s_2^2 + \frac{1}{2} s_3^2 \right) \right\}$$

さらに①はカレントが1番目の粒子に作用した事を表している。以上から、この部分からの振幅への寄与は以下のように計算される。

$$\left(2 \frac{a_{\text{He}}^3}{\pi^3}\right)^{\frac{3}{4}} \iiint \int dr_1 dr_2 dr_3 dr_4 \times \exp(iqr_1 - a(\cdots) - i(p_1 r_1 + p_2 r_2 + p_3 r_3 + p_4 r_4))$$

ここでは $\exp$ の肩を計算する。

$$iqr_1 - a_{\text{He}} \left(\frac{3}{4} s_1^2 + \frac{2}{3} s_2^2 + \frac{1}{2} s_3^2 \right) - i(p_1 r_1 + p_2 r_2 + p_3 r_3 + p_4 r_4)$$

ヤコビ座標を用いると、次のように表す事が出来る。

$$\begin{aligned}
& i(q - p_1) \left(s_0 + \frac{3}{4}s_1 \right) - a_{\text{He}}(\cdots) - ip_2 \left(s_0 - \frac{1}{4}s_1 + \frac{2}{3}s_2 \right) \\
& - ip_3 \left(s_0 - \frac{1}{4}s_1 - \frac{1}{3}s_2 + \frac{1}{2}s_3 \right) - ip_4 \left(s_0 - \frac{1}{4}s_1 - \frac{1}{3}s_2 - \frac{1}{2}s_3 \right) \\
& = i(q - p_1 - p_2 - p_3 - p_4)s_0 \\
& + \left(-\frac{3}{4}a_{\text{He}}s_1^2 + \frac{3}{4}i(q - p_1)s_1 + \frac{i}{4}(p_2 + p_3 + p_4)s_1 \right) \\
& + \left(-\frac{2}{3}a_{\text{He}}s_2^2 - \frac{2}{3}ip_2s_2 + \frac{i}{3}p_3s_2 + \frac{i}{3}p_4s_2 \right) \\
& + \left(-\frac{1}{2}a_{\text{He}}s_3^2 - \frac{i}{2}p_3s_3 + \frac{i}{2}p_4s_3 \right)
\end{aligned}$$

s_0 の積分から生じるデルタ関数の条件を用いると、次のように変形できる。

$$\begin{aligned}
& = i(q - p_1 - p_2 - p_3 - p_4)s_0 \\
& + \left(-\frac{3}{4}a_{\text{He}}s_1^2 + i(p_2 + p_3 + p_4)s_1 \right) \\
& - \frac{2}{3}a_{\text{He}} \left(s_2^2 - \frac{3}{2a_{\text{He}}} \left(-\frac{2}{3}i \left(p_2 - \frac{1}{2}p_3 - \frac{1}{2}p_4 \right) s_2 \right) \right) \\
& - \frac{1}{2}a_{\text{He}} \left(s_3^2 - \frac{2}{a_{\text{He}}} \left(-\frac{i}{2}(p_3 - p_4)s_3 \right) \right) \\
& = i(q - p_1 - p_2 - p_3 - p_4)s_0 \\
& - \frac{3}{4}a_{\text{He}} \left(s_1^2 - \frac{4i}{3a_{\text{He}}}(p_2 + p_3 + p_4)s_1 \right) \\
& - \frac{2}{3}a_{\text{He}} \left(s_2^2 + \frac{i}{a_{\text{He}}} \left(p_2 - \frac{p_3 + p_4}{2} \right) s_2 \right) \\
& - \frac{1}{2}a_{\text{He}} \left(s_3^2 + \frac{i}{a_{\text{He}}}(p_3 - p_4)s_3 \right) \\
& = i(q - p_1 - p_2 - p_3 - p_4)s_0 \\
& - \frac{3}{4}a_{\text{He}} \left(s_1 - \frac{2i}{3a_{\text{He}}}(p_2 + p_3 + p_4) \right)^2 - \frac{1}{3a_{\text{He}}}(p_2 + p_3 + p_4)^2 \\
& - \frac{2}{3}a_{\text{He}} \left(s_2 + \frac{i}{2a_{\text{He}}} \left(p_2 - \frac{p_3 + p_4}{2} \right) \right)^2 - \frac{1}{6a_{\text{He}}} \left(p_2 - \frac{p_3 + p_4}{2} \right)^2 \\
& - \frac{a_{\text{He}}}{2} \left(s_3 + \frac{i}{2a_{\text{He}}}(p_3 - p_4) \right)^2 - \frac{1}{8a_{\text{He}}}(p_3 - p_4)^2
\end{aligned}$$

これより s_1, s_2, s_3 について積分を実行する事が出来る。この積分を行うことで生じる係数と始状態の波動関数の空間成分の係数とを掛け合わせると、次のようになる。

$$\left(2\frac{a_{\text{He}}^3}{\pi^3} \right)^{\frac{3}{4}} \times \left(\frac{4\pi}{3a_{\text{He}}} \right)^{\frac{3}{2}} \times \left(\frac{3\pi}{2a_{\text{He}}} \right)^{\frac{3}{2}} \times \left(\frac{2\pi}{a_{\text{He}}} \right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{32\pi^3}{a_{\text{He}}^3} \right)^{\frac{3}{4}}$$

また、exp の型として残る部分を計算すると、次のようになる。

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{3a_{\text{He}}}(p_2 + p_3 + p_4)^2 - \frac{1}{6a_{\text{He}}}\left(p_2 - \frac{p_3 + p_4}{2}\right)^2 - \frac{1}{8a_{\text{He}}}(p_3 - p_4)^2 \\
& = \dots \\
& = -\frac{p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_2 \cdot p_3 + p_3 \cdot p_4 + p_4 \cdot p_2}{2a_{\text{He}}}
\end{aligned} \tag{C-2-149}$$

これよりカレントが粒子 1 に当たった場合の振幅への寄与は、次のようになる。

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{32\pi^3}{a_{\text{He}}^3}\right)^{\frac{3}{4}} \times \exp\left(-\frac{p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_2 \cdot p_3 + p_3 \cdot p_4 + p_4 \cdot p_2}{2a_{\text{He}}}\right) \\
& \equiv \mathcal{M}(2, 3, 4)
\end{aligned} \tag{C-2-150}$$

この寄与に対して、次の関係式が成り立つ。

$$-\textcircled{1}(1234) = \textcircled{2}(1234) = -\mathcal{M}(2, 3, 4) + \mathcal{M}(1, 3, 4) \equiv \mathcal{M}_{\text{pnnn}} \tag{C-2-151}$$

位置座標の置換から、二項目以降の寄与も同様に計算できる事は明らかであるため、結果は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\langle nnnp(0)|V_0|\text{He}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle nnn \uparrow p \downarrow |V_0|\text{He}\rangle + \langle nnn \downarrow p \uparrow |V_0|\text{He}\rangle) \\
&= \sqrt{2}\mathcal{M}_{\text{pnnn}}
\end{aligned} \tag{C-2-152}$$

次に軸性ベクトルカレントが作用した場合の計算を行う。カレントとして A_+ が作用した場合の内積計算を行うと、次のようになる。

$$\langle nnnp(+1)|A_+|\text{He}\rangle = \frac{1}{24} \left\{ \begin{aligned} & +(\textcircled{1} - \textcircled{2})((1234) - (2134)) + (\textcircled{1} - \textcircled{4})((1342) - (2341)) \\ & +(\textcircled{1} - \textcircled{3})((1423) - (2413)) + (\textcircled{2} - \textcircled{1})((2143) - (1243)) \\ & +(\textcircled{3} - \textcircled{1})((2314) - (1324)) + (\textcircled{4} - \textcircled{1})((2431) - (1432)) \\ & +(\textcircled{2} - \textcircled{3})((3124) - (3214)) + (\textcircled{4} - \textcircled{2})((3241) - (3142)) \\ & +(\textcircled{3} - \textcircled{4})((3412) - (3421)) + (\textcircled{2} - \textcircled{4})((4132) - (4231)) \\ & +(\textcircled{3} - \textcircled{2})((4213) - (4123)) + (\textcircled{4} - \textcircled{3})((4321) - (4312)) \end{aligned} \right\} \tag{C-2-153}$$

これはベクトルカレントが作用した場合の計算について、符号が逆転したものである。よって、結果は以下となる。

$$\langle nnnp(+1)|A_+|\text{He}\rangle = -\sqrt{2}\mathcal{M}_{\text{pnnn}} \tag{C-2-154}$$

次にカレントとして A_- が作用した場合の内積計算を行うと、次のようになる。

$$\langle nnnp(-1)|A_-|\text{He}\rangle = \frac{1}{24} \left\{ \begin{array}{l} +(-①+②)((1234)-(2134)) + (-①+④)((1342)-(2341)) \\ +(-①+③)((1423)-(2413)) + (-②+①)((2143)-(1243)) \\ +(-③+①)((2314)-(1324)) + (-④+①)((2431)-(1432)) \\ +(-②+③)((3124)-(3214)) + (-④+②)((3241)-(3142)) \\ +(-③+④)((3412)-(3421)) + (-②+④)((4132)-(4231)) \\ +(-③+②)((4213)-(4123)) + (-④+③)((4321)-(4312)) \end{array} \right\} \quad (\text{C-2-155})$$

よって、結果は次のように表される。

$$\langle nnnp(-1)|A_-|\text{He}\rangle = \sqrt{2}\mathcal{M}_{\text{pnnn}} \quad (\text{C-2-156})$$

最後に、カレントとして A_z が作用した場合の内積計算を行う。これを考える前に、このカレントが作用した時に、終状態がどのように表されるかを考える。今までの計算の式を用いると、次のようになる。

$$|nnnp(1,0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|nnn \uparrow p \downarrow\rangle - |nnn \downarrow p \uparrow\rangle)$$

これは $|nnnp(0)\rangle$ の式に比べて、二項目の部号が逆になっているものであり、 $|nnnp(0)\rangle$ と直交している。

このように状態をとった時、内積計算は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \langle nnn \uparrow p \downarrow | A_z | \text{He} \rangle \\ &= -\langle nnn \downarrow p \uparrow | A_z | \text{He} \rangle \\ &= \frac{1}{24} \left\{ \begin{array}{l} +(-①+②)((1234)-(2134)) + (-①+④)((1342)-(2341)) \\ +(-①+③)((1423)-(2413)) + (-②+①)((2143)-(1243)) \\ +(-③+①)((2314)-(1324)) + (-④+①)((2431)-(1432)) \\ +(-②+③)((3124)-(3214)) + (-④+②)((3241)-(3142)) \\ +(-③+④)((3412)-(3421)) + (-②+④)((4132)-(4231)) \\ +(-③+②)((4213)-(4123)) + (-④+③)((4321)-(4312)) \end{array} \right\} \quad (\text{C-2-157}) \end{aligned}$$

故に、振幅計算の結果は次のようになる。

$$\langle nnnp(1,0)|A_z|\text{He}\rangle = \sqrt{2}\mathcal{M}_{\text{pnnn}} \quad (\text{C-2-158})$$

以上の計算をまとめて記すと、次のようになる。

$$\langle nnnp|V_0|\text{He}\rangle = \sqrt{2}\mathcal{M}_{\text{pnnn}} \quad (\text{C-2-159})$$

$$\langle nnnp|g_A A_+|\text{He}\rangle = -\sqrt{2}g_A \mathcal{M}_{\text{pnnn}} \quad (\text{C-2-160})$$

$$\langle nnnp|g_A A_-|\text{He}\rangle = \sqrt{2}g_A \mathcal{M}_{\text{pnnn}} \quad (\text{C-2-161})$$

$$\langle nnnp|g_A A_z|\text{He}\rangle = \sqrt{2}g_A \mathcal{M}_{\text{pnnn}} \quad (\text{C-2-162})$$

ここで $\mathcal{M}$ を以下で定義した。

$$\mathcal{M}_{\text{pnnn}} \equiv -\mathcal{M}(2,3,4) + \mathcal{M}(1,3,4) \quad (\text{C-2-163})$$

C.3 反応振幅計算-全体-

C.3.1 $(\tilde{\tau}^4\text{He}) \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 + \nu_\tau + \mathbf{t} + \mathbf{n}$ の反応振幅計算

以上の計算を用いて、反応 (3-3-1) の反応振幅を計算する。求めたい振幅は (3-3-8) より、以下のようになる。

$$|\mathcal{M}((\tilde{\tau}^4\text{He}) \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 \nu_\tau \text{tn})| = \underbrace{\langle \text{tn} | J^\mu | ^4\text{He} \rangle}_{H_{\text{tn}}^\mu} \underbrace{\langle \tilde{\chi}_1^0 \nu_\tau | j_\mu | \tilde{\tau} \rangle}_{\lambda_\mu} \quad (\text{C-3-1})$$

ここで λ_μ は leptonic part の計算にて表した量である。 H_{tn}^μ は (C-2-78) ~ (C-2-81) で表した量である。これらは各々の定義から、以下となる。

$$\begin{aligned} \lambda_\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_1 \pm i\lambda_2) & H_{\text{tn}}^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}}(H_{\text{tn}}^1 \pm iH_{\text{tn}}^2) \\ \lambda_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_+ + \lambda_-) & H_{\text{tn}}^1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(H_{\text{tn}}^+ + H_{\text{tn}}^-) \\ \lambda_2 &= -\frac{i}{\sqrt{2}}(\lambda_+ - \lambda_-) & H_{\text{tn}}^2 &= -\frac{i}{\sqrt{2}}(H_{\text{tn}}^+ - H_{\text{tn}}^-) \end{aligned} \quad (\text{C-3-2})$$

よって

$$\begin{aligned} \mathcal{M}((\tilde{\tau}^4\text{He}) \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 \nu_\tau \text{tn}) &= \lambda_\mu H_{\text{tn}}^\mu \\ &= \lambda_0 H_{\text{tn}}^0 + \lambda_1 H_{\text{tn}}^1 + \lambda_2 H_{\text{tn}}^2 + \lambda_3 H_{\text{tn}}^3 \\ &= \lambda_0 H_{\text{tn}}^0 + \frac{1}{2}(\lambda_+ + \lambda_-)(H_{\text{tn}}^+ + H_{\text{tn}}^-) - \frac{1}{2}(\lambda_+ - \lambda_-)(H_{\text{tn}}^+ - H_{\text{tn}}^-) + \lambda_z H_{\text{tn}}^z \\ &= \lambda_0 H_{\text{tn}}^0 + \lambda_- H_{\text{tn}}^+ + \lambda_+ H_{\text{tn}}^- + \lambda_z H_{\text{tn}}^z \end{aligned} \quad (\text{C-3-3})$$

この式において、hadronic part の振幅の二乗は異なる終状態で和をとるので、以下のように表される。

$$|H_{\text{tn}}^0|^2 = 2\mathcal{M}_{\text{tn}}^2 \quad (\text{C-3-4})$$

$$|H_{\text{tn}}^+|^2 = 2g_A^2 \mathcal{M}_{\text{tn}}^2 \quad (\text{C-3-5})$$

$$|H_{\text{tn}}^-|^2 = 2g_A^2 \mathcal{M}_{\text{tn}}^2 \quad (\text{C-3-6})$$

$$|H_{\text{tn}}^z|^2 = 2g_A^2 \mathcal{M}_{\text{tn}}^2 \quad (\text{C-3-7})$$

ゆえに、反応振幅の二乗は以下で表される。

$$|\mathcal{M}((\tilde{\tau}^4\text{He}) \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 \nu_\tau \text{tn})|^2 = |\lambda_0|^2 |H_{\text{tn}}^0|^2 + |\lambda_-|^2 |H_{\text{tn}}^+|^2 + |\lambda_+|^2 |H_{\text{tn}}^-|^2 + |\lambda_z|^2 |H_{\text{tn}}^z|^2 \quad (\text{C-3-8})$$

この式を表すにあたって、leptonic part で行った計算から $\lambda_\mu \lambda_\nu^*$ の必要な部分のみを残した。また (C-1-19) ~ (C-1-23) の式において、 $p_{\nu z}$ が寄与する部分である (C-1-20) は、断面積計算の終状態運動量積分で消えるとして落とした。この式を、(C-1-19) ~ (C-1-23)、(C-2-78) ~ (C-2-81) を用いて具体的に表すと、以下ようになる。

$$|\mathcal{M}((\tilde{\tau}^4\text{He}) \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 \nu_\tau \text{tn})|^2 = \frac{8m_{\tilde{\chi}_1^0} G_F^2 |g_R|^2}{m_\tau^2} \mathcal{M}_{\text{tn}}^2 (1 + 3g_A) E_\nu \quad (\text{C-3-9})$$

C.3.2 $(\tilde{\tau}^4\text{He}) \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 + \nu_\tau + \mathbf{d} + \mathbf{n} + \mathbf{n}$ の反応振幅計算

次に反応 (3-3-2) の反応振幅を計算する。計算の方法は (3-3-1) のものと同じである。求めたい振幅は (3-3-12) より以下となる。

$$|\mathcal{M}((\tilde{\tau}^4\text{He}) \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 \nu_\tau \text{dnn})| = \underbrace{\langle \text{dnn} | J^\mu | ^4\text{He} \rangle}_{H_{\text{dnn}}^\mu} \underbrace{\langle \tilde{\chi}_1^0 \nu_\tau | j_\mu | \tilde{\tau} \rangle}_{\lambda_\mu} \quad (\text{C-3-10})$$

この式において、 H_{dnn}^μ は (C-2-128) ~ (C-2-134) で表した量である。反応振幅の二乗は C.3.1 と同じく、以下ようになる。

$$|\mathcal{M}((\tilde{\tau}^4\text{He}) \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 \nu_\tau \text{dnn})|^2 = |\lambda_0|^2 |H_{\text{dnn}}^0|^2 + |\lambda_-|^2 |H_{\text{dnn}}^+|^2 + |\lambda_+|^2 |H_{\text{dnn}}^-|^2 + |\lambda_z|^2 |H_{\text{dnn}}^z|^2 \quad (\text{C-3-11})$$

この式において、hadronic part の振幅の二乗は異なる終状態で和をとるので、以下のように表される。

$$|H_{\text{dnn}}^0|^2 = 3\mathcal{M}_{\text{dnn}}^2 \quad (\text{C-3-12})$$

$$|H_{\text{dnn}}^+|^2 = 2g_A^2 (\mathcal{M}_{\text{dnn}}^2 + \mathcal{M}_{\text{dnn}}'^2) \quad (\text{C-3-13})$$

$$|H_{\text{dnn}}^-|^2 = 2g_A^2 (\mathcal{M}_{\text{dnn}}^2 + \mathcal{M}_{\text{dnn}}'^2) \quad (\text{C-3-14})$$

$$|H_{\text{dnn}}^z|^2 = 2g_A^2 (\mathcal{M}_{\text{dnn}}^2 + \mathcal{M}_{\text{dnn}}'^2) \quad (\text{C-3-15})$$

以上を用いると、反応振幅の二乗は以下で表される。

$$|\mathcal{M}((\tilde{\tau}^4\text{He}) \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 \nu_\tau \text{dnn})|^2 = \frac{12m_{\tilde{\chi}_1^0} G_F^2 |g_R|^2}{m_\tau^2} ((1 + 2g_A^2) \mathcal{M}_{\text{dnn}}^2 + 2g_A^2 \mathcal{M}_{\text{dnn}}'^2) E_\nu \quad (\text{C-3-16})$$

C.3.3 $(\tilde{\tau}^4\text{He}) \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 + \nu_\tau + \mathbf{p} + \mathbf{n} + \mathbf{n} + \mathbf{n}$ の反応振幅計算

以上の計算を用いて、反応 (3-3-3) の反応振幅を計算する。求めたい振幅は (3-3-15) より、以下のようになる。

$$|\mathcal{M}((\tilde{\tau}^4\text{He}) \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 \nu_\tau \text{pnnn})| = \underbrace{\langle \text{pnnn} | J^\mu | ^4\text{He} \rangle}_{H_{\text{pnnn}}^\mu} \underbrace{\langle \tilde{\chi}_1^0 \nu_\tau | j_\mu | \tilde{\tau} \rangle}_{\lambda_\mu} \quad (\text{C-3-17})$$

