

Coset Space Dimensional Reduction 法による統一模型の構築

物理学専攻
学籍番号 05SP012
野村 敬明

平成 19 年 4 月 28 日

概要

本論文では素粒子の統一模型構築のための手法として Coset Space Dimensional Reduction(CSDR) 法について概説する。CSDR 法の枠組みでは 4 次元時空における理論の起源を高次元時空における理論であると考ええる。そして、coset space として与えられる余剰空間に対する場の特殊な対称性を仮定することで 4 次元時空における理論を導く。この CSDR 法を用いることによって高次元時空におけるゲージ場と Higgs 場の統一的な理解が得られうる。本文では CSDR 法の基礎から統一模型構築のための技法まで幅広く議論していく。

目次

1	序章	4
2	CSDR 法の基礎	6
2.1	CSDR 法の概観	6
2.2	coset space とその幾何	7
2.3	場の対称条件と CSDR 拘束式	17
3	4次元における理論	22
3.1	4次元での Lagrangian	22
3.2	ポテンシャル項についての考察	24
3.2.1	$S \subset G$ である場合	25
3.2.2	S/R が対称である場合	25
3.2.3	S/R が非対称である場合	27
3.2.4	自発的対称性の破れの後に残るゲージ群	27
3.2.5	具体例	28
3.3	フェルミオンセクターについての考察	33
3.3.1	カイラルフェルミオンを得るための条件	33
3.3.2	具体例	36
3.4	質量についての考察	38
4	統一モデルの構築	46
4.1	統一モデル構築に向けて	46
4.2	Coset Space の候補	48
4.3	統一モデル構築における問題点	49
4.4	統一モデル構築のための技法 1 : Wilson flux breaking mechanism	53
4.4.1	Wilson flux breaking mechanism	53
4.4.2	S/R 上の離散対称群	54
4.4.3	Wilson flux breaking mechanism による GUT の破れ	56
4.5	統一モデル構築のための技法 2 : 複数のスケールの導入	59
5	まとめ	63
A	notation	65
B	調和展開	66
C	交換関係	68

1 序章

この宇宙における物質を構成する要素やそれらの間に働く相互作用を解明し、自然をより深く理解することは物理学における大きな目的の一つである。また、その目的に向けて異なる要素や相互作用等の統一的な理解が試みられてきた。例えば古くまで遡ると、電磁気学においてはそれまで異なる力だと考えられていた電気力と磁気力が、電磁気力として統一的に理解された。このように自然の理解においては、それまで異なると考えられていた要素や相互作用の統一的な理解が重要である。

現在では物質を構成する要素は素粒子であると考えられており、それらの間に働く相互作用としては重力相互作用、電磁相互作用、弱い相互作用、強い相互作用の4つが知られている。それら素粒子と重力を除く相互作用は、ゲージ理論を基にした素粒子の標準模型によって観測事実と矛盾なく記述されている。また、標準模型においては電磁相互作用と弱い相互作用の統一的な理解がなされた。このように標準模型は多くの成功をおさめたが、その中には少なくとも18個の自由に動かすことのできるパラメータが含まれ、それらの間の関係を定める基本原理は存在しない。ゆえに、自然のより深い理解のためにはこれら自由パラメータの起源を理解し、さらに少ない自由パラメータによって記述されるより本質的な理論を知ることが求められる。このことは素粒子物理における統一模型の構築の主な動機となっている。例えば有力な統一模型の候補である大統一理論では、重力を除く3つのゲージ相互作用の統一的な理解が試みられている。ここで、上述した標準模型を記述する18個の自由パラメータのうち3つのゲージ結合定数を除いた全てが Higgs セクターと湯川セクターに存在している。このことは注目すべき事実であり、これらの起源を解明することは、より本質的な理論の構成につながると考えられる。

この二つのセクターの起源の理解に対するアプローチの一つとして、これらの起源を高次元時空における理論に求めようという考えがある。具体的には本質的な理論として、通常の4次元時空に余剰空間を加えた高次元時空における、フェルミオンと結合した Yang-Mills 理論を考える。そして、その理論から得られる4次元時空における有効理論として、Higgs セクターと湯川セクターを含んだ理論が現れると考えるのである。その際に Higgs 場は高次元 Yang-Mills 理論におけるゲージ場の余剰空間成分を起源として、4次元時空での理論に現れる。すなわち、この考えによれば高次元時空におけるゲージ場と Higgs 場の統一的な理解が可能になる。

この考えのもとに高次元時空でのゲージ理論から4次元時空における有効理論を得るための手法として、Coset Space Dimensional Reduction(CSDR) 法がある [1,2]。この手法では高次元時空における場に対し、coset space として与えられた余剰空間に対する等長変換群の構造とゲージ群の構造を混合する特殊な対称性を仮定することで、高次元時空における理論から4次元時空での有効理論が得られる。この手法は始め高次元時空における純 Yang-Mills 理論に適用され、高次元時空でのゲージセクターと Higgs セクター統一の試みに用いられた [1]。その後、フェルミオンが導入されて湯川結合項を含めたゲージ場と Higgs 場の統一的な理解の可能性が進展した [3]。CSDR 法の魅力的な点としては、場に課せられる対称性からの制限が強いために、高次元時空でのゲージ群と余剰空間の構造から4次元時空における理論の構造が良く定まることである。すなわち、この枠組みではより少ないパラメータによる模型構築の可能性がある。本論文ではこの CSDR 法の枠組みについてのレビューを行い、この枠組みを用いた統一模型構築の可能性についての考察

を行う。

本論文は次のように構成されている。2章ではCSDR法の基本的な体系についてまとめた。2.1節ではCSDR法の基礎概念について概観する。また、2.2節ではcoset spaceの幾何について、2.3節では高次元時空での場に課せられる対称条件とその帰結として得られる拘束式について議論する。3章では実際にCSDR法によって得られる4次元時空における理論の構造について議論を行う。3.1節ではCSDR法により4次元時空において得られるLagrangianの一般形を導出する。3.2、3.3節ではHiggsポテンシャル項の解析とフェルミオンセクターについて議論する。フェルミオンセクターでは、特にカイラルフェルミオンを得るための条件に注目し、考察する。また、3.4節では4次元時空で得られる場に対する質量について、調和展開による解析との比較によって考察する。4章では統一模型の構築について議論する。4.1節では統一模型の構築において要求される事柄について考察し、4.2節ではCSDR法による統一模型の構築に用いられるcoset spaceの候補をまとめた。4.3節では統一模型の構築における問題点について議論し、4.4節と4.5節でそれら問題を解決するための技法について紹介する。最後に6章においてまとめを行う。

2 CSDR 法の基礎

2.1 CSDR 法の概観

高次元時空における理論から 4 次元時空での理論を有効的に得るための手法の一つが CSDR 法である。まずはこの CSDR 法の概観を眺めてみる。

CSDR 法の出発点となるのは D 次元時空 $M^D (D > 4)$ におけるゲージ理論である。この高次元ゲージ理論に対し、いくつかの仮定的な条件を課すことで 4 次元時空における有効理論が得られる。ここで、4 次元での有効理論を得るための基本的なアイデアを以下のように概説する。まず、D 次元における作用を

$$A_D = \int dX^D L(X) = \int dx^4 dy^{D-4} L(x, y) \quad (2.1)$$

と書く。ここで D 次元座標を $X = (x, y)$ と、4 次元時空の座標 x と余剰空間の座標 y に分けて書いた。このとき Lagrangian を構成する場に対するある種の対称条件の帰結として、Lagrangian の値が余剰空間の座標に依らないとする。そのとき、作用において余剰空間座標についての積分を実行でき、

$$A_D = \int dx^4 dy^{D-4} L(x) = V \int dx^4 \tilde{L}(x) = V A_4 \quad (2.2)$$

となる。ここで V は余剰空間の体積であり、場に対する条件から Lagrangian の構造も $L \rightarrow \tilde{L}$ と変化するとしている。このようにして高次元ゲージ理論から 4 次元における有効理論を得ることができる。ここで、そのために必要な仮定的条件をおおまかに見ていく。

まず第一の仮定として、D 次元時空が多様体 $M^D = M^4 \times B$ の構造を持つとする。ここで M^4 は 4 次元 Minkowski 時空であり、余剰空間 B はコンパクト化されているとする。この仮定は余剰空間の存在が確認されていないという観測事実を反映したものであるが、余剰空間がコンパクトであることで (2.1) 式の積分が発散することを回避できる。また、余剰空間 B は等長変換群 (isometry group) S を持つとする。ここで S はコンパクト Lie 群であるとする。後で詳しく述べるが、このとき余剰空間は一般に coset Space S/R (R は S の部分群) の構造を持つことが知られている [1]。そこで今後は主に $B = S/R$ と記すことにする。

第二の仮定として D 次元時空が上記の構造を持った際に、その時空での場に対し対称条件が課せられるとする。先述したようにこの対称条件により、高次元理論から 4 次元理論を導くことが可能になる。そこで対称条件について説明する。高次元で定義された場 $\Phi(x, y)$ に対する等長変換群 S の作用を $\Phi^s(x, y)$, ゲージ変換を $\Phi^g(x, y)$ としたときに場 Φ が条件式、

$$\Phi^s(x, y) = \Phi^g(x, y) \quad (2.3)$$

を満たすとする [1]。このとき、場は S 変換をゲージ変換で打ち消すことができるという意味で対称である。この条件式を場に対する対称条件と呼ぶことにする。Lagrangian を構成する全ての場が対称条件を満たすなら、Lagrangian はゲージ不変性より S 変換に対しても不変になる。すなわち、

$$L^s(x, y) = L(x, y) \rightarrow L(x, y^{-s}) = L(x, y) \quad (2.4)$$

となり、Lagrangian の値は余剰座標 y に依らなくなる。したがって、高次元ゲージ理論における場に対し対称条件を課すことにより、上述したように4次元における有効理論を得ることができる。また、この対称条件から場に対する拘束式が導かれる。それを解くことで4次元時空における場を得ることができ、さらに4次元における理論の構造に対し制限をつけることができる。この拘束式をCSDR 拘束式 (CSDRconstraints) と呼ぶことにする。CSDR 拘束式については2.3節で詳しく調べる。以上のようにして高次元ゲージ理論から4次元理論を導く手法をCSDR 法という。

CSDR 法の魅力的な点は4次元理論の構造の起源を高次元でのゲージ理論に求めることで、4次元におけるゲージ場と Higgs 場の統一の可能性が得られることである。詳細は後に述べるがCSDR 法により高次元でのゲージ理論から4次元での理論を導く際に、ゲージ場の余剰空間成分は4次元においてスカラー場-Higgs 場として振舞う。もちろん4次元におけるゲージ場は高次元ゲージ理論のゲージ場の4次元時空に対する成分から得られる。また後でみるように、CSDR 拘束式からの帰結として4次元での Higgs セクターは高次元における Yang-Mills セクターの高次元成分から得られる。特に Higgs ポテンシャル項は4次式の形で得られ、その構造は余剰空間である S/R の構造から決まる。さらに、高次元ゲージ理論におけるゲージ場とフェルミオンの相互作用項の高次元成分からは4次元における湯川結合項を得ることができる。このようにしてCSDR 法により、4次元でのゲージ場と Higgs 場を高次元ゲージ理論におけるゲージ場の各成分を起源として統一的に理解できる。また、 S/R の構造を決めることにより、4次元における Higgs セクターや湯川セクターの構造を決めることができるという利点がある。さらに、高次元でのゲージ群 G と S/R の構造を決めることにより、CSDR 拘束式から4次元でのゲージ群 H と4次元での場が属す H の表現が決まる。

CSDR 法により高次元ゲージ理論から4次元理論を得るためには、まず始めに高次元ゲージ理論の Lagrangian を構成しなくてはならない。そのためには余剰空間である S/R の幾何を調べる必要がある。そして次に、場に対称条件を課すことで得られる CSDR 拘束式を調べることで4次元理論の構造を探っていく。この章の以後の節ではこれらのことを調べる。

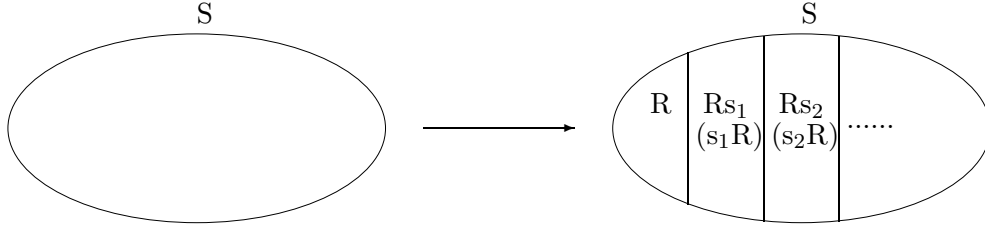
2.2 coset space とその幾何

2.1節で見たように我々は始めに D 次元時空多様体 $M^D = M^4 \times S/R$ 上のゲージ理論を構成するのだが、そのためには coset space S/R の幾何を知る必要がある。また、2.2節で場の対称条件からCSDR 拘束式を導く際にも S/R の幾何学的量を扱う。そこで、この節では S/R とその幾何について調べる。特に空間の幾何を知る上で重要な幾何学的量である計量、多脚場、Killing ベクトル、接続、曲率、振率について詳しく調べる [2]。

・ coset space S/R の定義

まず S/R がどのように定義された空間であるかを見る。 S をコンパクト Lie 群、 R を S のコンパクト Lie 群である部分群とする。そこで R に属さない S の元 $s_1 \in S (s_1 \notin R)$ を R の各元に作用させることで同値類 Rs_1 (right coset)、 s_1R (left coset) が得られる。さらに S にも Rs_1 (or s_1R) にも属さない S の元 s_2 から同値類 Rs_2, s_2R が得られる。このとき s_1, s_2 から得られる同値類同士は重ならない。同様の操作を繰り返すことで S を同値類 Rs_1 (or s_1R), Rs_2 (or s_2R), ... で分割するこ

とができる。



このとき、同値類 Rs_1 (or s_1R), Rs_2 (or s_2R), ... を元とした空間を coset space S/R という。ここで left coset と right coset は R が S の不変部分群、すなわち $sR = Rs \forall s \in S$ の場合にのみ等しい。本論文では coset といった場合 right coset のみを指すことにする。 S/R の次元は

$$d = \dim S/R = \dim S - \dim R \quad (2.5)$$

である。群 S の S/R への作用は、右からの積 $Rs \rightarrow (Rs)s' = R(ss')$ で与えられる。ここで、 S の S/R への作用は推移的である。すなわち、 S/R の任意の元は S の作用により別の任意の元へ移すことができる。また、 S の部分群 R は S/R の identity coset と呼ばれる。さらに $Rr = R \forall r \in R$ であるので、 R は S/R の identity coset に対する等方群でもある。coset space S/R は以上のように定義される空間であるが、なぜ余剰空間として S/R を選ぶ必要があるのだろうか。次にそれを考えてみる。

・なぜ coset space を考えるのか

ここで余剰空間 B として coset space を考える理由を簡単に考察する [1]。我々は余剰空間 B として、等長変換群 S としてコンパクト Lie 群 S を持ったコンパクト空間を考えたい。そして、そのときに B がとりうる構造として coset space が選ばれるのである。以下でそのことを見ていく。ただし、以下の議論は B と S がコンパクトであることや s が等長変換群であることは必要としないことを注意しておこう。

まず、余剰空間の座標を y^α ($\alpha = 1, \dots, \dim B$) として、 y の無限小 S 変換が

$$(y^s)^\alpha = y^\alpha + \epsilon^A \xi_A^\alpha \quad (A = 1, \dots, \dim S) \quad (2.6)$$

で与えられるとする。ここで、 ϵ^A は無限小パラメータであり、 ξ_A^α は y の無限小 S 変換による変化分を表すベクトル場である。 A をその成分としたベクトルの集合 $\{\xi_A\}$ はベクトル空間を形成し、 S の無限小変換はこのベクトル空間のベクトルで特徴付けられる。次に場 $\Phi(y)$ (S は 4 次元時空には trivial な作用しかしないので 4 次元時空の座標は略した) の S 変換を考える。我々は ξ_A で表される方向に対する場の無限小 S 変換の変化分を Lie 微分 L_{ξ_A} で表すことにする。無限小 S 変換 (6) に対応した Lie 微分は、場 $\Phi(y)$ の S 変換を $\Phi^s(y)$ としたとき、

$$L_{\xi_A} \Phi(y) = \lim_{\epsilon_A \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon_A} \{ \Phi^{-s}(y) - \Phi(y) \} \quad (2.7)$$

で与えられる。ここで、 $\Phi(y)$ の S 変換に対する回転を $\Omega(s, y)$ としたとき、 $\Phi^s(y) = \Omega(s, y) \Phi(y^{-s})$ (y^{-s} は逆変換を表す) である。例えば、反変ベクトル場 $u^\alpha(y)$ 、共変ベクトル場 $u_\alpha(y)$ に対する Lie 微分は、

$$L_{\xi_A} u_\alpha = \xi_A^\beta \partial_\beta u_\alpha + (\partial_\alpha \xi_A^\beta) u_\beta, \quad L_{\xi_A} u^\alpha = \xi_A^\beta \partial_\beta u^\alpha - (\partial_\beta \xi_A^\alpha) u^\beta \quad (2.8)$$

となる。ここで、Lie 微分の交換子 $[L_{\xi_A}, L_{\xi_B}]$ の場への作用を計算すると、

$$[L_{\xi_A}, L_{\xi_B}]\Phi(y) = L_{\eta_{AB}}\Phi(y), \quad \eta_{AB}^\alpha = \xi_A^\beta \partial_\beta \xi_B^\alpha - \xi_B^\beta \partial_\beta \xi_A^\alpha \equiv [\xi_A, \xi_B]^\alpha \quad (2.9)$$

となることがわかる。Lie 微分の交換子を場に作用させたものも、やはり場の無限小 S 変換の変化分を表すので $[\xi_A, \xi_B]^\alpha$ は

$$[\xi_A, \xi_B]^\alpha = f_{AB}{}^C \xi_C^\alpha \quad (2.10)$$

を満たすことが要求される。ここで、括弧積 $[\xi_A, \xi_B]^\alpha$ は AB について反対称であり、Jacobi 恒等式を満たす。よってベクトル空間 $\{\xi_A\}$ は括弧積 $[\xi_A, \xi_B]^\alpha$ の下で S の Lie 代数を形成する。したがって、 $f_{AB}{}^C$ はまさに S の Lie 代数の構造定数になる。さて、以上で余剰空間 B が等長変換群として Lie 群 S を持つとき、(2.10) 式が満たされる必要があることを見た。そこで、B の構造が coset space S/R であるときに (2.10) 式が満たされることを示す。そのために S/R への S の作用を調べる。S の生成子を $\{Q_A\}$ 、その交換関係を $[Q_A, Q_B] = f_{AB}{}^C Q_C$ とする。ここで構造定数 $f_{AB}{}^C$ は (2.10) 式と同一である。S/R の元 Rs に対する座標を y としたとき、 $Rs(y)$ の無限小 S 変換は、

$$Rs(1 + \epsilon^A Q_A) = Rs + \epsilon^A \xi_A^\alpha \partial_\alpha (Rs) \quad (2.11)$$

と書ける。ここで $y^\alpha + \epsilon_A \xi_A^\alpha$ は $Rs(1 + \epsilon^A Q_A)$ の座標である。上式はまた、

$$Rs Q_A = L_{\xi_A} (Rs) \quad (2.12)$$

と書き直せる。ここで Q_A は y に依らないので、

$$L_{\xi_A} L_{\xi_B} (Rs) = Rs Q_A Q_B \quad (2.13)$$

となる。したがって、Rs は

$$[L_{\xi_A}, L_{\xi_B}](Rs) = f_{AB}{}^C L_{\xi_C} (Rs) \quad (2.14)$$

を満たす。この式はまさに (2.10) 式を与える。よって、B が S/R の構造を持つならば (2.10) 式を満たし、B は等長変換群として Lie 群 S を持つことができることがわかった。実際、以上を満たしうる B の構造としては $B=S$ (R が trivial な群の場合に相当) か $B=S/R$ の場合のみであることが知られている。したがって、我々は余剰空間の構造として coset space S/R を選ぶ必要がある。そこで、以下では S/R の幾何学的構造を調べていく。

・ S の Lie 代数

S/R の幾何を調べるために、まずは S の Lie 代数の構造を調べる。Lie 群 S、R 等の Lie 代数は $\mathcal{S}, \mathcal{R}$ のように記すことにする。 $\mathcal{R}$ は $\mathcal{S}$ の部分代数なので、 $\mathcal{S} = \mathcal{R} \oplus \mathcal{K}$ と分解することができる。また、S の生成子を上の分解に対応させて、 $Q_A = \{Q_i, Q_a\}$ と分ける。ここで $Q_i (i = 1, \dots, \dim \mathcal{R})$ は $\mathcal{R}$ を形成し、 $Q_a (a = \dim \mathcal{R} + 1, \dots, \dim \mathcal{S})$ は $\mathcal{K}$ に対応する。さらに、本論文では R をコンパクト Lie 群としているので、考える coset space は全て reductive である [4,5]。すなわち、 $[\mathcal{K}, \mathcal{R}] \subset \mathcal{K}$ となる。一般に R がコンパクトであるときには S/R が reductive となるような生成子の基底を選ぶことができる。よって、 $\mathcal{S}$ の交換関係を次のように書くことができる。

$$[Q_i, Q_j] = f_{ij}{}^k Q_k, \quad [Q_i, Q_a] = f_{ia}{}^b Q_b, \quad [Q_a, Q_b] = f_{ab}{}^c Q_c + f_{ab}{}^i Q_i. \quad (2.15)$$

この交換関係において構造定数 f_{ij}^a は $\mathcal{R}$ が部分代数を形成していることから 0 となっている。また、 f_{ia}^j は S/R の reductivity のために 0 である。一般には f_{ab}^c は 0 ではないが、 $f_{ab}^c = 0$ のとき S/R は対称であるという。例えば $SO(n+1)/SO(n)$ や $SU(n+1)/SU(n) \times U(1)$ といった coset space は対称である。

Lie 代数の分解 $\mathcal{S} = \mathcal{R} \oplus \mathcal{K}$ は $\mathcal{S}$ の随伴表現の $\mathcal{R}$ の下での分解、

$$\text{adj}\mathcal{S} = \text{adj}\mathcal{R} \oplus \mathbf{v} \quad (2.16)$$

によって特徴づけることができる。ここで $\mathbf{v}$ は $\mathcal{R}$ の表現であり、(2.16) 式の分解の形からも明らかなように $\mathcal{K}$ の生成子 (coset 生成子と呼ぶ) に対応している。

また、生成子 Q_a は S/R の接空間ベクトルを形成する。接空間ベクトルは $SO(d)$ のベクトル表現 d の下で変換するので、 Q_a は表現 d に属す。一方で Q_a は $\mathcal{R}$ の表現 $\mathbf{v}$ としても変換する。したがって、 $d=\mathbf{v}$ を満たす $\mathcal{R}$ の $SO(d)$ への埋め込みがなくてはならない。この埋め込みは $\mathcal{R}$ の $\mathcal{S}$ への埋め込みが行われれば決めることができる。ここで、 $SO(d)$ の交換関係は、

$$[\Sigma^{ab}, \Sigma^{cd}] = -g^{ac}\Sigma^{bd} + g^{ad}\Sigma^{bc} + g^{bc}\Sigma^{ad} - g^{bd}\Sigma^{ac} \quad (2.17)$$

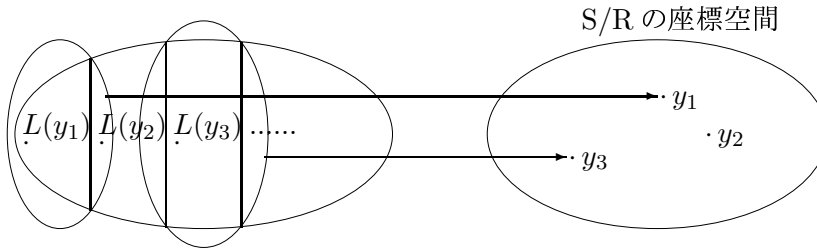
で与えられる。 Σ^{ab} は $SO(d)$ の生成子であり、 g^{ab} は S/R の接空間の計量である。今、 $\mathcal{R}$ の $SO(d)$ への埋め込みは

$$T_i = -\frac{1}{2}f_{iab}\Sigma^{ab} \quad (2.18)$$

と決めることができる。この T_i が $SO(d)$ の中の $\mathcal{R}$ 部分代数を形成していることは、交換関係 (2.15) 式から得られる構造定数に関する Jacobi 恒等式を用いることで確かめられる。

・ S/R の座標とその変換性

次に S/R の座標 y^a を導入し、その S 変換性を調べる。我々は coset をパラメータ表示するため、coset R_s の代表元を $L(y)$ として選ぶ。 $L(y)$ と S/R の座標空間との関係を下図に示す。



図のように coset R_s 一つ一つが S/R の座標に対応しており、一方で R_s の代表元が対応した座標 y によって $L(y)$ とパラメータ表示されている。ここで、代表元 $L(y)$ への S 変換 s の作用を考える。 s の作用により $L(y)$ は一般に別の coset に属す元に移る。その coset の代表元を $L(y^s)$ としたとき、 $L(y)$ が s の作用で移った元は $r(y, s)L(y^s)$ の形で与えられる。ここで $r(y, s)$ は R の元であり、 y と s により決まる。よって、 $L(y)$ への s の作用は

$$L(y)s = r(s, y)L(y^s) \quad (2.19)$$

で与えられる。この方程式により y^s と $r(y, s)$ は y と s の関数として決めることができる。 y^s や $r(y, s)$ の具体形を求めるために $L(y)$ の表示を次のように選ぶ。

$$L(y) = \exp(y^\alpha \delta_\alpha^a Q_a) \quad (2.20)$$

ここで添え字の記法について触れておく。本論文ではギリシャ文字の添え字を S/R の座標に用い、ラテン文字の添え字を S/R の接空間に対して用いる。(2.20) 式の中に出てくる δ_α^a は S/R と接空間の添え字を結びつける。また、我々は S を ω^i, ω^α でパラメータ表示し、R を ϕ^i でパラメータ表示する。すなわち

$$s = \exp(\omega^i Q_i + \omega^\alpha \delta_\alpha^a Q_a), \quad r = \exp(\phi^i Q_i) \quad (2.21)$$

