

素粒子標準模型を越える物理探索に対する ニュートリノ研究の寄与

埼玉大学 理工学研究科 物理機能系専攻 2年 竹之内 直

平成 20 年 3 月 31 日

目次

1	導入	3
2	ニュートリノ振動	4
2.1	世代の混合	4
2.2	真空中のニュートリノ振動	6
2.3	物質中のニュートリノ振動	7
2.4	振動パラメータの測定値	8
2.4.1	Δm_{12}^2 および θ_{12}	9
2.4.2	Δm_{23}^2 および θ_{23}	9
3	ニュートリノ質量の生成機構	12
3.1	標準模型におけるフェルミオンの質量	12
3.2	シーソー機構によるニュートリノ質量	12
4	大統一理論におけるニュートリノ質量とフレーバー問題の解決	14
4.1	新たなゲージ対称性	14
4.1.1	左右対称理論	14
4.1.2	世代間 SU(3) ゲージ対称性	14
4.2	大統一理論におけるニュートリノ質量	14
4.2.1	SU(5)、および超対称 SU(5)	15
4.2.2	SO(10)	15
4.3	フレーバー問題を説明する模型	15
4.3.1	S_n 対称性と Z_n 対称性	16
5	ニュートリノが関与する素粒子標準模型を越える反応	20
5.1	ニュートリノの電気・磁気双極子	20
5.2	ステライルニュートリノの探索	21
5.3	軽いスカラー粒子とニュートリノの反応	21
6	レーザーを用いた新しいニュートリノ実験	23
6.1	電子捕獲過程と電子捕獲率	23
6.2	レーザーを用いた電子捕獲率の増幅機構	24
6.2.1	非相対論近似	24
6.2.2	厳密解	25
7	まとめ	29

1 導入

素粒子物理学において、1970 年代初頭に素粒子標準模型が確立し、ほぼ全ての実験・観測値は素粒子標準模型を支持している。しかし究極の模型としては不満な点がいくつか存在する。理論面では、ヒッグスの質量が二次発散してしまう点や自由パラメータ数の過多などであり、実験面では、ダークマターの存在やニュートリノに質量があることを示唆するニュートリノ振動の観測が挙げられる。そのため素粒子標準模型は、より基本的な物理理論の低エネルギーでの現れであるとの見方が一般的であり、それを超える物理理論の探索、および構築がなされている。

ニュートリノは 1930 年に Pauli により存在が予言され、1950 年代にはその存在が確認されている。しかし未だにニュートリノに関しては、なぜ微小な質量や特徴的な混合パラメータを持つのか、Majorana 粒子か否かといった、多くの疑問点が残っている。本論文では、現在までの観測・実験結果から分かっているニュートリノの性質をまとめ、それらを説明する模型の可能性を議論すること、そしてレーザーを用いた新しいニュートリノ実験の可能性を探ることを目的とする。

微小な質量については、標準模型には存在しない GUT スケール (約 10^{16} GeV) の質量を持つ右巻きニュートリノによって生成される可能性があり、そのため現在の実験結果は重い右巻きニュートリノを含む大統一理論の低エネルギーでの現れであると考えられる。また、独自の混合パターンは、フェルミオンの世代間に不連続対称性を課すことで作り出される可能性があり、標準模型では説明できない世代の謎の解明への寄与が期待される。また軽いフェルミオンやスカラー粒子といった未知の粒子の探索にもニュートリノ研究からの寄与が期待できる。

以上のように、ニュートリノの性質解明は新しい物理の探索につながる。さらに議論を進めるためにはニュートリノに関するパラメータの精密測定が必要不可欠である。近年新しいニュートリノ実験として、原子核による束縛電子捕獲過程の応用実験が注目されている。その電子捕獲率がレーザーによって増幅される可能性がある。本論文でその機構を解説し、新たな物理実験の可能性を探る。

2 ニュートリノ振動

2.1 世代の混合

素粒子物理学において素粒子標準模型が確立し、ほぼ全ての実験事実を説明している。しかし近年の観測により、素粒子標準模型では説明ができない事実が二つ存在することが分かった。ひとつはダークマターの存在であり、他方はニュートリノ質量の存在である。そのため素粒子標準模型は、より基本的な物理理論の低エネルギーでの有効理論であるという見方が一般的である。そのため基本的な物理理論を解明するために理論面・実験面での探求が現在なされている。この章では、素粒子標準模型よりも根本的な理論の存在を示唆するニュートリノ質量の存在の証拠となった観測結果を、矛盾なく説明するニュートリノ振動の機構を解説する。

ニュートリノ振動は、太陽ニュートリノや大気ニュートリノの観測結果における問題点を説明できる。神岡鉱山の跡地に建設されたスーパーカミオカンデの観測に代表される、太陽から降り注ぐ電子ニュートリノのフラックスの観測から、標準太陽模型により予測されるフラックスより、実際に観測されるフラックスが小さいというデータが得られた。また、宇宙線と大気との衝突で生成される μ ニュートリノのフラックスも、予想される値より小さいことがスーパーカミオカンデの観測により明らかになった。上記のような電子、 μ ニュートリノ欠損は、ニュートリノ振動現象の結果であると解釈できる。

現在 Z ボソンの崩壊幅の実験値から、(i) Z ボソンと相互作用し、かつ (ii) Z ボソンの質量の半分以下であるニュートリノは3種類のみ存在することが分かっている。各世代に一つのニュートリノが当てられ、第一世代から e (電子) 型、 μ (ミュー) 型、 τ (タウ) 型ニュートリノと名前がついている。

ニュートリノ振動は、ニュートリノのフレーバー固有状態と質量固有状態が異なることが原因である。確認のために、標準模型のラグランジアン密度中のフェルミオンとヒッグスとの相互作用項をみる。それは、

$$\mathcal{L}_{Higgs-sector} = \lambda_{Eij} \bar{E}_i (H^* L_j) + \lambda_{Dij} \bar{D}_i (H^* Q_j) + \lambda_{Uij} \bar{U}_i (H^* i\tau^2 L_j) + h.c. \quad (1)$$

である。ここで E, L はそれぞれ右巻き荷電レプトン、左巻きレプトンの弱アイソスピン 2 重項を表し、 U, D, Q はそれぞれ右巻きアップ型クォーク、右巻きダウン型クォーク、左巻きクォークの弱アイソスピン 2 重項を表す。 H はヒッグス 2 重項を表し、 $\lambda_E, \lambda_D, \lambda_U$ は湯川相互作用定数である。また i, j は世代を表し、 $i, j = 1, 2, 3$ である。ヒッグスが真空期待値を持つことで、これらの項から荷電レプトンとクォークの質量項が現れる。ここに現れるフェルミオン場はフレーバー固有状態であるため、質量行列を対角化する質量固有状態に変換する。荷電レプトン部分を例に考えると、荷電レプトンの運動項と質量項は、右巻き (l_R) と左巻き (l_L) で次のように書ける。

$$\mathcal{L}_{charged-lepton} = \bar{l}_{Ri} \not{\partial} l_{Rj} + \bar{l}_{Li} \not{\partial} l_{Lj} + m_{Eij} \bar{l}_{Li} l_{Rj} + h.c. \quad (2)$$

ただし、 $m_{Eij} \equiv \lambda_{Eij} \langle v \rangle$ である。 m_{Eij} が対角化したい質量行列である。一般に正方行列は二つのユニタリー行列を用いて対角化できる。そこで二つの 3×3 ユニタリー行列 U_R, U_L を用いて次のように対角化する。

$$(m_E)_{dia} = U_L m_E U_R^\dagger \quad (3)$$

ただし、 $(m_E)_{dia}$ は 3×3 の対角行列である。この対角行列の成分は、ユニタリー行列を適当に選ぶと全て実数にすることができる。この関係を使うと、ラグランジアンのレプトン部分は、質量固有状態を l_R^m, l_L^m と m を付けて表すと

$$l_{Ri}^m = U_{Rij} l_{Rj} \quad , \quad l_{Li}^m = U_{Lij} l_{Lj} \quad (4)$$

とユニタリー変換することにより、

$$\bar{l}_R^m i \not{\partial} l_R^m + \bar{l}_L^m i \not{\partial} l_L^m + (m_E)_{diaij} \bar{l}_L^m l_R^m \quad (5)$$

となる。荷電レプトン同様にニュートリノも質量固有状態で表し、用いたユニタリー行列を V_R, V_L と書く。この影響が $SU(2)$ ゲージ場とフェルミオンの相互作用項に現れる。荷電レプトンとニュートリノの、荷電ボソンを介した相互作用項は、結合定数を g として、

$$\mathcal{L}_{SU(2)coppuling} = \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \bar{l}_L i \gamma^\mu \nu_L + h.c. \quad (6)$$

と書けるが、この項を前記した関係を用いてフレイバー固有状態から質量固有状態にする。するとラグランジアンは、

$$\mathcal{L}_{SU(2)coppuling} = \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \bar{l}_L^m i \gamma^\mu (U_L^\dagger V_L)_{ij} \nu_L^m + h.c. \quad (7)$$

となる。この項を見れば分かる通り、フレイバー固有状態から質量固有状態に変換すると行列 $(U_L^\dagger V_L)$ が現れる。つまり弱い相互作用を介することで、質量固有状態を通してニュートリノ (と同様の議論でクォーク) に世代の混合が生じることになる。ここで現れた行列 $(U_L^\dagger V_L)$ を混合行列と呼び、以降は V_{MNS} で表すことにする。

次に混合行列に含まれる未定パラメータについて議論する。ニュートリノが Majorana 粒子か Dirac 粒子かで若干の違いがある。まずニュートリノが Majorana 粒子の場合を考える。その場合、レプトンの質量項は次のように表される。

$$\mathcal{L}_{mass} = l_R^T m_E l_L + \frac{1}{2} \nu_L^T C m_\nu \nu_L \quad (8)$$

この質量項を同様の議論で対角化する。その時荷電レプトンの質量固有値を、余分な位相を波動関数に吸収させることで正の実数にすることが出来る。しかしニュートリノの質量固有値には余分な位相が2つ残ってしまう。それを α と β とすると、対角化された質量行列は次のように書ける。

$$m_E = \text{diag}(m_e, m_\mu, m_\tau) \quad , \quad m_\nu = V_{MNS} \text{diag}(m_1 e^{-2i\beta}, m_2 e^{-2i\alpha}, m_3) V_{MNS}^\dagger \quad (9)$$

位相 α と β は Majorana 位相と呼ばれる。次に混合行列のパラメータを調べる。混合行列 V_{MNS} の各成分を次のように表す。

$$V_{MNS} \equiv \begin{pmatrix} V_{e1} & V_{e2} & V_{e3} \\ V_{\mu1} & V_{\mu2} & V_{\mu3} \\ V_{\tau1} & V_{\tau2} & V_{\tau3} \end{pmatrix} \quad (10)$$