ここで λ_μ は leptonic part の計算にて表した量である。 H_{tn}^μ は (C-3-19) ~ (C-3-22) で表した量である。反応振幅の二乗は C.3.1 と同じく、以下ようになる。

$$|\mathcal{M}((\tilde{\tau}^4\text{He}) \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 \nu_\tau \text{pnnn})|^2 = |\lambda_0|^2 |H_{\text{pnnn}}^0|^2 + |\lambda_-|^2 |H_{\text{pnnn}}^+|^2 + |\lambda_+|^2 |H_{\text{pnnn}}^-|^2 + |\lambda_z|^2 |H_{\text{pnnn}}^z|^2 \quad (\text{C-3-18})$$

この式において、hadronic part の振幅の二乗は異なる終状態で和をとるので、以下のように表される。

$$|H_{\text{pnnn}}^0|^2 = 2\mathcal{M}_{\text{pnnn}}^2 \quad (\text{C-3-19})$$

$$|H_{\text{pnnn}}^+|^2 = 2g_A^2 \mathcal{M}_{\text{pnnn}}^2 \quad (\text{C-3-20})$$

$$|H_{\text{pnnn}}^-|^2 = 2g_A^2 \mathcal{M}_{\text{pnnn}}^2 \quad (\text{C-3-21})$$

$$|H_{\text{pnnn}}^z|^2 = 2g_A^2 \mathcal{M}_{\text{pnnn}}^2 \quad (\text{C-3-22})$$

以上を用いると、反応振幅の二乗は以下で表される。

$$|\mathcal{M}((\tilde{\tau}^4\text{He}) \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 \nu_\tau \text{pnnn})|^2 = \frac{8m_{\tilde{\chi}_1^0} G_F^2 |g_R|^2}{m_\tau^2} \mathcal{M}_{\text{pnnn}}^2 (1 + 3g_A) E_\nu \quad (\text{C-3-23})$$

C.4 反応断面積計算

C.4.1 $(\tilde{\tau}^4\text{He}) \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 + \nu_\tau + \text{t} + \text{n}$ の反応断面積計算

以上計算してきたことから、各々の反応 (3-3-1) の反応断面積を計算する。この反応の反応断面積は (3-3-7) より、以下で表される。

$$\begin{aligned}
 (\sigma v)_{\text{tn}} &\equiv \sigma v((\tilde{\tau}^4\text{He}) \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 + \nu_\tau + \text{t} + \text{n}) \\
 &= \frac{1}{2E_{\tilde{\tau}}} \int \frac{d^3\mathbf{p}_\nu}{(2\pi)^3 2E_\nu} \frac{d^3\mathbf{p}_{\tilde{\chi}_1^0}}{(2\pi)^3 2E_{\tilde{\chi}_1^0}} \frac{d^3\mathbf{p}_n}{(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{p}_t}{(2\pi)^3} \\
 &\quad \times |\mathcal{M}((\tilde{\tau}^4\text{He}) \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 \nu_\tau \text{tn})|^2 \\
 &\quad \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{\tilde{\tau}} + p_{\text{He}} - p_\nu - p_t - p_n)
 \end{aligned} \tag{3-3-7}$$

C.3.1 で計算した反応振幅 (C-3-9) を代入すると、以下のようになる。

$$\begin{aligned}
 (\sigma v)_{\text{tn}} &= \frac{1}{2E_{\tilde{\tau}}} \int \frac{d^3\mathbf{p}_\nu}{(2\pi)^3 2E_\nu} \frac{d^3\mathbf{p}_{\tilde{\chi}_1^0}}{(2\pi)^3 2E_{\tilde{\chi}_1^0}} \frac{d^3\mathbf{p}_n}{(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{p}_t}{(2\pi)^3} \\
 &\quad \times \frac{2m_{\tilde{\chi}_1^0} G_F^2 \times 2g^2 \tan^2 \theta_W \sin^2 \theta_\tau}{m_\tau^2} \mathcal{M}_{\text{tn}}^2 4(1 + 3g_A) E_\nu \\
 &\quad \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{\tilde{\tau}} + p_{\text{He}} - p_\nu - p_t - p_n)
 \end{aligned} \tag{C-4-1}$$

ここでは $|g_R| = 2g^2 \tan^2 \theta_W \sin^2 \theta_\tau$ とあらわな形で表した。デルタ関数を用いる事で、 $p_{\tilde{\chi}_1^0}$ での積分はすぐに行う事が出来る。その際、条件として、

$$p_{\tilde{\chi}_1^0} = p_{\tilde{\tau}} + p_{\text{He}} - p_{\nu\tau} - p_n - p_t \tag{C-4-2}$$

が課される。また、非相対論近似の元では $E_{\tilde{\chi}_1^0} \rightarrow m_{\tilde{\chi}_1^0}$, $E_{\tilde{\tau}} \rightarrow m_{\tilde{\tau}}$ とする事ができ、

$$\begin{aligned}
 &= 2(1 + 3g_A^2) \frac{g^2 \tan^2 \theta_W \sin^2 \theta_\tau}{(2\pi)^8} \frac{1}{m_{\tilde{\tau}}} \frac{G_F^2}{m_\tau^2} \\
 &\quad \times \int d^3p_\nu d^3p_n d^3p_t \delta(E_{\tilde{\tau}} + E_{\text{He}} - E_\nu - E_{\tilde{\chi}_1^0} - E_n - E_t) \mathcal{M}_{\text{tn}}^2 4
 \end{aligned} \tag{C-4-3}$$

となる。次に p_ν で積分する。角度方向での積分はすぐに行う事が出来るため、 $d^3p_\nu \rightarrow 4\pi E_\nu^2 dE_\nu$ とする事が出来る。ここで、デルタ関数の中身を以下のように置き換える。

$$\begin{aligned}
 &E_{\tilde{\tau}} + E_{\text{He}} - E_\nu - E_{\tilde{\chi}_1^0} - E_n - E_t \\
 &= m_{\tilde{\tau}} + \underbrace{4A + \Delta_{\text{He}} - E_b}_{E_{\text{He}}} - E_\nu - m_{\tilde{\chi}_1^0} - m_t - \frac{p_t^2}{2m_t} - m_n - \frac{p_n^2}{2m_n}
 \end{aligned}$$

さらに、

$$m_t = 3A + \Delta_t, \quad m_n = A + \Delta_n, \quad m_{\tilde{\tau}} - m_{\tilde{\chi}_1^0} = \delta m$$

とする。ここで表した A は統一原子質量単位¹を、 Δ_i は粒子 i の余剰エネルギーを、 E_b は He と $\bar{\tau}$ の束縛エネルギーを表している。すると

$$\begin{aligned} &= \underbrace{\delta m + \Delta_{\text{He}} - \Delta_t - \Delta_n - E_b}_{\text{改めて}\Delta_{\text{tn}}\text{とおく}} - E_\nu - \frac{p_t^2}{2m_t} - \frac{p_n^2}{2m_n} \\ &= \Delta_{\text{tn}} - E_\nu - \frac{p_t^2}{2m_t} - \frac{p_n^2}{2m_n} \end{aligned}$$

となる。よって、このデルタ関数を用いて E_ν で積分を実行することができ、その際に条件として

$$E_\nu = \Delta_{\text{tn}} - \frac{p_t^2}{2m_t} - \frac{p_n^2}{2m_n} \quad (\text{C-4-4})$$

が課される。よって、断面積は以下で表される。

$$\begin{aligned} (\sigma v)_{\text{tn}} &= 2(1 + 3g_A^2) \frac{g^2 \tan^2 \theta_W \sin^2 \theta_\tau}{(2\pi)^8} \frac{1}{m_{\bar{\tau}}} \frac{G_F^2}{m_\tau^2} 4\pi \int E_\nu d^3 p_n d^3 p_t \mathcal{M}_{\text{tn}}^2 \\ &\quad \left(E_\nu = \Delta_{\text{tn}} - \frac{p_t^2}{2m_t} - \frac{p_n^2}{2m_n} \right) \end{aligned} \quad (\text{C-4-5})$$

p_n, p_t で積分するにあたって、積分範囲について考える。 $E_\nu > 0$ であるので、 p_t から積分すると、範囲は以下ようになる。

$$0 \leq p_n \leq \sqrt{2m_n \Delta_{\text{tn}}} \quad (\text{C-4-6})$$

$$0 \leq p_t \leq \sqrt{2m_t \Delta_{\text{tn}} - \frac{m_t}{m_n} p_n^2} \quad (\text{C-4-7})$$

この積分の値を計算していく。

積分の無次元化

$\mathcal{M}_{\text{tn}}$ の変形 (C-2-67) から $\mathcal{M}_{\text{tn}}^2$ は以下のように表す事ができる。

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\text{tn}}^2 &= \left(\frac{128\pi}{3} \frac{a_{\text{He}} a_t^2}{(a_{\text{He}} + a_t)^4} \right)^{\frac{3}{2}} \\ &\quad \times \left\{ \exp \left(-\frac{2p_t^2}{3a_{\text{He}}} \right) + \exp \left(-\frac{2p_n^2}{3a_{\text{He}}} - \frac{(p_t + p_n)^2}{3(a_{\text{He}} + a_t)} \right) - 2 \exp \left(-\frac{p_t^2}{3a_{\text{He}}} - \frac{p_n^2}{3a_{\text{He}}} - \frac{(p_t + p_n)^2}{6(a_{\text{He}} + a_t)} \right) \right\} \\ &\equiv k \mathcal{M}_{\text{tn}}'^2 \end{aligned} \quad (\text{C-4-8})$$

ここでは δ 関数をもちいて $q = p_n + p_t$ とおいた。また、 δ 関数に付随している因子 $(2\pi)^3$ は終状態の運動量積分中に $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{\bar{\tau}} + p_{\text{He}} - p_\nu - p_\chi - p_t - p_n)$ という形で含まれているので、ここでは省略した。さらに k を定数、 $\mathcal{M}_{\text{tn}}'^2$ を $\{ \}$ と定義し、 $\mathcal{M}_{\text{tn}}'^2$ の無次元化を行った。

E_ν の変形 また、 E_ν は

$$\begin{aligned} E_\nu^2 &= \Delta_{\text{tn}}^2 + \frac{p_t^4}{4m_t^2} + \frac{p_n^4}{4m_n^2} - \frac{\Delta_{\text{tn}}}{m_t} p_t^2 - \frac{\Delta_{\text{tn}}}{m_n} p_n^2 + \frac{p_t^2 p_n^2}{2m_n m_t} \\ &= \Delta_{\text{tn}}^2 \left(1 + \frac{p_t^4}{4m_t^2 \Delta_{\text{tn}}^2} + \frac{p_n^4}{4m_n^2 \Delta_{\text{tn}}^2} - \frac{p_t^2}{m_t \Delta_{\text{tn}}} - \frac{p_n^2}{m_n \Delta_{\text{tn}}} + \frac{p_t^2 p_n^2}{2m_n m_t \Delta_{\text{tn}}^2} \right) \end{aligned}$$

¹ 基底状態にある中性炭素原子 $^{12}_6\text{C}$ の質量を基準にし、これを 12.0000 とする単位系

と表す事が出来る。ここで () は無次元になっている。

(C-4-3),(C-4-8) の式から以下の値を定義する。

$$\begin{aligned} K_{\text{tn}} &\equiv 2(1 + 3g_A^2) \frac{g^2 \tan^2 \theta_W \sin^2 \theta_\tau}{(2\pi)^8} \frac{1}{m_{\tilde{\tau}}} \frac{G_F^2}{m_\tau^2} 4\pi \times \left(\frac{128\pi}{3} \frac{a_{\text{He}} a_t^2}{(a_{\text{He}} + a_t)^4} \right)^{\frac{3}{2}} \\ &= 4(1 + 3g_A^2) \frac{g^2 \tan^2 \theta_W \sin^2 \theta_\tau}{(2\pi)^4} \frac{1}{m_{\tilde{\tau}}} \frac{G_F^2}{m_\tau^2} \left(\frac{32}{3\pi} \frac{a_{\text{He}} a_t^2}{(a_{\text{He}} + a_t)^4} \right)^{\frac{3}{2}} \end{aligned} \quad (\text{C-4-9})$$

K_{tn} を用いて断面積を表すと、以下のように表す事が出来る。

$$\sigma v = K_{\text{tn}} \int E_\nu^2 \mathcal{M}_{\text{tn}}'^2 d^3 p_n d^3 p_t \quad (\text{C-4-10})$$

この積分を計算する。

角度積分 まず、積分の p_t の角度部分について、 p_t と p_n の成す角を θ として積分を行い、さらに p_n についても角度積分を行うと、以下ようになる。

$$\begin{aligned} \iint E_\nu^2 M'^2 d^3 p_n d^3 p_t &= 8\pi^2 \int E_\nu^2 p_n^2 dp_n p_t^2 dp_t \\ &\times \left[2 \exp \left(-\frac{2p_t^2}{3a_{\text{He}}} \right) - \frac{3(a_{\text{He}} + a_t)}{2p_t p_n} \left\{ \exp \left(-\frac{2p_n^2}{3a_{\text{He}}} - \frac{(p_t + p_n)^2}{3(a_{\text{He}} + a_t)} \right) - \exp \left(-\frac{2p_n^2}{3a_{\text{He}}} - \frac{(p_t - p_n)^2}{3(a_{\text{He}} + a_t)} \right) \right\} \right. \\ &\left. + \frac{6(a_{\text{He}} + a_t)}{p_t p_n} \left\{ \exp \left(-\frac{p_t^2}{3a_{\text{He}}} - \frac{p_n^2}{3a_{\text{He}}} - \frac{(p_t + p_n)^2}{6(a_{\text{He}} + a_t)} \right) - \exp \left(-\frac{p_t^2}{3a_{\text{He}}} - \frac{p_n^2}{3a_{\text{He}}} - \frac{(p_t - p_n)^2}{6(a_{\text{He}} + a_t)} \right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (\text{C-4-11})$$

変数変換 積分変数を変換する事によって、積分を無次元化する。今、変数を以下のように置き換える事にする。

$$\frac{p_t^2}{2m_t \Delta_{\text{tn}}} = t^2, \quad \frac{p_n^2}{2m_n \Delta_{\text{tn}}} = u^2 \quad (\text{C-4-12})$$

すると、 E_ν^2 は以下のように表せる。

$$E_\nu^2 = \Delta_{\text{tn}}^2 (1 + t^4 + u^4 - 2t^2 - 2u^2 + 2t^2 u^2) \quad (\text{C-4-13})$$

$\mathcal{M}_{\text{tn}}'^2$ については、一項目から順に考えていく事にする。

一項目 まず初めに、 $\mathcal{M}_{\text{tn}}'^2$ の一項目に関しての積分は、以下ようになる。

$$\begin{aligned} &16\pi^2 \iint E_\nu^2 p_t^2 p_n^2 \exp \left(-\frac{2p_t^2}{3a_{\text{He}}} \right) dp_t dp_n \\ &= 16\pi^2 (2m_t \Delta_{\text{tn}})^{\frac{3}{2}} (2m_n \Delta_{\text{tn}})^{\frac{3}{2}} \int E_\nu^2 t^2 u^2 \exp \left(-\frac{4m_t \Delta_{\text{tn}}}{3a_{\text{He}}} t^2 \right) dt du \end{aligned}$$

二、三項目 二項目、三項目は以下の様になる。

$$\begin{aligned}
& 8\pi^2 \iint E_\nu^2 p_t^2 p_n^2 dp_t dq_n \\
& \quad \times \left(-\frac{3(a_{\text{He}} + a_t)}{2p_t p_n} \right) \left\{ \exp \left(-\frac{2p_n^2}{3a_{\text{He}}} - \frac{(p_t + p_n)^2}{3(a_{\text{He}} + a_t)} \right) - \exp \left(-\frac{2p_n^2}{3a_{\text{He}}} - \frac{(p_t - p_n)^2}{3(a_{\text{He}} + a_t)} \right) \right\} \\
& = -12\pi^2 (a_{\text{He}} + a_t) \int 2m_n \Delta_{\text{tn}} u \, du \int 2m_t \Delta_{\text{tn}} t \, dt E_\nu^2 \\
& \quad \times \left\{ \exp \left(-\frac{4m_n \Delta_{\text{tn}}}{3a_{\text{He}}} u^2 - \frac{(\sqrt{2m_t \Delta_{\text{tn}}} t + \sqrt{2m_n \Delta_{\text{tn}}} u)^2}{3(a_{\text{He}} + a_t)} \right) - \right. \\
& \quad \left. \exp \left(-\frac{4m_n \Delta_{\text{tn}}}{3a_{\text{He}}} u^2 - \frac{(\sqrt{2m_t \Delta_{\text{tn}}} t - \sqrt{2m_n \Delta_{\text{tn}}} u)^2}{3(a_{\text{He}} + a_t)} \right) \right\}
\end{aligned}$$

四、五項目 最後に四項目、五項目について計算を行う。この計算は二項目、三項目と同じで、以下のようになる。

$$\begin{aligned}
& 8\pi^2 \iint E_\nu^2 p_t^2 p_n^2 \frac{6(a_{\text{He}} + a_t)}{p_n p_t} \left\{ \exp \left(-\frac{p_t^2}{3a_{\text{He}}} - \frac{p_n^2}{3a_{\text{He}}} - \frac{(p_t + p_n)^2}{6(a_{\text{He}} + a_t)} \right) \right. \\
& \quad \left. - \exp \left(-\frac{p_t^2}{3a_{\text{He}}} - \frac{p_n^2}{3a_{\text{He}}} - \frac{(p_t - p_n)^2}{6(a_{\text{He}} + a_t)} \right) \right\} dp_t dp_n \\
& = 48\pi^2 (a_{\text{He}} + a_t) \int 2m_t \Delta_{\text{tn}} t \, dt \int 2m_n \Delta_{\text{tn}} u \, du E_\nu^2 \\
& \quad \times \left\{ \exp \left(-\frac{2m_t \Delta_{\text{tn}}}{3a_{\text{He}}} t^2 - \frac{2m_n \Delta_{\text{tn}}}{3a_{\text{He}}} u^2 - \frac{(\sqrt{2m_t \Delta_{\text{tn}}} t + \sqrt{2m_n \Delta_{\text{tn}}} u)^2}{6(a_{\text{He}} + a_t)} \right) \right. \\
& \quad \left. - \exp \left(-\frac{2m_t \Delta_{\text{tn}}}{3a_{\text{He}}} t^2 - \frac{2m_n \Delta_{\text{tn}}}{3a_{\text{He}}} u^2 - \frac{(\sqrt{2m_t \Delta_{\text{tn}}} t - \sqrt{2m_n \Delta_{\text{tn}}} u)^2}{6(a_{\text{He}} + a_t)} \right) \right\}
\end{aligned}$$

以上をまとめると、求める断面積は以下のように表す事が出来る。

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma v}{K_{\text{tn}}} & = 16\pi^2 (2m_t \Delta_{\text{tn}})^{\frac{3}{2}} (2m_n \Delta_{\text{tn}})^{\frac{3}{2}} \Delta_{\text{tn}}^2 \int u^2 du \int t^2 dt E_\nu'^2 \exp \left(-\frac{4m_t \Delta_{\text{tn}}}{3a_{\text{He}}} t^2 \right) \\
& \quad - 48\pi^2 (a_{\text{He}} + a_t) m_t m_n \Delta_{\text{tn}}^4 \int u \, du \int t \, dt E_\nu'^2 \\
& \quad \times \left\{ \exp \left(-\frac{4m_n \Delta_{\text{tn}}}{3a_{\text{He}}} u^2 - \frac{(\sqrt{2m_t \Delta_{\text{tn}}} t + \sqrt{2m_n \Delta_{\text{tn}}} u)^2}{3(a_{\text{He}} + a_t)} \right) \right. \\
& \quad \left. - \exp \left(-\frac{4m_n \Delta_{\text{tn}}}{3a_{\text{He}}} u^2 - \frac{(\sqrt{2m_t \Delta_{\text{tn}}} t - \sqrt{2m_n \Delta_{\text{tn}}} u)^2}{3(a_{\text{He}} + a_t)} \right) \right\} \\
& \quad + 192\pi^2 (a_{\text{He}} + a_t) m_t m_n \Delta_{\text{tn}}^4 \int u \, du \int t \, dt E_\nu'^2 \\
& \quad \times \left\{ \exp \left(-\frac{2m_t \Delta_{\text{tn}}}{3a_{\text{He}}} t^2 - \frac{2m_n \Delta_{\text{tn}}}{3a_{\text{He}}} u^2 - \frac{(\sqrt{2m_t \Delta_{\text{tn}}} t + \sqrt{2m_n \Delta_{\text{tn}}} u)^2}{6(a_{\text{He}} + a_t)} \right) \right. \\
& \quad \left. - \exp \left(-\frac{2m_t \Delta_{\text{tn}}}{3a_{\text{He}}} t^2 - \frac{2m_n \Delta_{\text{tn}}}{3a_{\text{He}}} u^2 - \frac{(\sqrt{2m_t \Delta_{\text{tn}}} t - \sqrt{2m_n \Delta_{\text{tn}}} u)^2}{6(a_{\text{He}} + a_t)} \right) \right\} \quad (\text{C-4-14})
\end{aligned}$$