と書くことにする。無限小 S 変換 s に対する、座標 y の無限変化は次のように表す。

$$\delta y^\alpha = (y^s)^\alpha - y^\alpha = \omega^\beta \delta_\beta^a \xi_a^\alpha + \omega^i \xi_i^\alpha \quad (2.22)$$

ここで $\xi_a^\alpha, \xi_i^\alpha$ は y の無限小変化を表すベクトル場であり、与えられた変化の方向に接する。また、後で見るように ξ は Killing ベクトル場である。また、無限小 S 変換に対する $r(s, y)$ をパラメータ表示する ϕ_i は ω のオーダーまでで、

$$\phi^i = \omega^\beta \delta_\beta^a \Omega_a^i + \omega^j \Omega_j^i \quad (2.23)$$

と書けるとする。

ベクトル場 ξ や係数 Ω の具体的な形を調べるために、(2.19) 式に $L(y), r(s, y), s$ の具体的な形の (2.20)、(2.21) 式を代入する。今は無限小変換だけ考えて y^s や ϕ^i として (2.22)、(2.23) を用いて、両辺の比較を行うと ξ と Ω として

$$\xi_a^\alpha = \delta_a^\alpha - \frac{1}{2} y^\beta \delta_\beta^b f_{ab}{}^c \delta_c^\alpha + \cdots, \quad \xi_i^\alpha = -y^\beta \delta_\beta^a \delta_c^\alpha f_{ia}{}^c + \cdots, \quad (2.24)$$

$$\Omega_j^i = \delta_j^i + \cdots, \quad \Omega_a^i = -\frac{1}{2} y^\beta \delta_\beta^b f_{ab}{}^i + \cdots \quad (2.25)$$

が得られる。ここで、我々はこれらの量の具体形を y の一次までのみ求めた。実際、今後の議論においてはこれ以上の y の高次項は必要としない。というのは 2.1 節で見たように、高次元の Lagrangian から 4 次元の Lagrangian を得る際に対称条件から Lagrangian の値は S/R 座標 y によらなくなるので、S/R のどの点で Lagrangian を評価してもかまわない。我々は計算に便利な点として $y = 0$ を選ぶので、 y に依存する量は $y = 0$ 近傍での形がわかれば十分なのである。また、(2.24) 式で得られた ξ が (2.10) 式で与えられる代数を満たすことを実際に確かめることができる。以上で S/R の座標とその S 変換を調べた。次に多脚場と S 不変な計量について調べる。

・多脚場と S 不変計量

まず、次のような量を考える。

$$dL(y) \cdot L^{-1}(y) = e(y) = e^a Q_a + e^i Q_i \quad (2.26)$$

これは、Lie 代数上に値を持つ 1 形式である。また、 d は外微分を表す。ここで、 $e^a = e_\alpha^a dy^\alpha$, $e^i = e_\alpha^i dy^\alpha$ である。 e の成分 e_α^a は S/R とその接空間の添え字を結びつける量であり、非特異な $d \times d$ 行列である。また、 e_α^a は S/R 上の共変ベクトルの基底を与え、我々はこれらを多脚場として選ぶ。この 1 形式 $e(y)$ はその定義と外微分 d の特性から、Maurer-Cartan 方程式

$$de(y) = e(y) \wedge e(y) \quad (2.27)$$

に従うことがわかる。また、 $e(y)$ の定義 (2.26) と S、R の交換関係 (2.15) より、(2.27) 式は S 成分と R 成分に分けて

$$de^a = \frac{1}{2} f_{bc}^a e^b \wedge e^c + f_{bi}^a e^b \wedge e^i, \quad de^i = \frac{1}{2} f_{ab}^i e^a \wedge e^b + \frac{1}{2} f_{jk}^i e^j \wedge e^k \quad (2.28)$$

と書き直せる。このように $e(y)$ は Maurer-Cartan 方程式に従うので、その成分を多脚場として選ぶことは S/R の幾何を特徴付ける量である接続や曲率などの計算に役立つ。そのため、我々は e_α^a を多脚場として選んだのである。 e_α^a, e_α^i の具体形は (2.20) 式の $L(y)$ のパラメータ表示を用いることで、

$$e_\alpha^a(y) = \delta_\alpha^a + \frac{1}{2} y^\beta \delta_\beta^c \delta_\alpha^b f_{cb}^a + \dots, \quad e_\alpha^i(y) = \frac{1}{2} y^\beta \delta_\beta^c \delta_\alpha^b f_{cb}^i + \dots \quad (2.29)$$

と計算できる。ここでもやはり、 y の 1 次までのみで具体形を求めた。この式から明らかなように $y = 0$ においては $e_\alpha^a = \delta_\alpha^a, e_\alpha^i = 0$ である。後の計算ではこの事実をよく用いる。

S/R の計量 $g_{\alpha\beta}$ は多脚場によって次のように与えられる。

$$g_{\alpha\beta} = g_{ab} e_\alpha^a e_\beta^b \quad (2.30)$$

ここで g_{ab} は S/R の接空間の計量であり、S/R の座標に依存しない平坦な空間に対するものである。

次に多脚場の S 変換に対する振る舞いを調べ、計量が S 不変であるための条件を求める。まず、(2.19) 式 (s は定数値) と (2.26) 式から

$$e^a(y^s) Q_a + e^i(y^s) Q_i = e^a(y) r^{-1} Q_a r + e^i(y) r^{-1} Q_i r + dr^{-1} \cdot r \quad (2.31)$$

を得る。ここで S/R は reductive であるとしているので、

$$r^{-1} Q_a r \equiv \text{adj}(r) Q_a = D_a^b(r) Q_b \quad (2.32)$$

と書ける。なぜなら、 r の具体形 (2.21) と交換関係 (2.15) より

$$\begin{aligned} r^{-1} Q_a r &= \exp(-\phi^i Q_i) Q_a \exp(\phi^i Q_i) \\ &= Q_a + \phi^i [Q_a, Q_i] + \dots \\ &= Q_a + \phi^i f_{ai}^b Q_b + \dots \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$D_a^b(r) = \delta_a^b + \phi^i f_{ai}^b + \dots \quad (2.34)$$

と計算できるからである。ここで、(2.33) の 2 行目から 3 行目に移るときに S/R の reductivity を用いている。よって (2.32) 式を (2.31) 式に代入することで $e^a(y)$ の S 変換性、

$$e^a(y^s) = e^b(y) D_b^a(r) \quad (2.35)$$

を得る。この $e^a(y)$ に対する S 変換性から S/R の計量 $g_{\alpha\beta}(y)$ が S 不変であるための条件を調べる。 $g_{\alpha\beta}(y)$ に対する S 不変条件は

$$g_{\alpha\beta}(y^s) = g_{\alpha\beta}(y) \quad (2.36)$$

で与えられる。これを多脚場を用いて書き直すと、

$$g_{ab} e_\alpha^a(y^s) e_\beta^b(y^s) = g_{ab} e_\alpha^a(y) e_\beta^b(y) \quad (2.37)$$

となる。この式に (2.35) 式を適用すると、接空間の計量 g_{ab} に対する条件

$$g_{ab} = g_{cd} D_a^c(r) D_b^d(r) \quad (2.38)$$

を得る。さらに $D(r)$ の無限小形 (2.34) を代入すると、

$$f_{ia}^b g_{db} + f_{id}^b g_{ab} = 0 \quad (2.39)$$

が得られる。条件式 (2.39) は特に重要である。なぜならこの式は S 不変な計量に対する条件を単純な代数で表しているからである。

条件式 (2.39) を用いることで (2.24) 式で与えられるベクトル場 ξ が Killing ベクトル場であることが確かめられる。そのためにまず、(2.22) 式で表される y の無限小変化に対する多脚場の変化分を ξ_A についての Lie 微分で表す。ベクトル場に対する Lie 微分は (2.8) 式で与えられ、これを用いて e_α^a, e_α^i の Lie 微分を計算すると

$$L_{\xi_A}(e_\alpha^a) = -f_{ib}^a \Omega_A^i e_\alpha^b, \quad L_{\xi_A}(e_\alpha^i) = -\partial_\alpha \Omega_A^i + f_{jk}^i \Omega_A^k e_\alpha^j \quad (2.40)$$

となることがわかる。次に、S/R 計量 $g_{\alpha\beta}$ の Lie 微分を計算すると

$$L_{\xi_A}(g_{\alpha\beta}) = \xi_A^\gamma (\partial_\gamma g_{\alpha\beta}) + g_{\gamma\beta} \partial_\alpha \xi_A^\gamma + g_{\alpha\gamma} \partial_\beta \xi_A^\gamma \quad (2.41)$$

となる。この式の ξ_A に (2.24) を代入して無限小形を調べると、条件式 (2.39) により $L_{\xi_A}(g_{\alpha\beta}) = 0$ となることがわかる。したがって (2.24) で与えられるベクトル場 ξ_A は killing ベクトルであるための条件を満たすことがわかる。

条件式 (2.39) を満たす具体的な S 不変計量 g_{ab} の形を考える。次のように与えられる計量は条件式 (2.39) を満たす。

$$\gamma_{ab} = f_{aA}^B f_{Bb}^A \quad (2.42)$$

これは S の Cartan-Killing 計量の S/R に対する部分を取り出したものである。実際にこの計量が条件式 (2.39) を満たすことを確かめるには交換関係 (2.15) から得られる構造定数に対する Jacobi 恒等式を用いて計算すればいい。一般に γ_{ab} は S の生成子の基底を適当に選ぶことにより

$\gamma_{ab} = \text{diag}(a_1, \dots, a_d)$ の形にとれる。S/R が対称 ($f_{ab}^c = 0$) のとき γ_{ab} は S/R の唯一の S 不変計量である [4]。また、この場合 (2.16) 式の $\mathbf{v}$ は R の規約表現であるか互いに共役な既約表現のペアに分解される。一方、S/R が非対称 ($f_{ab}^c \neq 0$) のとき $\mathbf{v}$ は R の可約な表現である。 $(f_i)_a^b$ は表現 $\mathbf{v}$ の変換行列なので $\mathbf{v}$ が可約ならブロック対角型にすることができる。そのとき独立な既約表現の数だけブロックが現れ、各ブロックが各既約表現の変換行列を表す。このとき条件式 (2.39) を満たす S 不変計量に対し、R の独立な既約表現毎に異なるスケール (半径) をとることができる [6,7]。例えば、 $g_{ab} = \text{diag}(a_1, \dots, a_4)$ としたときに $(f_i)_a^b$, ($i = 1, 2$ $a = 1, \dots, 4$ が

$$(f_i)_a^b = \begin{pmatrix} D_i^1 & 0 \\ 0 & D_i^2 \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

とブロック対角型にできるなら (D は 2×2 行列) 条件式 (2.39) は

$$\begin{pmatrix} D_i^1 & 0 \\ 0 & D_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_i^1 & 0 \\ 0 & D_i^2 \end{pmatrix}^T = 0 \quad (2.44)$$

となり、 a_1, a_2 に対する条件式と a_3, a_4 に対する条件式は独立なので計量に 2 つのスケールを導入することができる。したがって、 $\mathbf{v}$ が既約、もしくは互いに共役な既約表現のペア一組に分解されるときはスケールは 1 つだけとなり、 $\mathbf{v}$ がいくつかの既約表現と複数の共役な既約表現のペアに分解されるときは、スケールは独立な既約表現数と共役な既約表現のペア数を足した数だけとれる。よって $\mathbf{v}$ の R に対する可約性を調べればとることができるスケールの数がわかる。

S/R にいくつかのスケールを導入し、接空間の計量を $g_{ab} = \text{diag}(a_1, \dots, a_d)$ (いくつかの a_i は同じ値) と δ_{ab} に比例しない形に選ぶことは多脚場として特殊なものを選んでいることを意味する。しかし、 $e^a = \lambda^a f^a$ (a についての和はとっていない) で与えられる、スケールをとり直した多脚場 f^a とスケールをとり直した生成子 $Q'_a = \lambda^a Q_a$ (a についての和はとっていない) を用いることで接空間計量を通常の δ_{ab} に比例した形にすることも可能である [7]。ここで、 f^a は

$$L_{\xi_A}(f^a) = -f_{ib}^a \Omega_A^i f^b \frac{\lambda^b}{\lambda^a} \quad (2.45)$$

に従い、全ての f_{ia}^b に対し $\lambda^a = \lambda^b$ ならば e^a と同じ S 対称性を持つ。またスケールをとり直した生成子 Q'_a は交換関係

$$[Q_i, Q'_a] = f_{ia}^b Q'_b, \quad [Q'_a, Q'_b] = D_{ab}^c Q_c + f'_{ab}{}^i Q_i \quad (2.46)$$

に従う。ここで

$$D_{ab}^c = \left(\frac{\lambda^a \lambda^b}{\lambda^c} \right) f_{ab}^c, \quad f'_{ab}{}^i = \lambda^a \lambda^b f_{ab}^i Q_i \quad (2.47)$$

である。条件式 (2.39) は以上のスケールのとり直しに対して不変である。また、(2.28)、(2.29) 式は多脚場と構造定数をスケールをとり直したものに置き換えれば同じ形になる。このとき計

量 g_{ab} はスケールをとり直した構造定数を用いて δ_{ab} に比例した形にすることができる。ただし、我々は計量として $\text{diag}(a_1, \dots, a_d)$ の形の方を選ぶ。

ここで、計量 g_{ab} に異なるスケールが入る場合に構造定数の完全反対称性が添え字の g_{ab} による上げ下げにより失われてしまうことに注意しておこう。例えば、 $f_{ab}{}^c(a, b, c = 1, \dots, 3)$ が $f_{12}{}^3 = 1$ であり、 a, b, c について完全反対称であるとする。そのとき計量 $g_{ab} = \text{diag}(A, B, C)$ により一つ添え字を下げた f_{abc} を考えてみると。

$$f_{123} = g_{33}f_{12}{}^3 = C, \quad f_{132} = g_{22}f_{13}{}^2 = -B, \quad f_{321} = g_{11}f_{32}{}^1 = -A$$

となり、添え字を下げるときに異なるスケールが関わってしまい完全反対称性が失われてしまうことがわかる。

・ S/R の接続、曲率、振率の計算

ここで、S/R の接続、曲率、振率がいかに与えられるかを調べる。その際に振率がゼロである場合と有限の場合にわけて考える。

() 振率がゼロの場合

振率がゼロであることを微分形式を用いて表すと

$$T^a \equiv de^a + \omega_b^a \wedge e^b = 0 \quad (2.48)$$

と書ける。ここで T^a は振率形式であり、 ω_b^a は接続形式である。(2.48) 式の de^a に (2.28) 式を代入して整理すると

$$\frac{1}{2}f_{bc}{}^a e^b \wedge e^c + f_{bi}{}^a e^b \wedge e^i + \omega_b^a \wedge e^b = 0 \quad (2.49)$$

となる。この式は

$$\omega_b^a = -f_{ib}{}^a e^i - \frac{1}{2}f_{cb}{}^a e^c \quad (2.50)$$

であれば成立する。しかし一般に $f_{cb}{}^a$ は a, b について反対称ではないので (f_{ia}^b は一般に完全反対称に選ぶことができる) (2.50) 式で与えられる ω_b^a は a, b について反対称ではなく接続形式としては適切ではない。そこで (2.49) 式に

$$0 = g^{ad} \frac{1}{2} [f_{db}{}^e g_{ec} - f_{cd}{}^e g_{be}] e^b \wedge e^c$$

を加える。そうして得られる a, b について反対称な

$$\omega_b^a = -f_{ib}{}^a e^i - \frac{1}{2}D_{cb}{}^a e^c \quad (2.51)$$

$$D_{cb}{}^a = g^{ad} \frac{1}{2} [f_{db}{}^e g_{ec} + f_{cb}{}^e g_{de} - f_{cd}{}^e g_{be}] \quad (2.52)$$

を改めて接続形式 ω_b^a とする [5]。ここで (2.51) 式では (2.46) 式と同じ記号 $D_{ab}{}^c$ を用いていることに注意する。実際、両式に出てくるこの $D_{ab}{}^c$ が同じものであることを示すことができる。S/R に導入されるスケールが一つの場合は g_{ab} は δ_{ab} に比例するので、 $D_{ab}{}^c = \frac{1}{2}f_{ab}{}^c$ となる。さらに

S/R が対象である場合には $f_{ab}{}^c = 0$ なので、 $D_{ab}{}^c = 0$ である。
次に曲率を計算する。曲率形式は次のように定義される。

$$R_b^a = \frac{1}{2} R_{bcd} e^{cd} \equiv d\omega_c^a \wedge \omega_b^c \quad (2.53)$$

ここで $e^{cd} = e^c \wedge e^d$ である。(2.53) 式の ω_b^a に (2.51) 式を代入して整理すると

$$\begin{aligned} R_b^a = & e^j \wedge e^i \left(-\frac{1}{2} f_{ib}{}^a f_{jk}{}^i + f_{jc}{}^a f_{kb}{}^c \right) + e^d \wedge e^i \left(-D_{cb}{}^a f_{di}{}^c + D_{dc}{}^a f_{ib}{}^c - D_{ad}{}^c f_{ic}{}^a \right) \\ & + e^d \wedge e^e \left[-\frac{1}{2} f_{ib}{}^a f_{de}{}^i - \frac{1}{2} D_{cb}{}^a f_{de}{}^c + \frac{1}{2} (D_{dc}{}^a D_{eb}{}^c - D_{ec}{}^a D_{db}{}^c) \right] \end{aligned} \quad (2.54)$$

となる。ここで (2.54) 式の第 1 項と第 2 項は (2.39) 式と構造定数についての Jacobi 恒等式を用いると消えることが示される。よって、

$$R_b^a = e^d \wedge e^e \left[-\frac{1}{2} f_{ib}{}^a f_{de}{}^i - \frac{1}{2} D_{cb}{}^a f_{de}{}^c + \frac{1}{2} (D_{dc}{}^a D_{eb}{}^c - D_{ec}{}^a D_{db}{}^c) \right] \quad (2.55)$$

である。曲率テンソル R_{bcd}^a と曲率スカラー $R = R^{ab}{}_{ab}$ はそれぞれ、

$$R_{bcd}^a = -f_{ib}{}^a f_{cd}{}^i - D_{eb}{}^a f_{cd}{}^e + D_{ce}{}^a D_{db}{}^e - D_{de}{}^a D_{cb}{}^e \quad (2.56)$$

$$R = g^{be} (-f_{ib}{}^a f_{ae}{}^i - D_{cb}{}^a f_{ae}{}^c - D_{ec}{}^a D_{ab}{}^c) \quad (2.57)$$

と求めることができる。ここで S/R のスケールが 1 つのときは $R = f_{iab} f^{iab} + \frac{1}{4} f_{abc} f^{abc}$ で与えられ、さらに S/R が対称のときは $R = f_{iab} f^{iab}$ となる。

() 振率が有限の場合振率がゼロではない場合は (2.48) 式は

$$T^a = \frac{1}{2} T_{bc}^a e^{bc} = de^a + \theta_b^a \wedge e^b \quad (2.58)$$

と変更される。ここで θ_b^a は振率が存在する場合の接続形式である。振率がゼロの場合と同様に (2.58) 式の de^a に (2.28) 式を代入して計算すると

$$\frac{1}{2} T_{bc}^a e^{bc} = \frac{1}{2} f_{bc}{}^a e^b \wedge e^c + f_{bi}{}^a e^b \wedge e^i + \theta_b^a \wedge e^b \quad (2.59)$$

を得る。 ω_b^a と同様に a,b について反対称になるように θ_b^a を求めると、

$$\theta_b^a = \omega_b^a + \tau_b^a \quad (2.60)$$

で与えられる。ここで ω_b^a は (2.51) 式で与えられる振率がゼロの場合の接続であり、

$$\tau_b^a = \frac{1}{2} \Sigma_{cb}{}^a e^c, \quad \Sigma = T_{abc} + T_{bac} - T_{cab} \quad (2.61)$$

は contorsion である。よって (2.51)、(2.61) を (2.60) に代入すると

$$\theta_b^a = -f_{ib}^a e^i - \left(D_{cb}^a + \frac{1}{2} \Sigma_c^a{}_b \right) e^c = -f_{ib}^a e^i - G_{cb}^a e^c \quad (2.62)$$

を得る。

振率が存在する場合の曲率形式は振率がない場合と同じように接続形式 θ_b^a によって

$$\Omega_b^a \equiv d\theta_b^a + \theta_b^a \wedge e^b \quad (2.63)$$

と定義される。(2.63) 式の θ_b^a に (2.62) 式を代入して計算すると、

$$\begin{aligned} R_b^a = & e^j \wedge e^i \left(-\frac{1}{2} f_{ib}^a f_{jk}^i + f_{jc}^a f_{kb}^c \right) + e^d \wedge e^i \left(-G_{cb}^a f_{di}^c + G_{dc}^a f_{ib}^c - G_{ad}^c f_{ic}^a \right) \\ & + e^d \wedge e^e \left[-\frac{1}{2} f_{ib}^a f_{de}^i - \frac{1}{2} G_{cb}^a f_{de}^c + \frac{1}{2} (G_{dc}^a G_{eb}^c - G_{ec}^a G_{db}^c) \right] \end{aligned} \quad (2.64)$$

を得る。今の場合は一般に第2項は消えない。第2項は $\Sigma_{abc} = 2\tau(D_{abc} + D_{bca} - D_{cba})$ と選んだ場合には消える。この場合 Σ_{abc} は完全反対称であり、スケールが1つの場合には f_{abc} に比例する。さらに、 $\tau = \frac{1}{3}$ と選べば $\theta_b^a = -f_{ib}^a e^i$ となり S/R が対称な場合と同じ接続にすることも可能である。

2.3 場の対称条件と CSDR 拘束式

この節では CSDR 法において高次元の Lagrangian を構成する場に課せられる対称条件と、その帰結として得られる CSDR 拘束式について調べる。

・対称条件

2.1 節で見たように CSDR 法では高次元時空でのゲージ理論から4次元時空における理論を得るために、高次元時空で定義された Lagrangian の値が余剰空間の座標に依存しなくなることを要求する。それは場に対する S 変換がゲージ変換（ゲージ群 G）で打ち消されるという対称条件を場が満たすことを仮定することでなされる [1]。

我々が考える D 次元の高次元時空 M^D は $M^D = M^4 \times S/R$ の構造を持ち、S/R は等長変換群 S を持つとする。そして M^D 上におけるゲージ群 G のゲージ理論を始めに考える。また、 M^D の座標を $X^M = (x^\mu, y^\alpha)$ とする。ここで x^μ, y^α はそれぞれ $M^4, S/R$ の座標であり、我々は4次元 Minkowski 時空 M^4 に対する添え字を $\mu, \nu, \dots$ としている。 M^D 上で定義される場は一般に $\Phi(x, y)$ と書くことにする。そこで $s \in S$ による座標変換を $s : (x, y) \rightarrow (x, y^s)$ 、場の変換を $s : \Phi(x, y) \rightarrow \Phi^s(x, y)$ とし、場のゲージ変換を $\Phi^g(x, y)$ とする。そのとき我々は場 $\Phi(x, y)$ が対称条件

$$\Phi^s(x, y) = \Phi^{-g}(x, y) \quad (2.65)$$

を満たすことを仮定する。ここで (2.3) 式と違い右边が $(-g)$ で表される逆ゲージ変換にとっているのは便宜上こちらの方が都合がよいためであり、本質的な違いはない。(2.65) 式はまた、

$$\Phi(x, y^s) = D(W(s, y))\Omega(s, y)\Phi(x, y) \quad (2.66)$$

と書ける。ここで $D(W(s, y))$ は場が属す表現ごとに与えられるゲージ変換を表し、 $\Omega(s, y)$ は場の S 変換に対する Jacobian を表す。場に対する対称条件はゲージ群 G の構造と S/R の構造に非

自明な混合を与える。

次に、対称条件の無限小形を調べる。座標の無限小S変換を $(x, y^s) = (x, y + \epsilon_A \xi_A)$ ($A = 1, \dots, \dim S$) と書く。このとき ξ_A に対する場の無限小変化分 $\delta_A \Phi$ は次のように Lie 微分で表す。

$$\delta \Phi(x, y) = \lim_{\epsilon_A \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon_A} (\Phi^{-s}(x, y) - \Phi(x, y)) = L_{\xi_A} \Phi(x, y) \quad (2.67)$$

そこで、対称条件の無限小形を

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon_A \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon_A} (\Phi^{-s}(x, y) - \Phi(x, y)) &= \lim_{\epsilon_A \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon_A} (\Phi^g(x, y) - \Phi(x, y)) \\ \rightarrow \delta \Phi(x, y) &= L_{\xi_A} \Phi(x, y) = D(W_A) \Phi \end{aligned} \quad (2.68)$$

と書く。ここで最右辺の $D(W_A)$ は ξ_A に対する s 変換に対応した無限小ゲージ変換を表し、場が属す G の表現毎に異なることに注意しておく。また、 W_A は S 変換に対応したゲージ変換なので y にしか依らないものとする。スカラー場 φ 、ベクトル場 A_α 、スピノル場 ψ に対する対称条件の無限小形はそれぞれ

$$\delta_A \varphi = \xi_A^\alpha \partial_\alpha \varphi = D(W_A) \varphi \quad (2.69)$$

$$\delta_A A_\alpha = \xi_A^\beta \partial_\beta A_\alpha + \partial_\alpha \xi_A^\beta A_\beta = \partial_\alpha W_A + [W_A, A_\alpha] \quad (2.70)$$

$$\delta_A \psi = \xi_A^\alpha \partial_\alpha \psi - \frac{1}{2} G_{Abc} \Sigma^{bc} \psi = D(W_A) \psi \quad (2.71)$$