この行列は3次元直行座標 $(1, 2, 3)$ に対するオイラー回転と位相変換で次のように表される。

$$V_{MNS} = R_{23}(\theta_{23}) \cdot R_{13}(\theta_{13}) \cdot \text{diag}(1, e^{i\phi}, 1) \cdot R_{12}(\theta_{12}) \quad (11)$$

具体的には

$$\begin{pmatrix} V_{e1} & V_{e2} & V_{e3} \\ V_{\mu1} & V_{\mu2} & V_{\mu3} \\ V_{\tau1} & V_{\tau2} & V_{\tau3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & c_{13}s_{12} & s_{13} \\ -c_{23}s_{12}e^{i\phi} - c_{12}s_{13}s_{23} & c_{12}c_{23}e^{i\phi} - s_{12}s_{13}s_{23} & c_{13}s_{23} \\ s_{23}s_{12}e^{i\phi} - c_{12}c_{23}s_{13} & -c_{12}s_{23}e^{i\phi} - c_{23}s_{12}s_{13} & c_{13}c_{23} \end{pmatrix} \quad (12)$$

となる。ただし $\sin \theta_{ij}, \cos \theta_{ij}$ をそれぞれ s_{ij}, c_{ij} と表している。以上から、ニュートリノが Majorana 粒子だった場合、パラメータは正の実数 m_1, m_2, m_3 と 3 つの混合角 $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{31}$ 、そして位相 α, β, ϕ である。

ニュートリノが Dirac 粒子の場合、ラグランジアン の質量項は、レプトン数保存を課して Dirac 質量項のみ考えると、

$$\mathcal{L}_{mass} = l_R^T m_E l_L + \nu_R^T m_\nu \nu_L \quad (13)$$

となる。この行列を対角化するに当たり、Majorana の場合と異なり、余分な位相を全て波動関数に吸収させ、ニュートリノの質量固有値も正の実数にとができる。つまり Majorana 位相 α と β が現れない。そのためパラメータの数は減少する。

以上のように混合行列は、3 つの質量固有値 m_1, m_2, m_3 、および 3 つの混合角 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 、そして位相 ϕ 、Majorana 粒子であれば Majorana 位相 α, β でパラメータ化される。次の節でニュートリノ振動の観測により決められるパラメータを議論する。位相 ϕ を決めるには CP の破れを、Majorana 位相 α, β を決めるにはニュートリノレス二重 β 崩壊を観測する必要があるが、その議論はしない。

2.2 真空中のニュートリノ振動

簡単のため、電子型ニュートリノとミューオン型ニュートリノについての二世代のニュートリノ振動の定式化をする。混合角を θ とすると、フレーバー固有状態 ν_e, ν_μ と質量固有状態 ν_1, ν_2 の間には

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \quad (14)$$

の関係がある。右辺のユニタリー行列は 2 世代近似の混合行列であり、 U で表す。ニュートリノの生成点を 0 とし、ニュートリノが距離 x だけ伝搬すると $\nu_\alpha (\alpha = e, \mu)$ は $\nu_j (j = 1, 2)$ を用いて、

$$\nu_\alpha = e^{ip_j} U_{\alpha j} \nu_j \quad (15)$$

となる。ただし p_i はニュートリノの運動量を表す。従って、例えば電子ニュートリノが距離 $\approx L$ で μ ニュートリノとして観測される確率振幅は、

$$A(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = \langle \nu_\mu | \nu_e \rangle = -\sin \theta \cos \theta e^{ip_1 L} + \sin \theta \cos \theta e^{ip_2 L}$$

また、確率は

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = |A(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)|^2 = \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{(p_1 + p_2)L}{2} \quad (16)$$

ここで、相対論近似をすると、 $p_j \simeq E_j - \frac{m_j^2}{2E_j}$ となるので、 $E_1 = E_2 = E$ とすると結局

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\Delta m_{12}^2 L}{4E} \quad (\Delta m_{12}^2 \equiv m_2^2 - m_1^2) \quad (17)$$

となり、混合角 θ と質量 2 乗差 Δm_{12}^2 の二つのパラメータをもつ。具体的な数値は

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = \sin^2 \theta \sin^2 1.27 \frac{\Delta m_{12}^2}{\text{eV}^2} \frac{L}{\text{km}} \frac{\text{GeV}}{E} \quad (18)$$

である。また、同様の計算により、電子ニュートリノが距離 L だけ伝搬した後、電子ニュートリノとして観測される確率は、

$$\begin{aligned} P(\nu_e \rightarrow \nu_e) &= 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\Delta m_{12}^2 L}{4E} \\ &= 1 - P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) \end{aligned} \quad (19)$$

と計算でき、確かに全確率は 1 となる。このようにあるフレーバー固有状態で生成したニュートリノが空間を伝搬して、観測点で異なるフレーバー固有状態になる現象をニュートリノ振動現象という。振動とは、その確率が三角関数で表され、ある周期で振動することである。

捕捉として、ここでの議論は電子・ μ ニュートリノがある点で生成されたことが仮定されているが、実際には観測器は生成点を特定することはできない。そのため生成された可能性のある領域 ΔL で平均化される。また、観測器のエネルギー分解能も限界があるため、ニュートリノのエネルギーを特定することは出来ず、エネルギー領域 ΔE で平均化される。すると、例えば (17) において、距離とエネルギーを含む項が平均化され、確率は

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = \frac{1}{2} \sin^2 2\theta \quad (20)$$

となり、混合角が定数であるとすれば振動は起こらない。

またニュートリノが Dirac 粒子でも Majorana 粒子でも同様の機構が働き、ニュートリノ振動の観測で、ニュートリノの Dirac・Majorana 性の議論をすることはできない。

2.3 物質中のニュートリノ振動

同様の機構により、弱い相互作用を介してクォークにも世代の混合が生ずる。クォークの混合行列は CKM 行列と呼ばれており、実験から CKM 行列中の混合角は微小であることが分かっている。ニュートリノの混合角もクォーク同様に微小であるとする観測結果の説明ができなくなる。つまり、観測結果を説明するにはニュートリノの混合角はクォークの混合角に比べ、大きな値である必要があり、それを説明する理論が必要になる。ニュートリノの混合角が微小であっても、ニュートリノが物質中(太陽、地球など)を伝搬する過程で世代の交わりが大きくなる可能性が Mikheyev, Smirnov 達によって示唆された。これを MSW 効果と呼ぶ。この節で MSW 効果を解説する。

ニュートリノが密度の様な物質中を伝搬する場合を考える。ニュートリノは物質からポテンシャルを受ける。通常の物質は電子、核子から成り、電子ニュートリノと $\mu \cdot \tau$ ニュートリノとは受けるポテンシャルが異なる。両者は共通に Z ボソンを介する弱い相互作用のポテンシャルを受けるが、前者は余分に W ボソンを介するポテンシャルを受けるためである。それを定式化してみよう。

電子ニュートリノの物質中での有効ハミルトニアンは、

$$H_{eff} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} [J^{(+)\mu} J_\mu^{(-)} + \frac{1}{4} J^{(N)\mu} J_\mu^{(N)}] \quad (21)$$

と書ける。ここで G_F はフェルミ結合定数を表す。また第一項目は荷電ボソン、第二項目は中性ボソンカレントを表し、それぞれ

$$J^{(+)\mu} = \bar{\nu}_e \gamma_\mu (1 - \gamma^5) e \quad (22)$$

$$J^{(-)\mu} = \bar{e} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \nu_e \quad (23)$$

を表す。いま荷電カレントに注目する。Firts 変換し、非相対論近似

$$\bar{e}\gamma_\mu(1-\gamma^5)e \simeq \bar{e}\gamma^0(1-\gamma^5)e \quad (24)$$

を用いると、第一項目は、

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}}\bar{\nu}_e\gamma^0(1-\gamma^5)\nu_e\bar{e}\gamma_0(1-\gamma^5)e \quad (25)$$

となり、非相対論的で偏極していない電子中を通過するニュートリノが受けるポテンシャルは、

$$\langle H_{eff} \rangle = N_e\bar{\nu}_e\gamma_0 P_L \nu_l \quad (26)$$

となる。さらに Z ボソンを介するポテンシャルが三代のニュートリノに一樣に加わる。このポテンシャルを考慮して物質中のニュートリノ振動の式を導く。

前節同様に 2 世代ニュートリノを考える。2 世代が等しく受けるポテンシャルの寄与は、ニュートリノ振動パラメータには影響しない。そのため電子ニュートリノのみが受けるポテンシャルを考慮して質量固有値、質量固有状態を導く。具体的にはポテンシャルを発展方程式の右辺の行列の 11 成分に加える。発展方程式の形は、

$$i\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta m^2}{4E}\cos 2\theta + \sqrt{2}G_F n_e & \frac{\Delta m^2}{4E}\sin 2\theta \\ \frac{\Delta m^2}{4E}\sin 2\theta & \frac{\Delta m^2}{4E}\cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_1 \\ \tilde{\nu}_2 \end{pmatrix} \quad (27)$$

となる。これを次の物質中におけるユニタリー行列

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \tilde{\theta} & \sin \tilde{\theta} \\ -\sin \tilde{\theta} & \cos \tilde{\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_1 \\ \tilde{\nu}_2 \end{pmatrix} \quad (28)$$

を用いて対角化し、方程式を解く。ここで $\tilde{\nu}_1, \tilde{\nu}_2$ は物質中の質量固有状態である。

質量固有値 $\tilde{m}_1^2, \tilde{m}_2^2$ 、および混合角 $\tilde{\theta}$ は

$$\tilde{m}_1^2 = \frac{A}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(A - \Delta m^2 \cos 2\tilde{\theta})^2 + (\Delta m^2)^2 \sin^2 2\tilde{\theta}} \quad (29)$$

$$\tilde{m}_2^2 = \frac{A}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(A - \Delta m^2 \cos 2\tilde{\theta})^2 + (\Delta m^2)^2 \sin^2 2\tilde{\theta}} \quad (30)$$

$$\cos 2\tilde{\theta} = \frac{-A/\Delta m^2 + \cos 2\theta}{\sqrt{(A/\Delta m^2 - \cos 2\theta)^2 + \sin^2 2\theta}} \quad (31)$$

$$\sin 2\tilde{\theta} = \frac{\sin 2\theta}{\sqrt{(A/\Delta m^2 - \cos 2\theta)^2 + \sin^2 2\theta}} \quad (32)$$

$$A = 2\sqrt{2}EG_F n_e \quad (33)$$

となる。

2.4 振動パラメータの測定値

これまで見てきたように、ニュートリノ振動のパラメータは混合角と質量固有値の 2 乗差である。それらは太陽ニュートリノや大気ニュートリノの観測、原子炉実験や長基線実験などにより得られる。この節で、各パラメータがどのような観測や実験から決められるか、および現在得られているパラメータ領域を議論する。