ここで新たに

$$E'_\nu \equiv 1 + t^4 + u^4 - 2t^2 - 2u^2 + 2t^2u^2$$

を定義する事で、積分を完全に無次元化した。t,u の積分範囲は、元の積分変数の範囲が

$$0 \leq p_n \leq \sqrt{2m_n \Delta_{tn}} \quad (\text{C-4-6})$$

$$0 \leq p_t \leq \sqrt{2m_t \Delta_{tn} - \frac{m_t}{m_n} p_n^2} \quad (\text{C-4-7})$$

であるため、以下ようになる。

$$\begin{aligned} 0 &\leq u \leq 1 \\ 0 &\leq t \leq \sqrt{1 - u^2} \end{aligned}$$

運動量の定義 さらに次の運動量を定義する。

$$k_t \equiv \sqrt{2m_t \Delta_{tn}}, \quad k_n \equiv \sqrt{2m_n \Delta_{tn}}$$

この式を用いて (C-4-14) の式を表すと、以下ようになる。

$$\begin{aligned} &\frac{\sigma v}{K_{tn}} \\ &= 16\pi^2 \Delta_{tn}^2 k_t^3 k_n^3 \int du u^2 \int dt t^2 E'_\nu \exp\left(-\frac{2}{3} \frac{k_t^2}{a_{\text{He}}} t^2\right) \\ &- 12\pi^2 \Delta_{tn}^2 k_t^2 k_n^2 (a_{\text{He}} + a_t) \int du u \int dt t E'_\nu \\ &\times \left\{ \exp\left[-\frac{2}{3} \frac{k_n^2}{a_1} u^2 - \frac{1}{3} \frac{(k_t t + k_n u)^2}{a_{\text{He}} + a_t}\right] - \exp\left[-\frac{2}{3} \frac{k_n^2}{a_{\text{He}}} u^2 - \frac{1}{3} \frac{(k_t t - k_n u)^2}{a_{\text{He}} + a_t}\right] \right\} \\ &+ 48\pi^2 \Delta_{tn}^2 k_t^2 k_n^2 (a_{\text{He}} + a_t) \int du u \int dt t E'_\nu \\ &\times \left\{ \exp\left[-\frac{1}{3} \frac{k_t^2}{a_{\text{He}}} t^2 - \frac{1}{3} \frac{k_n^2}{a_{\text{He}}} u^2 - \frac{1}{6} \frac{(k_t t + k_n u)^2}{a_{\text{He}} + a_t}\right] - \exp\left[-\frac{1}{3} \frac{k_t^2}{a_{\text{He}}} t^2 - \frac{1}{3} \frac{k_n^2}{a_{\text{He}}} u^2 - \frac{1}{6} \frac{(k_t t - k_n u)^2}{a_{\text{He}} + a_t}\right] \right\} \end{aligned}$$

exp の差の部分は一部くくりだす事が出来る。

二項目は

$$\begin{aligned} &\exp\left[-\frac{2}{3} \frac{k_n^2}{a_{\text{He}}} u^2 - \frac{1}{3} \frac{(k_t t + k_n u)^2}{a_{\text{He}} + a_t}\right] - \exp\left[-\frac{2}{3} \frac{k_n^2}{a_{\text{He}}} u^2 - \frac{1}{3} \frac{(k_t t - k_n u)^2}{a_{\text{He}} + a_t}\right] \\ &= \exp\left(-\frac{2}{3} \frac{k_n^2}{a_{\text{He}}} u^2 - \frac{1}{3} \frac{k_t^2 t^2 + k_n^2 u^2}{a_{\text{He}} + a_t} - \frac{2}{3} \frac{k_t k_n t u}{a_{\text{He}} + a_t}\right) \\ &\quad - \exp\left(-\frac{2}{3} \frac{k_n^2}{a_{\text{He}}} u^2 - \frac{1}{3} \frac{k_t^2 t^2 + k_n^2 u^2}{a_{\text{He}} + a_t} + \frac{2}{3} \frac{k_t k_n t u}{a_{\text{He}} + a_t}\right) \\ &= -\exp\left(-\frac{2}{3} \frac{k_n^2}{a_{\text{He}}} u^2 - \frac{1}{3} \frac{k_t^2 t^2 + k_n^2 u^2}{a_{\text{He}} + a_t}\right) \left[\exp\left(\frac{2}{3} \frac{k_t k_n t u}{a_{\text{He}} + a_t}\right) - \exp\left(-\frac{2}{3} \frac{k_t k_n t u}{a_{\text{He}} + a_t}\right) \right] \\ &= -2 \exp\left(-\frac{2}{3} \frac{k_n^2}{a_{\text{He}}} u^2 - \frac{1}{3} \frac{k_t^2 t^2 + k_n^2 u^2}{a_{\text{He}} + a_t}\right) \sinh\left(\frac{2}{3} \frac{k_t k_n t u}{a_{\text{He}} + a_t}\right) \end{aligned}$$

となる。さらに三項目は

$$\begin{aligned} & \exp \left[-\frac{1}{3} \frac{k_t^2}{a_{\text{He}}} t^2 - \frac{1}{3} \frac{k_n^2}{a_{\text{He}}} u^2 - \frac{1}{6} \frac{(k_t t + k_n u)^2}{a_{\text{He}} + a_t} \right] - \exp \left[-\frac{1}{3} \frac{k_t^2}{a_{\text{He}}} t^2 - \frac{1}{3} \frac{k_n^2}{a_{\text{He}}} u^2 - \frac{1}{6} \frac{(k_t t - k_n u)^2}{a_{\text{He}} + a_t} \right] \\ &= -2 \exp \left(-\frac{1}{3} \frac{k_t^2 t^2 + k_n^2 u^2}{a_{\text{He}}} - \frac{1}{6} \frac{k_t^2 t^2 + k_n^2 u^2}{a_{\text{He}} + a_t} \right) \sinh \left(\frac{1}{3} \frac{k_t k_n t u}{a_{\text{He}} + a_t} \right) \end{aligned}$$

となる。

これらを代入して、積分範囲も明示して結果をまとめると、以下ようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma v}{K_{\text{tn}}} \\ &= 16\pi^2 \Delta_{\text{tn}}^2 k_t^3 k_n^3 \int_0^1 du u^2 \int_0^{\sqrt{1-u^2}} dt t^2 E_\nu'^2 \exp \left(-\frac{2}{3} \frac{k_t^2}{a_{\text{He}}} t^2 \right) \\ &+ 24\pi^2 \Delta_{\text{tn}}^2 k_t^2 k_n^2 (a_{\text{He}} + a_t) \int_0^1 du u \int_0^{\sqrt{1-u^2}} dt t E_\nu'^2 \exp \left(-\frac{2}{3} \frac{k_n^2}{a_{\text{He}}} u^2 - \frac{1}{3} \frac{k_t^2 t^2 + k_n^2 u^2}{a_{\text{He}} + a_t} \right) \sinh \left(\frac{2}{3} \frac{k_t k_n t u}{a_{\text{He}} + a_t} \right) \\ &- 96\pi^2 \Delta_{\text{tn}}^2 k_t^2 k_n^2 (a_{\text{He}} + a_t) \int_0^1 du u \int_0^{\sqrt{1-u^2}} dt t E_\nu'^2 \exp \left(-\frac{1}{3} \frac{k_t^2 t^2 + k_n^2 u^2}{a_{\text{He}}} - \frac{1}{6} \frac{k_t^2 t^2 + k_n^2 u^2}{a_{\text{He}} + a_t} \right) \sinh \left(\frac{1}{3} \frac{k_t k_n t u}{a_{\text{He}} + a_t} \right) \end{aligned}$$

これをさらに見やすく整理する。まず、右辺について次のようにまとめる。

$$\frac{\sigma v}{K_{\text{tn}}} = 8\pi^2 \Delta_{\text{tn}}^2 k_t^2 k_n^2 (a_{\text{He}} + a_t) \left\{ 2 \frac{k_t k_n}{a_{\text{He}} + a_t} \int \cdots + 3 \int \cdots + 12 \int \cdots \right\} \quad (\text{C-4-15})$$

左辺の K_{tn} を右辺に移行する。ここで K_{tn} は以下の式で表される量である。

$$K_{\text{tn}} = 4(1 + 3g_A^2) \frac{g^2 \tan^2 \theta_W \sin^2 \theta_\tau}{(2\pi)^4} \frac{1}{m_{\tilde{\tau}}} \frac{G_F^2}{m_\tau^2} \left(\frac{32}{3\pi} \frac{a_{\text{He}} a_t^2}{(a_{\text{He}} + a_t)^4} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (\text{C-4-9})$$

また、(C-4-15) の右辺の $k_t^2 k_n^2$ を $4m_t m_n \Delta_{\text{tn}}^2$ に直すと、以下のように表せる。

$$\begin{aligned} (\sigma v)_{\text{tn}} &= \frac{8}{\pi^2} \left(\frac{32}{3\pi} \right)^{\frac{3}{2}} g^2 \tan^2 \theta_W \sin^2 \theta_\tau (1 + 3g_A^2) G_F^2 \Delta_{\text{tn}}^4 \\ &\times \frac{m_t m_n}{m_{\tilde{\tau}} m_\tau^2} \frac{a_{\text{He}}^{\frac{3}{2}} a_t^2}{(a_{\text{He}} + a_t)^5} \cdot I(^4\text{He} \rightarrow \text{tn}) \end{aligned} \quad (\text{C-4-16})$$

ここで、 $I(^4\text{He} \rightarrow \text{tn})$ は以下で定義される。

$$\begin{aligned}
I(^4\text{He} \rightarrow \text{tn}) &= 2 \frac{k_t k_n}{a_{\text{He}} + a_t} \int_0^1 du u^2 \int_0^{\sqrt{1-u^2}} dt t^2 (1-t^2-u^2)^2 \exp\left(-\frac{2}{3} \frac{k_t^2}{a_{\text{He}}} t^2\right) \\
&+ 3 \int_0^1 du u \int_0^{\sqrt{1-u^2}} dt t (1-t^2-u^2)^2 \exp\left(-\frac{2}{3} \frac{k_n^2}{a_{\text{He}}} u^2 - \frac{1}{3} \frac{k_t^2 t^2 + k_n^2 u^2}{a_{\text{He}} + a_t}\right) \sinh\left(\frac{2}{3} \frac{k_t k_n t u}{a_{\text{He}} + a_t}\right) \\
&- 12 \int_0^1 du u \int_0^{\sqrt{1-u^2}} dt t (1-t^2-u^2)^2 \exp\left(-\frac{1}{3} \frac{k_t^2 t^2 + k_n^2 u^2}{a_{\text{He}}} - \frac{1}{6} \frac{k_t^2 t^2 + k_n^2 u^2}{a_{\text{He}} + a_t}\right) \sinh\left(\frac{1}{3} \frac{k_t k_n t u}{a_{\text{He}} + a_t}\right) \\
&= \int_0^1 du \int_0^{\sqrt{1-u^2}} dt (1-t^2-u^2)^2 \\
&\times \left\{ \begin{aligned} &2 \frac{k_n k_t}{a_{\text{He}} + a_t} (t^2 u^2) \exp\left(-\frac{2}{3} \frac{k_t^2}{a_{\text{He}}} t^2\right) \\ &+ 3 t u \exp\left(-\frac{2}{3} \frac{k_n^2}{a_{\text{He}}} u^2 - \frac{1}{3} \frac{k_t^2 t^2 + k_n^2 u^2}{a_{\text{He}} + a_t}\right) \sinh\left(\frac{2}{3} \frac{k_t k_n t u}{a_{\text{He}} + a_t}\right) \\ &- 12 t u \exp\left(-\frac{1}{3} \frac{k_t^2 t^2 + k_n^2 u^2}{a_{\text{He}}} - \frac{1}{6} \frac{k_t^2 t^2 + k_n^2 u^2}{a_{\text{He}} + a_t}\right) \sinh\left(\frac{1}{3} \frac{k_t k_n t u}{a_{\text{He}} + a_t}\right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{C-4-17})
\end{aligned}$$

以上を数値計算することで、反応 (3-3-1) の反応断面積を求める事が出来る。

C.4.2 $(\tilde{\tau}^4\text{He}) \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 + \nu_\tau + \mathbf{d} + \mathbf{n} + \mathbf{n}$ の反応断面積計算

次に反応 (3-3-2) の反応断面積を計算する。この反応の反応断面積は (3-3-11) より、以下で表される。

$$\begin{aligned}
(\sigma v)_{\text{dnn}} &= \frac{1}{2E_{\tilde{\tau}}} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_\nu}{(2\pi)^3 2E_\nu} \frac{d^3 \mathbf{p}_{\tilde{\chi}_1^0}}{(2\pi)^3 2E_{\tilde{\chi}_1^0}} \frac{d^3 \mathbf{p}_{n1}}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \mathbf{p}_{n2}}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \mathbf{p}_d}{(2\pi)^3} \\
&\times |\mathcal{M}((\tilde{\tau}^4\text{He}) \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 \nu_\tau \text{dnn})|^2 \\
&\times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{\tilde{\tau}} + p_{\text{He}} - p_\nu - p_d - p_{n1} - p_{n2}) \quad (\text{3-3-11})
\end{aligned}$$

C.3.2 で計算した反応振幅 (C-3-16) を代入すると、以下のようになる。

$$\begin{aligned}
(\sigma v)_{\text{dnn}} &= \frac{1}{2E_{\tilde{\tau}}} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_\nu}{(2\pi)^3 2E_\nu} \frac{d^3 \mathbf{p}_{\tilde{\chi}_1^0}}{(2\pi)^3 2E_{\tilde{\chi}_1^0}} \frac{d^3 \mathbf{p}_{n1}}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \mathbf{p}_{n2}}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \mathbf{p}_d}{(2\pi)^3} \\
&\times \frac{2m_{\tilde{\chi}_1^0} G_F^2 \times 2g^2 \tan^2 \theta_W \sin^2 \theta_\tau}{m_\tau^2} (6(1+2g_A^2) \mathcal{M}_{\text{dnn}}^2 + 2g_A^2 \mathcal{M}_{\text{dnn}}'^2) E_\nu \\
&\times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{\tilde{\tau}} + p_{\text{He}} - p_\nu - p_d - p_{n1} - p_{n2})
\end{aligned}$$

ここでは C.4.1 での計算と同じく $|g_R| = 2g^2 \tan^2 \theta_W \sin^2 \theta_\tau$ とあらわな形で表した。デルタ関数を用いる事で、 $p_{\tilde{\chi}_1^0}$ での積分はすぐに行う事が出来る。その際、条件として、

$$p_{\tilde{\chi}_1^0} = p_{\tilde{\tau}} + p_{\text{He}} - p_{n1} - p_{n2} - p_d \quad (\text{C-4-18})$$

が課される。また、 $\tilde{\chi}_1^0, \tilde{\tau}$ の質量が他に比べ大きいため、非相対論近似をし、 $E_{\tilde{\chi}_1^0} \rightarrow m_{\tilde{\chi}_1^0}, E_{\tilde{\tau}} \rightarrow m_{\tilde{\tau}}$ とする事が出来る。すると

$$\begin{aligned}
&= 3(1 + 2g_A^2) \frac{g^2 \tan^2 \theta_W \sin^2 \theta_\tau}{(2\pi)^{11}} \frac{1}{m_{\tilde{\tau}}} \frac{G_F^2}{m_\tau^2} \\
&\times \int d^3 p_\nu d^3 p_{n1} d^3 p_{n2} d^3 p_d \delta(E_{\tilde{\tau}} + E_{\text{He}} - E_\nu - E_{\tilde{\chi}_1^0} - E_{n1} - E_{n2} - E_d) \\
&\times \left(\mathcal{M}_{\text{dnn}}^2 + \frac{2g_A^2}{1 + 2g_A^2} \mathcal{M}_{\text{dnn}}'^2 \right) \tag{C-4-19}
\end{aligned}$$

となる。次に p_ν で積分する。角度方向での積分はすぐに実行できるため、 $d^3 p_\nu \rightarrow 4\pi E_\nu^2 dE_\nu$ とする事が出来る。ここで、デルタ関数の中身を以下のように置き換える。

$$\begin{aligned}
&E_{\tilde{\tau}} + E_{\text{He}} - E_\nu - E_{\tilde{\chi}_1^0} - E_{n1} - E_{n2} - E_d \\
&= m_{\tilde{\tau}} + \underbrace{4A + \Delta_{\text{He}} - E_b}_{E_{\text{He}}} - E_\nu - m_{\tilde{\chi}_1^0} - m_d - \frac{\mathbf{p}_d^2}{2m_d} - 2m_n - \frac{\mathbf{p}_{n1}^2}{2m_n} - \frac{\mathbf{p}_{n2}^2}{2m_n}
\end{aligned}$$

さらに

$$m_d = 2A + \Delta_d, \quad m_n = A + \Delta_n, \quad m_{\tilde{\tau}} - m_{\tilde{\chi}_1^0} = \delta m$$

とする。すると、

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{\delta m + \Delta_{\text{He}} - \Delta_d - 2\Delta_n - E_b}_{\text{改めて } \Delta_{\text{dnn}} \text{ とおく}} - E_\nu - \frac{\mathbf{p}_d^2}{2m_d} - \frac{\mathbf{p}_{n1}^2}{2m_n} - \frac{\mathbf{p}_{n2}^2}{2m_n} \\
&= \Delta_{\text{dnn}} - E_\nu - \frac{\mathbf{p}_d^2}{2m_d} - \frac{\mathbf{p}_{n1}^2}{2m_n} - \frac{\mathbf{p}_{n2}^2}{2m_n} \tag{C-4-20}
\end{aligned}$$

となる。以上から、このデルタ関数を用いて E_ν で積分する事ができ、その際条件として

$$E_\nu = \Delta_{\text{dnn}} - \frac{\mathbf{p}_d^2}{2m_d} - \frac{\mathbf{p}_{n1}^2}{2m_n} - \frac{\mathbf{p}_{n2}^2}{2m_n} \tag{C-4-21}$$

が課される。よって、断面積は以下で表される。

$$\begin{aligned}
(\sigma v)_{\text{dnn}} &= 3(1 + 2g_A^2) \frac{g^2 \tan^2 \theta_W \sin^2 \theta_\tau}{(2\pi)^{11}} \frac{1}{m_{\tilde{\tau}}} \frac{G_F^2}{m_\tau^2} 4\pi \int E_\nu^2 \left(\mathcal{M}_{\text{dnn}}^2 + \frac{2g_A^2}{1 + 2g_A^2} \mathcal{M}_{\text{dnn}}'^2 \right) d^3 p_{n1} d^3 p_{n2} d^3 p_d \\
&\left(E_\nu = \Delta_{\text{dnn}} - \frac{\mathbf{p}_d^2}{2m_d} - \frac{\mathbf{p}_{n1}^2}{2m_n} - \frac{\mathbf{p}_{n2}^2}{2m_n} \right) \tag{C-4-22}
\end{aligned}$$

p_{n1}, p_{n2}, p_d で積分するにあたって、積分範囲について考える。 $E_\nu > 0$ であるので、 $p_{n2} \rightarrow p_{n1} \rightarrow p_d$ の順に積分すると考えると、範囲は以下になる。

$$\begin{aligned}
0 &\leq p_d \leq \sqrt{2m_d \Delta_{\text{dnn}}} \\
0 &\leq p_{n1} \leq \sqrt{2m_n \Delta_{\text{dnn}} - \frac{m_n}{m_d} p_d^2} \\
0 &\leq p_{n2} \leq \sqrt{2m_n \Delta_{\text{dnn}} - \frac{m_n}{m_d} p_d^2 - p_{n1}^2}
\end{aligned}$$