で与えられる。ここで中辺は各場の Lie 微分を表し、スピノル場の Lie 微分に現れる G_{Abc} は

$$G_{Abc} \equiv -\Omega_A^i f_{ib}{}^a \quad (2.72)$$

と定義される量である。また、ベクトル場 A_α としてはゲージ場を考えるのでゲージ群の表現として随伴表現を選んでいることに注意する。

Lie 微分 L_{ξ_A} の交換子 $[L_{\xi_A}, L_{\xi_B}]$ の場への作用は代数 (2.9)、(2.10) に従うので、 $[\delta_A, \delta_B] \Phi = f_{AB}{}^C \delta_C \Phi$ が成り立つ。この関係式をベクトル場 A_α に対して適用すると、ゲージ変換 W_A に対する関係式

$$\xi_A^\alpha \partial_\alpha W_B - \xi_B^\alpha \partial_\alpha W_A - [W_A, W_B] = f_{AB}{}^C W_C \quad (2.73)$$

を得る。また、無限小形対称条件式 (2.69)、(2.70)、(2.71) が S 変換及びゲージ変換の下で不変であるためには W_A のゲージ変換が

$$W_A^g = g W_A g^{-1} + \xi_A^\alpha (\partial_\alpha g) g^{-1} \quad (2.74)$$

で与えられることが要求される。

対称条件により高次元時空での Lagrangian の値の y 依存性がなくなることから 4 次元時空に対する作用を得ることができるわけだが、その際に Lagrangian をどの点 y で評価しても構わない。

そこで我々は計算に便利な点として $y = 0$ を選ぶ。まず、 $y = 0$ での W_A を考える。我々は (2.74) のゲージ変換の自由度により

$$W_a(y = 0) = 0 \quad (2.75)$$

と選ぶことができる。この選択の下で (2.73) 式から $y = 0$ において

$$\partial_a W_b - \partial_b W_a = f_{ab}^i W_i \quad (2.76)$$

$$\partial_a W_i = 0 \quad (2.77)$$

$$[W_i, W_j] = -f_{ij}^k W_k \quad (2.78)$$

の条件式が得られる。ここで $\partial_a = e_a^\alpha \partial_\alpha$ であり、(2.24) 式で与えられる ξ_A を用いた。また、

$$J_i \equiv -W_i(y = 0) \quad (2.79)$$

と定義すると (2.78) 式より J_i は $\mathcal{R}$ の代数を形成することがわかる。 W はその定義によりゲージ群 G の Lie 代数に属するので、(2.78) 式は R が G に埋め込まれているときにのみ意味を持つ。そのとき J_i は G の R 部分群 R_G の生成子である。(2.76) 式はポテンシャル項を計算するときに用いる。次に、これらを利用して $y = 0$ での対称条件式の無限小形 (2.69)、(2.70)、(2.71) を調べることで CSDR 拘束式を導く。

・ CSDR 拘束式とその帰結

ここで高次元でのゲージ理論の Lagrangian を構成する場であるゲージ場 $A_M = A_M^s G_s$ ($M = \mu, \alpha$, G_s はゲージ群 G の生成子) とフェルミオン場 ψ に対する CSDR 拘束式を導き、その帰結として 4 次元時空での場やゲージ群にどのような制限が課されるかを調べる。

() A_μ に対する CSDR 拘束式

まずゲージ場の 4 次元時空に対応した成分 A_μ を考える。 A_μ は S 変換の下でスカラー場としてふるまい、ゲージ群 G の随伴表現に属するので対称条件の無限小形は (2.69) 式中辺 = (2.70) 式最右辺の形になる。その対称条件式を $y=0$ で調べると A_μ に対する CSDR 拘束式として

$$\partial_a A_\mu = 0 \quad (2.80)$$

$$[J_i, A_\mu] = 0 \quad (2.81)$$

を得る。CSDR 拘束式 (2.81) は 4 次元でのゲージ群に制限を与える。 J_i はゲージ群 G の R 部分群 R_G の生成子であり、これが全ての A_μ と交換するので 4 次元でのゲージ群 H は R と可換な G の部分群となる。すなわち 4 次元での理論が持つゲージ群 H は G の中の R の centralizer- $H = C_G(R_G)$ となる。

() A_α に対する CSDR 拘束式

次に、ゲージ場の S/R に対応した成分 A_α を考える。 A_α は S/R のベクトル場に相当するので、無限小形の対称条件 (2.70) 式を $y = 0$ で調べる。すると A_α に対する CSDR 拘束式として

$$\partial_a \phi_b - \partial_b W_a = \frac{1}{2} f_{ab}^c \phi_c \quad (2.82)$$

$$[J_i, \phi_a] = f_{ia}^c \phi_c \quad (2.83)$$

を得る。ここで $\phi_a = e_a^\alpha$ であり、 ϕ_a は 4 次元ではスカラー場となる。CSDR 拘束式 (2.82) はポテンシャルの計算に用いられる。一方、CSDR 拘束式 (2.83) は 4 次元において生き残るスカラー場 ϕ_a が属す H の表現に制限を与える。

そこで H のどの表現が生き残るのかを知るための方法を考察する [1,2]。すでに述べたように J_i は G の R 部分群の Lie 代数を形成する。G の生成子を G_s 、構造定数を g_{str} として、 $\phi_a = \phi_a^s G_s$ であるので (2.83) 式から

$$\phi_a^s g_{is}^t = f_{ia}^c \phi_c^t \quad \text{for } \forall i \quad (2.84)$$

または

$$\phi_a^s (M_i)_s^t = (M'_i)_a^c \phi_c^t \quad (2.85)$$

を得る。ここで $(M_i)_s^t = -g_{is}^t$, $(M'_i)_a^c = -f_{ia}^c$ である。

一般に M_i と M'_i は R の可約な表現である。そこで適当な基底を選ぶことにより (2.85) 式において M_i と M'_i をブロック対角形にすることができる。そのとき各ブロックは R の既約表現を表す。そこで、R の既約表現に対応した M, M' の部分行列 M_p, M'_q が関わる部分に注目する。(2.85) 式からその部分を抜き出すと、

$$\phi_a^{s(pq)} (M_p)_s^t = (M'_q)_a^c \phi_c^{t(qp)} \quad (2.86)$$

を得る。ここで $\phi^{(pq)}$ は (2.85) 式で M_p, M'_q が関わる部分に対応した ϕ の部分であり、 (pq) でラベルされた $(\phi^{(pq)})_a^s$ をその成分とした行列である。 M_p, M'_q はどちらも既約表現なので (2.85) 式からわかるように $\phi^{(pq)}$ は線形独立な行と列を持つ。よって、 M_p, M'_q が異なる次元を持つときには $\phi^{(pq)}$ の行と列が線形独立ではなくなってしまうので、矛盾しないためには $\phi^{(pq)} = 0$ でなくてはならない。また、 M_p, M'_q が同じ次元を持つが異なる既約表現だとすると $\phi^{(pq)} = 0$ でなくてはならない。なぜなら $\phi^{(pq)} \neq 0$ ならば (2.85) 式より M_p, M'_q は基底の変更で互いに関係しているので異なる既約表現であることと矛盾するからである。よって、 $\phi^{(pq)} \neq 0$ であるならば M_p, M'_q は同じ既約表現である。さらに、(2.85) 式に Schur の補題を適用することにより $\phi^{(pq)} \propto \mathbf{I}$ ($\mathbf{I}$ は単位行列) となることがわかる。以上の議論から ϕ が 4 次元で属すゲージ群 H の表現を見つけるには次のような手順に従えばよい。まず、G の随伴表現を $G \supset R_G \times H$ の埋め込みに従って分解する。

$$G \supset R_G \times H, \quad \text{adj} G = (\text{adj} R, 1) + (1, \text{adj} H) + \Sigma(r_i, h_i) \quad (2.87)$$

次に、S の随伴表現を R の下で分解する。

$$S \supset R, \quad \text{adj} S = \text{adj} R + \Sigma s_i \quad (2.88)$$

このとき r_i, s_i が同値な R 既約表現であるときに対する H の既約表現 h_i が 4 次元で ϕ が属す H の表現である。そして、それ以外の全ての ϕ は消える。

例えば $G = \text{SU}(5)$, $S/R = G_2/\text{SU}(3)$ のとき $G \supset \text{SU}(3) \times \text{SU}(2) \times \text{U}(1)$ の分解に現れる $\text{SU}(3)$ に R を埋め込んだとする。このとき

$$\begin{aligned} \text{SU}(5) &\supset \text{SU}(3) \times \text{SU}(2) \times \text{U}(1), \\ \text{adj}(\text{SU}(5)) &= 24 = (8, 1)(0) + (1, 3)(0) + (\bar{3}, 2)(1) + (3, 2)(-1) + (1, 1)(0) \end{aligned} \quad (2.89)$$

$$G_2 \supset \text{SU}(3), \quad \text{adj}(G_2) = 14 = 8 + \bar{3} + 3 \quad (2.90)$$

と分解されるので、4次元で残るスカラー場 ϕ の $H=SU(2) \times U(1)$ の表現は $2(1)$ と $2(-1)$ とわかる。

() ψ に対する CSDR 拘束式

最後にフェルミオン場 ψ を考える。無限小形の対称条件式 (2.71) を $y = 0$ で調べると ψ に対する CSDR 拘束式として

$$\partial_a \psi = 0 \quad (2.91)$$

$$T_i \psi = D_i \psi \quad (2.92)$$

を得る [3]。ここで T_i は (2.18) 式で与えられる $SO(d)$ の中の R 生成子であり、 D_i は ψ に対する G の表現の無限小変化分である。ここで (2.92) の CSDR 拘束式は (2.84) 式と同じ構造をしている。そこでこの拘束式を調べることで4次元でフェルミオンが属す H の表現がわかる。

拘束式 (2.92) を調べるために $D=d+4$ 次元におけるスピノル ψ を考える。 $D=d+4$ 次元においてスピノル場は $2^{[D/2]} = 4 \times 2^{[d/2]}$ 成分を持つ ($[z]$ は z の整数部を表す)。このスピノル ψ は

$$\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N)^T \quad (2.93)$$

と書くことができる。ここで $N = 2^{[d/2]}$ であり、 $\psi_p (p = 1, \dots, N)$ はそれぞれ4次元スピノルである。ここで、これら N 個のスピノルはいくつかの R 既約表現の下で変換する多重項を形成する。一方、 T_i は $SO(d)$ の中の R の可約な表現を形成し、 J_i は一般に G の中の R の可約な表現を形成する。したがって、(2.86) 式と同じように (2.92) 式から

$$\psi_a^{s(qp)} (M_p)_b^a = (M'_q)_t^s \psi_b^{t(qp)} \quad (2.94)$$

という式を抜き出すことができる。ここで M_p, M'_q は前回同様 R の既約表現を表す。したがって、ベクトル場のときと同様の議論から $\psi \neq 0$ となるのは M_p, M'_q が同値な既約表現のときのみである。よって4次元で ψ が属す H の表現を知るにはベクトル場の場合と同じような手順に従えばよい。まず、始めにフェルミオンが属していた G の表現 F を $R_G \times H$ の下で

$$F = \Sigma(r_i, h_i) \quad (2.95)$$

と分解する。次に、 $SO(d)$ スピノル σ_d を R のもとで

$$\sigma_d = \Sigma \sigma_i \quad (2.96)$$

と分解する。このとき r_i, σ_i が同値な R 既約表現であるときに対する H の既約表現 h_i が4次元で ψ が属す H の表現である。そして、それ以外の全ての ψ は消える。

以上の議論からわかるように CSDR 拘束式からの帰結として、高次元でのゲージ群 G 、 S/R 、 R の G への埋め込みを定めれば4次元でのゲージ群 H とスカラー場 ϕ_a 、フェルミオン場 ψ が属す H の表現が決まる。次章では CSDR 拘束式によっていかに4次元時空における Lagrangian の構造が決まるかを見る。

3 4次元における理論

ゲージ群 G を持った高次元ゲージ理論の Lagrangian を構成する場が対称条件を満たすことを仮定することで、4次元時空中における理論を得ることができる。また、そのようにして得られる理論はフェルミオンと結合した Yang-Mills-Higgs 理論であり 4 次式の Higgs ポテンシャル項を持つことが示される。具体的には高次元でのゲージ場の余剰空間成分が 4 次元において Higgs 場となり、高次元での Yang-Mills セクターの余剰空間成分を含んだ部分が 4 次元において Higgs セクター、高次元ゲージフェルミオン結合項の余剰空間成分が 4 次元において湯川結合項となる。さらに 4 次元におけるゲージ群 H や各場が属す H の表現は CSDR 拘束式から決定される。この章では以上のように得られる 4 次元理論の構造を詳しく解析する。3.1 節では実際に高次元時空に対する作用から 4 次元時空に対する作用を導く。3.2 節では 4 次元 Lagrangian のポテンシャル項を解析する。3.3 節ではフェルミオンセクターについて考察する。特に、いかにカイラルフェルミオンを得ることができるかを調べる。3.4 節では 4 次元における場の質量について考察する。3.5 節では 4 次元で得られる理論の具体例を見る。

3.1 4次元での Lagrangian

この節では具体的に高次元時空に対する作用から 4 次元時空に対する作用を導く。そして、4 次元時空中における Lagrangian の全体像を見る。

・高次元時空に対する作用

まず、 D 次元時空多様体 M^D 上で定義された、フェルミオンと結合したゲージ群 G の Yang-Mills 理論に対する作用

$$A = \int d^D x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{8} \text{Tr}(F_{MN} F_{KL}) g^{MK} g^{NL} + \frac{1}{2} i \bar{\psi} \Gamma^M D_M \psi \right] \quad (3.1)$$

を考える。ここで、 $D_M = \partial_M - \theta_M - A_M$ は共変微分であり、 $\theta = \frac{1}{2} \theta_{MNL} \Sigma^{NL}$ は M^D のスピン接続である。また、 $F_{MN} = \partial_M A_N - \partial_N A_M - [A_M, A_N]$ である。

ここで、高次元時空 M^D が $M^D = M^4 \times S/R$ の構造にコンパクト化されるとする。さらに場に対する対称条件を課すことで高次元時空中における Lagrangian の値は余剰空間 S/R の座標に依らなくなる。そこで、高次元作用 (3.1) においてコンパクトな余剰空間座標について積分すれば 4 次元時空に対する作用を得ることができる。その際に 4 次元における場に対しては CSDR 拘束式が課せられ、4 次元でのゲージ群 H や場が属す H の表現が制限される。以上のことを具体的に見ていく。

・4次元時空に対する作用

まず、 $M^D = M^4 \times S/R$ に対する計量を考える。計量は

$$g^{MN} = \begin{pmatrix} \eta^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & -g^{ab} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

となるとする。ここで、 $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ は Minkowski 計量であり、 g^{ab} は coset space 計量である。また、 $g^{ab} = \text{diag}(a_1, \dots, a_d)$ 、 $d = \dim S/R$ 、 a_i は正の定数である。定数 a_i は S/R のスケールを表す量である。例えば S/R が半径を 1 つしか持たないなら $g^{ab} = a\delta^{ab} = R^{-2}\delta^{ab}$ と書け、 R はコンパクト化スケールを表す。次にこの計量と CSDR 拘束式を用いて Yang-Mills セクターとフェルミオンセクターを変形する。

() Yang-Mills セクター

(3.1) の Lagrangian の Yang-Mills セクター L_{YM} は (3.2) の計量を用いると

$$L_{YM} = -\frac{1}{8}\text{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) + \frac{1}{4}\text{Tr}(F_{\mu a}F^\mu_{b})g^{ab} - \frac{1}{8}\text{Tr}(F_{ab}F_{cd})g^{ac}g^{bd} \quad (3.3)$$

と書ける。ここで $F_{\mu\nu}$ は 4 次元時空でのゲージ場 A_μ に対する通常のゲージ場テンソルである。高次元成分と 4 次元成分を 1 つずつ持つテンソル $F_{\mu a}$ の部分は

$$F_{\mu a} = \partial_\mu A_a - \partial_a A_\mu - [A_\mu, A_a] \quad (3.4)$$

だが、 $A_a \equiv e_a^\alpha A_\alpha = \phi_a$ として、さらに CSDR 拘束式 (2.80) を用いると

$$F_{\mu a} = \partial_\mu \phi_a - [A_\mu, \phi_a] = D_\mu \phi_a \quad (3.5)$$

と書き直せる。よって $\frac{1}{4}\text{Tr}(F_{\mu a}F^\mu_{b})g^{ab}$ 項は Higgs 場の運動項となることがわかる。高次元成分を 2 つ持つテンソル F_{ab} は

$$F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a - [A_a, A_b] \quad (3.6)$$

だが、CSDR 拘束式 (2.82) と (2.62) を用いると

$$F_{ab} = f_{ab}^C \phi_C - [\phi_a, \phi_b] \quad (3.7)$$

と書き直せる。ここで $\phi_i \equiv J_i$ と定義した。したがって、 $\frac{1}{8}\text{Tr}(F_{ab}F_{cd})g^{ac}g^{bd}$ 項は Higgs ポテンシャル項となることがわかる。

() フェルミオンセクター

Lagrangian(3.1) のフェルミオンセクター L_F を考えるために、 D 次元 Γ 行列の代数を (3.2) の計量の分解にしたがって分割する。 Γ 行列は Clifford 代数

$$\{\Gamma^M, \Gamma^N\} = 2g^{MN} \quad (3.8)$$

に従う。これを分割すると

$$\{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}, \quad \{\Gamma^a, \Gamma^b\} = -2g^{ab} \quad (3.9)$$

と書き直せる。ここで Γ 行列は

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu \otimes I_d, \quad \Gamma^a = \gamma_5 \otimes \gamma^a \quad (3.10)$$

で与えられる。 γ^μ は通常の 4 次元での Dirac 行列であり、 γ^a は (3.9) 第 2 式の代数を満たす。
以上の議論より L_F は

$$L_F = \frac{1}{2}i\bar{\psi}\Gamma^\mu D_\mu\psi - \frac{1}{2}i\bar{\psi}\Gamma^a D_a\psi \quad (3.11)$$

と分解できる。ここで、4 次元時空に対する共変微分は $D_\mu = \partial_\mu - A_\mu$ で、余剰空間に対する共変微分は $D_a = \partial_a - \theta_a - \phi_a$ で与えられる。ただし、 $\theta = \frac{1}{2}\theta_{abc}\Sigma^{bc}$ は S/R のスピン接続である。

・ 4 次元時空に対する作用

高次元に対する作用 (3.1) の場に対称条件を課し、余剰空間座標について積分することで 4 次元時空に対する作用を得ることができる。さらに $Tr(G_t G_s) = 2\delta_{ts}$ の規格化の下でトレースをとり、(3.5),(3.7),(3.11) を用いると 4 次元時空に対する作用として

$$A = V_{S/R} \int d^4x \left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^t F^{t\mu\nu} + \frac{1}{2}(D_\mu\phi_a)^t (D^\mu\phi^a)^t + V(\phi) + \frac{1}{2}i\bar{\psi}\Gamma^\mu D_\mu\psi - \frac{1}{2}i\bar{\psi}\Gamma^a D_a\psi \right] \quad (3.12)$$

を得る。ここで $V(\phi)$ は Higgs ポテンシャル項であり

$$V(\phi) = -\frac{1}{8}g^{ac}g^{bd}Tr[(f_{ab}^C\phi_C - [\phi_a, \phi_b])(f_{cd}^D\phi_D - [\phi_c, \phi_d])] \quad (3.13)$$

と与えられる。また、 $V_{S/R}$ は S/R の体積を表す。

このようにして高次元でのゲージ理論から得られた 4 次元時空における理論は、フェルミオンと結合した Yang-Mills-Higgs 理論の構造を持つことがわかる。ポテンシャル項は 4 次式の形で与えられており、自発的対称性の破れを引き起こしうる。また 4 次元 Lagrangian の最後の項は湯川結合項となる。4 次元におけるゲージ群 H は CSDR 拘束式により制限され、場が属す H の表現も CSDR 拘束式から決めることができる。次節からはこの 4 次元 Lagrangian の各項について詳しく考察していく。

3.2 ポテンシャル項についての考察

この節では (3.13) で与えられる Higgs ポテンシャル項についての考察を行う。(3.13) のポテンシャルに含まれているスカラー場 ϕ_a は CSDR 拘束式 (2.83) において $\phi_i \equiv J_i$ とした

$$[\phi_i, \phi_a] = f_{ia}^b \phi_b \quad (3.14)$$

に従うので、(3.13) のポテンシャルの形は形式的に表されているにすぎない。実際、いくつかの ϕ_a はこの拘束式により 4 次元で残らないだろう。そして、拘束式の解である 4 次元において拘束されていないスカラー場が物理的な Higgs 場となる。そこで我々はポテンシャルを Higgs 場で表し、自発的対称性の破れを調べることで、最終的に残るゲージ対称性を求めたい。そのためには特殊な場合を除けばポテンシャルの最小値を与える場の配位を求める必要があるが、一般にそれは困難である。そこで、我々はいくつかの場合に分けて最終的に残るゲージ群を決める手法を議論していく。

3.2.1 $S \subset G$ である場合

ここでは特殊な場合として $S \subset G$ であり、 G 上への S の同型写像 S_G が存在するときを考える [8]。このとき 4 次元で自発的対称性の破れの後に残るゲージ群 K を、ポテンシャルの最小値を求めることなしに特定できる。具体的には最後に残るゲージ群 K は高次元でのゲージ群 G の部分群で S_G の centralizer となる。この構造は

$$\begin{array}{ccc} G \supset S_G \times K & & \\ \cup & \cap & \\ G \supset R_G \times H & & \end{array} \quad (3.15)$$

と書ける。

次に、上記の結果が得られることを示す。まず、 G の生成子を G_s として $\phi_C = \Phi_C^t G_t$ と書けたことに注目する。今の場合 $S \subset G$ であり G は S の同型写像 S_G を持つので、 G 中の S 生成子を G^C としておく。このとき $\phi_C^t G_t$ において $t = C$ のとき $\phi_C^t = 1$ で、その他のときは $\phi_C^t = 0$ であるとすれば拘束式 (3.14) は自明に満たされる。もちろん、このようにして選ばれた ϕ_C^t の値は物理的 Higgs 場として許された値に対応する。さらに、この Higgs 場の値に対してポテンシャルの値は

$$\begin{aligned} V(\phi) &= -\frac{1}{8} g^{ac} g^{bd} \text{Tr}[(f_{ab}^C \phi_C - [\phi_a, \phi_b])(f_{cd}^D \phi_D - [\phi_c, \phi_d])] \\ &= -\frac{1}{8} g^{ac} g^{bd} \text{Tr}[(f_{ab}^C G_C - [G_a, G_b])(f_{cd}^D G_D - [G_c, G_d])] \\ &= -\frac{1}{8} g^{ac} g^{bd} \text{Tr}[(f_{ab}^C G_C - f_{ab}^c G_c - f_{ab}^i G_i)(f_{cd}^D G_D - f_{cd}^e G_e - f_{cd}^i G_i)] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

と 0 になることがわかる。ここで 2 行目から 3 行目で交換関係 (2.15) を用いた。これはポテンシャルの最小値であり、対応する ϕ_C^s の値は Higgs 場の真空期待値 (v.e.v) である。ここで、Higgs 場に対するゲージ群 H によるゲージ変換

$$\phi_C(x) \rightarrow h(x) \phi_C(x) h^{-1}(x), \quad h(x) \in H \quad (3.17)$$

を考える。Higgs 場の v.e.v はこのゲージ変換に対して不変であるはずなので、(3.17) の $h(x)$ は S_G と交換しなくてはならない。したがって、v.e.v を不変に保つゲージ群 K は G 中の S_G の centralizer- $C_G(S)$ となる。すなわち、 $S \subset G$ の場合は最後に破れずに残るゲージ群は $K = C_G(S_G)$ である。

3.2.2 S/R が対称である場合

ここでは S/R が対称な場合のポテンシャル項を調べ、結果としてポテンシャルが自発的対称性の破れを起こす形になることを見る。 S/R が対称である場合構造定数 $f_{ab}^c = 0$ であるので、ポテンシャルの形は

$$V(\phi) = -\frac{1}{8} g^{ac} g^{bd} \text{Tr}[(f_{ab}^i J_i - [\phi_a, \phi_b])(f_{cd}^j J_j - [\phi_c, \phi_d])] \quad (3.18)$$

となる。このポテンシャルが自発的対称性の破れを起こすことを示す。ここで簡単のため S の随伴表現の R の下での分解が

$$S \supset R, \quad \text{adj} R + \Sigma(s_a + \bar{s}_a) \quad (3.19)$$

となる場合を考える。ここで $s_a, \bar{s}_a$ は互いに共役な関係にある R の既約表現である。ここで、S の生成子の基底を (3.19) の分解に対応したものにとり直す。

$$Q_A = \{Q_i, Q_a\} \rightarrow Q_A = \{Q_i, Q_{s_a}, Q_{\bar{s}_a}\} \quad (3.20)$$

ここで、 Q_i は R に対応し、 $Q_{s_a}, Q_{\bar{s}_a}$ はそれぞれ $Q_{s_a}, Q_{\bar{s}_a}$ に対応する。このとき S/R 計量は

$$Q^a Q_a \rightarrow Q_{s_a} Q_{\bar{s}_a} \quad (3.21)$$

より、添え字 s_a と $\bar{s}_a$ を結ぶものにとり直される。この基底の変更の下でポテンシャルは

$$\begin{aligned} V(\phi) = & -\frac{1}{4} g^{s_a \bar{s}_a} g^{t_a \bar{t}_a} \text{Tr}[(f_{s_a t_a}^i J_i - [\phi_{s_a}, \phi_{t_a}])(f_{\bar{s}_a \bar{t}_a}^j J_j - [\phi_{\bar{s}_a}, \phi_{\bar{t}_a}])] \\ & -\frac{1}{4} g^{s_a \bar{s}_a} g^{\bar{t}_a t_a} \text{Tr}[(f_{s_a \bar{t}_a}^i J_i - [\phi_{s_a}, \phi_{\bar{t}_a}])(f_{\bar{s}_a t_a}^j J_j - [\phi_{\bar{s}_a}, \phi_{t_a}])] \end{aligned} \quad (3.22)$$