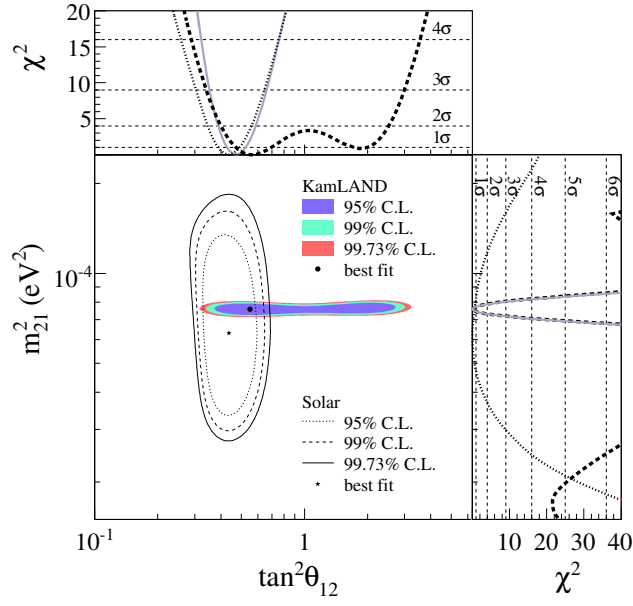


図 1: 太陽ニュートリノフラックスの観測、および原子炉実験による質量固有値 Δm_{12}^2 と混合角 θ_{12} の許される領域

2.4.1 Δm_{12}^2 および θ_{12}

Δm_{12}^2 と θ_{12} は太陽ニュートリノの観測、および KamLAND を代表とする原子炉実験から得られている。それらのパラメータを Δm_{sun}^2 および θ_{sun} と書く。

始めに太陽ニュートリノ問題を解説する。太陽ニュートリノ問題は、ニュートリノ振動現象を考える発端となった問題である。太陽は内部の核融合反応によりエネルギーを生成しており、その反応は標準太陽模型で記述される。核融合反応の過程で生成される電子ニュートリノは、光子と異なり他の粒子との相互作用が弱く、生成後速やかに太陽外に放出される。そのため太陽標準模型を検証するために、電子ニュートリノフラックスを検出することが考えられた。太陽ニュートリノフラックスは Chlorine 観測器で初めて観測された。その際に標準太陽模型が予測する値よりも、観測されたニュートリノフラックスの値が小さいという結果が得られた。これが太陽ニュートリノ問題である。当初は観測器の精度が低いことや、太陽標準模型の誤りなどが原因と考えられたが、後の実験により、ニュートリノ振動が原因であることが確実となった。

現在得られているパラメータ領域は図 1 である。具体的な値は

$$\Delta m_{sun}^2 = 7.2 - 8.9 \times 10^{-5} \text{ eV}^2 \quad (34)$$

$$\tan \theta_{sun} = 0.45 \pm 0.05 \quad (35)$$

である。

2.4.2 Δm_{23}^2 および θ_{23}

前節の太陽ニュートリノは電子ニュートリノから μ ニュートリノへの遷移であったが、大気ニュートリノは μ ニュートリノから τ ニュートリノへの遷移である。それがどのようにして分かるかを解説

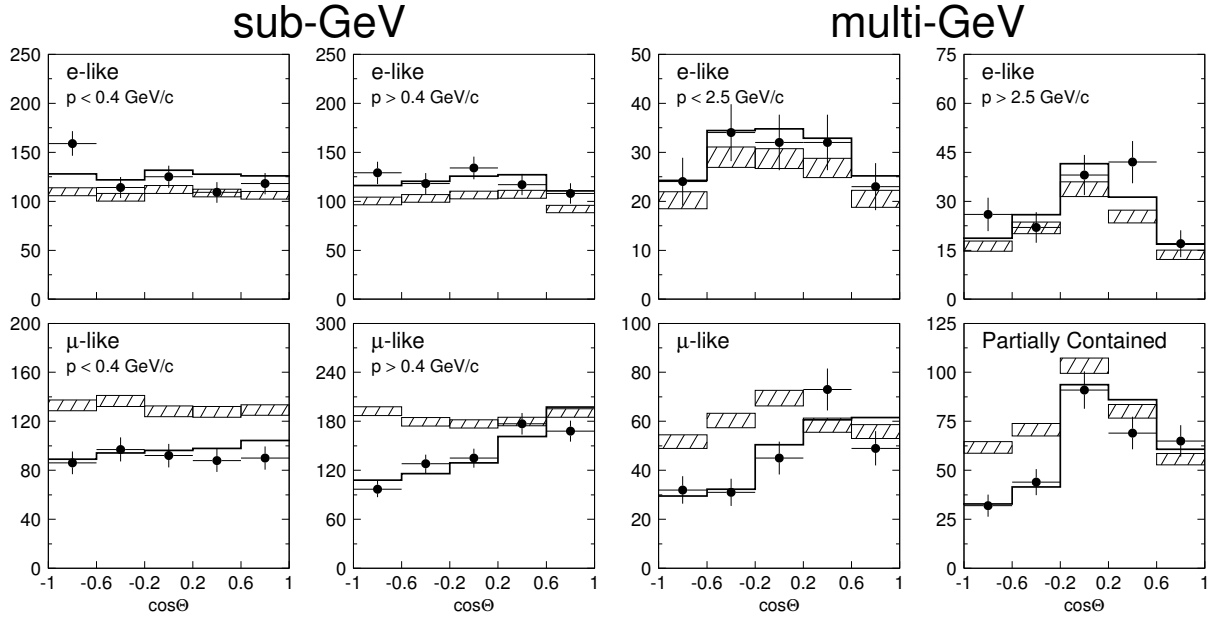


図 2: 太陽ニュートリノフラックスの観測、および原子炉実験による質量固有値 Δm_{12}^2 と混合角 θ_{12} の許される領域 [5]

する。大気ニュートリノの発生機構は次の通りである。

1. 宇宙線が地球大気中の原子核と衝突し、 π 中間子 (と少量の K 中間子) が放出される。
2. 荷電 π 中間子がほぼ全て μ 粒子と μ ニュートリノに崩壊する。

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \quad \pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \quad (36)$$

3. μ 粒子が次のように崩壊する。

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \quad \mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu \quad (37)$$

以上の過程により発生する電子型ニュートリノと μ 型ニュートリノの比はおよそ 1 : 2 になることが予想される。しかしスーパーカミオカンデに代表される実験において μ ニュートリノの観測数が 2 から小さくなることが確認された。これが大気ニュートリノ問題である。

大気ニュートリノ問題は、太陽ニュートリノ問題のような予測フラックス値との相違においてではなく、天頂角対称性からのずれにより指摘された (図 2)。観測される電子型、ミューオン型ニュートリノのフラックス値も天頂角依存性をもつと予想されたが、観測値は対称性をもっていなかった。また電子型ニュートリノとミューオン型ニュートリノのフラックス比が予測値と異なる結果が得られた。同時に、電子型ニュートリノフラックスの値は予測値と矛盾しないが、ミューオン型ニュートリノフラックスの値は、天頂角が大きい、つまり観測器まで長距離を伝搬すると予測値より小さくなることが読み取れる。ミューオン型ニュートリノが電子ニュートリノへ遷移したとすると、電子型ニュートリノのフラックス値が増加するはずであるが、その兆候は見られない。つまりミューオン型ニュート

リノは、電子型でなくタウオン型ニュートリノに遷移したと考えられる。現在の大気ニュートリノの観測や長基線実験から得られているパラメータ領域は図3である。具体的な値は

$$\Delta|m_{atm}^2| = 2.1 - 3.1 \times 10^{-3} eV^2 \quad (38)$$

$$\sin 2\theta_{atm}^2 = 1.02 \pm 0.04 \quad (39)$$

である。

3 ニュートリノ質量の生成機構

前章でニュートリノが質量をもつ証拠であるニュートリノ振動を解説した。しかし標準模型の枠組の中ではニュートリノ質量は説明できない。他のフェルミオンと異なり、右巻き成分がないためである。この章では、ニュートリノが質量を持つ機構を説明する。またニュートリノがディラック粒子かマヨラナ粒子かの議論、そして右巻きニュートリノが重いマヨラナ質量項を持つことで、観測されるニュートリノの質量が小さいことを説明するシーソー模型を説明する。

3.1 標準模型におけるフェルミオンの質量

標準模型において、荷電フェルミオンとクォークは、ヒッグス場が真空期待値をもち $SU(2) \times U(1)$ ゲージ対称性を自発的に破ることで質量を獲得する。しかしニュートリノは右巻き粒子がないため質量をもてない。これを確認するために標準模型のラグランジアン密度を見てみよう。

標準模型のラグランジアン密度は二つのセクターに分けられる。一つはゲージセクターであり、フェルミオンとゲージボソンの自己相互作用と相互作用部分を表す。二つめはヒッグスセクターであり、ヒッグスの自己相互作用とフェルミオン・ヒッグスとの相互作用部分を表す。ここでは特にフェルミオンの質量項が現れるヒッグスセクターに注目する。それは次の形に書ける。

$$\mathcal{L}_{Higgs} = (\lambda_E^{ij} \bar{E}^i H^* L^j + \lambda_D^{ij} \bar{D}^i H^* i\tau^2 Q^j + \lambda_U^{ij} \bar{U}^i H^* Q^j + h.c.) + m^2 |H|^2 - \frac{\lambda}{4} |H|^4 \quad (40)$$

記号は2章と同じ意味である。ヒッグス2重項の真空期待値を $\langle H \rangle$ と書くと、それは

$$\langle H \rangle = (0, v) \quad v \approx 174 \text{ GeV} \quad (41)$$

となるため、 $SU(2) \times U(1)$ 対称性が破れて、上のヒッグスセクターより

$$m_E^{ij} \bar{l}_R^i l_L^j + m_D^{ij} \bar{d}_R^i d_L^j + m_U^{ij} \bar{u}_R^i u_L^j \quad (42)$$

という荷電レプトンとクォークの質量項が現れる。しかしニュートリノの質量項は現れず、標準模型において、ニュートリノの質量は0となる。

3.2 シーソー機構によるニュートリノ質量

ニュートリノが質量を持つには、他のフェルミオン同様に右巻きのパートナーが存在すればよい。しかし、右巻きニュートリノを理論に導入すると次の二つの問題が生じてしまう。