この積分の値を計算していく。

積分の無次元化

$\mathcal{M}_{\text{dnn}}^2, \mathcal{M}_{\text{dnn}}'^2$ の変形 (C-2-91) から $\mathcal{M}_{\text{dnn}}^2$ の部分は以下のように表す事が出来る。

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\text{dnn}}^2 &= \left(\frac{32\pi^2 a_d}{a_{\text{He}}(a_{\text{He}} + a_d)^2} \right)^{\frac{3}{2}} \left\{ \exp \left(-\frac{4\mathbf{p}_{n2}^2 + 4\mathbf{p}_{n2} \cdot \mathbf{p}_d + 3\mathbf{p}_d^2}{4a_{\text{He}}} \right) + \exp \left(-\frac{4\mathbf{p}_{n1}^2 + 4\mathbf{p}_{n1} \cdot \mathbf{p}_d + 3\mathbf{p}_d^2}{4a_{\text{He}}} \right) \right. \\
&\quad \left. - 2 \exp \left(-\frac{2(\mathbf{p}_{n1}^2 + \mathbf{p}_{n2}^2) + 2(\mathbf{p}_{n1} + \mathbf{p}_{n2}) \cdot \mathbf{p}_d + 3\mathbf{p}_d^2}{4a_{\text{He}}} \right) \right\} \\
&= 2 \left(\frac{32\pi^2 a_d}{a_{\text{He}}(a_{\text{He}} + a_d)^2} \right)^{\frac{3}{2}} \\
&\quad \times \left\{ \exp \left(-\frac{4\mathbf{p}_{n2}^2 + 4\mathbf{p}_{n2} \cdot \mathbf{p}_d + 3\mathbf{p}_d^2}{4a_{\text{He}}} \right) - \exp \left(-\frac{2(\mathbf{p}_{n1}^2 + \mathbf{p}_{n2}^2) + 2(\mathbf{p}_{n1} + \mathbf{p}_{n2}) \cdot \mathbf{p}_d + 3\mathbf{p}_d^2}{4a_{\text{He}}} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{C-4-23}$$

ここで δ 関数に付随している因子 $(2\pi)^3$ は終状態の運動量積分中に $(2\pi)^4 \delta^4(p_{\bar{\tau}} - p_{\text{He}} - p_{\nu} - p_d - p_{n1} - p_{n2})$ という形で含まれているので省略した。また $\exp$ の 2 項目は対称性から 1 項目と同じ値を出すので、1 項目と合わせる形にし、2 をかけた。

また、同様に (C-2-117) から $\mathcal{M}_{\text{dnn}}'^2$ の部分は以下のように表す事が出来る。

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\text{dnn}}'^2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{32\pi^2 a_d}{a_{\text{He}}(a_{\text{He}} + a_d)^2} \right)^{\frac{3}{2}} \\
&\quad \left\{ \exp \left(-\frac{4\mathbf{p}_{n2}^2 + 4\mathbf{p}_{n2} \cdot \mathbf{p}_d + 3\mathbf{p}_d^2}{4a_{\text{He}}} \right) + \exp \left(-\frac{4\mathbf{p}_{n1}^2 + 4\mathbf{p}_{n1} \cdot \mathbf{p}_d + 3\mathbf{p}_d^2}{4a_{\text{He}}} \right) \right. \\
&\quad + 4 \exp \left(-\frac{3\mathbf{p}_{n1}^2 + 2\mathbf{p}_{n1} \cdot \mathbf{p}_{n2} + 3\mathbf{p}_{n2}^2}{4a_{\text{He}}} - \frac{1}{4} \frac{\mathbf{q}^2}{a_{\text{He}} + a_d} \right) \\
&\quad + 2 \exp \left(-\frac{2(\mathbf{p}_{n1}^2 + \mathbf{p}_{n2}^2) + 2(\mathbf{p}_{n1} + \mathbf{p}_{n2}) \cdot \mathbf{p}_d + 3\mathbf{p}_d^2}{4a_{\text{He}}} \right) \\
&\quad - 4 \exp \left(-\frac{3\mathbf{p}_{n1}^2 + 2\mathbf{p}_{n1} \cdot \mathbf{p}_{n2} + 3\mathbf{p}_{n2}^2}{8a_{\text{He}}} - \frac{4\mathbf{p}_{n1}^2 + 4\mathbf{p}_{n1} \cdot \mathbf{p}_d + 3\mathbf{p}_d^2}{8a_{\text{He}}} - \frac{1}{8} \frac{\mathbf{q}^2}{a_{\text{He}} + a_d} \right) \\
&\quad \left. - 4 \exp \left(-\frac{3\mathbf{p}_{n1}^2 + 2\mathbf{p}_{n1} \cdot \mathbf{p}_{n2} + 3\mathbf{p}_{n2}^2}{8a_{\text{He}}} - \frac{4\mathbf{p}_{n2}^2 + 4\mathbf{p}_{n2} \cdot \mathbf{p}_d + 3\mathbf{p}_d^2}{8a_{\text{He}}} - \frac{1}{8} \frac{\mathbf{q}^2}{a_{\text{He}} + a_d} \right) \right\}
\end{aligned}$$

ここで、対称性から $\exp$ の 2 項目は 1 項目と同じ値となり、5 項目は 6 項目と同じ値となる。よって、この式は以下で表される。

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{32\pi^2 a_d}{a_{\text{He}}(a_{\text{He}} + a_d)^2} \right)^{\frac{3}{2}} \\
&\quad \left\{ \exp \left(-\frac{4\mathbf{p}_{n2}^2 + 4\mathbf{p}_{n2} \cdot \mathbf{p}_d + 3\mathbf{p}_d^2}{4a_{\text{He}}} \right) \right. \\
&\quad + 2 \exp \left(-\frac{3\mathbf{p}_{n1}^2 + 2\mathbf{p}_{n1} \cdot \mathbf{p}_{n2} + 3\mathbf{p}_{n2}^2}{4a_{\text{He}}} - \frac{1}{4} \frac{\mathbf{q}^2}{a_{\text{He}} + a_d} \right) \\
&\quad + \exp \left(-\frac{2(\mathbf{p}_{n1}^2 + \mathbf{p}_{n2}^2) + 2(\mathbf{p}_{n1} + \mathbf{p}_{n2}) \cdot \mathbf{p}_d + 3\mathbf{p}_d^2}{4a_{\text{He}}} \right) \\
&\quad \left. - 4 \exp \left(-\frac{3\mathbf{p}_{n1}^2 + 2\mathbf{p}_{n1} \cdot \mathbf{p}_{n2} + 3\mathbf{p}_{n2}^2}{8a_{\text{He}}} - \frac{4\mathbf{p}_{n1}^2 + 4\mathbf{p}_{n1} \cdot \mathbf{p}_d + 3\mathbf{p}_d^2}{8a_{\text{He}}} - \frac{1}{8} \frac{\mathbf{q}^2}{a_{\text{He}} + a_d} \right) \right\} \tag{C-4-24}
\end{aligned}$$

以上から、 $\mathcal{M}_{\text{dnn}}^2 + \frac{2g_A^2}{1+2g_A^2}\mathcal{M}_{\text{dnn}}'^2$ は以下ようになる。

$$\begin{aligned}
& \mathcal{M}_{\text{dnn}}^2 + \frac{2g_A^2}{1+2g_A^2}\mathcal{M}_{\text{dnn}}'^2 \\
&= \left(\frac{32\pi^2 a_d}{a_{\text{He}}(a_{\text{He}} + a_d)^2} \right)^{\frac{3}{2}} \\
& \left\{ 2 \frac{1+3g_A^2}{1+2g_A^2} \exp \left(-\frac{4\mathbf{p}_{n2}^2 + 4\mathbf{p}_{n2} \cdot \mathbf{p}_d + 3\mathbf{p}_d^2}{4a_{\text{He}}} \right) \right. \\
& \quad - 2 \frac{1+g_A^2}{1+2g_A^2} \exp \left(-\frac{2(\mathbf{p}_{n1}^2 + \mathbf{p}_{n2}^2) + 2(\mathbf{p}_{n1} + \mathbf{p}_{n2}) \cdot \mathbf{p}_d + 3\mathbf{p}_d^2}{4a_{\text{He}}} \right) \\
& \quad + \frac{4g_A^2}{1+2g_A^2} \exp \left(-\frac{3\mathbf{p}_{n1}^2 + 2\mathbf{p}_{n1} \cdot \mathbf{p}_{n2} + 3\mathbf{p}_{n2}^2}{4a_{\text{He}}} - \frac{1}{4} \frac{\mathbf{q}^2}{a_{\text{He}} + a_d} \right) \\
& \quad \left. - \frac{8g_A^2}{1+2g_A^2} \exp \left(-\frac{3\mathbf{p}_{n1}^2 + 2\mathbf{p}_{n1} \cdot \mathbf{p}_{n2} + 3\mathbf{p}_{n2}^2}{8a_{\text{He}}} - \frac{4\mathbf{p}_{n1}^2 + 4\mathbf{p}_{n1} \cdot \mathbf{p}_d + 3\mathbf{p}_d^2}{8a_{\text{He}}} - \frac{1}{8} \frac{\mathbf{q}^2}{a_{\text{He}} + a_d} \right) \right\} \\
& \equiv k\mathcal{M}_{\text{dnn}}''^2 \tag{C-4-25}
\end{aligned}$$

この式で、 k を定数、 $\mathcal{M}_{\text{dnn}}''$ を $\{ \}$ で定義して、 $\mathcal{M}_{\text{dnn}}''$ の無次元化を行った。

E_ν の変形 また E_ν は

$$\begin{aligned}
E_\nu^2 &= \Delta_{\text{dnn}}^2 + \frac{\mathbf{p}_d^4}{4m_d^2} + \frac{\mathbf{p}_{n1}^4}{4m_n^2} + \frac{\mathbf{p}_{n2}^4}{4m_n^2} + \frac{\mathbf{p}_d^2 \mathbf{p}_{n1}^2}{2m_n m_d} + \frac{\mathbf{p}_d^2 \mathbf{p}_{n2}^2}{2m_n m_d} + \frac{\mathbf{p}_{n1}^2 \mathbf{p}_{n2}^2}{2m_n^2} \\
& \quad - \frac{\Delta_{\text{dnn}}}{m_d} \mathbf{p}_d^2 - \frac{\Delta_{\text{dnn}}}{m_n} \mathbf{p}_{n1}^2 - \frac{\Delta_{\text{dnn}}}{m_n} \mathbf{p}_{n2}^2 \\
&= \Delta_{\text{dnn}}^2 \left(1 + \frac{\mathbf{p}_d^4}{4m_d^2 \Delta_{\text{dnn}}^2} + \frac{\mathbf{p}_{n1}^4}{4m_n^2 \Delta_{\text{dnn}}^2} + \frac{\mathbf{p}_{n2}^4}{4m_n^2 \Delta_{\text{dnn}}^2} + \frac{\mathbf{p}_d^2 \mathbf{p}_{n1}^2}{2m_n m_d \Delta_{\text{dnn}}^2} + \frac{\mathbf{p}_d^2 \mathbf{p}_{n2}^2}{2m_n m_d \Delta_{\text{dnn}}^2} + \frac{\mathbf{p}_{n1}^2 \mathbf{p}_{n2}^2}{2m_n^2 \Delta_{\text{dnn}}^2} \right. \\
& \quad \left. - \frac{\mathbf{p}_d^2}{m_d \Delta_{\text{dnn}}} - \frac{\mathbf{p}_{n1}^2}{m_n \Delta_{\text{dnn}}} - \frac{\mathbf{p}_{n2}^2}{m_n \Delta_{\text{dnn}}} \right) \\
& \equiv \Delta_{\text{dnn}}^2 E_\nu''^2 \tag{C-4-26}
\end{aligned}$$

と表す事が出来る。ここで $()$ を $E_\nu''^2$ と定義し、無次元した。

さらに、(C-4-22),(C-4-25),(C-4-26) の式から、以下の値を定義する。

$$\begin{aligned}
K_{\text{dnn}} &\equiv 3(1+2g_A^2) \frac{g^2 \tan^2 \theta_W \sin^2 \theta_\tau}{(2\pi)^{11}} \frac{1}{m_\tau} \frac{G_F^2}{m_\tau^2} \times 4\pi \times \left(\frac{32\pi^2 a_d}{a_{\text{He}}(a_{\text{He}} + a_d)^2} \right)^{\frac{3}{2}} \times \Delta_{\text{dnn}}^2 \\
&= \frac{48(1+2g_A^2)g^2 \tan^2 \theta_W \sin^2 \theta_\tau \Delta_{\text{dnn}}^2}{(2\pi)^7} \left(\frac{2a_d}{a_{\text{He}}(a_{\text{He}} + a_d)^2} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{m_\tau} \frac{G_F^2}{m_\tau^2} \tag{C-4-27}
\end{aligned}$$

K_{dnn} を用いて断面積を表すと、以下のように表せる。

$$\sigma v = K \int E_\nu''^2 \mathcal{M}_{\text{dnn}}''^2 d^3 p_{n1} d^3 p_{n2} d^3 p_d \tag{C-4-28}$$

ここで $E_\nu''^2, \mathcal{M}_{\text{dnn}}''^2$ は無次元量となっている。次に、これらの積分を行う。

角度積分 (一項目) $\exp$ の一項目から計算する。 E_ν^2 は角度積分には影響しないため、ここでは省略して計算する。また簡単のため、係数はずして、角度積分に必要な部分のみを記述する。

$$\iiint \exp \left(-\frac{4\mathbf{p}_{n2}^2 + 4\mathbf{p}_{n2} \cdot \mathbf{p}_d + 3\mathbf{p}_d^2}{4a_{\text{He}}} \right) d\mathbf{p}_d d\mathbf{p}_{n1} d\mathbf{p}_{n2}$$

初めに p_{n1} について角度積分を行う。すると、

$$= (4\pi) \iiint \exp\left(-\frac{4p_{n2}^2 + 3p_d^2}{4a_{\text{He}}}\right) \exp\left(-\frac{\mathbf{p}_{n2} \cdot \mathbf{p}_d}{a_{\text{He}}}\right) p_{n1}^2 dp_{n1} d\mathbf{p}_{n2} dp_d$$

となる。次に p_d と p_{n2} との間の角を θ とし、 p_{n2} について角度積分を行うと以下ようになる。

$$= a_{\text{He}}(4\pi)^2 \iiint \frac{1}{p_{n2}p_d} \exp\left(-\frac{4p_{n2}^2 + 3p_d^2}{4a_{\text{He}}}\right) \sinh\left(\frac{p_{n2}p_d}{a_{\text{He}}}\right) d\mathbf{p}_d p_{n1}^2 dp_{n1} p_{n2}^2 dp_{n2}$$

最後に p_d について角度積分を行う。結果は

$$= a_{\text{He}}(4\pi)^3 \iiint \exp\left(-\frac{4p_{n2}^2 + 3p_d^2}{4a_{\text{He}}}\right) \sinh\left(\frac{p_{n2}p_d}{a_{\text{He}}}\right) p_d dp_d p_{n1}^2 dp_{n1} p_{n2}^2 dp_{n2}$$

となる。

角度積分 (二項目) 次に $\exp$ の二項目について考えます。この角度積分は一項目とは異なった形になるので注意が必要です。以下のように行っていきます。

$$\begin{aligned} & \iiint \exp\left(-\frac{2(p_{n1}^2 + p_{n2}^2) + 2(\mathbf{p}_{n1} + \mathbf{p}_{n2}) \cdot \mathbf{p}_d + 3p_d^2}{4a_{\text{He}}}\right) d\mathbf{p}_d d\mathbf{p}_{n1} d\mathbf{p}_{n2} \\ &= \iiint \exp\left(-\frac{2(p_{n1}^2 + p_{n2}^2) + 3p_d^2}{4a_{\text{He}}}\right) \exp\left(-\frac{(\mathbf{p}_{n1} + \mathbf{p}_{n2}) \cdot \mathbf{p}_d}{2a_{\text{He}}}\right) d\mathbf{p}_d d\mathbf{p}_{n1} d\mathbf{p}_{n2} \end{aligned}$$

被積分関数の形に注目し、これを以下のような重心運動量、相対運動量で表す。

$$\mathbf{K} \equiv \frac{\mathbf{p}_{n1} + \mathbf{p}_{n2}}{2}, \quad \mathbf{T} \equiv \mathbf{p}_{n1} - \mathbf{p}_{n2} \quad (|\mathbf{K}| \equiv K, |\mathbf{T}| \equiv T) \quad (\text{C-4-29})$$

この時、以下の式が成り立つ。

$$\begin{aligned} p_{n1}^2 + p_{n2}^2 &= 2K^2 + \frac{T^2}{2} \\ \mathbf{p}_{n1} \cdot \mathbf{p}_{n2} &= K^2 - \frac{T^2}{4} \end{aligned}$$

$\mathbf{p}_{n1}, \mathbf{p}_{n2} \rightarrow \mathbf{K}, \mathbf{T}$ の変換をするにあたり、積分範囲の変更は後で考える。この変換についての積分測度の変換は

$$d\mathbf{p}_{n1} d\mathbf{p}_{n2} = d\mathbf{K} d\mathbf{T}$$

であるため、積分は以下のように表す事ができる。

$$= \iiint \exp\left(-\frac{4K^2 + T^2 + 3p_d^2}{4a_{\text{He}}}\right) \exp\left(-\frac{\mathbf{K} \cdot \mathbf{p}_d}{a_{\text{He}}}\right) d\mathbf{p}_d d\mathbf{K} d\mathbf{T}$$

p_d と K との間の角度を θ とし、 p_d について角度積分を行う。

$$= 4\pi a_{\text{He}} \iiint \frac{1}{Kp_d} \exp\left(-\frac{4K^2 + T^2 + 3p_d^2}{4a_{\text{He}}}\right) \sinh\left(\frac{Kp_d}{a_{\text{He}}}\right) p_d^2 dp_d d\mathbf{K} d\mathbf{T}$$

最後に K, T について角度積分を行う。結果は

$$= a_{\text{He}}(4\pi)^3 \iiint \exp\left(-\frac{4K^2 + T^2 + 3p_d^2}{4a_{\text{He}}}\right) \sinh\left(\frac{Kp_d}{a_{\text{He}}}\right) p_d dp_d K dK T^2 dT$$

となる。

角度積分 (三項目) 次に $\exp$ の三項目について計算を行う。

$$\iiint \exp \left(-\frac{3p_{n1}^2 + 2\mathbf{p}_{n1} \cdot \mathbf{p}_{n2} + 3p_{n2}^2}{4a_{\text{He}}} - \frac{1}{4} \frac{q^2}{a_{\text{He}} + a_{\text{d}}} \right) d\mathbf{p}_{\text{d}} d\mathbf{p}_{n1} d\mathbf{p}_{n2}$$

運動量保存則から $q = p_{n1} + p_{n2} + p_{\text{d}}$ が成り立つので、これを代入すると以下ようになる。

$$= \iiint \exp \left(-\frac{3p_{n1}^2 + 2\mathbf{p}_{n1} \cdot \mathbf{p}_{n2} + 3p_{n2}^2}{4a_{\text{He}}} - \frac{1}{4} \frac{(p_{n1} + p_{n2} + p_{\text{d}})^2}{a_{\text{He}} + a_{\text{d}}} \right) d\mathbf{p}_{\text{d}} d\mathbf{p}_{n1} d\mathbf{p}_{n2}$$

さらに、これを以下のように表す。

$$= \iiint \exp \left(-\frac{3(p_{n1}^2 + p_{n2}^2) + 2\mathbf{p}_{n1} \cdot \mathbf{p}_{n2}}{4a_{\text{He}}} - \frac{1}{4} \frac{((p_{n1} + p_{n2}) + p_{\text{d}})^2}{a_{\text{He}} + a_{\text{d}}} \right) d\mathbf{p}_{\text{d}} d\mathbf{p}_{n1} d\mathbf{p}_{n2}$$