と書き直される。ここでこのポテンシャルの形を詳しく見てみる。

J_i の 2 次の項を見てみると

$$-\frac{1}{4} g^{s_a \bar{s}_a} g^{t_a \bar{t}_a} f_{s_a t_a}^i f_{\bar{s}_a \bar{t}_a}^j \text{Tr}(J_i J_j), \quad -\frac{1}{4} g^{s_a \bar{s}_a} g^{\bar{t}_a t_a} f_{s_a \bar{t}_a}^i f_{\bar{s}_a t_a}^j \text{Tr}(J_i J_j) \quad (3.23)$$

と互いに共役な構造定数の積の形をしている。共役な構造定数同士は符号が逆なのでこれらの項は全体として正符号である。次に、 ϕ の 4 次項を見ると、

$$-\frac{1}{4} g^{s_a \bar{s}_a} g^{t_a \bar{t}_a} \text{Tr}([\phi_{s_a}, \phi_{t_a}][\phi_{\bar{s}_a}, \phi_{\bar{t}_a}]), \quad -\frac{1}{4} g^{s_a \bar{s}_a} g^{\bar{t}_a t_a} \text{Tr}([\phi_{s_a}, \phi_{\bar{t}_a}][\phi_{\bar{s}_a}, \phi_{t_a}]) \quad (3.24)$$

であり、互いに共役な ϕ の交換関係の積のトレースの構造になっていることがわかる。ここで交換関係の積のトレース詳しく調べる。一つ目の方に着目すると

$$\text{Tr}([\phi_{s_a}, \phi_{t_a}][\phi_{\bar{s}_a}, \phi_{\bar{t}_a}]) = \phi_{s_a}^s \phi_{\bar{s}_a}^{\bar{s}} \phi_{t_a}^t \phi_{\bar{t}_a}^{\bar{t}} \text{Tr}([G_s, G_t][G_{\bar{s}}, G_{\bar{t}}]) \quad (3.25)$$

となる。ここで $G_s, G_{\bar{s}}$ は互いに共役な G の生成子である。互いに共役な、G の生成子の交換関係は符号が異なる構造定数を出すのでそのトレースは負の値となる。2 つ目の方も同様に考えられるので、これらの項は全体として正符号である。最後に ϕ の 2 次項を考えると、これらの項は全体として負符号にとることができる。したがって、(3.22) の Higgs ポテンシャルは正の 4 次項と負の 2 次質量項を持っているので自発的に対称性を破る構造になっている。

ここで今の議論では S の随伴表現の分解が (3.19) の形になるとしたが、一般には分解に R の実既約表現が含まれることに注意しておく。ただし、R の実既約表現を含む場合も、生成子の基底を適当に選び直して同様の議論を繰り返せばポテンシャルが自発的に対称性を破る構造を持つことを示すことができる。

このように、S/R が対称である場合は必ず自発的対称性の破れが起きることがわかった。そして、最終的に破れずに残るゲージ群を決めるためにはポテンシャルの最小値を与える場の配位を求める必要がある。しかしながら、始めのゲージ群の次元と rank が大きい場合には、そのための計算は一般に困難である。最後に残るゲージ群を決めるための手順については 3.2.4 節で議論する。

3.2.3 S/R が非対称である場合

S/R が非対称である場合には一般にポテンシャルの最小値を与える場の配位を求めるのは困難である。また、ポテンシャルが自発的対称性の破れを起こす構造であるかどうかは非自明である。特に、S/R が非対称である場合には S/R が複数のスケールを持つ可能性があり、その場合には各スケールの比によって自発的対称性の破れを引き起こすか否かが変わりうる。したがって、この場合には最終的に残るゲージ群を決めるのは特に難しい。次節ではそのための手順について議論する。

3.2.4 自発的対称性の破れの後に残るゲージ群

ここでは自発的対称性の破れの後、最終的に残るゲージ群 K を決めるための手順について議論する [9]。S/R が対称・非対称に限らず、自発的対称性の破れが起きる前のゲージ群 H の次元と rank が大きい場合にはポテンシャルを解析するのは困難である。ゆえに、ポテンシャルの最小値を与える場の配位を求めることで破れずに残るゲージ群 K を決めるためには一般に複雑な計算過程を経る必要がある。そこで、その計算過程を少しでも簡易にして、最後に残るゲージ群 K を決めるための手順を考察する。

・ K を決めるための手順

ゲージ群 K を決めるためにゲージ群の次の構造を利用する。まず、一般に始めのゲージ群 G の部分群として $K = C_G(T)$ となる群 T が存在することに注目する。このような T が存在することは次のように示すことができる。

ϕ_a の真空期待値を $\langle \phi_a \rangle$ 、 ϕ_i を R_G の生成子とするとゲージ群 K は真空の対称性であるので $\forall k \in K$ に対し

$$k^{-1} \phi_i k = \phi_i, \quad k^{-1} \langle \phi_a \rangle k = \langle \phi_a \rangle \quad (3.26)$$

が成立する。ここで $\langle \phi_a \rangle$ 、 ϕ_i の交換子を作っていくと

$$[\phi_i, \phi_i], [\phi_i, \langle \phi_a \rangle], [\langle \phi_a \rangle, \langle \phi_b \rangle], [\phi_i, [\phi_i, \langle \phi_a \rangle]], \dots \quad (3.27)$$

を得る。このとき K はこれらの交換子とも交換する。これらの交換子を繰り返し作っていくと、どこかで代数が閉じるはずであり、その閉じた代数が K と交換する G の部分群 T に対する Lie 代数となる。よって、確かに $K = C_G(T)$ を満たす G の部分群 T が存在することがわかる。

次にこの構造を利用してゲージ群 K を決める手順を考察する。まず、あらかじめわかっている事実をまとめよう。始めのゲージ群 G、CSDR により 4 次元で得られるゲージ群 H、自発的対称性の破れの後のゲージ群 K の関係は $K \subset H \subset G$ である。また、すでに議論したように $K = C_G(T)$ を満たす G の部分群 T が存在する。つまり、始めのゲージ群 G は $G \supset K \times T$ という構造を持つ。以上のことを考慮して K を決めるための手順を順を追って考察する。

() $G \supset K \times T$ としてとりうる G の構造の候補を見つける

始めに K としてとりうる候補 K_p を推定する。そのときそれぞれの K_p に対し $T_p = C_G(k_p)$ を満たす G の部分群 T_p を見つけ、 $G \supset K_p \times T_p$ としてとりうる構造を求める。

() Higgs 場の真空期待値が T_p に属するとしてポテンシャルの最小値を求める

Higgs ポテンシャル $v(\phi)$ を構成する Higgs 場 ϕ が T_p に属するとして、ポテンシャルの最小値 $V_{min}^p(\phi)$ を求める。

() 各 $V_{min}^p(\phi)$ を比較

このとき最も小さい $V_{min}^p(\phi)$ を与える K_p が我々の求める真の最後に残るゲージ群 K として得られる。

この手順の利点はポテンシャル $V(\phi)$ そのものでなく $V^p(\phi)$ を計算するので、その最小値を決めるのが簡単になることである。その理由は2つある。一つ目は Higgs 場 ϕ をゲージ群 H ではなく T_p に属すと制限するので $V^p(\phi)$ に入ってくる Higgs 場の成分が少なくなることである。もう1つの理由は ϕ が T_p に属すと制限したことでポテンシャルに含まれる交換子 $[\phi_a, \phi_b]$ から出てくる構造定数も T_p のものだけを考えればよいということである。

ここで、 $V(\phi)$ から $V^p(\phi)$ に変更したときにポテンシャルの定数項、すなわち全ての ϕ を0としたときに残る項が変更されるかどうかを注意する必要がある。定数項はポテンシャル (3.13) ϕ を含まない項 $-\frac{1}{8}g^{ac}g^{bd}f_{ab}^i f_{cd}^j Tr(\phi_i \phi_j)$ である。 f_{ab}^i, f_{cd}^j は S の構造定数なのでゲージ群の選択にはよらないので T_p に制限しても不変である。ただし、 $Tr(\phi_i \phi_j)$ を変えないためには R が $U(1)$ か $U(1)$ と他の群との直積で書けると、その $U(1)$ の G への埋め込みと T_p への埋め込みが同じである必要がある。なぜなら異なる $U(1)$ への埋め込みを選んだ場合 CSDR 拘束式 $[\phi_i, \phi_a] = f_{ia}^b \phi_b$ を満たすために ϕ_i が定数倍だけ変わらなければならないからである。したがって、ポテンシャルの定数項は G と T_p への $U(1)$ の埋め込みを同じにしておけば $V(\phi)$ から $V^p(\phi)$ に変えたときに変わることはない。

この手順によりポテンシャルの最小値の計算は簡単になるが、 $G \supset T \times K$ の構造の候補がたくさんとりうるならば各候補ごとにポテンシャルの最小値を求め比較する必要があるので計算量が膨大になってしまう。そこで、Higgs 場による自発的対称性の破れに対する Michel's conjecture を用いて K の候補を絞る [10,11]。我々は以上の手順を用いて K を求める。

3.2.5 具体例

ここでは以上で議論したポテンシャルの解析の具体例をいくつか挙げる。

例1)

coset space $S/R=SU(2)/U(1)$ 、高次元でのゲージ群 $G=SU(3)$ の場合を考える [9,12]。また、 $R=U(1)$ の $G=SU(3)$ への埋め込みは、 $SU(3)$ の部分群への分解

$$SU(3) \supset SU(2) \times U(1)^A \supset U(1)^B \times U(1)^A \quad (3.28)$$

で現れる $U(1)^B$ を G の R 部分群 R_G に選ぶことで行う。そのとき4次元でのゲージ群 H は $H = C_G(R_G)$ で与えられるので

$$H = C_{SU(3)}(U(1)^B) = U(1)^B \times U(1)^A \quad (3.29)$$

となる。また、今の場合は $S \subset G$ となっているので、自発的対称性の破れの後のゲージ群 K は $K = C_G(S_G)$ と求めることができる。よって、

$$K = C_{SU(3)}(SU(2)) = U(1)^A \quad (3.30)$$

である。次にポテンシャルを拘束されていない Higgs 場で書き直す。まず sec2.3 で与えたルールにより 4 次元で Higgs 場が属す H の表現を調べる。そのために $G=SU(3)$ の随伴表現 8 を $G = H \times R_G$ の下で分解し、 $S=SU(2)$ の随伴表現 3 を R の下で分解すると

$$SU(3) \supset U(1)^B \times U(1)^A$$

$$8 = (0, 0) + (0, 0) + (1, 2) + (-1, -2) + (1, -2) + (-1, 2) + (2, 0) + (-2, 0) \quad (3.31)$$

$$SU(2) \supset U(1), \quad 3 = (0) + (2) + (-2) \quad (3.32)$$

となる。ここで sec2.3 の (2.87),(2.88) 式以下で見たルールにより 4 次元で Higgs 場が属す H の表現は (2,0) と (-2,0) とわかる。ポテンシャルの具体形を調べるために $S = SU(2)$ の生成子 Q_A と、その交換関係を考える。ポテンシャルの計算に便利な Q_A の基底として (3.32) の分解に対応した

$$Q_A = \{Q_0, Q_+, Q_-\} \quad (3.33)$$

を選ぶ。ここで Q_0 が R の生成子である。これらの間の交換関係とトレースは

$$[Q_+, Q_-] = 2Q_0, \quad [Q_{\pm}, Q_0] = \mp 2Q_{\pm} \quad (3.34)$$

$$Tr(Q_+ Q_-) = Tr(Q_0 Q_0) = 2 \quad (3.35)$$

で与えられる。また、この基底ではスカラー場は

$$\{\phi_A, A = 1, 2, 3\} \rightarrow \{\phi_0, \phi_+, \phi_-\} \quad (3.36)$$

となる。これに対応して $G=SU(3)$ の生成子も (3.31) の分解に対応した基底を選ぶ。その生成子とそれらの間の交換関係は Appendix C の (C.1) 式と table(C.1) に記されている。この生成子の基底の下でポテンシャルを計算すると

$$\begin{aligned} V(\phi) &= -\frac{1}{8} g^{ac} g^{bd} Tr[(f_{ab}^C \phi_C - [\phi_a, \phi_b])(f_{cd}^D \phi_D - [\phi_c, \phi_d])] \\ &= -\frac{1}{4} g^{+-} g^{-+} Tr[(f_{+-}^C \phi_C - [\phi_+, \phi_-])(f_{-+}^D \phi_D - [\phi_-, \phi_+])] \quad (no \text{ sum}) \\ &= -\frac{1}{4} Tr[(2\phi_0 - [\phi_+, \phi_-])(-2\phi_0 - [\phi_-, \phi_+])] \\ &= Tr(\phi_0^2) - Tr(\phi_0[\phi_+, \phi_-]) + \frac{1}{4} Tr([\phi_+, \phi_-]^2) \end{aligned} \quad (3.37)$$

が得られる。ここで今の場合は S/R のスケールは 1 つのみなので計量 g^{ab} から出てくるスケールファクタを省略している。さらにこのポテンシャルを拘束されていない Higgs 場で表す。スカラー場に対する CSDR 拘束式 (3.14) の解は $SU(3)$ 生成子 (C.1) を用いて

$$\phi_+ = \beta Q_3, \quad \phi_- = \beta^\dagger Q_3, \quad \phi_0 = -Q'_0 \quad (3.38)$$

で与えられる。実際、table(C.1) の交換関係を用いればこれらが (3.14) を満たすことが確かめられる。(3.38) を (3.37) に代入し、table(C.1) で与えられる交換関係と Tr を用いて計算するとポ

テンシタルは

$$\begin{aligned}
V(\phi) &= \text{Tr}((Q'_0)^2) + \text{Tr}(Q'_0[\beta Q_3, \beta^\dagger Q_3]) + \frac{1}{4}\text{Tr}([\beta Q_3, \beta^\dagger Q_3]^2) \\
&= 2 + \beta\beta^\dagger \text{Tr}(Q'_0(-2Q'_0)) + \frac{1}{4}(\beta\beta^\dagger)^2 \text{Tr}((2Q'_0)^2) \\
&= 2 - 4\beta\beta^\dagger + 2(\beta\beta^\dagger)^2
\end{aligned} \tag{3.39}$$

と拘束されていない Higgs 場 β で表される。このポテンシャルの最小値は 0 であり、 $|\beta| = 1$ のときに与えられる。さらに β の値を特定すれば $U(1)^B$ 対称性が自発的に破れ、ゲージ群として $K = U(1)^B$ が残る。これはまさに sec3.2.1 で与えられた結果を再現している。

例 2)

この例では始めのゲージ群と S/R は例 1 と同じものを考えるが、G への R の埋め込み方を例 1 とは異なる選び方をする。今回は $R=U(1)$ を (3.28) の分解で出てくる $SU(2) \times U(1)^A$ の $U(1)^A$ に埋め込む。このとき 4 次元でのゲージ群 H は

$$H = C_{SU(3)}(U(1)^A) = SU(2) \times U(1)^A \tag{3.40}$$

となる。また、スカラー場が属す H の表現は $G=SU(3)$ の随伴表現 8 の $H \times R_G = SU(2) \times U(1)^A$ の下での分解

$$SU(3) \supset SU(2) \times U(1)^A, \quad 8 = 1(0) + 3(0) + 2(2) + 2(-2) \tag{3.41}$$

と $S=SU(2)$ の随伴表現 3 の R の下での分解 (3.32) との比較から $2(2)$ と $2(-2)$ とわかる。

CSDR 拘束式 (3.14) の解を得るために、今回は $G=SU(3)$ の生成子の基底を (3.41) の分解に対応したものを選ぶ。その基底での生成子とその交換関係は Appendix C の (C.2) 式と table(C.2) で与えられている。その生成子の基底により (3.14) の解となる Higgs 場は

$$\phi_+ = \beta^a Q_a, \quad \phi_- = \beta_a Q^a, \quad \phi_0 = 2Q_0 \tag{3.42}$$

と得られる。ここで $(\beta^a)^\dagger = \beta_a$ である。また、 ϕ で表したポテンシャルは変わらず (3.37) で与えられる。なぜならこの形は S/R の構造によりのみ決まり R の G への埋め込み方には依存しないからである。そこで、(3.42) を (3.37) に代入し table(C.2) で与えられる交換関係とトレースを用いて計算すると Higgs 場によるポテンシャル

$$V(\beta) = 8 - 4\beta^a \beta_a + (\beta^a \beta_a)^2 \tag{3.43}$$

を得る。このポテンシャルの形は自発的対称性の破れを起こす構造をしており、sec3.2.2 で示した結果を裏付けている。

例 3)

今度はもう少し複雑な場合を考える。余剰空間としては $S/R = G_2/SU(3)$ 、高次元でのゲージ群としては $G = SU(5)$ を選ぶ。また、 $G=SU(5)$ への $R=SU(3)$ の埋め込みは

$$SU(5) \supset SU(3) \times SU(2) \times U(1) \tag{3.44}$$

の分解に出てくる $SU(3)$ を R_G として選ぶことで行う。よって 4 次元におけるゲージ群 H は

$$H = C_{SU(5)}(SU(3)) = SU(2) \times U(1) \quad (3.45)$$

で与えられる。次に 4 次元で Higgs 場が属す H の表現を調べる。そのために $G=SU(5)$ の随伴表現 24 を $H \times R_G$ の下で、 $S = G_2$ の随伴表現 14 を R の下でそれぞれ分解する。

$$\begin{aligned} SU(5) &\supset SU(3) \times SU(2) \times U(1) \\ 24 &= (8, 1)(0) + (1, 3)(0) + (\bar{3}, 2)(1) + (3, 2)(-1) + (1, 1)(0) \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$G_2 \supset SU(3), \quad 8 + 3 + \bar{3} \quad (3.47)$$

これらを比較し、 H の表現を求めるためのルールを適用する。2 つの分解で $R=SU(3)$ の 3 と $\bar{3}$ 表現が共通しているので、ルールに従えば 4 次元で Higgs 場が属す H の表現は $2(1)$ と $2(-1)$ だとわかる。この Higgs 場の表現は $SU(2) \times U(1) \rightarrow U(1)$ の破れを引き起こすのに適している。次にポテンシャルを計算する。 G_2 の生成子の基底としては (3.47) の分解に対応した

$$Q_A = \{Q^i, Q^\rho, Q_\rho\} \quad (i = 1, \dots, 8, \quad \rho = 1, 2, 3) \quad (3.48)$$

を選ぶ。ここで Q_i が R の生成子である。これらの間の交換関係は Appendix C の table(C.5) にまとめてある。この生成子の基底に対応させてスカラー場は

$$\phi_A = \{\phi_i, \phi^\rho, \phi_\rho\} \quad (3.49)$$

と書く。ポテンシャルをこれらスカラー場で表し、table(C.5) の交換関係から得られる構造定数を代入すると、

$$\begin{aligned} V(\phi) &= 8 + \frac{4}{3} Tr(\phi^\rho \phi_\rho) \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \epsilon^{\rho\sigma\tau} Tr(\phi_\tau [\phi_\rho, \phi_\sigma]) - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \epsilon_{\rho\sigma\tau} Tr(\phi^\tau [\phi^\rho, \phi^\sigma]) \\ &\quad - \frac{1}{2} (\lambda^i)_\sigma^\rho Tr(\phi_i [\phi_\rho, \phi^\sigma]) - \frac{1}{4} Tr([\phi^\rho, \phi^\sigma] [\phi_\rho, \phi_\sigma] + [\phi^\rho, \phi_\sigma] [\phi_\rho, \phi^\sigma]) \end{aligned} \quad (3.50)$$

となる。ここで $\epsilon^{\rho\sigma\tau}$ は反対称テンソル、 λ^i は Gell-Mann 行列である。また、この例でも S/R のスケールは一つだけなので計量から出てくるスケールファクタを省略している。このポテンシャルを拘束されていない Higgs 場で表すために CSDR 拘束式 (3.14) の解を見つける。そのために $G=SU(5)$ の生成子を (3.46) の分解に対応した基底

$$G_{SU(5)} = \{G_i, G_\alpha, G_{a\rho}, G^{a\rho}, G\} \quad (3.51)$$

を選ぶ。ここで $i = 1, \dots, 8, \alpha = 1, 2, 3, \rho = 1, 2, 3, a = 1, 2$ であり、 G_i が R_G の生成子となる。これらの間の交換関係は table(C.4) にまとめてある。この生成子の基底を用いて (3.14) の解となるスカラー場は

$$\phi_i = G_i, \quad \phi^\rho = \beta_a G^{a\rho}, \quad \phi_\rho = \beta^a G_{a\rho} \quad (3.52)$$

と書ける。これらを (3.50) に代入してポテンシャルを Higgs 場 β で表すと

$$V(\beta) = 8 - 8\beta^\dagger\beta + 12(\beta^\dagger\beta)^2 \quad (3.53)$$

を得る。このポテンシャルは $SU(2) \times U(1) \rightarrow U(1)$ の自発的対称性の破れを起こす構造をしている。

・ 3.2.4 節の手順の適用

ここでこの例に対し 3.2.4 節で考察した手順を適用してみる。まず、 $G \supset T \times K$ としてとりうる候補を探す。仮定より、 $G \supset T \supset R$ であるので T としてとりうる群は $SU(5), SU(4), SU(3)$ である。ここで $SU(5)$ は G そのものであるなので考える必要はない。そこで T の候補として $SU(4)$ と $SU(3)$ を考える。

$T_1 = SU(3)$ のときは CSDR 拘束式 (3.14) の非自明な解は存在しない。したがって解は自明な解 $\phi_a = 0$ のみなのでポテンシャルは

$$V^1 = g^{ac}g^{bd}f_{ab}^i f_{cd}^j \text{Tr}(J_i J_j) = 8 \quad (3.54)$$

となる。この値はポテンシャルの最小値 V_{min}^1 でもある。

$T_2 = SU(4)$ であるときは (3.14) の非自明な解が存在する。それを求めるために $SU(4)$ の生成子の基底を

$$SU(4) \supset SU(3) \times U(1), \quad 15 = 8(0) + 1(0) + \bar{3}(4) + 3(-4) \quad (3.55)$$

で与えられる $SU(4)$ の随伴表現の分解に対応したものにとる。その基底での $SU(4)$ 生成子は

$$Q_{SU(4)} = \{Q_i, Q, Q^\rho, Q_\rho\} \quad (i = 1, \dots, 8, \rho = 1, 2, 3) \quad (3.56)$$

である。これらの生成子間の交換関係は table(C.3) で与えられている。これらを用いて (3.14) の解となるスカラー場は

$$\phi_i = Q_i, \quad \phi^\rho = \beta'^\dagger Q^\rho, \quad \phi_\rho = \beta' Q_\rho \quad (3.57)$$

と与えられる。これらをポテンシャル (3.50) に代入すると

$$V^2(\beta') = 8 - 8\beta'^\dagger\beta' + 12(\beta'^\dagger\beta')^2 \quad (3.58)$$

を得る。このポテンシャルの最小値 V_{min}^2 は $|\beta'|^2 = \frac{1}{3}$ で与えられ

$$V_{min}^2 = \frac{20}{3} \quad (3.59)$$

で与えられる。

2つの T の候補ごとに計算されたポテンシャルの最小値を比較すると $T_2 = SU(4)$ の場合の方がより小さいポテンシャルの最小値を与えることがわかる。したがって $K_2 = C_G(T_2) = U(1)$ が K として求められる。この結果は実際にゲージ群を G のままで計算した場合と一致する。

3.3 フェルミオンセクターについての考察

この節では4次元での理論におけるフェルミオンセクターの考察を行う。標準模型はカイラルフェルミオンにより構成された模型であるので、現実的な統一模型の構築のためには4次元理論のフェルミオンセクターにカイラルフェルミオンが導入される必要がある。そのためには自発的対称性を破る前のフェルミオンはマスレスでなくてはならない。

4次元においてマスレスなカイラルフェルミオンを得ることは高次元時空を扱う理論にとって重要な問題である。例えば、高次元時空を導入した最初の理論である Kaluza-Klein(KK) 理論やその拡張となる理論は4次元でマスレスフェルミオンを得ることができなかったため現実的な理論にはならなかった。というのはKK理論では4次元でフェルミオンが大きな幾何学的質量を持ってしまうという問題があったからである。

しかし、KK理論におけるこの問題は高次元においてゲージ場を導入することで解決できる。したがって我々の考える CSDR 法においては4次元でマスレスなカイラルフェルミオンを得ることが可能である。以下では具体的にカイラルフェルミオンを得るための条件を考察していく[3,13,14,15,16]。

3.3.1 カイラルフェルミオンを得るための条件

ここでは4次元においてカイラルフェルミオンを得るための条件を求める。そこでいくつかの場合に分けてカイラルフェルミオンを得るための条件を考察していく。結果的には高次元で Dirac 型のフェルミオンを導入した場合は4次元でカイラルフェルミオンを得ることができず、Weyl フェルミオンを導入した場合は4次元でカイラルフェルミオンを得ることができる。さらに高次元の次元数 $D=4n+2$ のときは高次元でベクトルのフェルミオンの表現を導入しても4次元でカイラルフェルミオンを得ることができる。以下でそれを具体的に示す。

() 高次元で Dirac 型フェルミオンが導入された場合

高次元において Dirac 型のフェルミオンを導入した場合には4次元でカイラルフェルミオンを得ることができない。まずはこのことを示す。その際に高次元の次元数 D が奇数の場合と偶数の場合に分けて考察する。

(a) 高次元の次元数 D が奇数の場合

奇数次元ではスピノル表現はユニークである。よって、 D 次元スピノル σ_D の $(SU(2) \times SU(2)) \times SO(d)$ の下での分解は

$$\sigma_D = (2, 1; \sigma_d) + (1, 2; \sigma_d) \quad (3.60)$$

と与えられる。ここで4次元時空に対する Lorentz 群 $SO(1,3)$ のスピノル表現を $SU(2) \times SU(2)$ 基底で表している。そのとき $(2,1)$ 表現の下で変換する Weyl スピノル場が左手型 (left-handed) ψ_L 、 $(1,2)$ 表現の下で変換する Weyl スピノル場が右手型 (right-handed) ψ_R である。また、 $SO(d)$ は d 次元余剰空間に対する Lorentz 群である。