1. Majorana 質量項が現れる。右巻きニュートリノは標準模型の三つの力に対し中性であるため、ゲージ不変性は右巻きニュートリノ同士の Majorana 質量項を許す。そのため、標準模型では自然に成り立つレプトン数保存則を手で課し、Majorana 質量項を禁止しなければならない。
2. 湯川結合定数が不自然に小さくならなければならない。ニュートリノ質量はいま現在質量が精密に測定されている粒子の中で最も軽い電子と比べても約 10^5 程度小さいことが予想される。そのためニュートリノが他の粒子に比べ微小な質量を得るためには、湯川結合定数が不自然に小さくならなければならない。

レプトン数の破れを許し、理論にマヨラナ質量項を導入すると、(ii) で挙げたニュートリノ質量の微小さを説明することができる。それがシーソー機構である。[6] 右巻きニュートリノを導入すると、 $SU(2) \times U(1)$ ゲージ不変な繰り込み可能なラグランジアンは、標準模型のラグランジアンに右巻きニュートリノの運動項、およびヒッグスとの相互作用項が加わり、次のようになる。

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{SM} + \bar{\nu}_R i \not{D} \nu_R + (\lambda_N \nu_R L H + \frac{M_R}{2} \bar{\nu}_R^c \nu_R + h.c.) \quad (43)$$

ただし1世代のみ考え、 ν_R 、 λ_N はそれぞれ右巻きニュートリノ波動関数、湯川結合定数を表す。ヒッグス粒子が真空期待値を持つと、ニュートリノの質量に関わる部分は次の質量行列の形に書ける。

$$\mathcal{L}_{mass} = \begin{pmatrix} \bar{\nu}_L & \bar{\nu}_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & M_D \\ M_D & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R \end{pmatrix} \quad (44)$$

ただし $M_D = v\lambda_N$ である。この質量行列を対角化し、得られる2つの質量固有値は、

$$M_R, \quad M_\nu = \frac{M_D^2}{M_R} \quad (45)$$

である。 M_ν は左巻きニュートリノの Majorana 質量項である。この表式を見て分かる通り、右巻きニュートリノの Majorana 質量 M が重いとすると、左巻きニュートリノの質量 M_ν は逆に軽くなる。これが現在観測されているニュートリノの質量が微小である原因と考えられ、この微小なニュートリノ質量生成機構がシーソー機構である。(45) の式を変形して

$$M_\nu M_R = M_D^2 \quad (46)$$

とすると、 $M_\nu M$ は一定であり、一方の質量を重くすることで他方の質量を軽くすることができる。これがシーソー機構の名前の由来である。

4 大統一理論におけるニュートリノ質量とフレーバー問題の解決

前節で説明した通り、微小なニュートリノ質量の生成機構として、重い右巻きニュートリノを導入したシーソー機構が有力である。ニュートリノの質量を真に理解するために、素粒子標準模型を拡張しなければならない。始めに標準模型に新たなゲージ対称性を課す理論を考える。具体的には左右対称理論や、世代間の $SU(3)$ ゲージ対称性であり、それらの理論において三角以上頂の消去のために右巻きニュートリノの存在が必要不可欠であることを見る。

素粒子標準模型の拡張として標準模型の $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ ゲージ群を部分群として含む大きなゲージ群を考えることにより、強い力、弱い力、電磁気力の統一を目指す大統一理論 (Grand Unified Theory、GUT) を議論する。特に $SO(10)$ は右巻きニュートリノを自然に含む理論として注目されている。ここでは $SO(10)$ に限らず、シーソー機構が働くために右巻きニュートリノを導入出来る可能性のある理論を考える。

仮にそれらの理論でニュートリノ質量の存在が説明できたとしても、同時にニュートリノに関するパラメータの実験値や観測値が説明出来なければならない。一般的にフェルミオンは世代が進むにつれ質量が大きくなること (質量の階層性) と、クォークとニュートリノがそれぞれ特徴的な混合パラメータを持つという事実がある。なぜ質量に階層性や、クォークとニュートリノが独自の異なる混合パラメータを持つのか、という問題はフレーバー問題と呼ばれ、その解決も急がれている。つまり素粒子標準模型を越える理論は、ニュートリノの質量とニュートリノに関する特徴的なパラメータとを同時に説明できることが要求される。そのようなフレーバー問題やニュートリノの実験・観測値は、レプトンの世代間に何らかの関係性 (フレーバー対称性) を課すことで説明できる可能性がある。その関係性として、不連続対称性が注目されている。大統一理論を解説した後に、不連続対称性の具体的な模型を挙げる。

4.1 新たなゲージ対称性

4.1.1 左右対称理論

Weinberg-Salam 理論で示唆されるように、弱相互作用によってパリティが破れている。パリティの破れは低エネルギーで起こることであり、高エネルギー領域では右巻き・左巻き対称性が存在すると考えるのは自然な発想であろう。Weinberg-Salam 理論の拡張として、左巻き粒子同様に右巻き粒子も $SU(2)$ 2重項をつくり、 $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)$ 対称性を課すという、左右対称理論が考えられる。[7] [8]

4.1.2 世代間 $SU(3)$ ゲージ対称性

4.2 大統一理論におけるニュートリノ質量

標準模型の拡張の候補として、大統一理論や超対称性を課す理論 (Super Symmetry、SUSY) がある。それらを議論する。

4.2.1 SU(5)、および超対称 SU(5)

GUT の可能性として、最小の群である SU(5) が考えられる。全てのフェルミオン場は 2 つの最小規約表現である $\mathbf{5}^*$ 表現と $\mathbf{10}$ 表現に分類され、それぞれ $\mathbf{5}^* = D_i + L_i$ と $\mathbf{10} = Q_i + U_i + E_i$ である (i は世代を表す)。またヒッグス 2 重項は $\mathbf{5}$ 表現に入る。後に議論する SO(10) ゲージ統一理論と異なり、右巻きニュートリノを導入する必然性はなく、ニュートリノに質量を持たせるために導入するならば SU(5)1 重項である。ここで SU(5) ゲージ統一理論の特徴を概観する。

まず湯川結合定数を減らすことができる。クォーク・レプトン多重項を作る際に、その多重項内の電荷の和が 0 になることが要求されるため、電荷が電子の素電荷 e に量子化され、クォークの電荷が $e/3$ の整数倍になることが説明できる。実験と比較される予言としては、素粒子標準模型では自由パラメータであったワインバーグ角 θ_W を予言できること、陽子の寿命、クォーク・レプトンの質量の関係性が挙げられる。特にワインバーグ角と陽子寿命の予言値は実験値と合わず、何らかの修正が必要となる。

SU(5) の欠点は、超対称性を課すことで解決される。超対称性により、素粒子標準模型の各粒子に超対称パートナーが登場する。その利点として、超対称パートナーが loop corection から結合定数の繰り込みに寄与し、3 つの走る結合定数が 1 つのエネルギースケールで重なる。またヒッグス粒子が大きな自己エネルギーを受けず、ヒッグス質量の発散問題が解決される。他の利点として、超対称 SU(5) が予言するワインバーグ角が実験値と正確に合うことや、SU(5) で致命的だった陽子の寿命の短さが修正され、実験値から否定されることがなくなることである。

SU(5)、および超対称 SU(5) ゲージ統一理論におけるニュートリノの質量は、新たに U(1) 対称性を課すことで議論する。三角異常項を消滅させるために、SU(5)1 重項の右巻きニュートリノが導入される。また U(1) チャージが一意的に定まり、 $\mathbf{10}$ 、 $\mathbf{5}^*$ 、 $\mathbf{1}$ (右巻きニュートリノ) に対し、それぞれ +1、−3、+5 が振り分けられる。

4.2.2 SO(10)

SU(5) の発展として SO(10) ゲージ統一理論を考える。SO(10) は、対称性が破れて素粒子標準模型のゲージ群 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ にたどり着くまで 1 回以上の段階を踏む。大きな特徴は、SU(5) ゲージ統一理論と異なり、右巻きニュートリノを含めた全てのフェルミオン場が SO(10) の基本スピノルである既約表現 $\mathbf{16}$ に入ることである。そのためニュートリノは自然に質量を持つ。

他の特徴としては、SO(10) が実数群であるためアノマリーがキャンセルする。また陽子の寿命が SU(5) の予言よりも長くなり、実験値から否定されることはない。

逆に欠点として、SU(5) で予言ができたワインバーグ角の予言能力がなくなる。またクォーク・レプトンの質量の関連性が強くなる。これはニュートリノの混合パターンと合わない。

4.3 フレイバー問題を説明する模型

ニュートリノは次の 2 つの特徴的なパラメータを持つ。

- 微小な θ_{13}

θ_{13} の最大値は CHOOZ の原子炉実験から主な制限が付いていて、その最大値は、 $\theta_{13max} \simeq 0.15$ であることが分かっている。つまり、

$$\theta_{13} < \theta_{13max} \approx 0.15 \quad (47)$$

- 質量の階層性観測から得られている大気ニュートリノ・太陽ニュートリノにおける質量二乗差 $\Delta m_{atm}^2, \Delta m_{sun}^2$ の比を R とすると、その大きさは

$$R \equiv \Delta m_{atm}^2 / \Delta m_{sun}^2 \approx 0.030 \pm 0.005 \quad (48)$$

となり、2桁程度の差が生ずる。仮にニュートリノ質量行列の成分を典型的な値 $O(0.03eV)$ としてパラメータを計算すると、全ての混合角は $O(1)$ 、全ての質量二乗差は $\Delta m^2 \sim 10^{-3}eV$ となり、(i), (ii) の結果は得られないことが研究されている。

また、ニュートリノ混合行列全体にも観測・実験から特徴が見つかった。それは、おおよそニュートリノ質量固有状態における混合行列が次の形になることである。

$$V \simeq \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (49)$$

この行列は tribimaximal と呼ばれている。模型を構築するにあたり、これらの特徴を説明できることが焦点となる。

具体的な模型を挙げる前に、ニュートリノ質量行列に構造的な性質が無い、つまり無秩序な質量行列成分から偶然これらの特徴が現れた可能性を議論する。その疑問は2つの方法で調べられている。(1) ランダムな値の成分をもつ行列を作り、条件を満たす行列を数えることで条件が偶然満たされる確率を求める。(2) 同様の適する行列の現れる頻度を、 $\epsilon \ll 1$ の時に条件を満たすようなパラメータ ϵ で表し、 $\epsilon = 1$ の時よりも微小な ϵ で上手くゆくかテストする。これらの方法で計算した結果、約 90% confidence level でニュートリノ質量行列になんらかの構造的な性質があることが分かった。質量行列が無秩序である可能性は完全に排除されてはいないまでも、かなり低いということが帰結される。