この式について、このままでは角度積分できないため、(C-4-29) を用いて変数変換する。積分測度に注意して、これを以下のように表す。

$$= \iiint \exp \left(-\frac{6K^2 + \frac{3}{2}T^2 + 2K^2 - \frac{1}{2}T^2}{4a_{\text{He}}} - \frac{1}{4} \frac{(2\mathbf{K} + \mathbf{p}_{\text{d}})^2}{a_{\text{He}} + a_{\text{d}}} \right) d\mathbf{p}_{\text{d}} d\mathbf{K} dT$$

展開して、 $\mathbf{K} \cdot \mathbf{p}_{\text{d}}$ の項を分けて表す。

$$= \iiint \exp \left(-\frac{8K^2 + T^2}{4a_{\text{He}}} - \frac{1}{4} \frac{4K^2 + p_{\text{d}}^2}{a_{\text{He}} + a_{\text{d}}} \right) \exp \left(-\frac{\mathbf{K} \cdot \mathbf{p}_{\text{d}}}{a_{\text{He}} + a_{\text{d}}} \right) d\mathbf{p}_{\text{d}} d\mathbf{K} dT$$

$\mathbf{K}, \mathbf{p}_{\text{d}}$ の成す角を θ とし、 p_{d} について角度積分を実行する。結果は、以下ようになる。

$$= (4\pi) \iiint \frac{a_{\text{He}} + a_{\text{d}}}{K p_{\text{d}}} \exp \left(-\frac{8K^2 + T^2}{4a_{\text{He}}} - \frac{1}{4} \frac{4K^2 + p_{\text{d}}^2}{a_{\text{He}} + a_{\text{d}}} \right) \sinh \left(\frac{K p_{\text{d}}}{a_{\text{He}} + a_{\text{d}}} \right) p_{\text{d}}^2 dp_{\text{d}} d\mathbf{K} dT$$

最後に、 $\mathbf{K}$ と T について角度積分を実行し、結果は以下ようになる。

$$= (4\pi)^3 (a_{\text{He}} + a_{\text{d}}) \iiint \exp \left(-\frac{8K^2 + T^2}{4a_{\text{He}}} - \frac{1}{4} \frac{4K^2 + p_{\text{d}}^2}{a_{\text{He}} + a_{\text{d}}} \right) \sinh \left(\frac{K p_{\text{d}}}{a_{\text{He}} + a_{\text{d}}} \right) p_{\text{d}} dp_{\text{d}} K dK T^2 dT$$

角度積分 (四項目) 最後に $\exp$ の四項目について計算を行う。この項については、これまでのように重心運動量、相対運動量に分ける方法が使えないため、工夫することが必要になる。

$$\iiint \exp \left(-\frac{3p_{n1}^2 + 2\mathbf{p}_{n1} \cdot \mathbf{p}_{n2} + 3p_{n2}^2}{8a_{\text{He}}} - \frac{4p_{n1}^2 + 4\mathbf{p}_{n1} \cdot \mathbf{p}_{\text{d}} + 3p_{\text{d}}^2}{8a_{\text{He}}} - \frac{1}{8} \frac{q^2}{a_{\text{He}} + a_{\text{d}}} \right)$$

簡単のため、 $\exp$ の中身だけを取り出して変数変換を考える。

$$-\frac{3p_{n1}^2 + 2\mathbf{p}_{n1} \cdot \mathbf{p}_{n2} + 3p_{n2}^2}{8a_{\text{He}}} - \frac{4p_{n1}^2 + 4\mathbf{p}_{n1} \cdot \mathbf{p}_{\text{d}} + 3p_{\text{d}}^2}{8a_{\text{He}}} - \frac{1}{8} \frac{q^2}{a_{\text{He}} + a_{\text{d}}}$$

通分を行うと。

$$= -\frac{1}{8a_{\text{He}}(a_{\text{He}} + a_{\text{d}})} \left\{ \begin{array}{l} (a_{\text{He}} + a_{\text{d}})(3p_{n1}^2 + 2\mathbf{p}_{n1} \cdot \mathbf{p}_{n2} + 3p_{n2}^2) \\ + (a_{\text{He}} + a_{\text{d}})(4p_{n1}^2 + 4\mathbf{p}_{n1} \cdot \mathbf{p}_{\text{d}} + 3p_{\text{d}}^2) \\ + a_{\text{He}} q^2 \end{array} \right\}$$

となる。 $\mathbf{q} = \mathbf{p}_{n1} + \mathbf{p}_{n2} + \mathbf{p}_d$ として、 $\mathbf{q}$ をあらわに書く。また第一項、第二項も展開して表すと、

$$= -\frac{1}{8a_{\text{He}}(a_{\text{He}} + a_d)} \left\{ \begin{aligned} &7(a_{\text{He}} + a_d)p_{n1}^2 + 2(a_{\text{He}} + a_d)\mathbf{p}_{n1} \cdot \mathbf{p}_{n2} + 3(a_{\text{He}} + a_d)p_{n2}^2 \\ &+ 4(a_{\text{He}} + a_d)\mathbf{p}_{n1} \cdot \mathbf{p}_d + 3(a_{\text{He}} + a_d)p_d^2 \\ &+ a_{\text{He}}((\mathbf{p}_{n1} + \mathbf{p}_{n2})^2 + 2(\mathbf{p}_{n1} + \mathbf{p}_{n2}) \cdot \mathbf{p}_d + p_d^2) \end{aligned} \right\}$$

となる。これを展開して、 p_d について整理すると、以下ようになる。

$$= -\frac{1}{8a_{\text{He}}(a_{\text{He}} + a_d)} \left\{ \begin{aligned} &(4a_{\text{He}} + 3a_d)p_d^2 + \{(6a_{\text{He}} + 4a_d)\mathbf{p}_{n1} + 2a_{\text{He}}\mathbf{p}_{n2}\} \cdot \mathbf{p}_d \\ &+ (8a_{\text{He}} + 7a_d)p_{n1}^2 + (4a_{\text{He}} + 2a_d)\mathbf{p}_{n1} \cdot \mathbf{p}_{n2} + (4a_{\text{He}} + 3a_d)p_{n2}^2 \end{aligned} \right\}$$

これを p_d について平方完成する。その結果、以下のように表す事が出来る。

$$= -\frac{1}{8a_{\text{He}}(a_{\text{He}} + a_d)} \left\{ \begin{aligned} &(4a_{\text{He}} + 3a_d) \left(\mathbf{p}_d + \frac{1}{4a_{\text{He}} + 3a_d} [(3a_{\text{He}} + 2a_d)\mathbf{p}_{n1} + a_{\text{He}}\mathbf{p}_{n2}] \right)^2 \\ &- \frac{1}{4a_{\text{He}} + 3a_d} \{(3a_{\text{He}} + 2a_d)\mathbf{p}_{n1} + a_{\text{He}}\mathbf{p}_{n2}\}^2 \\ &+ (8a_{\text{He}} + 7a_d)p_{n1}^2 + (4a_{\text{He}} + 2a_d)\mathbf{p}_{n1} \cdot \mathbf{p}_{n2} + (4a_{\text{He}} + 3a_d)p_{n2}^2 \end{aligned} \right\}$$

ここで、第一項について、係数を変換する。

$$\frac{3a_{\text{He}} + 2a_d}{4a_{\text{He}} + 3a_d} \mathbf{p}_{n1} = a \mathbf{p}_{n1} \quad \left(a \equiv \frac{3a_{\text{He}} + 2a_d}{4a_{\text{He}} + 3a_d} \right) \quad (\text{C-4-30})$$

$$\frac{a_{\text{He}}}{4a_{\text{He}} + 3a_d} \mathbf{p}_{n2} = b \mathbf{p}_{n2} \quad \left(b \equiv \frac{a_{\text{He}}}{4a_{\text{He}} + 3a_d} \right) \quad (\text{C-4-31})$$

さらに、以下の置き換えをし、

$$a^2 + b^2 = \frac{10a_{\text{He}}^2 + 12a_{\text{He}}a_d + 4a_d^2}{(4a_{\text{He}} + 3a_d)^2} \equiv c^2 \quad (\text{C-4-32})$$

として、以下のようにおく。

$$\frac{a}{c} \equiv \alpha, \quad \frac{b}{c} \equiv \beta \quad (\text{C-4-33})$$

このとき $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ が成り立つ。この操作は後の変数変換のときに役に立つ。ここでは今定めた α, β, c を用いて式を表す事にする。式は以下になる。

$$= -\frac{1}{8a_{\text{He}}(a_{\text{He}} + a_d)} \left\{ \begin{aligned} &(4a_{\text{He}} + 3a_d) (\mathbf{p}_d + c(\alpha\mathbf{p}_{n1} + \beta\mathbf{p}_{n2}))^2 \\ &- (4a_{\text{He}} + 3a_d)c^2(\alpha\mathbf{p}_{n1} + \beta\mathbf{p}_{n2})^2 \\ &+ (8a_{\text{He}} + 7a_d)p_{n1}^2 + (4a_{\text{He}} + 2a_d)\mathbf{p}_{n1} \cdot \mathbf{p}_{n2} + (4a_{\text{He}} + 3a_d)p_{n2}^2 \end{aligned} \right\}$$

ここで、式変形を簡単にするため、各項の係数を以下のように置く。

$$4a_{\text{He}} + 3a_d \equiv A \quad (\text{C-4-34})$$

$$8a_{\text{He}} + 7a_d \equiv B \quad (\text{C-4-35})$$

$$4a_{\text{He}} + 2a_d \equiv C \quad (\text{C-4-36})$$

$$a_{\text{He}} + a_d \equiv \quad (\text{C-4-37})$$

すると、式は以下のように表される。

$$= -\frac{1}{8a_{\text{He}}D} \left\{ \begin{array}{c} A(\mathbf{p}_d + c(\alpha\mathbf{p}_{n1} + \beta\mathbf{p}_{n2}))^2 \\ -Ac^2(\alpha\mathbf{p}_{n1} + \beta\mathbf{p}_{n2})^2 \\ +Bp_{n1}^2 + C\mathbf{p}_{n1} \cdot \mathbf{p}_{n2} + Ap_{n2}^2 \end{array} \right\}$$

さらに、 $\mathbf{p}_{n1}, \mathbf{p}_{n2}$ について、以下の変数変換をする。

$$\begin{aligned} \alpha\mathbf{p}_{n1} + \beta\mathbf{p}_{n2} &= \mathbf{K}' \\ -\beta\mathbf{p}_{n1} + \alpha\mathbf{p}_{n2} &= \mathbf{T}' \end{aligned}$$

この変換は直交変換であるため、積分測度は以下ようになる。

$$d\mathbf{p}_{n1}d\mathbf{p}_{n2} = d\mathbf{K}'d\mathbf{T}'$$

また、 $\mathbf{p}_{n1}, \mathbf{p}_{n2}$ を $\mathbf{K}, \mathbf{T}$ で表すと、以下ようになる。

$$\mathbf{p}_{n1} = \alpha\mathbf{K}' - \beta\mathbf{T}' \quad (\text{C-4-38})$$

$$\mathbf{p}_{n2} = \beta\mathbf{K}' + \alpha\mathbf{T}' \quad (\text{C-4-39})$$

この関係式を用いて、式の第三項以降を変形する。

$$\begin{aligned} Bp_{n1}^2 + C\mathbf{p}_{n1} \cdot \mathbf{p}_{n2} + Ap_{n2}^2 &= B(\alpha^2 K'^2 - 2\alpha\beta \mathbf{K}' \cdot \mathbf{T}' + \beta^2 T'^2) \\ &\quad + C[\alpha\beta K'^2 + (\alpha^2 - \beta^2) \mathbf{K}' \cdot \mathbf{T}' - \alpha\beta T'^2] \\ &\quad + A(\beta^2 K'^2 + 2\alpha\beta \mathbf{K}' \cdot \mathbf{T}' + \alpha^2 T'^2) \end{aligned}$$

それぞれの項についてまとめると、以下ようになる。

$$\begin{aligned} &= (B\alpha^2 + C\alpha\beta + A\beta^2)K'^2 \\ &\quad + [C(\alpha^2 - \beta^2) + 2\alpha\beta(A - B)]\mathbf{K}' \cdot \mathbf{T}' \\ &\quad + (A\alpha^2 - C\alpha\beta + B\beta^2)T'^2 \end{aligned}$$

さらに $A - B = -4D$ より

$$\begin{aligned} &= (B\alpha^2 + C\alpha\beta + A\beta^2)K'^2 \\ &\quad + [C(\alpha^2 - \beta^2) - 8\alpha\beta D]\mathbf{K}' \cdot \mathbf{T}' \\ &\quad + (A\alpha^2 - C\alpha\beta + B\beta^2)T'^2 \end{aligned}$$

となる。以上を用いると、exp の中身の式は、以下ようになる。

$$-\frac{1}{8a_{\text{He}}D} \left\{ \begin{array}{c} A(\mathbf{p}_d + c\mathbf{K}')^2 - Ac^2\mathbf{K}'^2 \\ +(B\alpha^2 + C\alpha\beta + A\beta^2)K'^2 \\ +(C(\alpha^2 - \beta^2) - 8D\alpha\beta)\mathbf{K}' \cdot \mathbf{T}' \\ +(A\alpha^2 - C\alpha\beta + B\beta^2)T'^2 \end{array} \right\}$$

角度積分を実行しやすいように、さらに係数を以下のようにする。

$$A' \equiv B\alpha^2 + C\alpha\beta + A\beta^2 \quad (\text{C-4-40})$$

$$B' \equiv C(\alpha^2 - \beta^2) - 8D\alpha\beta \quad (\text{C-4-41})$$

$$C' \equiv A\alpha^2 - C\alpha\beta + B\beta^2 \quad (\text{C-4-42})$$

これを用いて、式を以下のように表す。

$$= -\frac{1}{8a_{\text{He}}D} \{Ap_{\text{d}}^2 + A'K'^2 + C'T'^2 + 2Ac \mathbf{p}_{\text{d}} \cdot \mathbf{K}' + B' \mathbf{K}' \cdot \mathbf{T}'\}$$

以上を用いると、角度積分を実行する事が出来る。積分の形に戻すと、以下になる。

$$\begin{aligned} & \iiint \exp \left\{ -\frac{1}{8a_{\text{He}}D} \{Ap_{\text{d}}^2 + A'K'^2 + C'T'^2 + 2Ac \mathbf{p}_{\text{d}} \cdot \mathbf{K}' + B' \mathbf{K}' \cdot \mathbf{T}'\} \right\} d\mathbf{p}_{\text{d}} d\mathbf{K}' d\mathbf{T}' \\ &= \iiint \exp \left\{ -\frac{1}{8a_{\text{He}}D} \{Ap_{\text{d}}^2 + A'K'^2 + C'T'^2\} \right\} \\ & \quad \times \exp \left\{ -\frac{Ac}{4a_{\text{He}}D} \mathbf{p}_{\text{d}} \cdot \mathbf{K}' \right\} \exp \left\{ -\frac{B'}{8a_{\text{He}}D} \mathbf{K}' \cdot \mathbf{T}' \right\} d\mathbf{p}_{\text{d}} d\mathbf{K}' d\mathbf{T}' \end{aligned}$$

これより、 $\mathbf{p}_{\text{d}}, \mathbf{K}'$ の成す角を θ とし、 $\mathbf{p}_{\text{d}}$ について角度積分を実行でき、また同様に $\mathbf{K}', \mathbf{T}'$ についても角度積分を実行する事が出来る。そして、最後に $\mathbf{K}'$ について、角度積分を実行する。実行した結果、以下の式になる。

$$\begin{aligned} &= (4\pi)^3 \left(\frac{4a_{\text{He}}D}{Ac} \right) \left(\frac{8a_{\text{He}}D}{B'} \right) \iiint \exp \left\{ -\frac{1}{8a_{\text{He}}D} \{Ap_{\text{d}}^2 + A'K'^2 + C'T'^2\} \right\} \\ & \quad \times \sinh \left(\frac{Ac}{4a_{\text{He}}D} p_{\text{d}} K' \right) \sinh \left(\frac{B'}{8a_{\text{He}}D} K' T' \right) p_{\text{d}} dp_{\text{d}} dK' dT' \end{aligned}$$

角度積分まとめ 以上をまとめると、

$$\begin{aligned} \frac{\sigma v}{K} &= 2 \frac{1+3g_{\text{A}}^2}{1+2g_{\text{A}}^2} a_{\text{He}} (4\pi)^3 \iiint E_{\nu}''^2 \exp \left(-\frac{4p_{n2}^2 + 3p_{\text{d}}^2}{4a_{\text{He}}} \right) \sinh \left(\frac{p_{n2} p_{\text{d}}}{a_{\text{He}}} \right) p_{\text{d}} dp_{\text{d}} p_{n1}^2 dp_{n1} p_{n2} dp_{n2} \\ & \quad - 2 \frac{1+g_{\text{A}}^2}{1+2g_{\text{A}}^2} a_{\text{He}} (4\pi)^3 \iiint E_{\nu}''^2 \exp \left(-\frac{4K^2 + T^2 + 3p_{\text{d}}^2}{4a_{\text{He}}} \right) \sinh \left(\frac{K p_{\text{d}}}{a_{\text{He}}} \right) p_{\text{d}} dp_{\text{d}} K dK T^2 dT \\ & \quad + \frac{4g_{\text{A}}^2}{1+2g_{\text{A}}^2} (a_{\text{He}} + a_{\text{d}}) (4\pi)^3 \iiint E_{\nu}''^2 \exp \left(-\frac{8K^2 + T^2}{4a_{\text{He}}} - \frac{1}{4} \frac{4K^2 + p_{\text{d}}^2}{a_{\text{He}} + a_{\text{d}}} \right) \\ & \quad \times \sinh \left(\frac{K p_{\text{d}}}{a_{\text{He}} + a_{\text{d}}} \right) p_{\text{d}} dp_{\text{d}} K dK T^2 dT \\ & \quad - \frac{8g_{\text{A}}^2}{1+2g_{\text{A}}^2} (4\pi)^3 \left(\frac{4a_{\text{He}}D}{Ac} \right) \left(\frac{8a_{\text{He}}D}{B'} \right) \iiint E_{\nu}''^2 \exp \left\{ -\frac{1}{8a_{\text{He}}D} \{Ap_{\text{d}}^2 + A'K'^2 + C'T'^2\} \right\} \\ & \quad \times \sinh \left(\frac{Ac}{4a_{\text{He}}D} p_{\text{d}} K' \right) \sinh \left(\frac{B'}{8a_{\text{He}}D} K' T' \right) p_{\text{d}} dp_{\text{d}} dK' dT' \end{aligned} \tag{C-4-43}$$

となる。ここで、積分の部分をはっきりさせるため、余分な因子は左辺にまとめた。

変数変換 (第一項) 積分変数を変換する事によって、被積分関数を完全に無次元化する。(C-4-43) の各項は被積分関数の変数は異なっているため (第二項、第三項については同じです)、別々に考える。一項目において、変数を以下のように置き換える。

$$s^2 \equiv \frac{p_{\text{d}}^2}{2m_{\text{d}}\Delta_{\text{dnn}}}, \quad t^2 \equiv \frac{p_{n1}^2}{2m_n\Delta_{\text{dnn}}}, \quad u^2 \equiv \frac{p_{n2}^2}{2m_n\Delta_{\text{dnn}}} \tag{C-4-44}$$

すると、 $E_{\nu}''^2$ は以下のように表す事が出来る。

$$E_{\nu}''^2 = 1 + s^4 + t^4 + u^4 + 2s^2 t^2 + 2s^2 u^2 + 2t^2 u^2 - 2s^2 - 2t^2 - 2u^2 \tag{C-4-45}$$

この変数変換に伴い、積分範囲は以下のように変更される。

$$0 \leq s \leq 1 \quad (\text{C-4-46})$$

$$0 \leq t \leq \sqrt{1 - s^2} \quad (\text{C-4-47})$$

$$0 \leq u \leq \sqrt{1 - s^2 - t^2} \quad (\text{C-4-48})$$

さらに運動量として、以下を定義する。

$$k_d \equiv \sqrt{2m_d \Delta_{\text{dnn}}}, \quad k_n \equiv \sqrt{2m_n \Delta_{\text{dnn}}} \quad (\text{C-4-49})$$