ここで、4次元において右手型と左手型のスピノル場が属す H の表現をそれぞれ求めたい。そこで sec2.3 で見た、4次元でスピノル場が属す H の表現を決めるための CSDR ルールを用いる。

そのルールによれば、D 次元でスピノル場が属すゲージ群 G の表現 F の $R_G \times H$ の下での分解と $SO(d)$ スピノル σ_d の R の下での分解

$$F = \sum (r_i, h_i) \quad (3.61)$$

$$\sigma_d = \sum \sigma_i \quad (3.62)$$

において、 $\sigma_i = h_i$ に対応した h_i が 4 次元でスピノル場が属す H の表現となる。

この CSDR ルールをもとに D 次元スピノル場 (3.60) から得られる 4 次元スピノル場を考えると、左手型と右手型で属す H の表現がまったく同じものが出てくることがわかる。したがってこの場合は 4 次元でカイラルなフェルミオンを得ることができない。

(b) 高次元の次元数 D が偶数の場合

D が偶数次元のときはカイラリティ演算子 Γ^{D+1} が存在するので、D 次元においてスピノルはユニークではなく左手型と右手型に区別される。ここで D 次元カイラリティ演算子は

$$\Gamma^{D+1} = i^{(D-2)/2} \Gamma^0 \Gamma^1 \dots \Gamma^{D-1} \quad (3.63)$$

と定義される。Γ 行列の表示としては (3.10) 式で与えたものを選ぶ。その表示では D 次元カイラリティ演算子 Γ^{D+1} は 4 次元と d 次元のカイラリティ演算子 γ^5, γ^{d+1} により

$$\Gamma^{D+1} = \gamma^5 \otimes \gamma^{d+1}, \quad \gamma^{d+1} = -i^{D/2} \gamma^1 \gamma^2 \dots \gamma^d \quad (3.64)$$

と与えられる。ここで重要な点は γ^5 と γ^{d+1} の固有値が Γ^{D+1} の固有値を通して関係していることである。また、カイラリティ演算子に対する固有状態となる Weyl スピノルを ψ_+, ψ_- としてその固有値は

$$\Gamma^{D+1} \psi_{\pm} = \pm \psi_{\pm} \quad (3.65)$$

である。カイラリティ演算子は Lorentz 群の生成子と交換するので ψ_+, ψ_- はそれぞれ $SO(1, D-1)$ の既約なスピノル表現 σ_D, σ'_D として変換する。ここで、偶数の D に対する $SO(1, D-1)$ の既約なスピノル表現はこの 2 つの Weyl スピノルのみである。Dirac スピノル ψ はこの 2 つの Weyl スピノルの直和で表せ、

$$\psi = \sigma_D + \sigma'_D \quad (3.66)$$

と書ける。Weyl スピノル σ_D, σ'_D は $(SU(2) \times SU(2)) \times SO(d)$ の下で次の分岐則を持つ。

$$\sigma_D = (2, 1; \sigma_d) + (1, 2; \sigma'_d), \quad \sigma'_D = (2, 1; \sigma'_d) + (1, 2; \sigma_d) \quad (3.67)$$

ここで σ_d, σ'_d は d 次元での Weyl スピノルであり、それぞれカイラリティ +1, -1 を持つ。

以上で与えられる Dirac スピノルに対し CSDR ルールを適用して 4 次元でフェルミオンが属す H の表現を求めると、右手型と左手型の Weyl スピノルに対しそれぞれ同じ H の既約表現のセットが得られることがわかる。したがって、D が偶数の場合も高次元で Dirac フェルミオンから考えると 4 次元でカイラルフェルミオンを得ることができない。ゆえに、カイラルフェルミオンを 4 次元で得るためには高次元で Weyl フェルミオンを導入する必要がある。

() 高次元で Weyl フェルミオンが導入された場合

このとき (3.67) の σ_D か σ'_D のどちらかのみが高次元で導入される。その場合 4 次元においてカイラルフェルミオンを得ることができる。ただし、Weyl フェルミオンが導入されるためには次元数 D は偶数である必要がある。また、 $D=4n$ と $D=4n+2$ の場合で異なる結果が得られるので、この 2 つの場合に分けて考察する。

(a) $D=4n$ の場合

このとき $d=4(n-1)$ であり、 $SO(d)$ は自己共役な 2 つのスピンノル表現を持つ。自己共役なスピンノル σ_d の R の下での分解は

$$\sigma_d = \sum_i \sigma_i^r + \sum_j (\sigma_j + \bar{\sigma}_j) \quad (3.68)$$

と書ける。ここで σ_i^r は R の実表現を表す。したがって 4 次元でカイラルフェルミオンを得るには高次元でフェルミオンがゲージ群 G の複素表現 F に属している必要がある。なぜなら F が実だとすると ψ_L, ψ_R が属す H の既約表現のセットがそれぞれ全体として自己共役になるからである。また、当然 R も複素表現を持つ Lie 群でなければならない。さらに他の制限が Bott による非自明な結果から得られる [17]。それは $\text{rank} R < \text{rank} S$ のときは σ_d と σ'_d は同じ表現になるという結果である。すなわち 4 次元でカイラルフェルミオンを得るためには $\text{rank} R = \text{rank} S$ が要求される。ただし、このことは $d=4n$ の場合以外にも要求される。したがって $D=4n$ の場合に 4 次元でカイラルフェルミオンを得るには、 $\text{rank} R = \text{rank} S$ を満たす S/R を余剰空間とした高次元で複素表現に属した Weyl フェルミオンを導入する必要がある。

(b) $D=4n+2$ の場合

この場合は最も興味深い結果を与える。なぜなら既に述べたようにこのとき高次元でフェルミオンが属す G の表現 F がベクトルのことが許されるからである。このことを以下で詳しく考察する。

このとき $d=4(n-1)+2$ であるので $SO(d)$ の既約なスピンノル表現 σ_d, σ'_d はどちらも自己共役ではなく、 $\sigma'_d = \bar{\sigma}_d$ となる。 $\sigma_d, \bar{\sigma}_d$ の R の下での分解はそれぞれ

$$\sigma_d = \sum_k \sigma_k, \quad \bar{\sigma}_d = \sum_k \sigma_k \quad (3.69)$$

と与えられる。ここで σ_k は R の既約表現を表す。また、 G のベクトル的な表現 F の $R_G \times H$ の下での分解は

$$F = \sum_i (\sigma_i^r, h_i^r) + \sum_i \{(\sigma_i, h_i) + (\bar{\sigma}_i, \bar{h}_i)\} \quad (3.70)$$

と与えられる。ここで σ_i^r, h_i^r はそれぞれ R と H の実表現を表している。高次元において $SO(d)$ スピンノル表現

$$\sigma_D = (2, 1; \sigma_d) + (1, 2; \bar{\sigma}_d) \quad (3.71)$$

と、ゲージ群 G のベクトル的な表現 F に属す Weyl フェルミオンが導入されたとする。そこで、(3.69), (3.70) の分解に対し、CSDR ルールを適用して 4 次元でフェルミオンが属す H の表現をもとめる。すると結果として 4 次元時空における左手型フェルミオン ψ_L の属す H の表現 f_L と右

手型フェルミオン ψ_R が属す H の表現 f_R はそれぞれ

$$f_L = \sum_k h_k^L, \quad f_R = \sum_k \bar{h}_k^R \quad (3.72)$$

と得られる。ここで F はベクトル的な表現だったので $(\bar{h}_k^R)^c = h_k^L$ (c は荷電共役変換を表す。) である。したがって、4 次元において同じ H の表現の下で変換する Weyl フェルミオンが 1 組得られることになる。よって 4 次元でカイラルフェルミオンが得られたことになる。ここでさらに Majorana 条件を課すことで組で得られた Weyl フェルミオンが同じものだとすることができる。したがって高次元において Weyl-Majorana スピノルを導入すると 4 次元で $f_R(f_L)$ は $f_L(f_R)$ の荷電共役をとったものとみなされるので $f_L(f_R)$ として変換される Weyl スピノルのみを得る。ここで F が複素表現であると選んだ場合もカイラルフェルミオンを得ることができることに注意しておく。その場合は $\bar{h}_k^R$ と h_k^L は異なる表現となる。

最後に Majorana 条件について考察する。Majorana 条件を課することができる次元数は $D=2,3,4+8n$ のときのみである。このとき Dirac スピノルに対する Majorana 条件は

$$\psi = C(\bar{\psi})^T \quad (3.73)$$

と与えられる。ここで C は D 次元荷電共役行列である。よって $D=4n+2$ の場合は Majorana 条件を課することができ得る。ただし、F が実のときは $D=8n+2$ 、F が疑実の場合は $D=8n+6$ でなくては Majorana 条件を課することができないことに注意しておく。

3.3.2 具体例

ここでは上記の議論に対する具体例を見る。始めの高次元ゲージ理論としてはゲージ群 $G=SU(5)$ 、余剰空間 $S/R = G_2/SU(3)$ の 6 次元 coset space に対する 10 次元ゲージ理論を考える。この 10 次元ゲージ理論に導入された Dirac 型フェルミオンに Weyl-Majorana 条件を課すことで、実際に 4 次元においてカイラルフェルミオンを得られることを示す。

()10 次元 Dirac スピノルの導入

10 次元における Dirac スピノル ψ は $2^5 = 32$ 成分を持ち

$$\psi = (\psi_1, \dots, \psi_4, \chi_1, \dots, \chi_4)^T \quad (3.74)$$

で表される。ここで $\psi_i, \chi_i (i = 1, \dots, 4)$ は 4 次元スピノルを表す。

()Weyl 条件を課す

この Dirac スピノルに対し Weyl 条件

$$\Gamma^{11}\psi_+ = \psi_+ \quad (3.75)$$

を課す。 Γ^{11} は 10 次元でのカイラリティ演算子であり、この条件でカイラリティ+1 の Weyl スピノルのみを導入したことになる。ここで用いる Γ 行列の表示は

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu \otimes I_8, \quad \Gamma^{p+3} = \gamma_5 \otimes \begin{pmatrix} 0 & -\bar{\gamma}^p \\ \bar{\gamma}^p & 0 \end{pmatrix}, \quad p = 1, 2, 3, 5, 6 \quad \Gamma^7 = \gamma^5 \otimes \begin{pmatrix} 0 & iI_4 \\ iI_4 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.76)$$

と与えられる。ここで γ^μ, γ^5 は通常の 4 次元での γ 行列とカイラリティ演算子であり、 $\bar{\gamma}^p$ は

$$\bar{\gamma}^1 = \sigma^1 \otimes \sigma^2, \quad \bar{\gamma}^2 = \sigma^2 \otimes \sigma^2, \quad \bar{\gamma}^3 = -I_2 \otimes \sigma^3, \quad \bar{\gamma}^5 = \sigma^3 \otimes \sigma^2, \quad \bar{\gamma}^6 = -I_2 \otimes \sigma^1 \quad (3.77)$$

で与えられる。この表示の下で 10 次元カイラリティ演算子 Γ^{11} は

$$\Gamma^{11} = \Gamma^0 \cdots \Gamma^9 = \gamma^5 \otimes \begin{pmatrix} -I_4 & 0 \\ 0 & I_4 \end{pmatrix} \quad (3.78)$$

と表される。よって (3.75) の Weyl 条件より ψ_+ は

$$\psi_+ = (L\psi_1, \dots, L\psi_4, R\chi_1, \dots, R\chi_4)^T \quad (3.79)$$

となる。ここで $L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)$, $R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)$ である。この Weyl 条件は (3.67) の 1 つ目の式で $D=10, d=6$ とした

$$\sigma_{10} = (2, 1; \sigma_6) + (1, 2; \bar{\sigma}_6)$$

の方を選んだことに当たる (今は $\sigma'_6 = \bar{\sigma}_6$)。また、 $\sigma_d = 4, \bar{\sigma}_d = \bar{4}$ である。よって、 ψ_i は $SO(6)$ の 4 表現、 χ_i は $\bar{4}$ 表現をそれぞれ形成する。

一方で Weyl 条件を課す際に $\Gamma^{11}\psi_- = -\psi_-$ の方を選んでいたとすると、上述の結果で L と R が入れ替わる。

() Majorana 条件を課す

(3.79) の Weyl スピノルにさらに Majorana 条件を課す。10 次元での Majorana 条件は

$$\psi = C_{10}(\bar{\psi})^T \quad (3.80)$$

と書く。ここで 10 次元荷電共役演算子 C_{10} は

$$C_{10} = C_4 \otimes \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}, \quad \theta = \sigma^2 \otimes iI_2 \quad (3.81)$$

と与えられる (C_4 は 4 次元荷電共役演算子)。この Majorana 条件を課すことで χ_i は ψ_i で表されることになる。すなわち

$$\chi_{1,3} = C_4 \gamma_0 \psi_{2,4}^*, \quad \chi_{2,4} = -C_4 \gamma_0 \psi_{1,3}^* \quad (3.82)$$

となる。よって Weyl 条件と Majorana 条件の両方が課された 10 次元スピノルは

$$\psi = (L\psi_1, L\psi_2, L\psi_3, L\psi_4, R\tilde{\psi}_2, R\tilde{\psi}_1, R\tilde{\psi}_4, R\tilde{\psi}_3)^T, \quad \tilde{\psi}_i = (-1)^i C_4 \gamma_0 \psi_i^* \quad (3.83)$$

で与えられる。

() $SO(6)$ スピノル表現の R の下での分解

$R = SU(3)$ の $SO(6)$ への埋め込みを計算することで ψ_i の R の下での変換性を調べる。 $SO(d)$ への R の埋め込みは sec2.2 で見たように $T_i = -\frac{1}{2}f_{iab}\Sigma^{ab}$ を用いて計算できる。ここで f_{iab} は G_2

の構造定数である。また $\Sigma^{ab} = \frac{1}{4}[\Gamma^a, \Gamma^b]$ である。この SO(6) の R 部分群の作用による 10 次元スピノルの無限小変化は

$$\delta_i \psi = T_i \psi \quad (3.84)$$

で与えられる。(3.76),(3.77) の Γ 行列の基底を用いて具体的に計算すると、 $\psi_i, i = 1, 2, 3$ が SU(3) の 3 表現の下で変換し、 ψ_4 が SU(3) シングレットであることがわかる。このことは SO(6) スピノルの SU(3) の下での分解

$$4 = 1 + 3 \quad (3.85)$$

に対応している。同様に χ_i の変換を調べると、 $\chi_i, i = 1, 2, 4$ は SU(3) の $\bar{3}$ の下で変換し、 χ_3 はシングレットであることがわかる。これは SO(6) スピノルの SU(3) の下での分解

$$\bar{4} = 1 + \bar{3} \quad (3.86)$$

に対応している。

() 4 次元でスピノルが属す H の表現を求める

以上の結果に 4 次元が属すフェルミオンの表現を求めるための CSDR ルールを適用する。4 次元でのゲージ群 H は $H = C_G(R_G)$ で与えられるので $H = SU(2) \times U(1)$ である。ここで始め 10 次元でフェルミオンは $G = SU(5)$ の随伴表現 24 に属していたとする。このとき、 $G = SU(5)$ の $R \times H = SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ の下での分解 (3.46) と SO(6) スピノルの $R = SU(3)$ の下での分解 (3.85),(3.86) を比較すると、CSDR ルールより左手型、右手型フェルミオンは H の下でそれぞれ

左手型フェルミオン $\rightarrow 3(0), 2(-1), 1(0)$

右手型フェルミオン $\rightarrow \bar{3}(0), 2(1), 1(0)$

の表現に属することがわかる。今は Majorana 条件を課している所以で上記のフェルミオンは同じものとみなされる。したがって 4 次元において $H = SU(2) \times U(1)$ の $3(0), 2(-1), 1(0)$ 表現に属す左手型のみで表されたカイラルフェルミオンを得ることができた。

3.4 質量についての考察

この節では CSDR 法と調和解析から得られる結果を比較し、4 次元時空における場に対する質量を考察する。調和解析では余剰空間を物理的な実体として扱い、調和展開を用いて場の余剰空間に対する揺らぎを解析する。ただし、計量の揺らぎは無視する。その結果として CSDR から得られる 4 次元でのゲージ場は少なくとも $\text{rank} S = \text{rank} R$ の S/R に対しては、自発的対称性を起こす前はマスレスとなることがわかる。また、4 次元でのフェルミオンも一部の場を除けばマスレスとなる。以下では具体的にこれらを見る。始めに調和展開を行うために必要となる基底状態の配位を考察し、その後で実際に各場に対し調和展開を行い CSDR 法で得られる 4 次元での場に対する質量を考察する [18,19]。

・基底状態の配位

調和解析では真空状態（基底状態）の配位のまわりで場を調和展開することで実行される。したがって $M^4 \times S/R$ 上の場に対する調和展開を行うためには、その時空に対する適切な真空状態の

配位を見つける必要がある。まず、その真空状態の配位について考察する。
真空状態の配位に対するゲージ場は真空に対する Yang-Mills 方程式

$$D^\nu F_{\mu\nu} + D^\alpha F_{\mu\alpha} = 0, \quad D^\mu F_{\alpha\mu} + D^\beta F_{\alpha\beta} = 0 \quad (3.87)$$

に従うべきである。よってこの解を求めたい。

そこで、まず $M^4 \times S/R$ の真空状態の対称性を考える。その対称性は Poincare 群 $\times S$ であり、ゲージ場の真空の配位（背景場） A_M^B もその対称性を持つはずである。よって A_μ^B は Lorentz ベクトルなので Lorentz 対称性の要求から $A_\mu^B = 0$ となる。また、 A_M^B は 4次元時空の座標に対し並進対称であるので $\partial_\mu A_M^B = 0$ となるはずである。また、 A_α^B は S 変換に対して対称であるべきであるので $(A_\alpha^B)^s = A_\alpha^B$ を満たす。

したがって、これらの対称性より $F_{\mu\nu}^B = F_{\mu\alpha}^B = 0$ となるので (3.87) の第 1 式は真空の配位に対し恒等的に成り立つ。そこで次に (3.87) 第 2 式の真空解を考える。その解は自明ではなく、sec3.2 で考察した 4 次 Higgs ポテンシャルの最小値の分類が関わってくる。それは代数的な問題ではあるが、一般に解くのは困難である。そこで $F_{\alpha\beta}$ の形を見ると

$$F_{\alpha\beta} = e_\alpha^a e_\beta^b (f_{ab}^i J_i + f_{ab}^c \phi_c - [\phi_a, \phi_b]) \quad (3.88)$$

である。sec3.2 での議論により対称な S/R に対しては $\phi_a = 0$ は $V(\phi)$ の局所最大値に対応する。そこで我々は対称な S/R に注目して、 A_α に対する真空の配位として

$$A_\alpha^B = e_\alpha^i J_i \quad (3.89)$$

を選ぶ。この配位は真空に対する Yang-Mills 方程式 (3.87) を満たすはずである。実際、この配位が真空解となることはよく知られている [18]。そこで実際に (3.89) が Yang-Mills 方程式を満たすことを確かめる。真空の配位 $F_{\alpha\beta}^B$ は (3.89) の A_α^B を用いると

$$F_{\alpha\beta}^B = e_\alpha^a e_\beta^b f_{ab}^i J_i \quad (3.90)$$

と書ける。これの共変微分をとったものを計算すると

$$D^\beta F_{\alpha\beta} = e_\alpha^a \frac{1}{2} f_{ab}^c f_{ci}^b J^i \quad (3.91)$$

を得る。この右辺は S/R が対称なら $f_{ab}^c = 0$ より 0 になる。一方、Cartan-Killing 計量の成分を γ_{ai} としたとき

$$f_{ab}^c f_{ci}^b \propto \gamma_{ai} \quad (3.92)$$

となる。ここで Cartan-Killing 計量は

$$\gamma_{AB} = \text{tr}(T_A T_B) = f_{AD}^C f_{CB}^D \propto \delta_{AB} \quad (3.93)$$

と与えられる (T_A, T_B は随伴表現の生成子と仮定した)。よって R の Lie 代数が S の Lie 代数の正則な部分代数であるなら $f_{ab}^c f_{ci}^b = \gamma_{ai} = 0$ である。したがって、上記の条件を満たすなら (3.89)

で与えられるゲージ場の真空に対する配位は Yang-Mills 方程式 (3.87) を満たす。

ここで背景場 A_α^B の S 対称性について触れておく。背景場 (3.89) は sec2.3 で議論した意味で S 対称である。(2.40) 第 2 式を用いて A_α^B の Lie 微分を計算すると

$$\begin{aligned}\delta_A A_\alpha^B &= L_{\xi_A} A_\alpha^B \\ &= -(\partial_\alpha \Omega_A^i) J_i - [\Omega_A^i J_i, A_\alpha^B]\end{aligned}\quad (3.94)$$

となる。よって

$$W_A = -\Omega_A^i J_i \quad (3.95)$$

で与えられるゲージ変換により S 変換を打ち消すことができるので、確かに sec2.3 の意味で背景場は S 対称である。さらにこの W_A は (2.75)-(2.78) を満たすことも容易に示すことができる。以下では S/R として対称なものを考えて、ここで議論した真空の配位のまわりでの調和展開を実行する。

・調和展開

ここで S/R 上の場に対する調和展開を実行する [20]。調和展開に関しては Appendix B に詳細が記されているのでその結果を用いる。(B.7),(B.8) を用いて A_μ, A_a, ψ に関する調和展開は

$$A_\mu(x, y) = \sum_m \sum_{pq} \sqrt{\frac{d_m}{d_{\mathfrak{D}}}} D_{pq}^{(m)}(L(y)) a_{\mu pq}^{(m)}(x) \quad (3.96)$$

$$A_a(x, y) = A_a^B + \sum_m \sum_{pq} \sqrt{\frac{d_m}{d_{\mathfrak{D}}}} D_{pq}^{(m)}(L(y)) \phi_{apq}^{(m)}(x) = A_a^B + \bar{A}_a \quad (3.97)$$

$$\psi(x, y) = \sum_m \sum_{pq} \sqrt{\frac{d_m}{d_{\mathfrak{D}}}} D_{pq}^{(m)}(L(y)) \psi_{pq}^{(m)}(x) \quad (3.98)$$

と実行される。

対称条件 (2.56) をみたく A_μ, A_a, ψ に対する調和展開に寄与する適切な S の表現 $D^{(m)}$ を決めたい。そこで調和展開の展開係数 $a_\mu^{(m)}, \phi_a^{(m)}, \psi^{(m)}$ が S 変換による接空間の回転と (3.66) の W_A によるゲージ変換の下で変換されるとして、各場の調和展開に対する対称条件を調べる。

() $A_a(x, y)$ について

まず $A_a(x, y)$ の調和展開に対する S 変換を調べる。展開係数が接空間に対する回転を受けるとしているので展開の S 変換は

$$A_a^s(x, y) = (A_a^B)^s + \sum_m \sum_{pq} \sqrt{\frac{d_m}{d_{\mathfrak{D}}}} D_{pq}^{(m)}(L(y^{-s})) (\Omega(s, y) \phi_{pq}^{(m)}(x))_a \quad (3.99)$$

となる。ここで Ω は接空間での回転を表す。この変換の各部分について見ていくと、まず $D_{pq}^{(m)}(L(y^{-s}))$ については (2.19) より

$$D_{pq}^{(m)}(L(y^{-s})) = D_{pq}^{(m)}(r(s, y) L(y) s^{-1}) \quad (3.100)$$

となる。さらに $r = 1 + \omega^A \Omega_A^i Q_i$, $s = 1 + \omega^A Q_A$ と書いて無限小変換を調べると

$$D_{pq}^{(m)}(L(y^{-s})) = D_{pq}^{(m)}(L(y)) + \omega_A \Omega_A^i D_{pq}^{(m)}(Q_i L(y)) - \omega^A D_{pq}^{(m)}(L(y) Q_A) \quad (3.101)$$

を得る。次に $(\Omega(s, y) \phi_{pq}^{(m)})_a$ について考察する。 ϕ_a は接空間ベクトルとして変換し、さらに $d=v$ であるので無限小変換を考えると

$$(\Omega(s, y) \phi_{pq}^{(m)})_a = \phi_{apq}^{(m)} + \omega^A \Omega_A^i f_{iab} \phi_{bpq}^{(m)} \quad (3.102)$$

と書ける。したがって調和展開に対する S 変換は無限小形で

$$\begin{aligned} A_a^s(x, y) &= (A_a^B)^s + \sum_m \sum_{pq} \sqrt{\frac{d_m}{d_{\mathfrak{D}}}} \{ D_{pq}^{(m)}(L(y)) + \omega_A \Omega_A^i D_{pq}^{(m)}(Q_i L(y)) - \omega^A D_{pq}^{(m)}(L(y) Q_A) \} \\ &\quad \times \{ \phi_{apq}^{(m)} + \omega^A \Omega_A^i f_{iab} \phi_{bpq}^{(m)} \} \\ &= (A_a^B)^s + \sum_m \sum_{pq} \sqrt{\frac{d_m}{d_{\mathfrak{D}}}} [(D_{pq}^{(m)}(L(y)) - \omega^A D_{pq}^{(m)}(L(y) Q_A)) \phi_{apq}^{(m)} \\ &\quad + \omega^A \Omega_A^i D_{pq}^{(m)}(Q_i L(y)) \phi_{apq}^{(m)} + D_{pq}^{(m)}(L(y)) \omega^A \Omega_A^i f_{iab} \phi_{bpq}^{(m)}] \end{aligned} \quad (3.103)$$

と与えられる。

次にゲージ変換を考えると $\phi_{pq a}^{(m)}$ は G の随伴表現に属しているので無限小変換は

$$\begin{aligned} (\phi_{apq}^{(m)}(x))^{-g} &= \phi_{apq}^{(m)}(x) - \omega^A \partial_a W_A - [\omega^A W_A, \phi_{apq}^{(m)}(x)] \\ &= \phi_{apq}^{(m)} + \omega^A \partial_a (\Omega_A^i) J_i + \omega^A \Omega_A^i [J_i, \phi_{apq}^{(m)}] \end{aligned} \quad (3.104)$$