以上のようなフレーバー問題の解決策としてフレーバー対称性 (または horizontal 対称性とも呼ばれる) が考えられている。フレーバー対称性は、フェルミオンの各世代間に何らかの関係があると仮定し、フレーバー問題で挙げられたパラメータ間の関係を導こうとするものである。好ましいパラメータ範囲を予言する世代間の関連性の可能性は数多く存在するが、ここでは特に不連続なフレーバー対称性の具体例を挙げて議論する。

ここで不連続対称性の一般論をまとめる。ある不連続対称性を考える時には、まず各粒子がどの表現に入るかを定める。その後に具体的な表現行列を書き下し、その変換に対して理論が不変であるとする。目的となる具体的なパラメータはその対称性が破れることにより現れると考えるのである。

4.3.1 S_n 対称性と Z_n 対称性

S_n は n 次の対称群、または置換群と呼ばれ、 n 個の要素の配置替えに対する配置替えに対応する群である。フレーバー対称性として S_3 対称性が考えられている。 S_3 対称性が S_2 対称性に破れる場合や、

パラメータに対する制限を強めるため、さらに Z_n 対称性を課す場合がある。 Z_n 対称性とは、レプトン数のように各粒子に任意の整数 (Z_n 荷) を振り分け、それが保存するとするものである。[10][11]

始めに S_3 が Z_N 対称性に関する場合を考える。 S_3 は3つのものに対する置換群であり、3種類存在する世代に対する対称性として自然であるとされる。3次元表現は2重項 $\mathbf{f}_D$ と1重項 $\mathbf{f}_S$ の直和で書ける。対称性を課す対象を (f_1, f_2, f_3) と表現すると、具体的に

$$\mathbf{f}_D = \frac{1}{\sqrt{3}}(f_1 + f_2 + f_3) \quad \mathbf{f}_S = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(f_1 - f_2), \frac{1}{\sqrt{6}}(f_1 + f_2 - 2f_3) \right) \quad (50)$$

となる。

S_3 対称性を課して標準模型を拡張する。右巻きニュートリノを含んだフェルミオン場は

$$Q = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \quad u_R, \quad d_R, \quad L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}, \quad e_R, \quad \nu_R \quad (51)$$

と表し、3つの世代を S_3 の1重項と2重項に入れる。また、通常のヒッグス場を S_3 1重項 H_S とし、新しく2重項のヒッグス場 H_D を導入する。2重項を $I, J (= 1, 2)$ 、1重項を3で表し、荷電レプトンとニュートリノの相互作用ラグランジアン $\mathcal{L}_E, \mathcal{L}_\nu$ を書き下すと、次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_E = & -Y_1^e \bar{L}_I H_S e_{IR} - Y_3^e \bar{L}_3 H_S e_{3R} - Y_2^e [\bar{L}_I \kappa_{IJ} H_1 e_{JR} + \bar{L}_I \eta_{IJ} H_2 e_{JR}] \\ & - Y_4^e \bar{L}_3 H_I e_{IR} - Y_5^e \bar{L}_I H_I e_{3R} + h.c. \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\nu = & -Y_1^\nu \bar{L}_I (i\sigma_2) H_S^* \nu_{IR} - Y_3^\nu \bar{L}_3 (i\sigma_2) H_S^* \nu_{3R} - Y_2^\nu [\bar{L}_I \kappa_{IJ} (i\sigma_2) H_1^* \nu_{JR} + \bar{L}_I \eta_{IJ} (i\sigma_2) H_2^* \nu_{JR}] \\ & - Y_4^\nu \bar{L}_3 (i\sigma_2) H_I^* \nu_{IR} - Y_5^\nu \bar{L}_I (i\sigma_2) H_I^* \nu_{3R} + h.c. \end{aligned} \quad (53)$$

ただし、 2×2 行列 κ, η はそれぞれ

$$\kappa = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (54)$$

である。また、右巻きニュートリノのマヨラナ質量項を導入する。

$$\mathcal{L}_M = -M_1 \nu_{IR}^T C \nu_{IR} - M_3 \nu_{3R}^T C \nu_{3R} \quad (55)$$

C は荷電共役行列である。 S_3 2重項を組む2種のヒッグスの真空期待値が等しい ($\langle H_1 \rangle = \langle H_2 \rangle$) と仮定すると、ラグランジアンから、荷電レプトンとニュートリノの Dirac 質量行列、および右巻きニュートリノのマヨラナ質量行列の形が $m_i (i = 1 - 5)$ を用いて

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 + m_2 & m_2 & m_5 \\ m_2 & m_1 - m_2 & m_5 \\ m_4 & m_4 & m_3 \end{pmatrix} \quad (56)$$

と書けることが分かる。 m_i は複素数である。また、左巻きニュートリノはシーソー機構によりマヨラナ質量行列

$$\mathbf{M}_\nu = \mathbf{M}_{\nu_D} \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{M}_{\nu_D}^T, \quad \tilde{\mathbf{M}} = \text{diag}(M_1, M_1, M_3) \quad (57)$$

となる。

S_3 対称性からの制限はここまでで、よりパラメータの数を減らすために、 Z_2 対称性を課す。 Z_2 の振り分けを

$$- : H_S, \nu_{3R} \quad (58)$$

$$+ : H_I, L_3, L_I, e_{3R}, e_{IR}, \nu_{IR} \quad (59)$$

とすると、 Z_2 対称性は前記したラグランジアンの中の次の係数を禁止する。

$$Y_1^e = Y_3^e = Y_1^\nu = Y_5^\nu = 0 \quad (60)$$

混合行列 U_{MNS} を評価するために、まず荷電レプトンの対角化行列を求める。上の条件から荷電レプトン質量行列において、 $m_1^e = m_3^e = 0$ であるため、

$$U_{eL} = \begin{pmatrix} 3.4 \times 10^{-3} & 1/\sqrt{2} + O(10^{-5}) & 1/\sqrt{2} + O(10^{-10}) \\ -3.4 \times 10^{-3} & -1/\sqrt{2} + O(10^{-5}) & 1/\sqrt{2} + O(10^{-10}) \\ -1 + O(10^{-5}) & 4.8 \times 10^{-3} & O(10^{-5}) \end{pmatrix} \quad (61)$$

であることが導かれる。次にニュートリノの対角化行列は

$$U_\nu = \begin{pmatrix} \sin \hat{\theta} & \cos \hat{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\cos \hat{\theta} & \sin \hat{\theta} & 0 \end{pmatrix} \quad (62)$$

$$\tan \hat{\theta} = \left(\frac{m_+ - m_{\nu_3}}{m_{\nu_3} - m_-} \right)^{1/2} \quad (63)$$

となる。荷電レプトンとニュートリノの対角化行列を合わせると、

$$U_{MNS} = U_{eL}^\dagger U_\nu \simeq \begin{pmatrix} \cos \theta_{12} & -\sin \theta_{12} & U_{e3} \\ \frac{\sin \hat{\theta}}{\sqrt{2}} - 4.8 \times 10^{-3} \cos \hat{\theta} & \frac{\cos \hat{\theta}}{\sqrt{2}} + 4.8 \times 10^{-3} \sin \hat{\theta} & -\sin \theta_{23} \\ \frac{\sin \hat{\theta}}{\sqrt{2}} & \frac{\cos \hat{\theta}}{\sqrt{2}} & \cos \theta_{23} \end{pmatrix} \quad (64)$$

となる。この行列は実験結果を説明できる。このように、混合行列 U_{MNS} を $S_3 \times Z_2$ 対称性から説明することが出来る。

次に S_3 対称性が $S_3 \rightarrow S_2$ と破れることで、特徴的な混合行列が現れるという考えもある。 S_2 対称性は2つの対象の入れ換え対称性であり、ここでは $\nu_\mu \leftrightarrow \nu_\tau$ の入れ換えである。 S_3 からの制限は前記したため、 S_2 の制限を見る。 $\nu_\mu \leftrightarrow \nu_\tau$ の入れ換えに対応させるため、置換行列

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (65)$$

による基底の変換に対して不変になるとすると、つまり

$$PM_\nu^R P = M_\nu^R \quad (66)$$

という条件を課すことで、質量行列の形が、実数パラメータ a, b, c, d によって、次の形に制限される。

$$M_\nu^R = \begin{pmatrix} a & d & d \\ d & b & c \\ d & c & b \end{pmatrix} \quad (67)$$

この形の行列は次の形の直行行列で対角化できる。

$$O = \begin{pmatrix} -\cos \theta & \sin \theta & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta & \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta & \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (68)$$

これによって得られる対角行列 m_ν は

$$m_\nu = \begin{pmatrix} z + x \cos 2\theta - y \sin 2\theta & -x \sin 2\theta - y \cos 2\theta & 0 \\ -x \sin 2\theta - y \cos 2\theta & z - x \cos 2\theta + y \sin 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & b - c \end{pmatrix} \quad (69)$$

ただし、

$$x = \frac{1}{2}(a - b - c) \quad (70)$$

$$y = \sqrt{2}d \quad (71)$$

$$z = \frac{1}{2}(a + b + c) \quad (72)$$

$$\tan \theta = -\frac{y}{x} \quad (73)$$

$$\sin 2\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (74)$$

である。

5 ニュートリノが関与する素粒子標準模型を越える反応

5.1 ニュートリノの電気・磁気双極子

ニュートリノは電荷を持たないためツリーレベルで電磁相互作用をしないが、摂動論の高次の効果で電磁相互作用をする。ニュートリノと電磁場との相互作用は次の電流の形状因子を調べることで得られる。

$$\langle \nu(p', \lambda') | J_{EM}^\mu | \nu(p, \lambda) \rangle = \bar{\nu}(p', \lambda') [\gamma^\mu \{F_1(q^2) - \gamma^5 G_1(q^2)\} + \sigma^{\mu\nu} q_\nu \{F_2(q^2) - \gamma^5 G_2(q^2)\}] \nu(p, \lambda) \quad (75)$$

ただし $q^\mu = p^\mu - p'^\mu$ で、 $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ である。また F_1, G_1 は電荷の形状因子を表し、 F_2, G_2 はそれぞれ磁気能率、電気双極子能率の形状因子を表す。ここで磁気能率 $F_2(0)$ に注目する。 γ 行列の性質により、任意のフェルミオン場 Ψ に対して、

$$\bar{\Psi}_L \sigma^{\mu\nu} \Psi_L = 0 \quad (76)$$

が成り立つ。つまり標準模型におけるニュートリノのように、左巻き成分のみ存在する粒子は磁気能率を持たないことが分かる。次に右巻き成分が存在すると仮定した場合を議論する。二つの可能性があり、ニュートリノが Dirac 粒子の場合、Majorana 粒子の場合について考える。

まず Majorana 粒子の場合、磁気能率 $\mu = F_2(0)$ を用いて相互作用ラグランジアンを書くと

$$-\mathcal{L} \sim \frac{\mu_{ij}}{2} \bar{N}_i \sigma^{\mu\nu} N_j F_{\mu\nu} \quad (77)$$