すると、

$$p_d = k_d s, \quad p_{n1} = k_n t, \quad p_{n2} = k_n u$$

と表す事が出来る。以上の式を用いると、(C-4-43) の一行目は以下のように表す事が出来る。

$$\begin{aligned} & 2 \frac{1 + 3g_A^2}{1 + 2g_A^2} a_{\text{He}} (4\pi)^3 \iiint E_\nu''^2 \exp \left(-\frac{4p_{n2}^2 + 3p_d^2}{4a_{\text{He}}} \right) \sinh \left(\frac{p_{n2} p_d}{a_{\text{He}}} \right) p_d dp_d p_{n1}^2 dp_{n1} p_{n2} dp_{n2} \\ &= 2 \frac{1 + 3g_A^2}{1 + 2g_A^2} a_{\text{He}} (4\pi)^3 \iiint E_\nu''^2 \exp \left(-\frac{4k_n^2 u^2 + 3k_d^2 s^2}{4a_{\text{He}}} \right) \sinh \left(\frac{k_n k_d s u}{a_{\text{He}}} \right) k_d^2 s ds k_n^3 t^2 dt k_n^2 u du \\ &= 2 \frac{1 + 3g_A^2}{1 + 2g_A^2} a_{\text{He}} (4\pi)^3 k_d^2 k_n^5 \iiint E_\nu''^2 \exp \left(-\frac{4k_n^2 u^2 + 3k_d^2 s^2}{4a_{\text{He}}} \right) \sinh \left(\frac{k_n k_d s u}{a_{\text{He}}} \right) s t^2 u ds dt du \end{aligned}$$

変数変換 (第二項) 次に第二項について変数変換を行う。この変数変換を行うにあたり、まずは K , T の積分範囲について考える。 E_ν の式 ((C-4-22 参照)) を K, T を用いて表すと、

$$E_\nu = \Delta_{\text{dnn}} - \frac{p_d^2}{2m_d} - \frac{K^2}{m_n} - \frac{T^2}{4m_n}$$

となる。 $E_\nu > 0$ であるため、積分する順序を $T \rightarrow K \rightarrow p_d$ とすると、積分範囲は以下になる。

$$0 \leq p_d \leq \sqrt{2m_d \Delta_{\text{dnn}}} \quad (\text{C-4-50})$$

$$0 \leq K \leq \sqrt{m_n \Delta_{\text{dnn}} - \frac{m_n}{2m_d} p_d^2} \quad (\text{C-4-51})$$

$$0 \leq T \leq \sqrt{4m_n \Delta_{\text{dnn}} - \frac{2m_n}{m_d} p_d^2 - 4K^2} \quad (\text{C-4-52})$$

これを考慮し、積分変数を以下のように変換する。

$$s^2 \equiv \frac{p_d^2}{2m_d \Delta_{\text{dnn}}}, \quad t^2 \equiv \frac{K^2}{m_n \Delta_{\text{dnn}}}, \quad u^2 \equiv \frac{T^2}{4m_n \Delta_{\text{dnn}}}$$

この変換に対し、 E_ν^2 は以下ようになる。

$$\begin{aligned} E_\nu^2 &= \left(\Delta_{\text{dnn}} - \frac{p_d^2}{2m_d} - \frac{K^2}{m_n} - \frac{T^2}{4m_n} \right)^2 \\ &= \Delta_{\text{dnn}}^2 (1 - s^2 - t^2 - u^2)^2 \\ &= \Delta_{\text{dnn}}^2 (1 + s^4 + t^4 + u^4 + 2s^2 t^2 + 2s^2 u^2 + 2t^2 u^2 - 2s^2 - 2t^2 - 2u^2) \end{aligned}$$

よって、 $E_\nu''^2$ は以下ようになります。

$$E_\nu''^2 = 1 + s^4 + t^4 + u^4 + 2s^2 t^2 + 2s^2 u^2 + 2t^2 u^2 - 2s^2 - 2t^2 - 2u^2 \quad (\text{C-4-53})$$

s, v, w の範囲は、(C-4-50) ~ (C-4-52) から以下ようになる。

$$0 \leq s \leq 1 \quad (\text{C-4-54})$$

$$0 \leq t \leq \sqrt{1 - s^2} \quad (\text{C-4-55})$$

$$0 \leq u \leq \sqrt{1 - s^2 - t^2} \quad (\text{C-4-56})$$

(C-4-49) を用いると、 p_d, K, T は以下のように表す事が出来る。

$$p_d = k_d s, \quad K = \frac{k_n t}{\sqrt{2}}, \quad T = \sqrt{2} k_n u$$

以上から、(C-4-43) の第二項は以下のように表す事が出来る。

$$\begin{aligned} & -2 \frac{1 + g_A^2}{1 + 2g_A^2} a_{\text{He}} (4\pi)^3 \iiint E_\nu''^2 \exp \left(-\frac{4K^2 + T^2 + 3p_d^2}{4a_{\text{He}}} \right) \sinh \left(\frac{Kp_d}{a_{\text{He}}} \right) p_d dp_d K dK T^2 dT \\ & = -2 \frac{1 + g_A^2}{1 + 2g_A^2} a_{\text{He}} (4\pi)^3 \iiint E_\nu''^2 \exp \left(-\frac{2k_n^2 t^2 + 2k_n^2 u^2 + 3k_d^2 s^2}{4a_{\text{He}}} \right) \\ & \quad \times \sinh \left(\frac{k_n k_d s t}{\sqrt{2} a_{\text{He}}} \right) k_d^2 s ds \left(\frac{k_n^2}{2} \right) t dt (2\sqrt{2}) k_n^3 u^2 du \\ & = -2\sqrt{2} \frac{1 + g_A^2}{1 + 2g_A^2} a_{\text{He}} (4\pi)^3 k_d^2 k_n^5 \iiint E_\nu'' \exp \left(-\frac{2k_n^2 t^2 + 2k_n^2 u^2 + 3k_d^2 s^2}{4a_{\text{He}}} \right) \\ & \quad \times \sinh \left(\frac{k_n k_d s t}{\sqrt{2} a_{\text{He}}} \right) s t u^2 ds dt du \end{aligned}$$

変数変換 (第三項) 次に、第三項について変数変換を行う。変数変換の形は第二項と同じため、第三項は以下のように変換される。

$$\begin{aligned} & + \frac{4g_A^2}{1 + 2g_A^2} (4\pi)^3 (a_{\text{He}} + a_d) \iiint E_\nu''^2 \exp \left(-\frac{8K^2 + T^2}{4a_{\text{He}}} - \frac{1}{4} \frac{4K^2 + p_d^2}{a_{\text{He}} + a_d} \right) \\ & \quad \times \sinh \left(\frac{Kp_d}{a_{\text{He}} + a_d} \right) p_d dp_d K dK T^2 dT \\ & = + \frac{4g_A^2}{1 + 2g_A^2} (4\pi)^3 (a_{\text{He}} + a_d) \iiint E_\nu''^2 \exp \left(-\frac{4k_n^2 t^2 + 2k_n^2 u^2}{4a_{\text{He}}} - \frac{1}{4} \frac{2k_n^2 t^2 + k_d^2 s^2}{a_{\text{He}} + a_d} \right) \\ & \quad \times \sinh \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{k_d s k_n t}{a_{\text{He}} + a_d} \right) k_d^2 s ds \left(\frac{k_n^2}{2} \right) t dt (2\sqrt{2}) k_n^3 u^2 du \\ & = + \sqrt{2} \frac{4g_A^2}{1 + 2g_A^2} (4\pi)^3 (a_{\text{He}} + a_d) k_d^2 k_n^5 \iiint E_\nu''^2 \exp \left(-\frac{k_n^2 (2t^2 + u^2)}{2a_{\text{He}}} - \frac{1}{4} \frac{2k_n^2 t^2 + k_d^2 s^2}{a_{\text{He}} + a_d} \right) \\ & \quad \times \sinh \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{k_d k_n s t}{a_{\text{He}} + a_d} \right) s t u^2 ds dt du \end{aligned}$$

変数変換 (第四項) 第一項から第三項までと同じように、第四項についても変数変換を行う。初めに、 K', T' の積分範囲について考える。第二項、第三項の場合と同じく、 E_ν の式 (C-4-22) を K', T' ((C-4-38) 式、(C-4-39) 式参照) を用いて表すと以下ようになる。

$$E_\nu = \Delta_{\text{dnn}} - \frac{p_d^2}{2m_d} - \frac{K'^2}{2m_n} - \frac{T'^2}{2m_n}$$

$E_\nu > 0$ であるため、積分する順序を $T' \rightarrow K' \rightarrow p_d$ とすると、積分範囲は以下になる。

$$0 \leq p_d \leq \sqrt{2m_d \Delta_{\text{dnn}}} \quad (\text{C-4-57})$$

$$0 \leq K' \leq \sqrt{2m_n \Delta_{\text{dnn}} - \frac{m_n}{m_d} p_d^2} \quad (\text{C-4-58})$$

$$0 \leq T' \leq \sqrt{2m_n \Delta_{\text{dnn}} - \frac{m_n}{m_d} p_d^2 - K'^2} \quad (\text{C-4-59})$$

これを考慮し、積分変数を以下のように変換する。

$$s^2 \equiv \frac{p_d^2}{2m_d \Delta_{\text{dnn}}}, \quad t^2 \equiv \frac{K'^2}{2m_n \Delta_{\text{dnn}}}, \quad u^2 \equiv \frac{T'^2}{2m_n \Delta_{\text{dnn}}}$$

この変換に対し、 E_ν^2 は以下のようにになる。

$$\begin{aligned} E_\nu^2 &= \left(\Delta_{\text{dnn}} - \frac{p_d^2}{2m_d} - \frac{K'^2}{2m_n} - \frac{T'^2}{2m_n} \right)^2 \\ &= \Delta_{\text{dnn}}^2 (1 - s^2 - t^2 - u^2)^2 \\ &= \Delta_{\text{dnn}}^2 (1 + s^4 + t^4 + u^4 + 2s^2 t^2 + 2s^2 u^2 + 2t^2 u^2 - 2s^2 - 2t^2 - 2u^2) \end{aligned}$$

よって、 $E_\nu'^2$ は以下のようにになる。

$$E_\nu'^2 = 1 + s^4 + t^4 + u^4 + 2s^2 t^2 + 2s^2 u^2 + 2t^2 u^2 - 2s^2 - 2t^2 - 2u^2$$

s, t, u の範囲は、(C-4-57) ~ (C-4-59) から以下のようにになる。

$$0 \leq s \leq 1 \quad (\text{C-4-60})$$

$$0 \leq t \leq \sqrt{1 - s^2} \quad (\text{C-4-61})$$

$$0 \leq u \leq \sqrt{1 - s^2 - t^2} \quad (\text{C-4-62})$$

(C-4-49) を用いると、 p_d, K', T' は以下のように表す事が出来る。

$$p_d = k_d s, \quad K' = k_n t, \quad T' = k_n u$$

以上から、(C-4-43) の第四項は以下のように表す事ができます。

$$\begin{aligned} & - \frac{8g_A^2}{1 + 2g_A^2} (4\pi)^3 \left(\frac{4a_{\text{He}} D}{Ac} \right) \left(\frac{8a_{\text{He}} D}{B'} \right) \iiint E_\nu'^2 \exp \left\{ -\frac{1}{8a_{\text{He}} D} \{ A p_d^2 + A' K'^2 + C' T'^2 \} \right\} \\ & \quad \times \sinh \left(\frac{Ac}{4a_{\text{He}} D} p_d K' \right) \sinh \left(\frac{B'}{8a_{\text{He}} D} K' T' \right) p_d dp_d dK' dT' \\ &= - \frac{8g_A^2}{1 + 2g_A^2} (4\pi)^3 \left(\frac{4a_{\text{He}} D}{Ac} \right) \left(\frac{8a_{\text{He}} D}{B'} \right) \iiint E_\nu'^2 \exp \left\{ -\frac{1}{8a_{\text{He}} D} \{ A k_d^2 s^2 + A' k_n^2 t^2 + C' k_n^2 u^2 \} \right\} \\ & \quad \times \sinh \left(\frac{Ac}{4a_{\text{He}} D} k_d s k_n t \right) \sinh \left(\frac{B'}{8a_{\text{He}} D} k_n t k_n u \right) k_d^2 ds ds k_n dt k_n^2 du du \\ &= - \frac{8g_A^2}{1 + 2g_A^2} (4\pi)^3 \left(\frac{4a_{\text{He}} D}{Ac} \right) \left(\frac{8a_{\text{He}} D}{B'} \right) k_d^2 k_n^3 \iiint E_\nu'^2 \exp \left\{ -\frac{1}{8a_{\text{He}} D} \{ A k_d^2 s^2 + A' k_n^2 t^2 + C' k_n^2 u^2 \} \right\} \\ & \quad \times \sinh \left(\frac{Ac}{4a_{\text{He}} D} k_d k_n s t \right) \sinh \left(\frac{B'}{8a_{\text{He}} D} k_n^2 t u \right) s u ds dt du \end{aligned}$$

まとめ 以上の結果をまとめると、反応断面積を以下のように表す事ができます。

$$\begin{aligned}
& \frac{\sigma v}{(4\pi)^3 K_{\text{dnn}}} \\
&= 2 \frac{1+3g_A^2}{1+2g_A^2} a_{\text{He}} k_d^2 k_n^5 \int_0^1 s ds \int_0^{\sqrt{1-s^2}} t^2 dt \int_0^{\sqrt{1-s^2-t^2}} u du E_\nu'^2 \\
&\times \exp\left(-\frac{4k_n^2 u^2 + 3k_d^2 s^2}{4a_{\text{He}}}\right) \sinh\left(\frac{k_n k_d s u}{a_{\text{He}}}\right) \\
&- 2\sqrt{2} \frac{1+g_A^2}{1+2g_A^2} a_{\text{He}} k_d^2 k_n^5 \int_0^1 s ds \int_0^{\sqrt{1-s^2}} t dt \int_0^{\sqrt{1-s^2-t^2}} u^2 du \\
&\times E_\nu'^2 \exp\left(-\frac{2k_n^2 t^2 + 2k_n^2 u^2 + 3k_d^2 s^2}{4a_{\text{He}}}\right) \sinh\left(\frac{k_n k_d s t}{\sqrt{2}a_{\text{He}}}\right) \\
&+ \sqrt{2} \frac{4g_A^2}{1+2g_A^2} (a_{\text{He}} + a_d) k_d^2 k_n^5 \int_0^1 s ds \int_0^{\sqrt{1-s^2}} t dt \int_0^{\sqrt{1-s^2-t^2}} u^2 du \\
&\times E_\nu'^2 \exp\left(-\frac{k_n^2(2v^2 + w^2)}{2a_{\text{He}}} - \frac{1}{4} \frac{2k_n^2 v^2 + k_d^2 s^2}{a_{\text{He}} + a_d}\right) \sinh\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{k_d k_n s t}{a_{\text{He}} + a_d}\right) \\
&- \frac{8g_A^2}{1+2g_A^2} \left(\frac{4a_{\text{He}} D}{Ac}\right) \left(\frac{8a_{\text{He}} D}{B'}\right) k_d^2 k_n^3 \int_0^1 s ds \int_0^{\sqrt{1-s^2}} dt \int_0^{\sqrt{1-s^2-t^2}} u du \\
&\times E_\nu'^2 \exp\left\{-\frac{1}{8a_{\text{He}} D} \{Ak_d^2 s^2 + A'k_n^2 t^2 + C'k_n^2 u^2\}\right\} \sinh\left(\frac{Ac}{4a_{\text{He}} D} k_d k_n s t\right) \sinh\left(\frac{B'}{8a_{\text{He}} D} k_n^2 t u\right)
\end{aligned} \tag{C-4-63}$$

この式を、より見やすいように式変形する。まず、左辺の分母を右辺に移行し、共通因子をくくる。

$$\begin{aligned}
\sigma v = (4\pi)^3 K_{\text{dnn}} \frac{2}{1+2g_A^2} k_d^2 k_n^2 & \left\{ a_{\text{He}} k_n^3 (1+3g_A^2) \int \cdots - \sqrt{2} a_{\text{He}} k_n^3 (1+g_A^2) \int \cdots \right. \\
& \left. + 2\sqrt{2} g_A^2 (a_{\text{He}} + a_d) k_n^3 \int \cdots - 4g_A^2 k_n \left(\frac{4a_{\text{He}} D}{Ac}\right) \left(\frac{8a_{\text{He}} D}{B'}\right) \int \cdots \right\}
\end{aligned} \tag{C-4-64}$$

さらに K_{dnn} の表式、

$$K_{\text{dnn}} = \frac{48(1+2g_A^2)g^2 \tan^2 \theta_W \sin^2 \theta_\tau \Delta_{\text{dnn}}^2}{(2\pi)^7} \left(\frac{2a_d}{a_{\text{He}}(a_{\text{He}} + a_d)^2}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{m_\tau} \frac{G_F^2}{m_\tau^2} \tag{C-4-27}$$

と $k_d^2 k_n^2 = 4m_n m_d \Delta^2$ を用いると、断面積は次のようにまとめられます。

$$\sigma v = \frac{192}{\pi^4} g^2 \tan^2 \theta_W \sin^2 \theta_\tau G_F^2 \Delta_{\text{dnn}}^4 \frac{m_n m_d}{m_\tau m_\tau^2} \left(\frac{2a_d}{a_{\text{He}}(a_{\text{He}} + a_d)^2}\right)^{\frac{3}{2}} I_{\text{tn}} \tag{C-4-65}$$

ここで、 I_{tn} は (C-4-64) の $\{\}$ をまとめたものであり、以下のようになります。

$$\begin{aligned}
I_{\text{dnn}} = & \int_0^1 ds \int_0^{\sqrt{1-s^2}} dt \int_0^{\sqrt{1-s^2-t^2}} du (1-s^2-t^2-u^2)^2 \\
& \times \left\{ a_{\text{He}} k_{\text{n}}^3 (1+3g_{\text{A}}^2) s t^2 u \exp\left(-\frac{4k_{\text{n}}^2 u^2 + 3k_{\text{d}}^2 s^2}{4a_{\text{He}}}\right) \sinh\left(\frac{k_{\text{n}} k_{\text{d}} s u}{a_{\text{He}}}\right) \right. \\
& - \sqrt{2} a_{\text{He}} k_{\text{n}}^3 (1+g_{\text{A}}^2) s t u^2 \exp\left(-\frac{2k_{\text{n}}^2 t^2 + 2k_{\text{n}}^2 u^2 + 3k_{\text{d}}^2 s^2}{4a_{\text{He}}}\right) \sinh\left(\frac{k_{\text{n}} k_{\text{d}} s t}{\sqrt{2} a_{\text{He}}}\right) \\
& + 2\sqrt{2} g_{\text{A}}^2 (a_{\text{He}} + a_{\text{d}}) k_{\text{n}}^3 s t u^2 \exp\left(-\frac{k_{\text{n}}^2 (2t^2 + u^2)}{2a_{\text{He}}} - \frac{1}{4} \frac{2k_{\text{n}}^2 t^2 + k_{\text{d}}^2 s^2}{a_{\text{He}} + a_{\text{d}}}\right) \sinh\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{k_{\text{d}} k_{\text{n}} s t}{a_{\text{He}} + a_{\text{d}}}\right) \\
& - 4g_{\text{A}}^2 k_{\text{n}} \left(\frac{4a_{\text{He}} D}{Ac}\right) \left(\frac{8a_{\text{He}} D}{B'}\right) s u \\
& \left. \times \exp\left\{-\frac{1}{8a_{\text{He}} D} \{A k_{\text{d}}^2 s^2 + A' k_{\text{n}}^2 t^2 + C' k_{\text{n}}^2 u^2\}\right\} \sinh\left(\frac{Ac}{4a_{\text{He}} D} k_{\text{d}} k_{\text{n}} s t\right) \sinh\left(\frac{B'}{8a_{\text{He}} D} k_{\text{n}}^2 t u\right) \right\}
\end{aligned} \tag{C-4-66}$$