となる。よって調和展開に対するゲージ変換の無限小形は

$$(A_a)^{-g} = (A_a^B)^{-g} + \sum_m \sum_{pq} \sqrt{\frac{d_m}{d_{\mathfrak{D}}}} D_{pq}^{(m)}(L(y)) \{ \phi_{apq}^{(m)} + \omega^A \Omega_A^i [J_i, \phi_{apq}^{(m)}] \} \quad (3.105)$$

と与えられる。ここで、(3.104) の $-\omega^A \partial_a (\Omega_A^i) J_i$ 項は $(A_a^B)^{-g}$ に含まれていることに注意する。したがって、対称条件 $A_a^s = A_a^{-g}$ を調和展開で調べると $(A_a^B)^s = (A_a^B)^{-g}$ であることから

$$\begin{aligned} \sum_m \sum_{pq} \sqrt{\frac{d_m}{d_{\mathfrak{D}}}} [(D_{pq}^{(m)}(L(y)) - \omega^A D_{pq}^{(m)}(L(y) Q_A)) \phi_{apq}^{(m)} \\ + \omega^A \Omega_A^i D_{pq}^{(m)}(Q_i L(y)) \phi_{apq}^{(m)} + D_{pq}^{(m)}(L(y)) \omega^A \Omega_A^i f_{iab} \phi_{bpq}^{(m)}] \\ = \sum_m \sum_{pq} \sqrt{\frac{d_m}{d_{\mathfrak{D}}}} D_{pq}^{(m)}(L(y)) \{ \phi_{apq}^{(m)} + \omega^A \Omega_A^i [J_i, \phi_{apq}^{(m)}] \} \end{aligned} \quad (3.106)$$

と得られる。この両辺を比較すると $\omega^A \Omega_A^i$ の係数が 0 になればよいとわかる。よって $D_{pq}^{(m)}(Q_i L(y)) \phi_{apq}^{(m)} = D_{ps}^{(m)}(Q_i) D_{sq}^{(m)}(L(y))$ であることを用いると

$$D_{ps}^{(m)}(Q_i) \phi_{apq}^{(m)} + f_{iab} \phi_{bpq}^{(m)} - [J_i, \phi_{apq}^{(m)}] = 0 \quad (3.107)$$

という式が得られる。この式により $A_a(x, y)$ の調和展開でどの S の既約表現が出てくるかがわかる。 A_a の調和展開に現れる S の既約表現は、部分群 R の表現に制限したものが (2.87) の r_i と (2.88) の s_i の直積表現 $r_i \times s_i$ になるものである。

() $A_\mu(x, y)$ について

A_μ については A_a とほぼ同じように考えればよい。異なる点としては、 $a_{\mu, pq}^{(m)}$ は S 変換に対してはスカラーなので (3.102) とは異なり

$$(\Omega(s, y)a_{\mu pq}^{(m)})_\mu = a_{\mu pq}^{(m)} \quad (3.108)$$

となることのみである。ゲージ変換についてはこの場合も G の随伴表現に属するので同様に考えればよい。したがって同様の考察を行えば

$$D_{ps}^{(m)}(Q_i)a_{\mu pq}^{(m)} - [J_i, a_{\mu sq}^{(m)}] = 0 \quad (3.109)$$

という式を得る。この式により $A_\mu(x, y)$ の調和展開で出てくる S の既約表現に制限がつけられる。 A_μ の調和展開に現れる S の既約表現は、部分群 R の表現に制限したものが (2.87) の r_i になるものである。

() $\psi(x, y)$ について

ψ についてもこれまでと同様に考えればよい。ただし、 ψ の場合は $\psi_{pq}(x)$ の接空間回転が

$$\begin{aligned} \Omega(s, y)\psi_{pq}^{(m)} &= \psi_{pq}^{(m)} + \frac{1}{2}\omega^A G_{Abc} \Sigma^{bc} \psi_{pq}^{(m)} \\ &= \psi_{pq}^{(m)} + \omega^A \Omega_A^i T_i \psi_{pq}^{(m)} \end{aligned} \quad (3.110)$$

で与えられる。ここで G_{Abc} については (2.72) の、 T_i については (2.18) の定義を用いた。また、ゲージ変換についてはその無限小形を

$$D(W_A)\psi_{pq}^{(m)} = \omega_A \Omega_A^i J_i \psi_{pq}^{(m)} \quad (3.111)$$

で与える。これらを用いて同じように考察を行えば、 $\psi(x, y)$ の調和展開に出てくる S の既約表現に制限を与える式として

$$D_{ps}^{(m)}(Q_i)\psi_{pq}^{(m)} + T_i \psi_{sq}^{(m)} - J_i \psi_{sq}^{(m)} = 0 \quad (3.112)$$

が得られる。 ψ の調和展開に現れる S の既約表現は、部分群 R の表現に制限したものが (2.95) の r_i と (2.96) の σ_i の直積表現 $r_i \times \sigma_i$ になるものである。

各場に共通して、調和展開に寄与する R の既約表現はその行が R の表現に対応する。

また、(3.107),(3.109),(3.112) と (2.83),(2.81),(2.91) を比較すると、CSDR 法で得られた S 対称場は調和展開の S の自明な表現 ($D^{(m=0)}(L(y)) = 1$) の係数となることがわかる。なぜならこのとき (3.107),(3.109),(3.112) は (2.83),(2.81),(2.91) に帰着するからである。

・質量についての考察

調和展開について調べたことを利用して各場の質量を考察する [20]。

() ゲージ場の質量

ゲージ場の質量を調べるために Yang-Mills 方程式

$$D^\nu F_{\mu\nu} + D^\alpha F_{\mu\alpha} = 0, \quad D^\mu F_{a\mu} + D^b F_{ab} = 0$$

に含まれる場を調和展開する。注意として、今は場のゆらぎを考えるために $y = 0$ で考えていないので $D_a = \bar{\partial}_a - [A_a, \cdot]$ となる。ここで、 $\bar{\partial}_a = \partial_a + e_a^\alpha e_\alpha^i Q_i$ は接空間の回転に対する共変微分を表す。そのとき場のゆらぎの 1 次までとると

$$-\partial_\mu \partial^\mu \bar{A}_a - \nabla_b \nabla^b \bar{A}_a + [\nabla^b, \nabla_a] \bar{A}_b - [\bar{A}^b, F_{ab}^B] = 0 \quad (3.113)$$

$$-\partial_\nu \partial^\nu A_\mu - \nabla_b \nabla^b A_\mu = 0 \quad (3.114)$$

となる。ここで $\nabla_a = \bar{\partial}_a - [A_a^B, \cdot]$ である。これらの式において第 2 項以降が A_a, A_μ の質量を与える。そこで、 ∇_a の調和展開への作用を考える。まず、(2.26) 式から得られる関係 $\partial_a L(y) = (Q_a + e_a^\alpha e_\alpha^i) L(y)$ を利用して

$$\partial_a D^{(m)}(L(y)) = D^{(m)}(Q_a L(y)) + e_a^\alpha e_\alpha^i D^{(m)}(Q_i L(y)) \quad (3.115)$$

という関係式が得られる。この式と (3.107), (3.109), (3.112) の関係を用いると一般に

$$\nabla_a D^{(m)}(L(y)) = D(Q_a L(y)) \quad (3.116)$$

となることがわかる。したがって、(3.114) 式の左辺第 2 項から

$$\begin{aligned} \nabla_b \nabla^b D_{pq}^{(m)}(L(y)) a_{\mu pq}^{(m)}(x) &= D_{pq}^{(m)}(Q_b Q^b L(y)) a_{\mu pq}^{(m)}(x) \\ &= [C_S(D^{(m)}) - C_R(\mathfrak{D})] D_{pq}^{(m)}(L(y)) a_{\mu pq}^{(m)}(x) \end{aligned} \quad (3.117)$$

が得られる。ここで $\mathfrak{D}$ は a_μ がそれによって変換される ((3.109) に従って) R の表現。また、 $C_S(D^{(m)}), C_R(\mathfrak{D})$ は表現 $D^{(m)}, \mathfrak{D}$ に対する S, R の 2 次の Casimir である。ここで R は S の部分群より、

$$C_S(D^{(m)}) \geq C_R(\mathfrak{D}) \geq 0 \quad (3.118)$$

となる。よって $a_{\mu pq}^{(m)}$ の質量は

$$m^2 a_{\mu pq}^{(m)} = [C_S(D^{(m)}) - C_R(\mathfrak{D})] a_{\mu pq}^{(m)}(x) \quad (3.119)$$

で与えられる。ここで今の議論全体で S/R のスケールは考えていないことに注意する。(3.118) 式において等号は自明な表現にたいしてのみ成り立つので、CSDR 法によって得られるゲージ場はマスレスとなることがわかる。

同様に、 $\phi_{a pq}^{(m)}$ の質量は (3.113) 式の第 2, 3, 4 項から (3.116) を用いて得られる

$$\begin{aligned} -\nabla_b \nabla^b D_{pq}^{(m)}(L(y)) \phi_{a pq}^{(m)} + [\nabla^b, \nabla_a] D_{pq}^{(m)}(L(y)) \phi_{b pq}^{(m)} - [D_{pq}^{(m)}(L(y)) \phi_{pq}^{(m)b}, F_{ab}^B] \\ = -C_S(D^{(m)}) D_{pq}^{(m)}(L(y)) \phi_{pq}^{(m)} + [[D_{pq}^{(m)}(L(y)) \phi_{a pq}^{(m)}, J_i] J^i] \end{aligned} \quad (3.120)$$

によって与えられる。すなわち $\phi_{apq}^{(m)}$ の質量は

$$m^2 \phi_{apq}^{(m)} = C_S(D^{(m)})\phi_{apq}^{(m)} - [[\phi_{apq}^{(m)}, J_i]J^i] \quad (3.121)$$

と得られる。これはタキオンの存在を表している。CSDR で得られる場合は S の自明な表現に属するのでタキオンとなる。このことは sec3.2 で得られた結果である、S/R が対称の場合には常に自発的対称性の破れが起こるという事実に対応している。

・フェルミオンの質量について

次にフェルミオンの質量について考察する。高次元における Lagrangian のフェルミオンセクターは (3.11) で与えられ、2つの部分に分けることができる。第一項目は4次元において通常の運動項となり、第二項目が4次元における質量項となる。

$$L_M = -\frac{1}{2}i\bar{\psi}\Gamma^a(\partial_a - \frac{1}{2}f_{ibc}e_\gamma^i e_a^\gamma \Sigma^{bc} - A_a^B)\psi = -\frac{1}{2}i\bar{\psi}\Gamma^a\nabla_a\psi \quad (3.122)$$

そこで質量演算子 $M = i\Gamma^a\nabla_a$ を2乗したもののスピノル場への作用を計算する。

$$M^2\psi = -\Gamma^a\Gamma^b\nabla_a\nabla_b = (\nabla^a\nabla_a - \Sigma^{ab}[\nabla_a, \nabla_b])\psi \quad (3.123)$$

ここで、 ∇^a の交換子を計算すると、

$$[\nabla_a, \nabla_b]\psi = -F_{ab}^B - \frac{1}{2}R_{abcd}\Sigma^{cd}\psi \quad (3.124)$$

となる。さらに (3.124) を (3.123) に代入して計算すれば

$$M^2\psi = (D^a D_a + \Sigma^{ab}F_{ab}^B - \frac{1}{4}R)\psi \quad (3.125)$$

を得る。また、(3.112),(3.116) を用いてゲージ場の場合と同様の計算を行うと

$$M^2\psi = [C_s(D^{(m)}) - C_R(\mathfrak{D}) + C_R(\sigma)]\psi \quad (3.126)$$

が得られる。ここで σ は $SO(d)$ のスピノル表現を表す。CSDR により得られる場合は調和展開の自明な表現に属するので、この式からマスレスになることを示すことができる。

これまでの議論は振率のない対称な S/R について行ったが、S/R が非対称であるか S/R に振率が導入された場合にはフェルミオンに0でない幾何学的質量項が現れることに注意しよう。その場合のフェルミオン質量項は

$$\begin{aligned} L_M &= -\frac{1}{2}i\bar{\psi}\Gamma^a(\partial_a - \frac{1}{2}f_{ibc}e_\gamma^i e_a^\gamma \Sigma^{bc} - \frac{1}{2}G_{abc}\Sigma^{bc} - A_a^B)\psi \\ &= -\frac{1}{2}i\bar{\psi}\Gamma^a\nabla_a\psi + \bar{\psi}V\psi \end{aligned} \quad (3.127)$$

と与えられる。ここで

$$V = \frac{1}{4}i\Gamma^a G_{abc}\Sigma^{bc} \quad (3.128)$$

である。また、

$$G_{abc} = D_{abc} + \Sigma_{acb} \quad (3.129)$$

であり、 D_{abc}, Σ_{acb} はそれぞれ (2.52), (2.61) で与えられる [21]。この V について高次元が 10 次元の場合に考察する。 V は 6 次元カイラリティ演算子と反可換であり、 $SO(6)$ の中の R 生成子 $T_i = -\frac{1}{2}f_{abc}\Sigma^{bc}$ と可換であることが具体的計算により示すことができる。このことより、ゼロでない V の要素は $SO(6)$ の既約スピノル表現 $4, \bar{4}$ の R の下での分解で共通して現れる表現に対応する。共通して現れる表現はシングレットなので、 $4, \bar{4}$ の中の R シングレットは幾何学的な質量を持つことになる。このことは現象論的に興味深い示唆を与える。例えば超対称的な理論ではゲージノが幾何学的質量を持つことになる。

以上の議論から一部の場合を除けば CSDR 法により得られる 4 次元でのフェルミオンはマスレスとなる。

4 統一モデルの構築

これまでの章では CSDR 法の基礎と、CSDR 法によって高次元時空でのフェルミオンと結合した Yang-Mills 理論から得られる 4 次元時空における理論の概要を見た。さらに、そうして得られた 4 次元時空における理論には Higgs セクターと湯川セクターが含まれており、それらは高次元時空における Yang-Mills セクターの余剰空間成分を持つ項及びゲージ場とフェルミオンの結合項の余剰空間成分項から得られることを示した。また、その際に 4 次元での Higgs 場は高次元でのゲージ場の余剰空間成分を起源として与えられた。したがって、CSDR 法を用いることで 4 次元時空でのゲージ場と Higgs 場の高次元時空における統一的記述をするモデルが構築されうる。本章ではこの CSDR 法を用いた統一モデルの構築についての議論を行う。まず、sec4.1 実際の物理を記述しうるモデルの構築に要求される事柄を考察する。sec4.2 統一モデル構築において余剰空間として用いられうる coset space S/R の候補を挙げる。また、sec4.3 ではこれまでに提唱されたモデルを紹介し、それを通して統一モデル構築における困難について議論する。そして、それ以下の章でそれらの困難を回避するための技法についての議論を行う。

4.1 統一モデル構築に向けて

この節では統一モデル構築において要求されるいくつかの事柄について議論を行う。素粒子モデルを構築することの目的は、それによって素粒子物理の記述を行うことである。一方で素粒子が関わる物理現象は、数 100Gev 以下のエネルギースケールにおいては標準模型によって矛盾なく記述される。ゆえに現実的なモデルの構築のためには、そのエネルギースケールにおいて標準模型が導かれることを要求せねばならない。よって CSDR 法によりモデルを構築する際にも、最終的に標準模型が導かれることが要求される。ここで、CSDR 法により構築されるモデルから標準理論が導かれる過程にはいくつかの場合が考えられる。その一つは CSDR 法により得られる 4 次元時空での理論が標準模型そのものになる場合である。あるいは、始めに CSDR 法により大統一理論 (GUT) が導かれ、その対称性の破れにより標準模型が導かれる場合も考えられる。また、その対称性の破れも Higgs 場による自発的な破れか、それ以外の場合に分けられる。それらの場合わけについての概念図を Fig4.1 に記した。

もちろん他にも様々な場合が考えられるが、本論文では主にこれら 3 つの場合について考える。そこで各場合に対するモデルを構築する際に、主に要求される事柄について考察する。

(a) の場合

この場合は CSDR 法により高次元時空でのゲージ理論から得られる 4 次元時空での理論が標準模型そのものになる。そのため CSDR 拘束式から制限される 4 次元時空でのゲージ場 H が、標準模型のゲージ対称性 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ にならねばならない。また、 $H=SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ に対しフェルミオンや Higgs 場が属す表現も標準理論と一致したものが出てこなくてはならない。特にフェルミオンは 4 次元時空においてカイラルフェルミオンとして現れる必要がある。また、Higgs セクターに入ってくる対称性の破れのスケールは電弱対称性の破れのスケールになることが要求される。

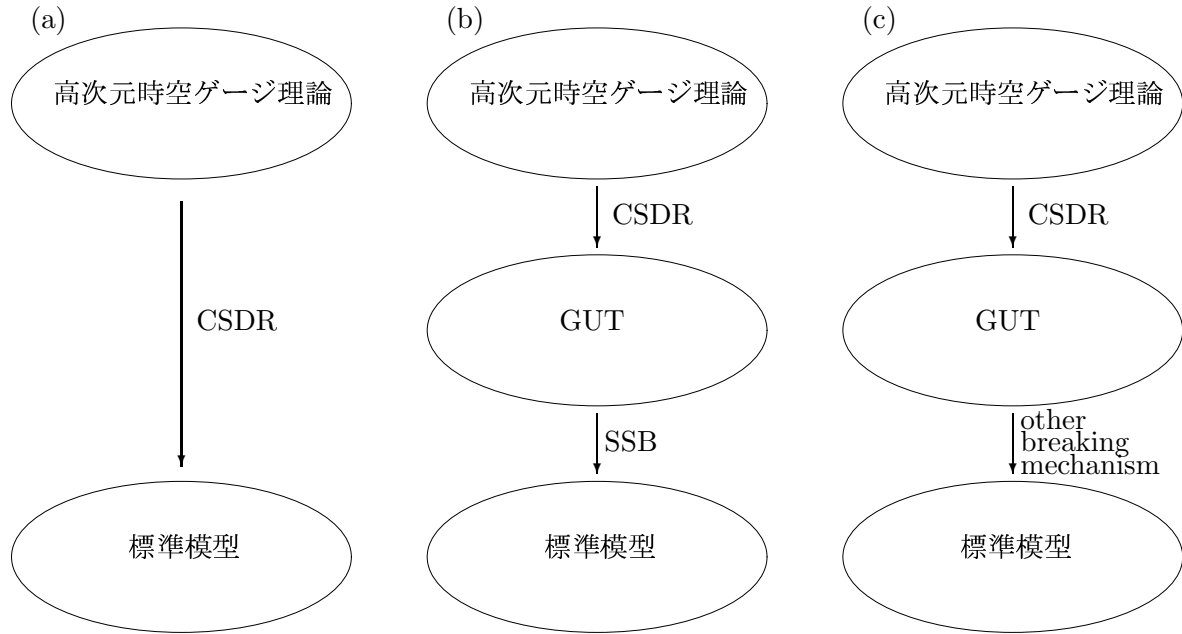


Fig4.1

(b) の場合

この場合は CSDR 法により、4次元時空において得られる理論は GUT となる。そのため CSDR 拘束式から制限される 4次元時空でのゲージ群 H は、GUT におけるゲージ統一群 ($SU(5)$, $SO(10)$, E_6 , etc) と一致しなくてはならない。また、フェルミオンや Higgs 場が属す統一群の表現も各統一群に対する GUT のものと一致するものが現れることが要求される。ゆえに、この場合もフェルミオンはカイラルフェルミオンとして 4次元時空に現れねばならない。また、Higgs セクターに入ってくるスケールには、統一群の破れのスケール ($\sim 10^{15} \text{Gev}$) と電弱対称性の破れのスケール ($\sim 100 \text{Gev}$) の階層性が現れることが要求される。

(c) の場合

この場合はほとんど (b) の場合と同じだが、統一群の対称性を破る機構が Higgs 場による自発的対称性の破れではないので、統一群を破るための Higgs 場が CSDR 法により得られなくても構わない。

ここで、CSDR 法により高次元時空でのゲージ理論から得られる 4次元時空における理論を決定するために、指定すべきことを整理する。それらを列挙すると、

- (1) 始めの高次元時空の次元数 D
- (2) 高次元時空でのゲージ群 G
- (3) S/R の構造 (S, R の指定)
- (4) R の G への埋め込み R_G
- (5) 高次元でフェルミオンが属す G の表現 F
- (6) S/R のスケール (半径)

となる。これまでの章で議論したように (2), (3), (4) により、4次元時空中におけるゲージ群 H と Higgs 場が属す H の表現が定まる。また、これに (5) を加えることでフェルミオンが属す H の表現も定まる。4次元時空中における Higgs セクターの構造は (3) により定まり、そこに入ってくるスケールは (6) の S/R のスケールから決まる。

すなわち CSDR 法により統一模型を構築するには上記の要求を満たすように、(1) から (6) を指定することが必要になる。このことにより、高次元時空中でとりうるゲージ群 G や、余剰空間としてとりうる S/R に制限がつけられる。例えば、sec3.3 で議論したように 4次元時空中でカイラルフェルミオンを得るためには高次元時空の次元数 D や S/R の構造に制限がつけられる。それらの制限を満たす S/R については sec4.2 で考察する。しかしながら、全ての要求を満たす (1) から (6) の指定は sec4.3 で考察するように困難である。そのため、模型構築のためにはいくつかの技法が必要となる。それらについては後の節で詳しく議論する。

4.2 Coset Space の候補

本節では CSDR 法による統一模型構築のために選ばれる S/R の候補について考察する。とりうる S/R は、カイラルフェルミオンを得るための条件によって、大きく制限される。sec3.3 で議論したように、4次元時空中でカイラルフェルミオンを得るためには高次元時空は偶数次元である必要がある。さらに、高次元時空中においてゲージ群 G に対するフェルミオンの表現 F としてベクトルの (左手型と右手型を同数含む) 表現を選ぶことができるためには、高次元時空の次元数 D が $D=4n+2$ であることが要求されることを見た。また、高次元時空中において Majorana 条件を課すためには F が実表現の場合は $D=8n+2$ 、 F が擬実表現の場合は $D=8n+6$ である必要がある。さらに、4次元時空中でカイラルフェルミオンを得ることができるためには、 S/R は $\text{rank}S=\text{rank}R$ を満たさなくてはならないことを見た。

我々は特に、高次元時空中でのフェルミオンの表現 F がベクトル的にとれる場合に注目する。つまり、高次元時空の次元数 $D=4n+2$ の場合を考える。このとき余剰空間である S/R の次元は $d=D-4=4n-2$ となる。ここで $D=6,10,14$ の場合について、 $d=2,6,10$ で $\text{rank}S=\text{rank}R$ を満たす S/R の候補を挙げる。

(1) $d=2$ の場合の $S/R[2]$

$d=2$ の場合の S/R の候補を table4.1 にまとめた。

S/R	$SO(2)$ ベクトル	$SO(2)$ スピノル
$SU(2)/U(1)$	$2 = (1) + (-1)$	(1)

table4.1

このように、 $\text{rank}S=\text{rank}R$ を満たす S/R は一つしか存在しない。 $SO(2)$ ベクトル、スピノルと記された列は、それらの R の下での分解を表している。また、 $SU(2)/U(1)$ は対称な coset space である。

(2) $d=6$ の場合の $S/R[13]$

この場合の S/R の候補については table4.2 にまとめた。

S/R	SO(6) ベクトル	SO(6) スピノル
Non-Symmetric spaces		
(1)SU(3)/U(1) × U(1)	6=(a,c)+(b,d)+(a+b,c+d) +(-a,-c) +(-b,-d)+(-a-b,-c-d)	4=(0,0)+(a,c)+(b,d) +(-a-b,-c-d)
(2)Sp(4)/(SU(2) × U(1)) _{non-max}	6=1(2)+1(-2)+2(1)+2(-1)	4=1(0)+1(2)+2(-1)
(3)G ₂ /SU(3)	6=3 + $\bar{3}$	4=1+3
Symmetric spaces		
(4)SO(7)/SO(6)	6	4
(5)SU(4)/SU(3) × U(1)	6=3(-2) + $\bar{3}$ (2)	4=1(3)+3(-1)
(6)Sp(4)/(SU(2) × U(1)) _{max}	6=3(-2) + $\bar{3}$ (2)	4=1(3)+3(-1)
(7)SU(3) × SU(2)/SU(2) × U(1) × U(1)	6=1(0,2a) +1(0,-2a)+2(b,0)+2(-b,0)	4=1(b,-a)+1(-b,-a)+2(0,a)
(8)Sp(4) × SU(2)/SU(2) × SU(2) × U(1)	6=(1,1)(2) +(1,1)(-2)+(2,2)(0)	4=(2,1)(1)+(1,2)(-1)
(9)(SU(2)/U(1)) ³	6=(2a,0,0) +(-2a,0,0)+(0,2b,0) +(0,-2b,0)+(0,0,2c)+(0,0,-2c)	4=(a,b,c)+(-a,-b,c) +(-a,b,-c)+(a,-b,-c)

table4.2

rankS=rankR を満たす 6 次元 S/R は以上の 9 つである。また、対称な S/R と非対称な S/R を分けてまとめた。ここで、(2), (6) の SU(2) × U(1) についている添え字 max, non-max は maximal, non-maximal の略であり、Sp(4) の最大正則部分群となる SU(2) × U(1) 部分群を選んだか否かを区別している。

(3)d=10 の場合の S/R

この場合の S/R の候補については table4.3 にまとめた。

table4.3 におけるの 33 個の S/R が d=10 のときに rankS=rankR を満たす coset space である。

我々はこれらの S/R を用いて統一模型の構築を試みる。

4.3 統一模型構築における問題点

この節では CSDR 法を用いて現実的な統一模型を構築する上で直面する問題点について議論する。

まず問題となるのが、4 次元時空において標準模型もしくは GUT と一致するゲージ群とそれに対する場の表現を得ることが難しいことである。特に、CSDR 法により得られる 4 次元時空における理論で、正しく自発的対称性の破れを与える Higgs 場の表現を得ることと同時に望ましいフェルミオンの表現を得ることは困難である。以下の表でこれまでに考えられた模型の例を挙げる [2,12,13,22,23]。