と書ける。ただし N_i は Majorana 場を表す。計算により $\mu_{ij} = -\mu_{ji}$ となるため、Majorana ニュートリノは自分自身とは時期能率を持てない。しかし非対角項が存在し、かつ2種以上の Majorana ニュートリノが存在する場合、遷移時期能率をもつ可能性がある。

ニュートリノがディラック粒子の場合、右巻きニュートリノを含む Weinberg-Salam 理論において、量子補正から磁気能率をもつ。磁気能率は計算されており、その結果は

$$\mu_\nu = \frac{3eG_F}{8\sqrt{2}\pi^2} m_\nu = 3 \times 10^{-19} \mu_B \left(\frac{m_\nu}{1\text{eV}} \right) \quad (78)$$

である。ここで μ_B は Bohr 磁子であり、

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c} = 5.788 \times 10^{-9} \text{eV} \cdot \text{Gauss}^{-1} \quad (79)$$

となる。この数値を、現在まで確認されているニュートリノの磁気能率の上限と比べてみる。

1. ニュートリノ崩壊

$$\Gamma(\nu \rightarrow \nu' \gamma) \sim m_\nu^3 \mu_\nu^2 \quad (80)$$

2. ニュートリノ・電子散乱

その散乱微分断面積は次のように計算されている。

$$\frac{d\sigma}{dT}(\nu e \rightarrow \nu e) = \frac{\pi \alpha_{em}^2 |\mu_\nu^2|}{\mu_B^2 m_e^2} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{E_\nu} \right) \quad (81)$$

このニュートリノ・電子散乱実験は大気、原子炉、太陽ニュートリノを用いてなされている。実験からのニュートリノ磁気能率の制限は、90% confidence level で $\mu_\nu < 0.710^{-10} \mu_B$ である。

3. 磁気能率のニュートリノ質量への寄与磁気能率はニュートリノ質量に寄与する。磁気能率がニュートリノ質量の実験値よりも大きな寄与を与えないとすると、その上限は $\mu_\nu \lesssim 10^{-10 \sim 12}$ となる。ニュートリノがディラック質量を持つとすると、より制限は厳しくなる。

以上のように各実験・観測からニュートリノの磁気能率に制限がついているが、いずれも標準模型の予想よりも緩い制限である。今後の実験で標準模型の予想よりも大きな磁気能率が発見されることがあれば、新しい物理の寄与と考えることができるだろう。そのため実験精度の向上が期待される。

5.2 ステライルニュートリノの探索

標準模型で扱う強い力、弱い力、電磁相互作用について中性であるフェルミオンつまりステライルニュートリノとして振る舞う粒子が存在した場合の議論をする。それを ν_R と表す。 ν_R と ν_L 、ヒッグスの $SU(2)$ 不変な有効ラグランジアンは

$$\frac{m_{LL}}{2} \frac{(LH)^2}{v^2} + \frac{m_{RR}}{2} \nu_R^2 + m_{LR} \nu_R L \frac{H}{v} + h.c. \quad (82)$$

である。ステライルニュートリノの探索がどこまで進んでいるかをみる。

5.3 軽いスカラー粒子とニュートリノの反応

素粒子標準模型に含まれる粒子以外に未知の粒子があるか否かは、新しい物理を構築するうえで非常に重要であり、興味のあるところである。仮に中性なスカラー粒子が存在した場合に、ニュートリノの性質にどのような影響を及ぼすか、逆にどのようにニュートリノ研究を進めれば、未知のスカラー粒子の存在が示せるのかを議論する。

以下で存在すると仮定する中性スカラー粒子を X で表す。 X は $SU(2)_1$ 重項とする。ニュートリノとの相互作用項は $SU(2) \times U(1)$ ゲージ不変性とローレンツ不変性から次のようになる。

$$\mathcal{L} = X(LH)^2 \quad (83)$$

この項は5次元であるため、高いエネルギースケールで隠されてしまう。しかし、軽いステライルニュートリノが存在すると、ラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \frac{\nu_R^2}{2} (m_{RR} + g_{RR} X) + m_{LR} \frac{LH}{v} \nu_R + m_{LL} \frac{(LH)^2}{2v^2} + h.c. \quad (84)$$

となり、ステライルニュートリノ ν_R は X との湯川相互作用項をもつことが出来る。そのため、 $\nu_R = \frac{-m_{LR} \nu}{m_{RR} + g_{RR} X}$ を integrating out すると、 X とニュートリノが湯川相互作用 $g = \frac{g_{RR} m_{LR}^2}{2m_{RR}^2}$ をもつことが分かる。実際に X とニュートリノの相互作用が存在するかを調べる反応を挙げる。

1. レアな崩壊

X の存在は π 中間子や K 中間子の、 $e\bar{\nu}_e, \mu\bar{\nu}_\mu$ 崩壊に影響する。実験からの制限は

$$|g_{ij}| \lesssim 10^{-2} \quad (ij \neq \tau\tau) \quad (85)$$

となっている。特にニュートリノレス 2 重 β 崩壊 $0\nu 2\beta$ が観測されていないことから、

$$|g_{ee}| \lesssim 10^{-4} \quad (86)$$

が得られている。

2. ニュートリノ崩壊

質量項や標準模型の放射補正によってニュートリノ崩壊が起こり得る。しかし、ニュートリノの崩壊確率は

$$\Gamma(\nu_i \rightarrow \nu_j \gamma) \sim \frac{e^2 g_2^4}{(4\pi)^5} \frac{m_i^5 m_\tau^2}{M_W^6} \sim \frac{1}{10^{40} \text{year}} \left(\frac{m_i}{0.1 \text{eV}} \right) \quad (87)$$

と計算されている ($m_i \gg m_j$ の極限において、マヨラナ質量をもつニュートリノはディラック質量をもつニュートリノに比べて 2 倍早く崩壊する)。これは宇宙論の時間スケールと比べても充分長い。そのためニュートリノ崩壊が検出出来れば、それは新しい物理、またはある軽い、もしくは質量がない粒子 X との相互作用があることを示唆する。ここで X のスピンの 0 で、結合定数を g_{ij} と仮定すると、ニュートリノの、 X への崩壊確率は、 $m_i \gg m_j$ の極限において

$$\Gamma(\nu_i \rightarrow \nu_j X) = \Gamma(\nu_i \rightarrow \bar{\nu}_j X) = \frac{g_{ij}^2}{32\pi} m_i = \frac{g_{ij}^2}{0.40 \text{mm}} \frac{m_i}{0.05 \text{eV}} \quad (88)$$

となる。

6 レーザーを用いた新しいニュートリノ実験

これまでの議論で、素粒子標準模型を越える物理の探索がニュートリノ研究という側面からなされることを見た。より議論を進めるためには、ニュートリノに関するパラメータの精密測定が必要となる。将来の測定手段として、原子核やミューオンによる電子捕獲過程の応用実験が注目されている。その実験はまた、ニュートリノの Majorana・Dirac 粒子性の判別、レプトンフレイバーの破れといった標準模型を越える物理探索への糸口となる現象を解明する可能性がある。このように非常に魅力的な応用実験だが、残念なことに電子捕獲過程の発生率 (電子捕獲率) は非常に低く、実験に応用できるレベルではない。

しかし、近年レーザーを用いることで電子捕獲率が増幅される可能性が示唆されている。この章で、電子捕獲過程の利点を挙げ、レーザーを用いることで発生率が増幅される機構を説明する。

6.1 電子捕獲過程と電子捕獲率

電子捕獲過程は、原子核、または代わりにミューオンを置いた系において、最内軌道を回る電子と原子核、またはミューオンとの反応である。 Z を原子番号、 A を質量数とすると、 β 崩壊により

$$(Z, A) + e^- \rightarrow (Z - 1, A) + \nu_e \quad (89)$$

という反応をする。この際に放出される電子ニュートリノは単一のエネルギーをもつ。このニュートリノを実験に応用することで、より正確なニュートリノパラメータを得ることが期待出来る。また電子捕獲過程において、次の形のニュートリノレス二重 β 崩壊が起こり

$$(Z, A) + e^- \rightarrow (Z - 2, A) + e^+ \quad (90)$$

電子ニュートリノの代わりに陽電子が検出されると、それはニュートリノが Majorana 質量をもつ証拠となる。また、ミューオンによる電子捕獲過程

$$\mu + e \rightarrow 2\gamma \quad (91)$$

が検出されれば、レプトン数の破れの証拠となる。このように、電子捕獲過程応用実験はニュートリノの様々な性質を解明できる可能性を持ち、新しい物理の手掛りとして期待されている。

次に発生率を議論する。電子捕獲率を Γ で表す。計算により Γ の表式は

$$\Gamma = |\Psi(0)|^2 \int dLIPS |M|^2 \quad (92)$$

となる。ここで、 $\Psi(0)$ は原点に原子核 (またはミューオン) を置いた座標系での、原点での波動関数を表し、 M は確率振幅を表す。また $dLIPS$ はローレンツ不変な配位空間を表し、具体的な表式は、

$$dLIPS = (2\pi)^4 \delta^4(\Sigma_i P_i - \Sigma_f P_f) \Pi_f^3 / (2\pi)^3 2E_f \quad (93)$$

である (i, f はそれぞれ初期状態、終状態を表す)。この表式から、電子捕獲率を増幅させるには、確率振幅 M 、または原点での波動関数の絶対値の2乗 $|\Psi(0)|^2$ を高めればよい。しかし、確率振幅は基礎的な物理で決まってしまう。そのため、後者をもつて電子捕獲率を増幅させることを考える。

ここで次元解析により電子の有効質量を m_{eff} と書くと、 $|\Psi(0)|^2 \propto m_{eff}^3$ であることが分かる。したがって、電子の有効質量 m_{eff} を高めることができれば、電子捕獲率を高めることができる。そしてレーザーを用いることで、電子の有効質量を高め、結果として電子捕獲率を増幅することができる。次の節で、レーザーによる増幅機構を説明する。

6.2 レーザーを用いた電子捕獲率の増幅機構

6.2.1 非相対論近似

まずレーザーによるベクトル、Coulomb ポテンシャルを含めた Dirac 方程式を見ることで、電子の有効質量が増幅されることを説明する。レーザーによるベクトル、Coulomb ポテンシャルをそれぞれ $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ 、 $\phi(\mathbf{x})$ とすると、Dirac 方程式は

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{x}, t) = [c\boldsymbol{\alpha} \cdot (\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)) + \beta m_e c^2 - e\phi(\mathbf{x})] \Psi(\mathbf{x}, t) \quad (94)$$

ここで e 、 m_e はそれぞれ束縛電子の真空中の電荷、質量であり、 α 、 β は

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (95)$$

と表される。ただし $\boldsymbol{\sigma}$ は Pauli 行列を表す。 $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ と $\phi(\mathbf{x})$ の具体的な形を書く。