この式の第四項をさらに簡略化する。以下、冗長になるが、確認のため、詳しく記す。

まず、 $A, B, C, D, a, b, c, \alpha, \beta, A', B', C'$ の定義を書き記すと以下のようになります。

$$A = 4a_{\text{He}} + 3a_{\text{d}} \tag{C-4-34}$$

$$B = 8a_{\text{He}} + 7a_{\text{d}} \tag{C-4-35}$$

$$C = 4a_{\text{He}} + 2a_{\text{d}} \tag{C-4-36}$$

$$D = a_{\text{He}} + a_{\text{d}} \tag{C-4-37}$$

$$a = \frac{3a_{\text{He}} + 2a_{\text{d}}}{4a_{\text{He}} + 3a_{\text{d}}} \tag{C-4-30}$$

$$b = \frac{a_{\text{He}}}{4a_{\text{He}} + 3a_{\text{d}}} \tag{C-4-31}$$

$$c = \frac{\sqrt{10a_{\text{He}} 12a_{\text{He}} a_{\text{d}} + 4a_{\text{d}}^2}}{4a_{\text{He}} + 3a_{\text{d}}} \tag{C-4-32}$$

$$\alpha = \frac{3a_{\text{He}} + 2a_{\text{d}}}{\sqrt{10a_{\text{He}} 12a_{\text{He}} a_{\text{d}} + 4a_{\text{d}}^2}} \tag{C-4-33}$$

$$\beta = \frac{a_{\text{He}}}{\sqrt{10a_{\text{He}} 12a_{\text{He}} a_{\text{d}} + 4a_{\text{d}}^2}} \tag{C-4-33}$$

$$A' = B\alpha^2 + C\alpha\beta + A\beta^2 \tag{C-4-40}$$

$$B' = C(\alpha^2 - \beta^2) - 8D\alpha\beta \tag{C-4-41}$$

$$C' = A\alpha^2 - C\alpha\beta + B\beta^2 \tag{C-4-42}$$

A', B', C' を具体的に記すと、以下のようになります。

$$A' = \frac{88a_{\text{He}}^3 + 176a_{\text{He}}^2 a_{\text{d}} + 120a_{\text{He}} a_{\text{d}}^2 + 28a_{\text{d}}^3}{10a_{\text{He}} + 12a_{\text{He}} a_{\text{d}} + 4a_{\text{d}}^2} \tag{C-4-67}$$

$$B' = \frac{8(a_{\text{He}} + a_{\text{d}})^3}{10a_{\text{He}} + 12a_{\text{He}} a_{\text{d}} + 4a_{\text{d}}^2} \tag{C-4-68}$$

$$C' = \frac{32a_{\text{He}}^3 + 68a_{\text{He}}^2 a_{\text{d}} + 48a_{\text{He}} a_{\text{d}}^2 + 12a_{\text{d}}^3}{10a_{\text{He}} + 12a_{\text{He}} a_{\text{d}} + 4a_{\text{d}}^2} \tag{C-4-69}$$

以上を用いると、第四項の因子について、次のように式変形を行えます。

$$\left(\frac{4a_{\text{He}}D}{Ac}\right)\left(\frac{8a_{\text{He}}D}{B'}\right) = \frac{4\sqrt{2}a_{\text{He}}^2}{a_{\text{He}} + a_{\text{d}}}\sqrt{5a_{\text{He}}^2 + 6a_{\text{He}}a_{\text{d}} + 2a_{\text{d}}^2} \quad (\text{C-4-70})$$

$$\frac{A}{8a_{\text{He}}D} = \frac{4a_{\text{He}} + 3a_{\text{d}}}{8a_{\text{He}}(a_{\text{He}} + a_{\text{d}})} \equiv A_1 \quad (\text{C-4-71})$$

$$\frac{A'}{8a_{\text{He}}D} = \frac{22a_{\text{He}}^3 + 44a_{\text{He}}^2a_{\text{d}} + 30a_{\text{He}}a_{\text{d}}^2 + 7a_{\text{d}}^3}{4a_{\text{He}}(a_{\text{He}} + a_{\text{d}})(5a_{\text{He}}^2 + 6a_{\text{He}}a_{\text{d}} + 2a_{\text{d}}^2)} \equiv A_2 \quad (\text{C-4-72})$$

$$\frac{C'}{8a_{\text{He}}D} = \frac{8a_{\text{He}}^2 + 9a_{\text{He}}a_{\text{d}} + 3a_{\text{d}}^2}{4a_{\text{He}}(5a_{\text{He}}^2 + 6a_{\text{He}}a_{\text{d}} + 2a_{\text{d}}^2)} \equiv A_3 \quad (\text{C-4-73})$$

$$\frac{Ac}{4a_{\text{He}}D} = \frac{\sqrt{10a_{\text{He}} + 12a_{\text{He}}a_{\text{d}} + 4a_{\text{d}}^2}}{4a_{\text{He}}(a_{\text{He}} + a_{\text{d}})} \equiv A_4 \quad (\text{C-4-74})$$

$$\frac{B'}{8a_{\text{He}}D} = \frac{(a_{\text{He}} + a_{\text{d}})^2}{2a_{\text{He}}(5a_{\text{He}}^2 + 6a_{\text{He}}a_{\text{d}} + 2a_{\text{d}}^2)} \equiv A_5 \quad (\text{C-4-75})$$

すると、最終的に (C-4-66) は次のように表せる。

$$\begin{aligned} I_{\text{tn}} = & \int_0^1 ds \int_0^{\sqrt{1-s^2}} dt \int_0^{\sqrt{1-s^2-t^2}} du (1-s^2-t^2-u^2)^2 \\ & \times \left\{ a_{\text{He}}k_{\text{n}}^3(1+3g_{\text{A}}^2)stu \exp\left(-\frac{4k_{\text{n}}^2u^2+3k_{\text{d}}^2s^2}{4a_{\text{He}}}\right) \sinh\left(\frac{k_{\text{n}}k_{\text{d}}su}{a_{\text{He}}}\right) \right. \\ & - \sqrt{2}a_{\text{He}}k_{\text{n}}^3(1+g_{\text{A}}^2)stu^2 \exp\left(-\frac{2k_{\text{n}}^2t^2+2k_{\text{n}}^2u^2+3k_{\text{d}}^2s^2}{4a_{\text{He}}}\right) \sinh\left(\frac{k_{\text{n}}k_{\text{d}}st}{\sqrt{2}a_{\text{He}}}\right) \\ & + 2\sqrt{2}g_{\text{A}}^2(a_{\text{He}}+a_{\text{d}})k_{\text{n}}^3stu^2 \exp\left(-\frac{k_{\text{n}}^2(2t^2+u^2)}{2a_{\text{He}}}-\frac{1}{4}\frac{2k_{\text{n}}^2t^2+k_{\text{d}}^2s^2}{a_{\text{He}}+a_{\text{d}}}\right) \sinh\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{k_{\text{d}}k_{\text{n}}st}{a_{\text{He}}+a_{\text{d}}}\right) \\ & - 16\sqrt{2}g_{\text{A}}^2\frac{a_{\text{He}}^2}{a_{\text{He}}+a_{\text{d}}}\sqrt{5a_{\text{He}}^2+6a_{\text{He}}a_{\text{d}}+2a_{\text{d}}^2}k_{\text{n}}su \\ & \left. \times \exp(-A_1k_{\text{d}}^2s^2 - A_2k_{\text{n}}^2t^2 - A_3k_{\text{n}}^2u^2) \sinh(A_4k_{\text{d}}k_{\text{n}}st) \sinh(A_5k_{\text{n}}^2tu) \right\} \quad (\text{C-4-76}) \end{aligned}$$

C.4.3 $(\tilde{\tau}^4\text{He}) \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 + \nu_{\tau} + \mathbf{p} + \mathbf{n} + \mathbf{n} + \mathbf{n}$ の反応断面積計算

以上計算してきた事から、各々の反応 (3-3-3) の反応断面積を計算する。断面積は以下の計算を行う事で得られる。

$$\begin{aligned} (\sigma v)_{\text{pnnn}} = & \frac{1}{2E_{\tilde{\tau}}} \int \frac{d^3\mathbf{p}_{\nu}}{(2\pi)^3 2E_{\nu}} \int \frac{d^3\mathbf{p}_{\chi}}{(2\pi)^3 2E_{\chi}} \int \frac{d^3\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}_3}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}_4}{(2\pi)^3} \\ & \times |m|^2 \times (2\pi)^4 \delta^4(p_{\tilde{\tau}} + p_{\text{He}} - p_{\nu} - p_1 - p_2 - p_3 - p_4) \quad (\text{C-4-77}) \end{aligned}$$

$|m|^2$ として計算して導出した値を代入すると、次が得られる。

$$\begin{aligned} = & \frac{1}{2E_{\tilde{\tau}}} \int \frac{d^3\mathbf{p}_{\nu}}{(2\pi)^3 2E_{\nu}} \int \frac{d^3\mathbf{p}_{\chi}}{(2\pi)^3 2E_{\chi}} \int \frac{d^3\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}_3}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}_4}{(2\pi)^3} \\ & \times \frac{8m_{\chi}G_{\text{F}}^2 \times 2g^2 \tan^2 \theta_{\text{W}} \sin^2 \theta_{\tau}}{m_{\tau}^2} E_{\nu}(1+3g_{\text{A}}^2) \mathcal{M}_{\text{pnnn}}^2 \\ & \times (2\pi)^4 \delta^4(p_{\tilde{\tau}} + p_{\text{He}} - p_{\nu} - p_1 - p_2 - p_3 - p_4) \quad (\text{C-4-78}) \end{aligned}$$

この式では $|g_R|^2$ を展開してあらわな形で表した。デルタ関数を用いる事で、 p_χ での積分はすぐに行うことが出来る。その際、条件として

$$p_\chi = p_{\bar{\tau}} + p_{\text{He}} - p_\nu - p_1 - p_2 - p_3 - p_4 \quad (\text{C-4-79})$$

が課される。また、ここではスタウとニュートラリーノを非相対論的粒子で近似するとして $E_{\bar{\tau}} \rightarrow m_{\bar{\tau}}, E_\chi \rightarrow m_\chi$ とする。以上の操作を行い、綺麗にまとめると次が得られる。

$$\begin{aligned} (\sigma v)_{\text{pnnn}} &= \frac{1}{(2\pi)^{14}} \frac{2G_F^2 g^2 \tan^2 \theta_W \sin^2 \theta_\tau}{m_{\bar{\tau}} m_\tau^2} (1 + 3g_A^2) \\ &\quad \times \delta(E_{\bar{\tau}} + E_{\text{He}} - E_\nu - E_\chi - E_{p_1} - E_{p_2} - E_{p_3} - E_{p_4}) \\ &\quad \times \int d^3 p_\nu \int d^3 p_1 \int d^3 p_2 \int d^3 p_3 \int d^3 p_4 \mathcal{M}_{\text{pnnn}}^2 \end{aligned} \quad (\text{C-4-80})$$

次に p_ν で積分する。角度積分は何も問題なく出来るため、 $d^3 p_\nu \rightarrow 4\pi E_\nu^2 dE_\nu$ とする事が出来る。ここで、デルタ関数は以下のように置き換える事が出来る。

$$\begin{aligned} 0 &= E_{\bar{\tau}} + E_{\text{He}} - E_\nu - E_\chi - E_{p_1} - E_{p_2} - E_{p_3} - E_{p_4} \\ &= m_{\bar{\tau}} + 4A + \Delta_{\text{He}} - E_b - E_\nu - m_\chi - 3A - 3\Delta_n - \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2m_n} - A - \Delta_p - \frac{p_4^2}{2m_p} \\ &= \underbrace{\delta m + \Delta_{\text{He}} - 3\Delta_n - \Delta_p - E_b}_{\equiv \Delta_{\text{pnnn}}} - E_\nu - \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2m_n} - \frac{p_4^2}{2m_p} \\ &= \Delta_{\text{pnnn}} - E_\nu - \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2m_n} - \frac{p_4^2}{2m_p} \end{aligned}$$

さらに、ここでは $m_p \sim m_n$ とする近似を用いて計算を行う。すると、以下の式が得られる。

$$= \Delta - E_\nu - \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2}{2m_n}$$

この式において、 A は統一原子質量単位、 Δ_i は粒子 i の余剰エネルギー、 E_b は He とスタウとの間の束縛エネルギーを表している。このデルタ関数を用いて E_ν で積分することが出来、その際に条件として

$$E_\nu = \Delta_{\text{pnnn}} - \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2}{2m_n} \quad (\text{C-4-81})$$

が課される。よって、断面積は以下の式で表される。

$$\begin{aligned} (\sigma v)_{\text{pnnn}} &= \frac{1}{(2\pi)^{14}} \frac{2G_F^2 g^2 \tan^2 \theta_W \sin^2 \theta_\tau}{m_{\bar{\tau}} m_\tau^2} (1 + 3g_A^2) \times (4\pi) \\ &\quad \times \int d^3 p_1 \int d^3 p_2 \int d^3 p_3 \int d^3 p_4 E_\nu^2 \mathcal{M}_{\text{pnnn}}^2 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{13}} \frac{4G_F^2 g^2 \tan^2 \theta_W \sin^2 \theta_\tau}{m_{\bar{\tau}} m_\tau^2} (1 + 3g_A^2) \\ &\quad \times \int d^3 p_1 \int d^3 p_2 \int d^3 p_3 \int d^3 p_4 E_\nu^2 \mathcal{M}_{\text{pnnn}}^2 \end{aligned}$$

さらに

$$\begin{aligned}
E_\nu &= \Delta_{\text{pnnn}} - \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2}{2m_n} \\
&= \Delta_{\text{pnnn}} \left(1 - \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2}{2m_n \Delta_{\text{pnnn}}} \right) \\
&\equiv \Delta_{\text{pnnn}} E'_\nu
\end{aligned}$$

として、次の形で表す。

$$\begin{aligned}
(\sigma v)_{\text{pnnn}} &= \frac{1}{(2\pi)^{13}} \frac{4G_F^2 g^2 \tan^2 \theta_W \sin^2 \theta_\tau}{m_\tau m_\tau^2} (1 + 3g_A^2) \Delta_{\text{pnnn}}^2 \\
&\quad \times \int d^3 p_1 \int d^3 p_2 \int d^3 p_3 \int d^3 p_4 E_\nu'^2 \mathcal{M}_{\text{pnnn}}^2
\end{aligned}$$

さらに、今 $\mathcal{M}_{\text{pnnn}}^2$ は次で表される値となっている。

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\text{pnnn}}^2 &= \left(\frac{32\pi^3}{a_{\text{He}}^3} \right)^{\frac{3}{2}} \\
&\quad \left\{ \exp \left(-\frac{p_1^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_1 \cdot p_3 + p_3 \cdot p_4 + p_4 \cdot p_1}{a_{\text{He}}} \right) \right. \\
&\quad + \exp \left(-\frac{p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_2 \cdot p_3 + p_3 \cdot p_4 + p_4 \cdot p_2}{a_{\text{He}}} \right) \\
&\quad \left. - 2 \exp \left(-\frac{p_1^2 + p_1^2 + (p_1 + p_2) \cdot (p_3 + p_4) + 2(p_3^2 + p_4^2) + 2p_3 \cdot p_4}{2a_{\text{He}}} \right) \right\} \\
&\simeq 2 \left(\frac{32\pi^3}{a_{\text{He}}^3} \right)^{\frac{3}{2}} \\
&\quad \left\{ \exp \left(-\frac{p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_2 \cdot p_3 + p_3 \cdot p_4 + p_4 \cdot p_2}{a_{\text{He}}} \right) \right. \\
&\quad \left. - \exp \left(-\frac{p_1^2 + p_1^2 + (p_1 + p_2) \cdot (p_3 + p_4) + 2(p_3^2 + p_4^2) + 2p_3 \cdot p_4}{2a_{\text{He}}} \right) \right\} \\
&\equiv 2 \left(\frac{32\pi^3}{a_{\text{He}}^3} \right)^{\frac{3}{2}} \mathcal{M}_{\text{pnnn}}'^2 \tag{C-4-82}
\end{aligned}$$

上記の式において、終状態の粒子の運動量で積分する際に各項の寄与に対して以下の関係が成り立つ事を用いた。

$$\mathcal{M}^2(2, 3, 4) = \mathcal{M}^2(1, 3, 4)$$

また、余分な因子を前に出す事で次元を持つ量と無次元量 ($\mathcal{M}_{\text{pnnn}}'$) を分離した。この表式で断面積を表すと、次のように表される。

$$\begin{aligned}
(\sigma v)_{\text{pnnn}} &= \frac{1}{(2\pi)^{13}} \frac{8G_F^2 g^2 \tan^2 \theta_W \sin^2 \theta_\tau}{m_\tau m_\tau^2} (1 + 3g_A^2) \left(\frac{32\pi^3}{a^3} \right)^{\frac{3}{2}} \Delta_{\text{pnnn}}^2 \\
&\quad \times \int d^3 p_1 \int d^3 p_2 \int d^3 p_3 \int d^3 p_4 E_\nu'^2 \mathcal{M}_{\text{pnnn}}'^2 \\
&\equiv K_{\text{pnnn}} \int d^3 p_1 \int d^3 p_2 \int d^3 p_3 \int d^3 p_4 E_\nu'^2 \mathcal{M}_{\text{pnnn}}'^2 \tag{C-4-83}
\end{aligned}$$

ここで K_{pnnn} は次で表される量である。

$$K_{\text{pnnn}} \equiv \frac{1}{(2\pi)^{13}} \frac{8G_{\text{F}}^2 g^2 \tan^2 \theta_{\text{W}} \sin^2 \theta_{\tau}}{m_{\tau} m_{\tau}^2} (1 + 3g_{\text{A}}^2) \left(\frac{32\pi^3}{a_{\text{He}}^3} \right)^{\frac{3}{2}} \Delta_{\text{pnnn}}^2 \quad (\text{C-4-84})$$

このようにして、 $E'_{\nu}, \mathcal{M}'$ を無次元量とする事が出来た。次に (C-4-83) の積分計算を行う。まず初めに (C-4-82) の第一項の部分の寄与から計算を行う。

(C-4-82) の第一項の寄与の計算

ここで計算するのは以下の式である。

$$(A) \equiv \int d^3 p_1 \int d^3 p_2 \int d^3 p_3 \int d^3 p_4 \\ \times \exp \left(-\frac{p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_2 \cdot p_3 + p_3 \cdot p_4 + p_4 \cdot p_2}{a_{\text{He}}} \right) E_{\nu}'^2$$

この式を上手く角度積分する。上式を次のように式変形する。

$$= \int d^3 p_1 \int d^3 p_2 \int d^3 p_3 \int d^3 p_4 \\ \times \exp \left(-\frac{p_4^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4 \cdot (p_2 + p_3) + p_2 \cdot p_3}{a_{\text{He}}} \right) E_{\nu}'^2$$

この式に対して、次のような変数変換を施す。

$$K \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(p_2 + p_3), \quad T \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(p_2 - p_3)$$

この変数変換のヤコビアンは 1 となっているため、変数変換に伴う積分測度の関係は次のようになる。

$$d^3 p_2 d^3 p_3 = d^3 K d^3 T$$

また、次の関係式が成り立つ。

$$p_2^2 + p_3^2 = K^2 + T^2 \\ p_2 \cdot p_3 = \frac{1}{2}(K^2 - T^2) \\ p_2 + p_3 = \sqrt{2}K$$

これを用いると、(A) は次のように式変形できる。

$$(A) = \int d^3 p_1 \int d^3 K \int d^3 T \int d^3 p_4 \\ \times \exp \left(-\frac{2p_4^2 + 3K^2 + T^2}{2a_{\text{He}}} \right) \exp \left(-\frac{\sqrt{2}p_4 \cdot K}{a_{\text{He}}} \right) E_{\nu}'^2$$

p_1, T については通常通り角度積分することが出来る。

$$= (4\pi)^2 \int p_1^2 dp_1 \int d^3 K \int T^2 dT \int d^3 p_4 \\ \times \exp \left(-\frac{2p_4^2 + 3K^2 + T^2}{2a_{\text{He}}} \right) \exp \left(-\frac{\sqrt{2}p_4 \cdot K}{a_{\text{He}}} \right) E_{\nu}'^2$$