Non – Symmetricspaces
(1) $SU(4)/SU(2) \times U(1) \times U(1)$
(2) $G_2/SU(2) \times U(1)$
(3) $Sp(6)/Sp(4) \times U(1)$
(4) $Sp(4) \times SU(2)/[U(1) \times U(1)] \times U(1)$
(5) $G_2 \times (SU(2))^2/SU(3) \times (U(1))^2$
(6) $SU(3) \times (SU(2))^2/[U(1) \times U(1)] \times (U(1))^2$
(7) $Sp(4) \times (SU(2))^2/[SU(2) \times U(1)]_{\text{non-max}} \times (U(1))^2$
(8) $G_2 \times SU(3)/SU(3) \times [SU(2) \times U(1)]$
(9) $SU(3) \times SU(3)/[U(1) \times U(1)] \times [SU(2) \times U(1)]$
(10) $Sp(4) \times SU(3)/[SU(2) \times U(1)]_{\text{non-max}} \times [SU(2) \times U(1)]$
(11) $G_2 \times Sp(4)/SU(3) \times [SU(2) \times SU(2)]$
(12) $SU(3) \times Sp(4)/[U(1) \times U(1)] \times [SU(2) \times SU(2)]$
(13) $Sp(4) \times Sp(4)/[SU(2) \times U(1)]_{\text{non-max}} \times [SU(2) \times SU(2)]$
(14) $G_2 \times SU(2)/SU(2) \times SU(2) \times U(1)$
(15) $SU(4) \times SU(2)/SU(2) \times SU(2) \times U(1)$
Symmetricspaces
(16) $SO(11)/SO(10)$
(17) $SU(6)/SU(5) \times U(1)$
(18) $SU(5) \times SU(2)/[SU(4) \times U(1)] \times U(1)$
(19) $SO(9) \times SU(2)/SO(8) \times U(1)$
(20) $Sp(6) \times SU(2)/[Sp(4) \times SU(2)] \times U(1)$
(21) $SU(4) \times (SU(2))^2/[SU(3) \times U(1)] \times (U(1))^2$
(22) $SO(7) \times (SU(2))^2/SO(6) \times (U(1))^2$
(23) $Sp(4) \times (SU(2))^2/[SU(2) \times U(1)]_{\text{max}} \times (U(1))^2$
(24) $SU(4) \times SU(3)/[SU(3) \times U(1)] \times [SU(2) \times U(1)]$
(25) $SO(7) \times SU(3)/SO(6) \times [SU(2) \times U(1)]$
(26) $Sp(4) \times SU(3)/[SU(2) \times U(1)]_{\text{max}} \times [SU(2) \times SU(2)]$
(27) $SU(4) \times Sp(4)/[SU(3) \times U(1)] \times [SU(2) \times SU(2)]$
(28) $SO(9) \times Sp(4)/SO(6) \times [SU(2) \times SU(2)]$
(29) $Sp(4) \times Sp(4)/[SU(2) \times U(1)]_{\text{max}} \times [SU(2) \times U(1)]$
(30) $(SU(3))^2 \times SU(2)/[SU(2) \times U(1)]^2 \times U(1)$
(31) $(Sp(4))^2 \times SU(2)/[SU(2) \times SU(2)]^2 \times U(1)$
(32) $Sp(4) \times SU(3) \times SU(2)/[SU(2) \times SU(2)] \times [SU(2) \times U(1)] \times U(1)$
(33) $SU(3) \times (SU(2))^3/[SU(2) \times U(1)] \times (U(1))^3$
(34) $Sp(4) \times (SU(2))^3/[SU(2) \times SU(2)] \times (U(1))^3$
(35) $(SU(2)/U(1))^5$

table4.3

まず、table4.4 ではそれらの模型に対する入力因子である、高次元時空でのゲージ群 G 、 S/R 、 G への R の埋め込み方、高次元でフェルミオンの属す G の表現 F についてまとめた。

	G	S/R	$H \times \underline{R_G}$	F
(1)	$SU(3)$	$SU(2)/U(1)$	$SU(3) \supset SU(2) \times \underline{U(1)}$	
(2)	$SU(5)$	$G_2/SU(3)$	$SU(5) \supset \underline{SU(3)} \times SU(2) \times U(1)$	75
(3)	E_7	$SU(4)/SU(3) \times U(1)$	$E_7 \supset SU(6) \times SU(3)$ $\supset SU(5) \times \underline{U(1)} \times \underline{SU(3)}$	133
(4)	E_8	$Sp(4) \times SU(2)/SU(2) \times SU(2) \times U(1)$	$E_8 \supset E_7 \times SU(2)$ $\supset SO(12) \times SU(2) \times SU(2)$ $\supset SO(10) \times \underline{U(1)} \times \underline{SU(2)} \times \underline{SU(2)}$	248
(5)	E_8	$SU(3) \times SU(2)/SU(2) \times U(1) \times U(1)$	$E_8 \supset SO(10) \times SO(6)$ $\supset SO(10) \times \underline{SU(2)} \times \underline{U(1)} \times \underline{U(1)}$	248
(6)	E_8	$(SU(2)/U(1))^3$	$E_8 \supset E_7 \times SU(2) \supset E_7 \times U(1)$ $\supset E_6 \times U(1) \times U(1)$ $\supset SO(10) \times \underline{U(1)} \times \underline{U(1)} \times \underline{U(1)}$	248
(7)	E_8	$SO(7)/SO(6)$	$E_8 \supset SO(10) \times \underline{SO(6)}$	248
(8)	E_8	$Sp(4)/(SU(2) \times U(1))_{\text{non-max}}$	$E_8 \supset E_6 \times \underline{SU(2)} \times \underline{U(1)}$	248

table4.4

(1) で F の欄が書かれていないのは、特に定まった F が考えられていなかったからである。table4.5 ではこれらの入力に対する出力因子である、4次元時空でのゲージ群 H 、 H の下での Higgs 場とフェルミオン場の表現についてまとめた。

これらの模型の利点と問題点は次のように挙げられる。

(1) は標準模型の電弱対称性を自発的に破ることができる Higgs 場が導かれる。しかし、フェルミオンに正しくハイパーチャージを割り当てることができない。また、標準模型の $SU(3)$ 対称性も出てこない。

(2) は標準模型の電弱対称性を破る Higgs 場とレプトンに対する表現は正しく得られる。しかし、この場合も $SU(3)$ 対称性が現れない。

	H	Higgs 場の属す H の表現	フェルミオン場の属す H の表現
(1)	$SU(2) \times U(1)$	$2(1), 2(-1)$	
(2)	$SU(2) \times U(1)$	$2(1), 2(-1)$	$1(0)_L, 1(2)_L, 2(-1)_L$
(3)	$SU(5) \times U(1)$	$\bar{5}(-2), 5(2)$	$\bar{5}(3)_L, 10(-1)_L$
(4)	$SO(10) \times U(1)$	$10(0), 10(2), 10(-2)$	$16(1)_L, \overline{16}(-1)_L$
(5)	$SO(10) \times (U(1))^2$	$10(0, 2), 10(0, -2), 10(1, 0), 10(-1, 0)$	$16(-1, -1)_L, 16(1, -1)_L, 16(0, 1)_L$
(6)	$SO(10) \times (U(1))^3$	singlet	$16()$
(7)	$SO(10)$	10	16
(8)	$E_6 \times U(1)$	$27(-2), \overline{27}(2), 27(1), \overline{27}(-1)$	$27(-2)_L, 27(1)_L, 1(0)_L$

table4.5

(3) はフェルミオンの $SU(5)$ に対する表現は、 $SU(5)$ GUT に一致したものが得られる。しかし、 $SU(5)$ 対称性を自発的に破り、標準模型を導く Higgs 場が得られない。また、 $SU(5)$ GUT にはない $U(1)$ 対称性も出てきてしまう。

(4) は $SO(10)$ 大統一理論におけるフェルミオンの表現は得られるが、この場合も $SO(10)$ 対称性を自発的に破り標準模型を導く Higgs 場が得られない。また、この場合も余分な $U(1)$ 対称性が現れる。

(5),(6) の場合も (4) の場合とほぼ同じ状況であり、適切な Higgs 場の表現を得ることができない。(7),(8) の場合も同様に Higgs 場によって $SO(10)$ 対称性が破られた際に、標準模型を得ることができない。

以上の例からもわかるように、最終的に標準模型に対する Higgs 場とフェルミオンの表現を正しく得るのは困難である。特に、始めに CSDR 法によって GUT を導く場合には、Higgs 場による自発的対称性の破れにより標準模型を導くことは難しい。そのため、sec4.4 で議論するように大統一理論のゲージ対称性を破るメカニズムとして、Higgs 場による自発的対称性の破れとは異なるメカニズムを用いたモデルの構築が考えられている。

また、CSDR 法によるモデル構築に共通した問題として、Higgs 場による自発的対称性の破れのスケールをいかに適切なものにするかという問題がある。CSDR 法によって得られる Higgs セクターに入ってくるスケールは余剰空間 S/R のスケールからのみ得られる。そのため余剰空間を物理的空間ととらえて、そのコンパクト化のスケールを重力のスケール ($\sim O(M_{Plank} \sim 10^{19}(\text{Gev}))$) に関連づけると Higgs セクターに入るスケールが大きくなりすぎるという問題がある。特に電弱対称性の破れのスケール ($\sim O(100\text{Gev})$) とは大きくかけ離れてしまうことになる。この問題を S/R に複数のスケールを導入することで解決しようという試みがある。これについては sec4.5 で見る。

4.4 統一模型構築のための技法 1 : Wilson flux breaking mechanism

前節では CSDR 法を用いた統一模型の構築における問題点を示した。その一つとして、CSDR 法により 4 次元時空においてまず GUT を得る場合に、Higgs 場による自発的対称性の破れにより GUT から標準模型を導くことが困難であることが挙げられた。少なくともこれまでに挙げた例では GUT から標準模型を導くことができなかった。この問題を解決するために、GUT のゲージ対称性を Higgs 場による自発的対称性の破れとは異なるメカニズムにより破られるとすることが提唱されている。そのために用いられる技法として細谷機構もしくは Wilson flux breaking mechanism による対称性の破れが挙げられる [24,25]。本節では、この Wilson flux breaking mechanism について議論する。

4.4.1 Wilson flux breaking mechanism

ここでは Wilson flux breaking mechanism について、その概要を見る [24]。このメカニズムを適用するためには、これまでに考えてきた単連結な余剰空間 B_0 を持つ高次元時空 $M^4 \times B_0$ ($B_0 = S/R$) の代わりに、単連結でない multiply connected な余剰空間 B を持つ高次元時空 $M^4 \times B$ を扱う必要がある。我々は multiply connected な余剰空間 B として $B_0 = S/R$ を用いた $B = B_0/F^{S/R}$ を用いる。ここで $F^{S/R}$ は自由な作用をする B_0 の離散対称群である。また、 $F^{S/R}$ が B_0 に自由な作用をするとは、 $F^{S/R}$ の元のうち B_0 の任意の点に作用したときに、その点を動かさないものが単位元だけであることを意味する。

余剰空間が $B = B_0/F^{S/R}$ の形の multiply connected な空間であるとき、空間上に空いた穴のために一点に縮めることのできない閉じた径路が $F^{S/R}$ の各元に対し存在する。その径路の存在により、4 次元時空でのゲージ群 H の元として、 $F^{S/R}$ の各元 $g \in F^{S/R}$ に対応した元 U_g が取り出せる。その元 U_g は Wilson ループにより

$$U_g = P \exp \left(-i \int_{\gamma_g} T^a A_M^a(X) dX^M \right) \quad (4.1)$$

と表される。ここで $A_M^a(X)$ はゲージ群 H に対するゲージ場の真空期待値を表し、 T^a は H の生成子である。また、 γ_g は $F^{S/R}$ の元 g に対応した径路であり、 P は path ordering を意味する。径路 γ_g は離散対称群 $F^{S/R}$ の元 g に対応しているので、一点に縮めることができないように選ばれている。そのため A_M^a がいたるところでゼロでも $U_g \neq 1$ となる。また、このとき上記のように得られる U_g により生成される、 $F^{S/R}$ の H 上への準同型写像 T^H が存在する。

以上のことが得られたとき Wilson flux breaking mechanism が次のように働く。まず、 B 上の場 $f(X)$ を考える。 $f(X)$ は明らかに任意の $g \in F^{S/R}$ に対し

$$f(g(X)) = f(X) \quad (4.2)$$

を満たすことが要求される。なぜなら B 上では g により移り変わる点同士が同一視されるからである。しかし、ゲージ群 H の存在の下で我々はこの要求を一般化し、(4.2) の代わりに

$$f(g(x)) = U_g f(x) \quad (4.3)$$

を満たすことを要求する。そして、このとき真空において保たれるゲージ対称性が制限される。真空においては $A_\mu^a = 0$ であるので、これを保ち真空を不変にするためには真空のゲージ変換は定数行列 V によって表されねばならない。一方で場のゲージ変換 $f \rightarrow Vf$ が (4.3) と矛盾しないためには、任意の $g \in F^{S/R}$ に対し

$$[V, U_g] = 0 \quad (4.4)$$

である必要がある。従って、真空で破れずに残る H の部分群は T^H の centralizer $C_H(T^H)$ となる。また、(4.3) を満たすためには物質場は対角和

$$F^{S/R} \oplus T^H \quad (4.5)$$

の下で不変でなければならない。

4.4.2 S/R 上の離散対称群

Wilson flux breaking mechanism が働くためには、単連結な余剰空間 $B_0 = S/R$ の代わりに multiply connected な $B = B/F^{S/R}$ を考える必要がある。ここで $F^{S/R}$ は S/R に自由な作用をする離散対称群だった。そこで、ここでは $\text{rank} S = \text{rank} R$ を満たす S/R に対して選ぶことができる $F^{S/R}$ について議論する [26]。

上述した条件をみたす $F^{S/R}$ には大きく分けて 2 種類ある。それらは

(1) S の中心 $Z(S)$ 、またはその部分群

(2) $W = W_S/W_R$ (W_S, W_R はそれぞれ S, R の Weyl 群)

である。以下ではこの 2 種類についてそれぞれ考察していく。

(1) $Z(S)$ またはその部分群について

$Z(S)$ は S/R の元に対し自由な作用をするので、 $F^{S/R}$ として用いることができる。また、 S の随伴表現 $\text{adj} S$ の R の下での分解を考えたとき、全ての R の表現は $Z(S)$ の作用により自分自身に変換される。このことは $Z(S)$ が R と可換であることから明らかである。

フェルミオンを導入するためには $Z(S)$ を $SO(d)$ に埋め込む必要がある。中心 $Z(S)$ が Z_2 であるか、もしくは Z_S の Z_2 部分群に興味があるなら $SO(d)$ の中の離散対称群である $Z(SO(d)) = Z_2$ に埋め込めばよい。このとき、 $SO(d)$ ベクトルとスピノルの分解で現れる R の表現はすべて Z_2 により自分自身に変換される。

(2) $W = W_S/W_R$ について

まず、 W が S/R に自由な作用をする離散対称群であることを示す。そこで、Lie 群 S を考える。

Lie 群 S とその Lie 代数に対する Cartan 部分代数や Weyl 群の表記は次のように比較される。

	Cartan 部分代数	Weyl 群
Lie 代数	Cartan 部分代数	ルート空間での鏡映とその積による群
Lie 群	$\text{maximal torus (maximal Abelian subgroup)}$	$W_S = N(A)/A$ ($N(A) : S$ の中の A の normalizer)

ここで Weyl 群 $W_S = N(A)/A$ は S/A に自由な作用をすることが知られている。また、今考えた

い S/R は $\text{rank} S = \text{rank} R$ を満たすものであり、 A を $A \subset R \subset S$ と選ぶことができる。したがって W_S から R の Weyl 群 W_R を抜き出した $W = W_S/W_R$ は S/R に自由な作用をする。なぜなら、 R/A に W_R は自由な作用をするので $(S/A)/(R/A) = S/R$ に対し $W = W_S/W_R$ は自由な作用をするはずだからである。

次に W_S の R の表現への作用を考える。 S 随伴表現 $\text{adj} S$ の R の下での分解で現れる R の表現への W の作用は一般に非自明である。そこで Lie 群 R の自己同型写像を考えると、それは R の内部自己同型写像と外部自己同型写像の半直積で表される。ここで、内部自己同型写像は $T \rightarrow gTg^{-1} \quad g \in R$ の形の変換による写像であり、固定された Cartan 基底では R の Weyl 群 W_R となる。また、外部自己同型写像は $T \rightarrow gTg^{-1} \quad g \in R$ の形で書けない変換による写像であり、 R の dynkin 図の対象性 Γ となる。よって、 W は W_R を含まないので、その作用は R の外部自己同型になる。

ここで W による R の表現の変換を具体例を挙げて調べる。 S/R としては $G_2/SU(3)$ を考える。このとき G_2 の随伴表現の $SU(3)$ の下での分解は

$$G_2 \subset SU(3) \quad 14 = 8 + 3 + \bar{3} \quad (4.6)$$

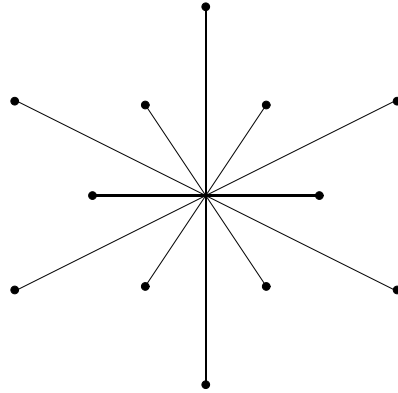
と与えられる。また、 G_2 のルートはそれぞれ

() 2つの0ルート

() $e_i - e_j \quad i \neq j = 1, 2, 3 \rightarrow$ () と合わせると $SU(3)$ のルート図を作り、(4.6) の分解の8に対応

() $\pm(3e_i - e_1 - e_2 - e_3) \quad i = 1, 2, 3 \rightarrow$ (4.6) の分解の $3, \bar{3}$ に対応

である。ここで e_i はルート空間の直交基底を表す。また、 G_2 のルート図は



と書ける。ここで長い方のルートが () のルートに対応し、短いほうのルートが (), () のルートに対応している。この長いほうのルートに直行した面についての鏡映が W に対応し、 W は Z_2 に相当する。そして、 W の作用により 3 と $\bar{3}$ が入れ替わる。この作用は W が R の外部自己同型写像であることを示している。また、 $SO(6)$ 内への R の埋め込みを見ると、この R の表現に対する変換性を保つためには $SO(6)$ の外部自己同型写像を考慮に入れなくてはならない。今の例では $SO(6)$ のスピノルと反スピノルは $SU(3)$ の下で

$$SO(6) \subset SU(3) \quad 4 = 1 + 3, \quad \bar{4} = 1 + \bar{3} \quad (4.7)$$

と分解される。ここで、 W の作用によって $SU(3)$ の 3 と $\bar{3}$ が入れ替わるので、結果的に $SO(6)$ の 4 と $\bar{4}$ が入れ替わることになる。しかし、 $SO(6)$ の外部自己同型写像は Z_2 であるので、 W が Z_2 よりも大きな群である場合には変換性は保たれない。

他の 6 次元 S/R に自由な作用をする様々な離散群と、それによる $SO(6)$ ベクトルとスピノルの変換性を table4.6 に記す。

4.4.3 Wilson flux breaking mechanism による GUT の破れ

ここでは実際に Wilson flux breaking mechanism を用いて GUT をどのように破ることができるのか調べる [2]。その上で sec4.3 で挙げた、CSDR 法により GUT を得る場合のモデルの例をいかに改善することができるか議論する。

例)

まず、sec4.3 の (2) の例に Wilson flux breaking mechanism を適用した場合にどうなるか詳しく見ていく。この例では $G=SU(5), B_0 = G_2/SU(3)$ であり、 $G=SU(5)$ への $R=SU(3)$ の埋め込みは、 $SU(5)$ の部分群への分解

$$SU(5) \supset SU(3) \times SU(2) \times U(1) \quad (4.8)$$

に現れる $SU(3)$ に $R=SU(3)$ を埋め込むことでなされる。したがって 4 次元でのゲージ群 $H = SU(2) \times U(1)$ となる。ここで、Wilson flux breaking mechanism を適用するために余剰空間を

$$B_0 = G_2/SU(3) \rightarrow B = B_0/Z_2^{S/R} \quad (4.9)$$

と単連結な B_0 から multiply connected な B に変更する。このとき $Z_2^{S/R}$ の $H = SU(2) \times U(1)$ への埋め込みは、 Z_2^H として H の中の $U(1)$ の離散的部分群を選ぶことで行う。その場合、破れずにのこるゲージ対称性は Z_2^H の centralizer なので $SU(2) \times U(1)$ のままである。

$Z_2^{S/R}$ の作用による $R=SU(3)$ ベクトルの変換性は table4.1 より $3 \leftrightarrow \bar{3}$ である。その結果として、生き残る Higgs 場は $Z_2^{S/R}$ の固有状態

$$2(1) \pm 2(-1) \quad \text{固有値} \pm 1 \quad (4.10)$$

を形成する。その理由は以下のように示せる。4 次元での Higgs 場が属す H の表現は $G=SU(5)$ の随伴表現の $H \times R_G$ の下での分解と、 $S = G_2$ の随伴表現の R の下での分解

$$\begin{aligned} SU(5) &\supset SU(3) \times SU(2) \times U(1) \\ 24 &= (8, 1)(0) + (1, 3)(0) + (\bar{3}, 2)(1) + (3, 2)(-1) + (1, 1)(0) \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$G_2 \supset SU(3), \quad 8 + 3 + \bar{3} \quad (4.12)$$

において、2 つの分解で $3, \bar{3}$ が一致する部分の H の表現が選ばれている。そのため $Z_2^{S/R}$ の作用により、

$$3 \leftrightarrow \bar{3} \rightarrow 2(1) \leftrightarrow 2(-1) \quad (4.13)$$

S/R	Z(S)	W	W に対する変換性
Non-Symmetric spaces			
(1)SU(3)/U(1) $\times$ U(1)	Z_3	S_3 Z_2 Z_2 Z_2	$(b, d) \leftrightarrow (-b, -d), \quad (a, c) \leftrightarrow (a + b, c + d),$ $(-a - b, -c - d) \leftrightarrow (-a, -d)$ $(b, d) \leftrightarrow (a + b, c + d), \quad (a, c) \leftrightarrow (-a, -c),$ $(-a - b, -c - d) \leftrightarrow (-b, -d)$ $(b, d) \leftrightarrow (-a, -c), \quad (a, c) \leftrightarrow (-b, -d)$ $(-a - b, -c - d) \leftrightarrow (a + b, c + d)$
(2)Sp(4)/(SU(2) $\times$ U(1)) _{non-max}	Z_2	Z_2	$1(2) \leftrightarrow 1(-2), \quad 2(1) \leftrightarrow 2(-1)$
(3)G ₂ /SU(3)	1	Z_2	$3 \leftrightarrow \bar{3}$
Symmetric spaces			
(4)SO(7)/SO(6)	Z_2	Z_2	$6 \leftrightarrow \bar{6}, \quad 4 \leftrightarrow \bar{4}$
(5)SU(4)/SU(3) $\times$ U(1)	Z_4	1	
(6)Sp(4)/(SU(2) $\times$ U(1)) _{max}	Z_2	Z_2	$3(2) \leftrightarrow \bar{3}(-2), \quad 1(3) \leftrightarrow 1(-3)$
(7)SU(3) $\times$ SU(2)/SU(2) $\times$ U(1) $\times$ U(1)	$Z_3 \times Z_2$	Z_2	$1(0, 2a) \leftrightarrow 1(0, -2a), \quad 2(0, a) \leftrightarrow 2(0, -a)$ $1(b, -a) \leftrightarrow 1(b, a), \quad (1, 2)(1) \leftrightarrow (1, 2)(-1)$
(8)Sp(4) $\times$ SU(2)/SU(2) $\times$ SU(2) $\times$ U(1)	$(Z_2)^2$	$(Z_2)^2$	$(1, 1)(2) \leftrightarrow (1, 1)(-2),$ $(2, 1)(1) \leftrightarrow (2, 1)(-1)$ $(1, 2)(1) \leftrightarrow (1, 2)(-1)$
(9)(SU(2)/U(1)) ³	$(Z_2)^3$	$(Z_2)^3$	$(2a, 0, 0) \leftrightarrow (-2a, 0, 0),$ $(0, 2b, 0) \leftrightarrow (0, -2b, 0)$ $(0, 0, 2c) \leftrightarrow (0, 0, -2c)$

table4.6

の変換が引き起こされるため、 $2(1) \pm 2(-1)$ が $Z_2^{S/R}$ の固有状態となる。しかしながら、この $Z_2^{S/R}$ の固有状態は定まった $U(1)$ に対する変換性を持たない。また、(4.5) のルールによると生き残る Higgs 場は $Z_2^{S/R} \oplus Z_2^H$ 不変であることが要求される。ここで、 $Z_2^H \subset U(1)$ と選んだので $2(1) \pm 2(-1)$ のどちらの状態も生き残らなくなり、4次元で Higgs 場が現れなくなってしまう。次にフェルミオンについて調べる。10次元において Weyl 条件をとったフェルミオンを考えたとして、4次元でフェルミオンが属す H の表現は $SO(6)$ スピノルの $R=SU(3)$ の下での分解と、10次元でフェルミオンが属す $G=SU(5)$ の表現 $F=75$ の $H \times R_G$ の下での分解

$$\begin{aligned} SU(5) &\supset SU(3) \times SU(2) \times U(1) \\ 75 &= (8, 1)(0) + (8, 3)(0) + (1, 1)(0) + (3, 1)(2) + (\bar{3}, 1)(-2) \\ &\quad + (3, 2)(-1) + (\bar{3}, 2)(1) + (6, 2)(1) + (\bar{6}, 2)(-1) \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$SO(6) \supset SU(3), \quad 4 = 1 + 3 \quad \bar{4} = 1 + \bar{3} \quad (4.15)$$