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{x}|} \quad (96)$$

であり、また $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ は光子場演算子 $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, t)$ の期待値で表され、

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = 2\sqrt{\frac{2\hbar N}{\epsilon_0\omega}} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \cos(\omega t + \phi_\alpha) \boldsymbol{\alpha}_\mathbf{k} \quad (97)$$

となる。ここで N は平均光子数密度、 $\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{k}$ は偏極ベクトル、 $\mathbf{k}$ は波数ベクトル、 ϕ_α は初期位相である。レーザーのベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ が束縛電子の運動量、および波数ベクトルに影響する。

次に、束縛電子の有効質量がどのような形になるかを見る。 U を対角化する行列、 m_{eff} を $ce\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) + \beta m_e c^2$ の固有値とする。これらを用いて

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi = [cU^\dagger \boldsymbol{\alpha} U \cdot \hat{\mathbf{p}} + \beta m_{eff} c^2 - e\phi] \Phi - U^\dagger \left\{ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U - c\boldsymbol{\alpha} \cdot (\hat{\mathbf{p}} U) \right\} \Phi \quad (98)$$

と変形される。具体的な形は

$$m_{eff}(\mathbf{x}, t) = \sqrt{m_e^2 + \left(\frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \right)^2} \quad (99)$$

$$U(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \cos \Theta(\mathbf{x}, t) & -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \sin \Theta(\mathbf{x}, t) \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \sin \Theta(\mathbf{x}, t) & \mathbf{1} \cos \Theta(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix} \quad (100)$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)}{|\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)|} \quad (101)$$

$$\sin \Theta(\mathbf{x}, t) = \frac{(m_{eff}(\mathbf{x}, t) - m_e)c^2}{\sqrt{(ce\mathbf{A}(\mathbf{x}, t))^2 + (m_{eff}(\mathbf{x}, t) - m_e)^2 c^4}} \quad (102)$$

$$\cos \Theta(\mathbf{x}, t) = \frac{|ce\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)|}{\sqrt{(ce\mathbf{A}(\mathbf{x}, t))^2 + (m_{eff}(\mathbf{x}, t) - m_e)^2 c^4}} \quad (103)$$

$$(104)$$

と表される。また新しい質量固有状態を $\Phi \equiv U^\dagger \Psi$ と定義して用いている。この表式から、束縛電子の有効質量がベクトルポテンシャルの影響で、自由場の場合と比べ高められている。実際にはベクトルポテンシャルは束縛電子の運動量に影響する。その影響は間接的に有効質量の増加として見る事が出来る。

さらに議論を進めるために、レーザーの強度 I と、レーザーの1光子当たりのエネルギー E_γ に対して次の2つの設定をし、その理由を説明する。

1. E_γ を $O(10^{-3})\text{eV}$ とする。理由はレーザーの時間スケール (レーザー光の周期) と空間スケール (レーザー光の波長) を、束縛電子の時間スケール (束縛電子の原子核周回時間) と空間スケール (原子の大きさ) に対して大きくするためである。そのため、ベクトルポテンシャルの空間・時間変化を無視することができる。

この時レーザー光の波長は $O(10^{-6})\text{m}$ となる。これは原子の大きさと比べて 10^5 倍程度長い。そのため U の空間依存性、および時間依存性は弱く、(98) の U の時間微分項を落とすことができる。

議論を進めるために、レーザーの周期 T_{Laser} が束縛電子の原子核周回周期 T_e よりも充分大きいと考え、ベクトルポテンシャルを時間平均することを考える。電子の有効質量はベクトルポテンシャルを通して時間依存する。ここでベクトルポテンシャルの時間平均を次のように近似しても、電子の有効質量を時間平均した場合と比べ数パーセントの違いしかないという結果が得られている。

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{4\hbar N}{\epsilon_0 \omega} \quad (105)$$

そのため以下の議論では、ベクトルポテンシャルの形を上式のようにおく。

2. I を 10^{10}W/mm とする。理由は電子捕獲過程が増幅されるよう、レーザーを当てることで起こり得る原子のイオン化の影響を充分小さくするためである。レーザー照射の影響でトンネルイオン化と多光子イオン化と呼ばれる過程が起こり得る。

以上の条件をレーザーに課し、実際にレーザー照射による束縛電子捕獲過程の増幅率

$$\frac{\Gamma_{Laser}}{\Gamma} = \frac{|\Psi_{Laser}(0)|^2}{|\Psi(0)|^2} \propto \left(\frac{m_{eff}}{m_e} \right)^3 \quad (106)$$

を非相対論近似して計算した図が以下である。前述した通り、 $E_\gamma = 10^{-3}\text{eV}$ 、強度は $I = 10^{10}\text{W/mm}$ 付近を考える。

6.2.2 厳密解

前節で非相対論近似における増幅率をみた。議論の中でベクトルポテンシャルの時間変化が無視できると考えたが、実際どのように増幅されていくかを見てみたい。そのため時間依存性を取り入れた形で Dirac 方程式を厳密に解くことを考える。

始めに電子の固有関数 $\Psi_\theta(\mathbf{x}, t)$ を中心力場のハミルトニアン H_θ の固有関数 $\Psi_\theta(t)$ で展開する。

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \sum_{\theta} c_\theta(t) \Psi_\theta(t) \quad (107)$$

ただし、 θ は主量子数 n 、全角運動量 j 、全角運動量の z 成分 j_3 、 k の 4 つの量子数を表す。また Ψ_θ は中心力場のハミルトニアン H に対して

$$H\Psi_\theta(t) = E_\theta\Psi_\theta(t) \quad (108)$$

を満たす。これを Dirac 方程式 (94) に代入すると、

$$i\frac{d}{dt}c_\theta(t) = E_\theta c_\theta(t) + \sum_{\theta'} e \int d^3x c_{\theta'}(t) \Psi_\theta^\dagger(\mathbf{x})(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)) \Psi_{\theta'}(t) \quad (109)$$

となる。さらにベクトルポテンシャルの空間依存性を無視して $\mathbf{A} \simeq A_0(t)\mathbf{e}_z$ と近似すると、相互作用項は

$$\sum_{\theta'} e c_{\theta'}(t) A_0(t) \int d^3x \Psi_\theta^\dagger(\mathbf{x}) \alpha_3 \Psi_{\theta'}(t) \quad (110)$$

となる。これで時間依存する係数 c_θ の時間発展方程式が得られ、この方程式を解くことで、レーザーによる増幅率の時間発展を求めるのである。

ここで $\Psi_\theta(t)$ の形は次のようになる。

$$\Psi_{n,j,j_3,k}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_{n,j,k}(r) \mathcal{Y}_{j,j_3,k}(\theta, \phi) \\ i g_{n,j,k}(r) \mathcal{Y}_{j,j_3,-k}(\theta, \phi) \end{pmatrix} \quad (111)$$

$$f_{n,j,k}(r) = \rho^\nu \sum_{l=0}^N A_l \rho^l e^{-\rho} r^{-1} \quad (112)$$

$$g_{n,j,k}(r) = \rho^\nu \sum_{l=0}^N B_l \rho^l e^{-\rho} r^{-1} \quad (113)$$

$$E_{n,k} = m_e \left(1 - \frac{(A\alpha)^2}{n^2 + 2(n - |k|)(\nu^2 - |k|)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (114)$$

$$\rho \equiv \sqrt{m_e^2 - E_{n,k}^2} r, \quad \nu \equiv \sqrt{k^2 - (Z\alpha)^2} \quad (115)$$

$$N = n - |k| \quad (116)$$

ここで、 Z は原子核の電荷、 α は微細構造定数、 m_e は電子の質量である。また A_l 、 B_l は係数であり、その間に

$$A_l = \frac{(-2)^l (\nu - k + Z\alpha\epsilon + l)}{l!(2\nu)_l} \cdot \frac{(\nu - k + Z\alpha\epsilon)N!}{\Gamma(N - l + 1)} \cdot A_0 \equiv \Xi_l(\nu - k + Z\alpha\epsilon)A_0 \quad (l \geq 1) \quad (117)$$

$$B_l = \frac{\epsilon(\nu + l + k) - Z\alpha}{\nu - k + Z\alpha\epsilon + l} A_l \equiv \Omega_l A_l \quad (l \geq 0) \quad (118)$$

$$\epsilon = \frac{Z\alpha}{\sqrt{\xi} + \sqrt{\xi - (Z\alpha)^2}} \quad (119)$$

$$\xi \equiv n^2 + 2(n - |k|)(\nu - |k|) \quad (120)$$

$$(121)$$

という関係がある。 $(2\nu)_l$ はポックハマー記号であり、 $(2\nu)_l = (2\nu + l)(2\nu + l - 1) \cdots (2\nu + 1)$ を表す。また A_0 は規格化定数である。 $\mathcal{Y}_{j,j_3,k}(\theta, \phi)$ は球面調和関数を用いて、次のように書ける。

$$k > 0 \text{ の時} : \mathcal{Y}_{j,j_3,k} = \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \begin{pmatrix} \sqrt{k + \frac{1}{2} - j_3} Y_{j+\frac{1}{2}}^{j_3-\frac{1}{2}} \\ -\sqrt{k + \frac{1}{2} + j_3} Y_{j+\frac{1}{2}}^{j_3+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \alpha_{j_3,k} Y_{j+\frac{1}{2}}^{j_3-\frac{1}{2}} \\ \beta_{j_3,k} Y_{j+\frac{1}{2}}^{j_3+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \quad (122)$$

$$k < 0 \text{ の時} : \mathcal{Y}_{j,j_3,k} = \frac{1}{\sqrt{-2k-1}} \begin{pmatrix} \sqrt{-k - \frac{1}{2} + j_3} Y_{j-\frac{1}{2}}^{j_3-\frac{1}{2}} \\ \sqrt{-k - \frac{1}{2} - j_3} Y_{j-\frac{1}{2}}^{j_3+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \alpha'_{j_3,k} Y_{j-\frac{1}{2}}^{j_3-\frac{1}{2}} \\ \beta'_{j_3,k} Y_{j-\frac{1}{2}}^{j_3+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \quad (123)$$

$$(124)$$

である。これで必要な関数の形を明らかにした。厳密解を求めるために、規格化定数を求め、係数 $c_\theta(t)$ の時間発展を計算する。

1. 規格化定数の決定

規格化定数 A_0 は各量子数 $\theta = n, j, j_3, k$ で規格化されており、次の関係から決められる。

$$\int |\Psi_\theta(\mathbf{x})|^2 d^3x = 1 \quad (125)$$

(111) を代入し、全空間積分をする。始めに角度積分を実行すると、量子数に対する制限が付く。それを省略して、残る動径方向の積分は

$$\int dr (f_{R\theta}^2(\rho) + g_{R\theta}^2(\rho)) = 1 \quad (126)$$

ただし、

$$f_\theta(r) = \frac{1}{r} f_{R\theta}(\rho) \quad , \quad g_\theta(r) = \frac{1}{r} g_{R\theta}(\rho) \quad (127)$$