次に p_4 に対して角度積分を行う。この際、 K と成す角を θ とすると、この θ の積分から双曲線関数 $\sinh$ が生じる (dnn の計算と同じ手順である)。この計算を施すと、最終的に次が得られる。

$$(A) = (4\pi)^4 \times \frac{a_{\text{He}}}{\sqrt{2}} \int dp_1 \int dK \int dT \int dp_4 p_1^2 K T^2 p_4 \\ \times \exp\left(-\frac{2p_4^2 + 3K^2 + T^2}{2a_{\text{He}}}\right) \sinh\left(\frac{\sqrt{2}p_4 K}{a_{\text{He}}}\right) E_\nu'^2 \quad (\text{C-4-85})$$

ここではさらに p_1 で積分する事を考える。というのも、 p_1 は $\exp, \sinh$ の引数ではないため、簡単に積分できるからである。この積分をするために、まず初めに運動量積分を無次元量の積分にするように変数変換する。今、 E_ν' は次の形で表される。

$$E_\nu' = 1 - \frac{p_1^2 + K^2 + T^2 + p_4^2}{2m_n \Delta_{\text{pnnn}}}$$

今、

$$k_n \equiv \sqrt{2m_n \Delta_{\text{pnnn}}},$$

とし、

$$p_1^2 = k_n^2 s^2, \quad K^2 = k_n^2 t^2, \quad T^2 = k_n^2 u^2, \quad p_4^2 = k_n^2 v^2$$

とすると、 E_ν' は次のように表される。

$$E_\nu' = 1 - s^2 - t^2 - u^2 - v^2$$

$E_\nu' > 0$ であるため、積分範囲を次のように設定することが出来る。

$$\begin{aligned} 0 &\leq s \leq \sqrt{1 - t^2 - u^2 - v^2} \\ 0 &\leq t \leq \sqrt{1 - u^2 - v^2} \\ 0 &\leq u \leq \sqrt{1 - v^2} \\ 0 &\leq v \leq 1 \end{aligned}$$

(C-4-85) の積分は変数変換を施すと次で表される。

$$(A) = (4\pi)^4 \times \frac{a_{\text{He}}}{\sqrt{2}} \times k_n^{10} \int ds \int dt \int du \int dv s^2 t u^2 v \\ \times \exp\left(-\frac{k_n^2}{2a_{\text{He}}}(3t^2 + u^2 + 2v^2)\right) \sinh\left(\frac{\sqrt{2}k_n^2 t v}{a_{\text{He}}}\right) E_\nu'^2 \quad (\text{C-4-86})$$

ここでは s 成分の積分についてのみ考える。新しく $\delta \equiv \sqrt{1 - t^2 - u^2 - v^2}$ という値を定義し、 s 積分に必要な部分のみ記すと、次のようになる。

$$\begin{aligned} &\int_0^\delta ds s^2 (\delta^2 - s^2)^2 \\ &= \int_0^\delta (s^6 - 2\delta^2 s^4 + \delta^4 s^2) \\ &= \left[\frac{1}{7} s^7 - \frac{2}{5} \delta^2 s^5 + \frac{1}{3} \delta^4 s^3 \right]_0^\delta \\ &= \frac{8}{105} \delta^7 \end{aligned}$$

が得られる。これを用いると (A) は以下のような三重積分の形で表される。

$$(A) = (4\pi)^4 \times \frac{4\sqrt{2}a_{\text{He}}}{105} \times k_n^{10} \int dt \int du \int dv t u^2 v \\ \times \delta^7 \exp \left(-\frac{k_n^2}{2a_{\text{He}}} (3t^2 + u^2 + 2v^2) \right) \sinh \left(\frac{\sqrt{2}k_n^2 t v}{a_{\text{He}}} \right) \quad (\text{C-4-87})$$

残る積分は全て無次元量となる。次に (C-4-82) の第二項の部分の寄与を計算する。

(C-4-82) の第二項の寄与の計算

ここで計算するのは以下の式である。

$$(B) \equiv \int d^3 p_1 \int d^3 p_2 \int d^3 p_3 \int d^3 p_4 \\ \times \exp \left(-\frac{p_1^2 + p_2^2 + (p_1 + p_2) \cdot (p_3 + p_4) + 2(p_3^2 + p_4^2) + 2p_3 \cdot p_4}{2a_{\text{He}}} \right) E_\nu'^2$$

この計算では、まず初めにベクトル p_1, p_2, p_3, p_4 を次のように変数変換して考える。

$$p_1 = k_n s, \quad p_2 = k_n t, \quad p_3 = k_n u, \quad p_4 = k_n v \quad (\text{C-4-88})$$

ここで s, t, u, v は太字で表していないが、ベクトル量である。これを用いると、積分は次のように表される。

$$(B) \equiv k_n^{12} \int d^3 s \int d^3 t \int d^3 u \int d^3 v \\ \times \exp \left[-\frac{k_n^2}{a_{\text{He}}} (s^2 + t^2 + (s + t)(u + v) + 2(u^2 + v^2) + 2uv) \right] E_\nu'^2$$

以下のように変数変換する。

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(u + v), \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(u - v) \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}}(s + t), \quad w = \frac{1}{\sqrt{2}}(s - t)$$

すると、式は次のように表される。

$$(B) \equiv k_n^{12} \int d^3 x \int d^3 y \int d^3 z \int d^3 w \\ \times \exp \left[-\frac{k_n^2}{a_{\text{He}}} (3x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + 2xz) \right] E_\nu'^2 \\ = k_n^{12} \int d^3 x \int d^3 y \int d^3 z \int d^3 w \\ \times \exp \left[-\frac{k_n^2}{a_{\text{He}}} (3x^2 + y^2 + z^2 + w^2) \exp \left(-\frac{k_n^2}{a_{\text{He}}} xz \right) \right] E_\nu'^2$$

ここでは x, y, z, w の積分の角度積分をする。この角度積分をするに際して $E_\nu'^2$ の引数は x^2, y^2, z^2, w^2 であるため、気にしない事にする。

全ての変数に対して角度積分を行うと、次の結果が得られる。

$$(B) = (4\pi)^4 a_{\text{He}} k_n^{10} \iiint\limits_{\text{vol}} dx dy dz dw (xy^2 zw^2) \exp\left(-\frac{k_n^2}{a_{\text{He}}}(3x^2 + y^2 + z^2 + w^2)\right) \sinh\left(-\frac{k_n^2}{a_{\text{He}}}xz\right)$$

x, y, z, w の積分範囲について考える。今、 E'_ν は次の式で表される。

$$\begin{aligned} E'_\nu &= 1 - s^2 - t^2 - u^2 - v^2 \\ &= 1 - x^2 - y^2 - z^2 - w^2 \end{aligned}$$

$E'_\nu > 0$ という条件を課すと、積分範囲は次のようにとれる。

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq \sqrt{1 - y^2 - z^2 - w^2} \\ 0 &\leq y \leq \sqrt{1 - z^2 - w^2} \\ 0 &\leq z \leq \sqrt{1 - w^2} \\ 0 &\leq w \leq 1 \end{aligned}$$

まとめ

いままでの計算をまとめて記すと、次のように表される。

$$\begin{aligned} (\sigma v)_{\text{pnnn}} &= \frac{1}{(2\pi)^{13}} \frac{8G_{\text{F}}^2 g^2 \tan^2 \theta_{\text{W}} \sin^2 \theta_{\tau}}{m_{\tilde{\tau}} m_{\tau}^2} (1 + 3g_{\text{A}}^2) \left(\frac{32\pi^3}{a_{\text{He}}^3}\right)^{\frac{3}{2}} \Delta_{\text{pnnn}}^2 \\ &\times \left\{ (4\pi)^4 \times \frac{4\sqrt{2}a_{\text{He}}}{105} \times k_n^{10} \iiint\limits_{\text{vol}} dt du dv (tu^2 v) \right. \\ &\quad \times \delta^7 \exp\left(-\frac{k_n^2}{2a_{\text{He}}}(3t^2 + u^2 + 2v^2)\right) \sinh\left(\frac{\sqrt{2}k_n^2 tv}{a_{\text{He}}}\right) \\ &\quad - (4\pi)^4 a_{\text{He}} k_n^{10} \iiint\limits_{\text{vol}} dx dy dz dw (xy^2 zw^2) \\ &\quad \left. \exp\left(-\frac{k_n^2}{2a_{\text{He}}}(3x^2 + y^2 + z^2 + w^2)\right) \sinh\left(-\frac{k_n^2}{a_{\text{He}}}xz\right) E_\nu'^2 \right\} \end{aligned}$$

この式をより簡単なものにする。まず初めに、 $\{ \}$ 中にある $(4\pi)^4 a_{\text{He}} k_n^{10}$ をくくりだし、さらに $k_n = \sqrt{2m_n \Delta_{\text{pnnn}}}$ とすると、式は次のようになる。

$$\begin{aligned} (\sigma v)_{\text{pnnn}} &= \frac{8}{\pi^9} \left(\frac{32\pi^3}{a_{\text{He}}^3}\right)^{\frac{3}{2}} g^2 \tan^2 \theta_{\text{W}} \sin^2 \theta_{\tau} (1 + 3g_{\text{A}}^2) G_{\text{F}}^2 a_{\text{He}} \Delta_{\text{pnnn}}^7 \frac{m_n}{m_{\tilde{\tau}} m_{\tau}^2} \\ &\times \left\{ \times \frac{4\sqrt{2}}{105} \iiint\limits_{\text{vol}} dt du dv (tu^2 v) \right. \\ &\quad \times \delta^7 \exp\left(-\frac{k_n^2}{2a_{\text{He}}}(3t^2 + u^2 + 2v^2)\right) \sinh\left(\frac{\sqrt{2}k_n^2 tv}{a_{\text{He}}}\right) \\ &\quad \iiint\limits_{\text{vol}} dx dy dz dw (xy^2 zw^2) \\ &\quad \left. \exp\left(-\frac{k_n^2}{2a_{\text{He}}}(3x^2 + y^2 + z^2 + w^2)\right) \sinh\left(-\frac{k_n^2}{a_{\text{He}}}xz\right) E_\nu'^2 \right\} \end{aligned}$$

直接の計算とは関係ないが、第一項、第二項で積分変数を整える。第一項において

$$t \rightarrow s, u \rightarrow t, v \rightarrow u$$

とし、第二項において

$$x \rightarrow s, y \rightarrow t, z \rightarrow u, w \rightarrow v$$

とする。この時、断面積は次で表される。

$$\begin{aligned} (\sigma v)_{\text{pnnn}} = & \frac{8}{\pi^9} \left(\frac{32\pi^3}{a_{\text{He}}^3} \right)^{\frac{3}{2}} g^2 \tan^2 \theta_W \sin^2 \theta_\tau (1 + 3g_A^2) G_F^2 a_{\text{He}} \Delta_{\text{pnnn}}^7 \frac{m_n}{m_{\bar{\tau}} m_\tau^2} \\ & \times \left\{ \frac{4\sqrt{2}}{105} \iiint ds dt du (st^2 u) \right. \\ & \quad \times \delta^7 \exp \left(-\frac{k_n^2}{2a_{\text{He}}} (3s^2 + t^2 + 2u^2) \right) \sinh \left(\frac{\sqrt{2}k_n^2 su}{a_{\text{He}}} \right) \\ & \quad \iiint ds dt du dv (st^2 uv^2) \\ & \quad \left. \exp \left(-\frac{k_n^2}{2a_{\text{He}}} (3s^2 + t^2 + u^2 + v^2) \right) \sinh \left(-\frac{k_n^2}{a_{\text{He}}} su \right) E_\nu'^2 \right\} \end{aligned}$$

さらに第一項について

$$\int_0^\delta v^2 (\delta^2 - v^2)^2 dv = \frac{8}{105} \delta^7$$

が成り立つことから、次のように式変形を行う。

$$\begin{aligned} (\sigma v)_{\text{pnnn}} = & \frac{8}{\pi^9} \left(\frac{32\pi^3}{a_{\text{He}}^3} \right)^{\frac{3}{2}} g^2 \tan^2 \theta_W \sin^2 \theta_\tau (1 + 3g_A^2) G_F^2 a_{\text{He}} \Delta_{\text{pnnn}}^7 \frac{m_n}{m_{\bar{\tau}} m_\tau^2} \\ & \times \iiint ds dt du dv (st^2 uv^2) E_\nu'^2 \\ & \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \exp \left(-\frac{k_n^2}{2a_{\text{He}}} (3s^2 + t^2 + 2u^2) \right) \sinh \left(\frac{\sqrt{2}k_n^2 su}{a_{\text{He}}} \right) \right. \\ & \quad \left. - \exp \left(-\frac{k_n^2}{2a_{\text{He}}} (3s^2 + t^2 + u^2 + v^2) \right) \sinh \left(-\frac{k_n^2}{a_{\text{He}}} su \right) E_\nu'^2 \right\} \end{aligned}$$

上記の式をもって、数値計算を行う。

C.5 パラメーター

最後に、(3-3-1)、(3-3-2) の反応断面積を数値計算する上で用いた全パラメーターを記す。

$$m_{\text{He}} = 3.728 \times 10^3 [\text{MeV}] \quad (\text{C-5-1})$$

$$m_{\text{t}} = 2.809 \times 10^3 [\text{MeV}] \quad (\text{C-5-2})$$

$$m_{\text{d}} = 1.876 \times 10^3 [\text{MeV}] \quad (\text{C-5-3})$$

$$m_{\text{n}} = 9.396 \times 10^2 [\text{MeV}] \quad (\text{C-5-4})$$

$$m_{\text{p}} = 9.383 \times 10^2 [\text{MeV}] \quad (\text{C-5-5})$$

$$A = 9.315 \times 10^2 [\text{MeV}] \quad (\text{C-5-6})$$

$$\Delta_{\text{He}} = 2.425 [\text{MeV}] \quad (\text{C-5-7})$$

$$\Delta_{\text{t}} = 14.95 [\text{MeV}] \quad (\text{C-5-8})$$

$$\Delta_{\text{d}} = 13.14 [\text{MeV}] \quad (\text{C-5-9})$$

$$\Delta_{\text{n}} = 8.071 [\text{MeV}] \quad (\text{C-5-10})$$

$$\Delta_{\text{p}} = 6.778 [\text{MeV}] \quad (\text{C-5-11})$$

$$\Delta_{\text{tn}} = \delta m - 20.91 [\text{MeV}] \quad (\text{C-5-12})$$

$$\Delta_{\text{dnn}} = \delta m - 27.17 [\text{MeV}] \quad (\text{C-5-13})$$

$$\Delta_{\text{pnnn}} = \delta m - 28.88 [\text{MeV}] \quad (\text{C-5-14})$$

$$Eb = 0.311 [\text{MeV}] \quad (\text{C-5-15})$$

$$m_{\tau} = 1.777 \times 10^3 [\text{MeV}] \quad (\text{C-5-16})$$

$$\sin \theta_{\tau} = 0.8 \quad (\text{C-5-17})$$

$$m_{\tilde{\tau}} = 3.50 \times 10^6 [\text{MeV}] \quad (\text{C-5-18})$$

$$(R_m)_{\text{He}} = 1.49 [\text{fm}] \quad (\text{C-5-19})$$

$$a_{\text{He}} = 9.868 \times 10^3 [\text{MeV}^2] \quad (\text{C-5-20})$$

$$(R_m)_{\text{t}} = 1.928 [\text{fm}] \quad (\text{C-5-21})$$

$$a_{\text{t}} = 5.238 \times 10^3 [\text{MeV}^2] \quad (\text{C-5-22})$$

$$(R_m)_{\text{d}} = 1.966 [\text{fm}] \quad (\text{C-5-23})$$

$$a_{\text{d}} = 5.038 \times 10^3 [\text{MeV}^2] \quad (\text{C-5-24})$$

このパラメーターにおいて、各原子核の質量、余剰エネルギーは [28] の値を、 $\tilde{\tau}$ と ${}^4\text{He}$ の束縛エネルギーは [24] の値を、d、t、 ${}^4\text{He}$ の平均自乗半径はそれぞれ [25]、[26]、[27] の値を用いた。

参考文献

- [1] A. J. Korn *et al.*, Nature **442**, 657 (2006) [arXiv:astro-ph/0608201].
- [2] T. Jittoh, J. Sato, T. Shimomura and M. Yamanaka, Phys. Rev. D **73**, 055009 (2006) [arXiv:hep-ph/0512197].
- [3] T. Jittoh, K. Kohri, M. Koike, J. Sato, T. Shimomura and M. Yamanaka, Phys. Rev. D **76**, 125023 (2007) [arXiv:0704.2914 [hep-ph]].
- [4] バーバラ・ライデン (牧野伸義訳). 宇宙論入門. ピアソン・エデュケーション.(2003)
- [5] E. W. Kolb and M. S. Turner *The Early Universe* (Westview Press, 1990)
- [6] 佐藤勝彦, 二間瀬敏史 (編). 宇宙論 I. 日本評論社.(2008)
- [7] M. Pospelov, J. Pradler [arXiv:hep-ph/1011.1054]
- [8] 高橋文郎. 宇宙物理学. 朝倉書店.(1999)
- [9] 早川幸男, 佐藤文隆, 松本敏夫 (編). 現代の宇宙論. 名古屋大学出版会.(1988)
- [10] J. Dunkley *et al.* [WMAP Collaboration], “Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Astrophys. J. Suppl. **180**, 306 (2009) [arXiv:0803.0586 [astro-ph]].
- [11] R. H. Cyburt, B. D. Fields and K. A. Olive, JCAP **0811**, 012 (2008) [arXiv:0808.2818 [astro-ph]].
- [12] K. A. Olive and E. D. Skillman, Astrophys. J. **617**, 29 (2004) [arXiv:astro-ph/0405588].
- [13] M. Fukugita and M. Kawasaki, Astrophys. J. **646**, 691 (2006) [arXiv:astro-ph/0603334].
- [14] M. Pettini, B. J. Zych, M. T. Murphy, A. Lewis and C. C. Steidel, MNRAS, **391** (2008) 1499 [arXiv:0805.0594 [astro-ph]].
- [15] S. G. Ryan, J. E. Norris and T. C. Beers, Astrophys. J. **523**, 654 (1999) [arXiv:astro-ph/9903059].
- [16] P. Bonifacio *et al.*, [arXiv:astro-ph/0204332.]
- [17] M. Asplund, D. L. Lambert, P. E. Nissen, F. Primas and V. V. Smith, Astrophys. J. **644**, 229 (2006) [arXiv:astro-ph/0510636].
- [18] N. Prantzos, arXiv:astro-ph/0510122.
- [19] R. Cayrel, M. Steffen, H. Chand, H. Bonifacio, P. Spite, *et al.* A& A473:L37 (2007), 0708.3819

- [20] Michaud. G, Fontaine. G, Beaudet. G. *Astrophys. J.* **282**, 206-213 (1984)
- [21] A. E. G. Perez, W. Aoki, S. Inoue, S. G. Ryan, T. K. Suzuki and M. Chiba, arXiv:0909.5163 [astro-ph.SR].
- [22] M. Pospelov, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 231301 (2007) [arXiv:hep-ph/0605215].
- [23] K. Hamaguneutralino, T. Hatsuda, M. Kamimura, Y. Kino and T. T. Yanagida, *Phys. Lett. B* **650**, 268 (2007) [arXiv:hep-ph/0702274].
- [24] K. Kohri and F. Takayama, *Phys. Rev. D* **76**, 063507 (2007) [arXiv:hep-ph/0605243].
- [25] C. W. Wong, *Int. J. Mod. Phys. E* **3**, 821 (1994).
- [26] M. Yoshitake *et al.*, private communication.
- [27] P. Egelhof, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **46**, 307-316 (2001)
- [28] R. B. Firestone, V. S. Shirley, C. M. Baglin, S. Y. Frank Chu, J. Zipkin, *Table of Isotopes EIGHTH EDITION Vol. 1 : A = 1 - 150*, A Wiley-Interscience Publication, JOHN WILEY and SONS, INC. (1999)
- [29] J. Melendez and I. Ramirez, *Astrophys. J.* **615** (2004) L33 [arXiv:astro-ph/0409383].
- [30] P. Bonifacio *et al.*, *Astron. Astrophys.* **462** (2007) 851 [arXiv:astro-ph/0610245].
- [31] J. Geiss and G. Gloeckler, *Space Science Reviews* **106**, 3 (2003).