である。これを変形すると、結局

$$(m^2 - E_{n,j}^2)^{\frac{1}{2}} \sum_{l,l'=0}^N (A_l A_{l'} + B_l B_{l'}) \int d\rho e^{-2\rho} \rho^{(l+l'+2\nu)} = 1 \quad (128)$$

すると、動径積分は Γ 関数で表せる。

$$\int d\rho e^{-2\rho} \rho^{(l+l'+2\nu)} = \Gamma(l + l' + 2\nu + 1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{l+l'+2\nu} \quad (129)$$

さらに (117)、(118) の A_l, B_l の漸化式を用いて、規格化定数 A_0 で表すと、

$$A_0^2 = m \frac{Z\alpha}{\sqrt{\xi}} 2^{2\nu+1} [(1 + \Omega_0^2) \Gamma(2\nu + 1) + \sum_{l=1}^N (1 + \Omega_0 \Omega_l) \Xi_l \left(\frac{1}{2}\right)^{l-1} \Gamma(l + 2\nu + 1) + \sum_{l,l'=1}^N (1 + \Omega_l \Omega_{l'}) \Xi_l \Xi_{l'} \left(\frac{1}{2}\right)^{l+l'} \Gamma(l + l' + 2\nu + 1)]^{-1} \quad (130)$$

この式から規格化定数が求められる。

2. $c_\theta(t)$ の時間発展

次に $c_\theta(t)$ の時間発展を追う。(109) の具体的な形を書くと、量子数 k の正負で形が異なり、次のようになる。

$$i\frac{d}{dt}c_{n,j,j_3,k}(t) = \sum_{n'}[\alpha c_{n',j-1,j_3,k-1}(t) - \beta c_{n',j+1,j_3,k+1}(t) + \gamma c_{n',j,j_3,-k}(t)](-ieA_0(t)) \quad (k > 0 \text{ の場合}) \quad (131)$$

$$i\frac{d}{dt}c_{n,j,j_3,k}(t) = \sum_{n'}[\alpha c_{n',j+1,j_3,k-1}(t) - \beta c_{n',j-1,j_3,k+1}(t) + \gamma c_{n',j,j_3,-k}(t)](-ieA_0(t)) \quad (k < 0 \text{ の場合}) \quad (132)$$

新たに現れた α, β, γ の表式は次式である。

$$\alpha = (1+\eta)^{-\nu_k}(1+\frac{1}{\eta})^{-\nu_{k'}}\xi \sum_{l=0}^N \sum_{l'=0}^{N'} B_l^\theta A_{l'}^{\theta'} (1+\eta)^l (1+\frac{1}{\eta})^{l'} \times \Gamma(\nu_k + \nu_{k'} + l + l' + 1) \quad (133)$$

$$\beta = (1+\eta)^{-\nu_k}(1+\frac{1}{\eta})^{-\nu_{k'}}\xi \sum_{l=0}^N \sum_{l'=0}^{N'} A_l^\theta B_{l'}^{\theta'} (1+\eta)^l (1+\frac{1}{\eta})^{l'} \times \Gamma(\nu_k + \nu_{k'} + l + l' + 1) \quad (134)$$

$$\gamma = (1+\eta)^{-\nu_k}(1+\frac{1}{\eta})^{-\nu_{k'}}\xi \sum_{l=0}^N \sum_{l'=0}^{N'} (B_l^\theta A_{l'}^{\theta'} - A_l^\theta B_{l'}^{\theta'}) (1+\eta)^l (1+\frac{1}{\eta})^{l'} \times \Gamma(\nu_k + \nu_{k'} + l + l' + 1) \quad (135)$$

ただし、 η および ξ の定義は次式である。

$$\eta \equiv \frac{n^2 + 2(n - |k|)(\nu_k - |k|)}{n'^2 + 2(n' - |k'|)(\nu_{k'} - |k'|)} \quad (136)$$

$$\xi \equiv \frac{1}{mZ\alpha} (\sqrt{n^2 + 2(n - |k|)(\nu_k - |k|)} + \sqrt{n'^2 + 2(n' - |k'|)(\nu_{k'} - |k'|)})^{-1} \quad (137)$$

以上によって規格化定数 A_0 と時間依存する係数 $c_\theta(t)$ が求められた。求めたい式は中心力場の電子の波動関数で展開された波動関数の絶対値の2乗 $|\Psi(\mathbf{x}, t)|^2$ の原点での値であった。しかし、関数の表式をみて分かる通り、全角運動量、その z 成分、 k についてそれぞれ $j = \frac{1}{2}, j_3 = \frac{1}{2}, k = -1$ の場合しか波動関数は寄与しない。つまり求めたい $|\Psi(\mathbf{x}, t)|^2$ の原点での表式は、

$$|\Psi(0, t)|^2 = \left| \sum_{n'} c_{n', \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1}(t) \Psi_{n', \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1}(0) \right|^2 \quad (138)$$

である。 $\Psi_{n', \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1}(0)$ の表式をまとめると、

$$\Psi_{n', \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1}(0) = \sqrt{\frac{m^2 - E_{n, \frac{1}{2}}^2}{4\pi}} A_0^{n', \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\epsilon(\nu-1)-Z\alpha}{\nu+1+Z\alpha\epsilon} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta e^{i\phi} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (139)$$

である。この式から数値計算によってレーザー照射による電子捕獲率の時間発展をみることが出来る。

7 まとめ

ニュートリノの質量の存在や特徴的なパラメータは、標準模型を越える物理構築の大きな手掛りとなる。ニュートリノ質量は太陽由来の電子ニュートリノ欠損や、宇宙線と大気原子核との反応から生成する μ ニュートリノ欠損の発見により明らかにされた。それらの太陽・大気ニュートリノ問題はニュートリノ振動現象により説明され、ニュートリノ振動現象の原因はニュートリノ質量の存在であるためである。同時にクォークと対照的な、大きな混合角の存在も、近年の観測・実験により明らかにされている。

標準模型におけるニュートリノ質量は0である。しかし右巻きニュートリノを導入すると質量を持つことができる。その場合Dirac質量とMajorana質量の二つの可能性がある。現在は重い右巻きニュートリノがMajorana質量項を持つことで左巻きニュートリノ質量の微小さを説明するシーソー機構が有力となっている。

シーソー機構が成り立つために、標準模型を越える物理理論構築において右巻きニュートリノが自然に含まれる物理理論が好ましい。最も有力であるのがSO(10)ゲージ群を用いた大統一理論である。SO(10)は16次元スピノルをもち、右巻きニュートリノを含めた16種のフェルミオンが一つの表現に入るためである。またニュートリノの持つ質量の階層性や特徴的な混合パラメータも説明できなければならない。それらは世代間に不連続対称性を課すことで説明できる可能性があり、近年注目されている。具体的に S_3 対称性と Z_2 対称性を組み合わせた模型や A_4 対称性を課す模型でニュートリノ混合行列の実験値が説明される。

ニュートリノ質量の存在により標準模型を越える現象が生ずる可能性がある。始めにニュートリノの電気・磁気双極子の観測が期待される。またニュートリノの性質を探ることで、ステライルニュートリノとして振る舞う軽いフェルミオンや軽いスカラー粒子といった新しい粒子の探索に寄与できる可能性がある。

議論をさらに進めるためには、ニュートリノパラメータのより精密な値が必要であり、新しい実験への期待が高まっている。近年特に原子核による束縛電子捕獲過程の応用実験が、ニュートリノパラメータの精密測定やMajorana粒子か否かの判別、またレプトンフレーバーの破れといった様々な性質を解明できるとして注目を浴びている。電子捕獲率は低く、現実の実験に適用できる段階ではないのが問題である。しかしレーザーを用いることで、電子捕獲率が増幅される可能性がある。実際に近似解・厳密解を求める過程で、レーザーによる電子捕獲率の増幅を見ることができ、新しい物理探索に大きく寄与する実験を提起する。

謝辞

御指導いただいた谷井教授、またお子さまの受験期という大変な時期にありながらも苦勞を惜しまず、修士論文のゼミを通して数ヵ月にわたって御指導いただいた指導教官の佐藤準教授に感謝します。また物理の知識の享受のみならず、私を鼓舞し続けてくださった小池氏、美味しい料理を提供しながら、忍耐力をもって私を育ててくださった下村氏に感謝します。そして辛いときにはいつも笑顔と勇気と物理の知識をくれた研究室の仲間達に感謝します。

参考文献

- [1] M.Fukugita,T.Yanagida,'Physics of Neutinos and Applications to Astrophysics' , Springer
- [2] A.Strumia,F.Vissani,'Neutrino masses and mixings and ...'
- [3] 長島順清, 素粒子標準理論と実験的基礎', 朝倉物理学大系 5
- [4] 長島順清, 高エネルギー物理学の発展', 朝倉物理学大系 6
- [5] Y.Fukuda,et.al,Phys.Rev.Lett.81,(1998)1562
- [6] T.Yanagida,in Proc. Workshop on the Unified Theory and Baryon Number in the Universe, ed. by O.Sawada, A.Sugamoto (KEK report 79-18,1979)
- [7] J.C.Pati,A.Salam,Phy.Rev.D10,(1974)275
- [8] R.N.Mohapatra,G.Senjanovic,Phys.Rev.Lett.44.(1980)912
- [9] M.Tanimoto,Phys.Lett.B456(1999)220
- [10] J.Kubo,A.Mondragon,M.Mondragon,E.Rodriguez-Jauregui, Prog.Theor.Phys.109(2003)795
- [11] J.Kubo,A.Mondragon,M.Mondragon,E.Rodriguez-Jauregui, O.Felix-Beltran,E.Peinado,
- [12] E.Ma,H.Sawanaka,M.Tanimoto,Phys.Lett.B641(2006)301
- [13] E.Ma,Phys.Rev.Lett.86(2000)2502
- [14] K.S.Babu,E.Ma,J.W.F.Valle,Phys.Lett.B552(2003)207
- [15] E.Ma,G.Rajasekaran,Phy.Rev.D64(2001)113012
- [16] M.Frigerio,S.Kaneko,E.Ma,M.Tanimoto,Phys.Rev.D71(2005)011901
- [17] M.Leurer,Y.Nir,N.Seiberg,Nucl.Phys.B398(1993)319
- [18] M.Leurer,Y.Nir,N.Seiberg,Nucl.Phys.B420(1994)468