において $R=SU(3)$ の表現が一致する部分の H の表現として求まる。 $Z_2^{S/R}$ の下で $R=SU(3)$ の表現は $3 \leftrightarrow \bar{3}$ と変換されるので、 H の表現は

$$1(2) \leftrightarrow 1(-2), \quad 2(-1) \leftrightarrow 2(1), \quad 1(0) \leftrightarrow 1(0) \quad (4.16)$$

と変換される。よって $Z_2^{S/R}$ の固有状態と固有値は次のように与えられる。

固有状態	固有値
$1(2) \pm 1'(2)$	± 1
$1(0), 1'(0)$	1
$2(1) \pm 2'(1)$	± 1

ここで ' がついた方は右手型として得られた表現を左手型の共役をとったものと見直した表現である。ここで (4.5) の条件を課すと $Z_2^{S/R} \oplus Z_2^H$ 不変な状態のみ生き残るので、

$$1(2) + 1'(2), \quad 1''(0), \quad 2(1) - 2'(1) \quad (4.17)$$

の状態のみが生き残ることになる。ここで $1''(0) = 1(0) + 1'(0)$ とした。これらの状態が生き残ることは次のように示せる。 $Z_2^{S/R} \oplus Z_2^H$ 不変な状態であるとは、つまり (4.3) を満たす状態である。すなわち、今の例では

$$\psi(Z^{S/R} X) = Z_2^H \psi(X) \quad (4.18)$$

を満たす状態となる。今、 Z_2^H の作用は

$$Z_2^H \psi = \exp(i\pi Q) \psi \quad (4.19)$$

とする。ここで、 Q は $U(1)$ チャージである。よって、状態への $Z_2^{S/R}, Z_2^H$ の作用は

	$1(2) + 1'(2)$	$1(2) - 1'(2)$	$1(0)$	$1'(0)$	$2(1) + 2'(1)$	$2(1) - 2'(1)$
$Z_2^{S/R}$	$1(2) + 1'(2)$	$-1(2) + 1'(2)$	$1(0)$	$1'(0)$	$2(1) + 2'(1)$	$-2(1) + 2'(1)$
Z_2^H	$1(2) + 1'(2)$	$1(2) - 1'(2)$	$1(0)$	$1'(0)$	$-2(1) - 2'(1)$	$-2(1) + 2'(1)$

とまとめられる。したがって、この変換性から (4.17) の状態のみが生き残ることがわかる。以上の議論から、Majorana 条件を使うことなく 2 世代分のフェルミオンを 1 世代に落とすことができた。しかし、 $2(1) - 2'(1)$ の状態があるのでこれに Majorana 条件を課することはできない。一方、 $Z_2^{S/R}$ を H に埋め込まなかったとすると生き残るフェルミオンは

$$1(2) + 1'(2), \quad 1(0), \quad 1'(0), \quad 2(1) + 2'(1) \quad (4.20)$$

となるので、この場合は Majorana 条件を課することができる。

この例で見たように、 $F^{S/R}$ として W を選んだ場合には 4 次元で残る Higgs 場に強い制限がついてしまう。このことを回避するためには $F^{S/R}$ として S の中心 $Z(S)$ を選ばばよい。そこで、sec4.3 で見た例の一部が Wilson flux breaking mechanism によってどのように改善されるかを table4.7 にまとめた [2]。各番号は table4.4,4.5 と対応している。ここで、 F^H の欄では下線を引いた $U(1)$ に $F^{S/R}$ が埋め込まれる。また、これら全ての例において F^H の R への作用で R の基本表現が不変になるように、 F^H の埋め込み方が選ばれている。そのため (3),(4),(5) と (7) の 1 つ目の例では Higgs 場とフェルミオン場の属す表現は離散対称群の作用により不変となる。(3),(4),(5) の例では $SU(2)_L \times U(1)$ 対称性を $U(1)_{em}$ に破るのに適した Higgs 場の表現が得られる。(7) の例では $G \subset S$ であるので、Higgs 場による自発的対称性の破れの後に残るゲージ対称性がすぐに求められる。その結果、1 つ目の例では最後に残るゲージ群 $K = SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ と得られ、2 つ目の例では $K = SU(3) \times U(1)$ となる。また、(7) の 2 つ目の例では離散対称群として W を含み、その作用は table4.1 で与えられているようにスピノル表現 $4, \bar{4}$ を入れ替えるので、生き残るフェルミオンが $16_L, \bar{16}_R$ の線形結合となる。

以上の議論からわかるように、Wilson flux breaking mechanism を用いることによって、CSDR 法によって得られた GUT を標準模型に近い形に破ることが可能になった。よってこの手法を用いることによって、現実的な模型を作ることができる可能性が広がる。しかし、CSDR 法により得られた Higgs セクターによる自発的対称性の破れのスケールが電弱対称性の破れのスケールにとるのが難しいという問題は残る。この問題については次節で議論する。

4.5 統一模型構築のための技法 2 : 複数のスケールの導入

CSDR 法を用いることにより現実的な模型を構築するためには、CSDR 法によって得られる 4 次元時空における Higgs セクターによる自発的対称性の破れのスケールが現実即していなくてはならない。しかし、Higgs セクターに現れるスケールは余剰空間 S/R のスケールのみであり、余剰空間を物理的な空間とするならば電弱対称性の破れのスケールを得るのは難しい。

	$F^{S/R}$	F^H	破れずに残るゲージ群
(3)	$Z_2 \supset Z_4 = Z(SU(4))$	$H \supset SU(5)$ $\supset SU(3) \times SU(2) \times \underline{U(1)}$	$SU(3) \times SU(2) \times (U(1))^2$
(4)	$(Z_2 \times Z_2) = Z(Sp(4) \times SU(2))$	$H \supset SO(10)$ $\supset SU(5) \times \underline{U(1)}$ $\supset SU(3) \times SU(2) \times \underline{(U(1))^2}$	$SU(3) \times SU(2) \times (U(1))^3$
(5)	$(Z_3 \times Z_2) = Z(SU(3) \times SU(2))$	$H \supset SO(10)$ $\supset SU(5) \times \underline{U(1)}$ $\supset SU(3) \times SU(2) \times \underline{(U(1))^2}$	$SU(3) \times SU(2) \times (U(1))^4$
(7)	$Z_2 = Z(SO(7))$	$H = SO(10)$ $\supset SU(4) \times (SU(2))^2$ $\supset SU(3) \times \underline{U(1)} \times (SU(2))^2$	$SU(3) \times (SU(2))^2 \times U(1)$
(7)	$(Z_2 \times Z_2) = (Z(SO(7)) \times W)$	$H = SO(10)$ $\supset SU(5) \times \underline{U(1)}$ $\supset SU(3) \times U(2) \times \underline{(U(1))^2}$	$SU(3) \times SU(2) \times (U(1))^2$

table4.7

特に CSDR 法により始めに GUT を導く場合には、GUT の破れのスケールと電弱対称性の破れのスケールの 2 つのスケールを得ることは困難である。このことは GUT を Wilson flux breaking mechanism によって破る場合も同様である。なぜなら、Wilson flux breaking mechanism による対称性の破れのスケールは multiply connected な余剰空間上の穴のサイズからくるものであり、余剰空間のサイズからくるスケールと比べて 13 桁も異なるのは不自然だからである。この問題を解決するための技法として、我々は S/R に複数のスケールを導入することを考える。そのことにより Higgs ポテンシャルにも複数のスケールが現れるので、それらスケールの比次第では正しいスケールが得られる可能性がある。

sec2.2 で議論したように S/R に導入することができるスケールの数を知るためには $SO(d)$ ベクトル $\mathbf{v}$ の R の下での分解を調べればよい。S/R のスケールは $\mathbf{v}$ の R の下での分解で現れる R の自己共役な既約表現の数と互いに共役な既約表現のペアの数を足した数だけとることができる。そのため、スケールを複数とることができる S/R は非対称な coset space か対称な coset space の

直積空間に限られる。しかし、後で議論するように自発的対称性の破れの問題に応用できるのは S/R が非対称な場合に限られる。

具体例)

ここで具体例により、複数のスケールを導入した際の Higgs ポテンシャルを見る [2]。まず、高次元時空でのゲージ理論としては、10 次元でゲージ群 G が SU(5) のゲージ理論を考える。そして余剰空間としては、非対称な coset space $\text{Sp}(4)/(\text{SU}(2) \times \text{U}(1))_{\text{non-max}}$ を仮定する。また、 $G=\text{SU}(5)$ への $R=\text{SU}(2) \times \text{U}(1)$ の埋め込みは、 $\text{SU}(5) \supset \text{SU}(3) \times \text{SU}(2) \times \text{U}(1)$ の分解に現れる $\text{SU}(2) \times \text{U}(1)$ を R_G とみなすことで行う。よって、4 次元でのゲージ群 H は $\text{SU}(3) \times \text{U}(1)$ となる。

次に、4 次元時空において Higgs 場が属す H の表現を求める。CSDR ルールを適用するために $S = \text{Sp}(4)$ の随伴表現の $R = (\text{SU}(2) \times \text{U}(1))_{\text{non-max}}$ の下での分解と、 $G=\text{SU}(5)$ の随伴表現の $H \times R_G = \text{SU}(3) \times \text{SU}(2) \times \text{U}(1)$ の下での分解を比較する。

$$\text{SU}(5) \supset \text{SU}(3) \times \text{SU}(2) \times \text{U}(1)$$

$$24 = (8, 1)(0) + (1, 3)(0) + (\bar{3}, 2)(1) + (3, 2)(-1) + (1, 1)(0) \quad (4.21)$$

$$\text{Sp}(4) \supset (\text{SU}(2) \times \text{U}(1))_{\text{non-max}}, \quad 10 = 3(0) + 1(0) + 2(1) + 2(-1) + 1(2) + 1(-2) \quad (4.22)$$

これらを比較して CSDR ルールを適用すると、4 次元での Higgs 場が属す H の表現は $3(-1), \bar{3}(1)$ であり、合わせて複素表現となる。

ここで、Higgs ポテンシャルを求める。そのために、まず SU(5) の生成子の基底を (4.21) の分解に対応した基底にとり直す。

$$G_{\text{SU}(5)} = G_i, G_\alpha, G_{a\rho}, G^{a\rho}, G \quad (4.23)$$

ここで、 $i = 1, \dots, 8$ $\alpha = 1, 2, 3$ $\rho = 1, 2, 3$ $a = 1, 2$ である。これら生成子間の交換関係は tabel(C.4) にまとめてある。また、4 次元でのスカラー場 ϕ_a の添え字 a に対する基底も (4.22) の分解に対応した基底にとり直す。

$$\{\phi_a, a = 1, \dots, 10\} \rightarrow \{\phi_\alpha, \phi, \phi_+, \phi_-, \phi_{a+}, \phi^{a-}\} \quad (4.24)$$

この基底の下での Sp(4) 生成子とその交換関係は (C.6) 式と table(C.6) にまとめてある。これらを用いて CSDR 拘束式の解は

$$\phi_\alpha = G_\alpha, \phi = \sqrt{\frac{3}{5}}G, \phi_+ = 0, \phi_- = 0, \phi_{a+} = \beta^\rho G_{a\rho}, \phi^{a-} = \beta_\rho G^{a\rho} \quad (4.25)$$

と書ける。次に S/R の計量の形を調べる。 $\mathbf{v}$ の R の下での分解をみると 2 つの互いに共役な既約表現のペアに分解されるので、S/R には 2 つのスケールが導入できる。計量への異なるスケールの入り方は (2.39) 式によって決まり、今の場合は $1(2)+1(-2)$ に対応した部分と $2(1)+2(-1)$ に対応した部分でそれぞれ異なるスケールを導入することができる。(4.24) でとり直した基底の下

で計量の形は

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & R_1^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_1^{-2} & 0 \\ R_1^{-2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_1^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_2^{-2} \\ 0 & 0 & 0 & R_2^{-2} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

と与えられる。ここで R_1, R_2 は coset space の異なる 2 つの半径を表す。Higgs ポテンシャルの一般形 (3.13) に (4.26), (4.25) を代入して整理すると、Higgs 場 β による Higgs ポテンシャルの具体形

$$V(\phi) = \frac{12}{5} \left(\frac{3}{R_1^4} + \frac{1}{R_2^4} \right) + \frac{8}{R_1^2} \left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{2}{R_2^2} \right) \beta^\dagger \beta + \frac{24}{R_1^4} (\beta^\dagger \beta)^2 \quad (4.27)$$

が得られる。このポテンシャルの第 2 項の形からわかるように、S/R の 2 つのスケールの比によって対称性の破れ方が変わる。 $R_2 > \sqrt{2}R_1$ の場合は自発的対称性の破れは起こらず、 $R_2 < \sqrt{2}R_1$ の場合には自発的対称性の破れが起こる。そして、 $R_2 < \sqrt{2}R_1$ のときに 2 つのスケールの比を調整することによって、自発的対称性の破れのスケールも調整される。また、 $R_2 = \sqrt{2}R_1$ の場合には Higgs 場の 2 次の項がなくなり、自発的対称性の破れは量子補正によって得られる項を加えたときのみ起こりうる。この場合には自発的対称性の破れのオーダーパラメータに S/R のスケールが入ってこなくなるので、興味深い。このように S/R に複数のスケールを導入することで、S/R のスケールが GUT の破れのスケールぐらいの場合でも、電弱対称性の破れのスケールが得られる可能性が出てきた。

ここで、1 つ注意が必要である。先述したように S/R に複数のスケールを導入できる場合としては、S/R が非対称な場合と対称な S/R の直積空間である場合の 2 通りがあるが後者の場合は今の議論には使えない。なぜなら、対称な S/R の直積空間の場合には計量が各ブロックが対称な S/R に対応したブロック対角な形となり、ポテンシャルも対称な S/R に対するポテンシャルの和としてのみ得られるからである。

5 まとめ

本論文では CSDR 法を用いた統一模型構築の体系について概説した。その過程において、CSDR 法を用いることで標準模型におけるゲージセクターと Higgs セクターが、高次元時空中におけるゲージ理論のゲージセクターを起源として統一的に理解できうることを示した。その際に、Higgs 場は高次元時空中におけるゲージ場の余剰空間成分から得られた。また、標準模型における湯川結合項は、高次元時空中におけるフェルミオン場とゲージ場の余剰空間成分の結合項を起源として得られる可能性があることを見た。

CSDR 法の特徴としては、高次元時空中におけるゲージ理論から 4 次元時空中での理論を得る際に、場に対してゲージ変換と余剰空間の等長変換群による座標変換を混合する特殊な対称性を仮定するために、対称性からの制限が強いことである。そのため、高次元におけるゲージ群 G と余剰空間の構造を指定することにより、4 次元時空中における理論の構造を良く定めることができる。また、4 次元における理論に現れる自由パラメータは高次元におけるゲージ群のゲージ結合定数と余剰空間のスケールのみなので、CSDR 法を用いることでより少ない自由パラメータによる統一模型構築の可能性が得られる。

一方で、CSDR 法を用いて統一模型を構築する上ではいくつかの課題があることを見た。その 1 つとしては CSDR 法を用いて GUT を得た際に正しく標準模型を導くことができるかという問題だった。この解決法の候補として Wilson flux breaking mechanism による GUT の破れについて議論した。また別の課題として、標準模型における電弱対称性の破れのスケールを正しく導くことができるかという問題が挙げられた。この解決策の候補として、余剰空間 S/R に複数のスケールを導入することについて考察した。さらに、正しく GUT や標準理論における場のゲージ群に対する表現を得るために必要な、高次元でのゲージ群と余剰空間 S/R を見つけるという課題ももちろん存在する。今後はこれらの課題の解決に向けた研究を行っていくが必要になる。また、現実的な模型の構築のためには自発的対称性の破れの後のゲージボソンやフェルミオンの質量の関係、フェルミオンの混合角、CP の破れなどを正しく出せるかといった、さらに込み入った議論を行う必要がある。

多くの課題は残っているものの、CSDR 法による統一模型の構築には多くの魅力的な点がある。CSDR 法により、より少ない自由パラメータによる統一模型を構築することができれば、素粒子やその間の相互作用のさらに統一的な理解ができる。さらに、現実的な模型を導く余剰空間を知ることができれば、時空の本質的な構造の理解への足掛かりが得られると期待される。したがって、CSDR 法による統一模型の構築は自然のより深い理解を導く可能性を持つ。

謝辞

まず第一に、指導教官である佐藤丈助教授に感謝の意を送ります。佐藤助教授には本論文を作成するにあたって、輪講や日頃の指導などで大変お世話になりました。谷井義章教授には輪講や講義などでお世話になったことへの感謝をこの場を借りて申し上げます。また、本論文の作成のための輪講を共に行ってくれたPDの小池正史氏と下村崇氏、先輩の実藤俊史氏と山中真人氏へも有意義な議論と貴重な意見に対する感謝の意を送ります。本論文の作成のためには、素粒子論研究室の皆さんの気遣いにいろいろと助けられました。それらに対する感謝もこの場を借りて申し上げたいと思います。最後に本論文の作成にあたって気遣いや励ましをくれた家族や友人に感謝したいと思います。

A notation

ここでは本文で使われた notation についてまとめた。

- 座標

D 次元時空 $M^D = M^4 \times S/R$ の座標は

$$X^M = (x^\mu, y^\alpha) \quad (\text{A.1})$$

と表す。ここで x^μ は 4 次元 Minkowski 時空 M^4 の座標で、 y^α は coset space S/R の座標である。また、座標や場に現れる時空の成分を表す添え字については

$$\begin{aligned} \mu, \nu, \dots &\rightarrow 4 \text{ 次元 Minkowski 時空の成分} \\ \alpha, \beta, \dots &\rightarrow \text{余剰空間 } S/R \text{ の成分} \\ a, b, \dots &\rightarrow S/R \text{ の接空間の成分} \end{aligned}$$

とする。

- S 変換

S/R に対する等長変換群 S の元 $s \in S$ による座標変換

$$s : y^\alpha \rightarrow (y^s)^\alpha \quad (\text{A.2})$$

と表す。 s による逆変換の場合は $-s$ で表すことにする。また、無限小変換は

$$(y^s)^\alpha = y^\alpha + \omega^\beta \delta_\beta^a \xi_a^\alpha + \omega^i \xi_i^\alpha + O(\omega^2) \quad (\text{A.3})$$

と表す。ただし、 ω は無限小パラメータであり、 ξ は y の無限小変化分を表すベクトル場である。また、 ξ に付く添え字 i, a はそれぞれ、 R の生成を区別する添え字と S/R の生成子を区別する添え字 (= 接空間の成分) である。一方、 $M^D = M^4 \times S/R$ 上で定義された場 $\Phi(x, y)$ の S 変換は

$$\Phi^s(x, y) = \Omega(s, y) \Phi(x, y^{-s}) \quad (\text{A.4})$$

で表される。ここで $\Omega(s, y)$ は Φ が接空間上でスカラー、ベクトル、テンソル、スピノルのいずれであるかによって変わる、接空間の回転を表す行列である。

- M^D の計量

$M^D = M^4 \times S/R$ の計量は

$$g^{MN} = \begin{pmatrix} \eta^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & -g^{ab} \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

と記す。ここで $\eta^{\mu\nu}$ は 4 次元 Minkowski 時空の計量であり

$$\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1) \quad (\text{A.6})$$

ととる。一方、 g^{ab} は S/R の計量であり、一般には

$$g^{ab} = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_d) \quad d = \dim S/R \quad (\text{A.7})$$

と表される。ただし、 S 変換による不変性を要求すると各成分は (2.39) 式により制限される。

・ゲージ変換

場 $\Phi(x, y)$ に対するゲージ変換は

$$\Phi^g(x, y) = D(W(x, y))\Phi(x, y) \quad (\text{A.8})$$

と表すことにする。ここで $D(W(x, y))$ は $\Phi(x, y)$ の属すゲージ群の表現ごとに異なるゲージ変換性を表し、 $W(x, y)$ は無限小ゲージ変換である。また、ゲージ変換の場合も逆変換は $(-g)$ で表すことにする。例えばスピノル場 $\psi(x, y)$ がゲージ群の基本表現に、ベクトル場 $A_M(x, y)$ が随伴表現に属しているとしたとき、ゲージ変換はそれぞれ

$$\begin{aligned} \psi^g(x, y) &= D(W(x, y))\psi(x, y) = e^{W(x, y)}\psi(x, y) \\ A_M^g(x, y) &= D(W(x, y))A_M(x, y) = e^{W(x, y)}A_M(x, y)e^{-W(x, y)} - e^{W(x, y)}\partial_M e^{-W(x, y)} \end{aligned}$$

と書ける。

B 調和展開

余剰空間が物理的実体である場合には場の余剰空間に対するゆらぎを解析し、そのマスレスモードとその間の相互作用を 4 次元時空に対する理論だとすることが妥当である。この解析を実行するために、調和展開 (harmonic expansion) の技法を用いる。すなわち、 D 次元における場をコンパクト空間 B の基準モード (normal mode or harmonics) により展開することで解析を行う。ここでは B の等長変換群を Lie 群 S としたときに $B=S$ の場合と $B=S/R$ の場合に分けて、調和展開の公式を示す。

(1) $B=S$ の場合の調和展開

S 上の関数を展開するための正規直行基底は Peter-Weyl の定理により、互いに同値でない S のユニタリーな既約表現の行列要素 $D_{pq}^{(m)}$ となる。ここで、 (m) は既約表現を区別するためのラベルである。このとき直行関係は

$$\frac{1}{V_S} \int d\mu D_{pq}^{(m)*}(s) D_{st}^{(n)}(s) = \frac{\delta_{mn} \delta_{ps} \delta_{qt}}{d_m} \quad (\text{B.1})$$

となる。ここで $d\mu$ は S の不変測度であり、 V_S, d_m はそれぞれ S の体積と表現 m の次元である。この直行関係の下、 S 上で定義される関数 $f(s)$ は

$$f(s) = \sum_m \sum_{pq} \sqrt{d_m} D_{pq}^{(m)}(s) f_{pq}^{(m)} \quad (\text{B.2})$$

と展開される。この展開における和は全ての互いに同値でない S のユニタリー表現の全ての行列要素について行われる。この展開式に直行関係を適用させることで、係数 $f_{pq}^{(m)}$ は

$$f_{pq}^{(m)} = \frac{\sqrt{d_m}}{V_S} \int_s d\mu D_{pq}^{(m)*} f(s) \quad (\text{B.3})$$

と求められる。高階テンソルについても同様に考えればよい。

(2) $B=S/R$ の場合の調和展開

この場合も S は B の等長変換群なので、 S のユニタリー既約表現の行列要素を調和展開の基底に用いることができる。ただし、 $B=S/R$ であることから制限がつけられる。つまり、 S の元 s と $s' = rs$ for, $\forall r \in R$ は S/R 上の同じ点を指すので、調和展開における和はこの条件をみたす S の表現に対するものに制限される。すなわちその条件は

$$D_{pq}^{(m)}(s') = D_{pq}^{(m)}(rs) = D_{pt}^{(m)}(r) D_{tq}^{(m)}(s) \quad \forall r \in R \quad (\text{B.4})$$

と書ける。これは $s \rightarrow s'$ の際に展開の基底の回転のみ許し、結局同じ点 s での展開が与えられることを意味する。また、一般に $D^{(m)}(r)$ は R の可約表現なので我々は $D^{(m)}(r)$ がブロック対角になる基底を選ぶ。そのとき各ブロックは R の既約表現を表す。そこで、さらに $D^{(m)}(r)$ の分解で現れる R の既約表現 $\mathfrak{D}$ に制限した

$$D_{iq}^{(m)}(rs) = \mathfrak{D}_{ij}(r) D_{jq}^{(m)}(s) \quad (\text{B.5})$$

を満たす S の既約なユニタリー表現行列の要素を調和展開の基底にとることができる。ここで $i, j = 1, \dots, d_{\mathfrak{D}}$ で、 $d_{\mathfrak{D}}$ は表現 $\mathfrak{D}$ の次元である。したがって、 R の下での分解で $\mathfrak{D}$ を含む S の既約表現のみ S/R 上の調和展開に寄与することになる。そのため調和展開に寄与する $D^{(m)}$ はその行がある R の既約表現 $\mathfrak{D}$ に対応するもののみとなる。

また、 S/R 上ではただの関数だけでなく R の多重項を組む関数の組を扱う。それらは S/R 上の点で $s \rightarrow rs$ に対し不変である必要はなく、 R による多重項の中での回転をしてもよい。つまり、

$$f_i(s)' = \mathfrak{D}_{ij}(r) f_j(s) \quad (\text{B.6})$$

による回転をうける。これらの関数に対する S/R 上の調和展開は

$$f_i(s) = \sum_m \sum_{\zeta q} \sqrt{\frac{d_m}{d_{\mathfrak{D}}}} D_{i\zeta, q}^{(m)}(s) f_{q\zeta}^{(m)} \quad (\text{B.7})$$

で与えられる。また R シングレットの調和展開は

$$f(s) = \sum_m \sum_{\zeta q} \sqrt{\frac{d_m}{d_{\mathfrak{D}}}} D_{i\zeta, q}^{(m)}(s) f_{q\zeta, q}^{(m)} \quad (\text{B.8})$$

で与えられる。ここで、和は $\mathfrak{D}$ を含む互いに同値でない S のユニタリー既約表現についてとる。また、 ζ は $D^{(m)}$ に $\mathfrak{D}$ が複数含まれるときに、それらを区別するための添え字である。一方、 S

の一般の元が $s = rL(y)$ と書けることから

$$f_i(y) = \sum_m \sum_{\zeta q} \sqrt{\frac{d_m}{d_{\mathfrak{D}}}} D_{i\zeta, q}^{(m)}(L(y)) f_{q\zeta}^{(m)} \quad (\text{B.9})$$

となる。このとき、 S の S/R への作用の下で $f_i(y)$ は

$$f_i(y) \rightarrow f'_i(y') = \mathfrak{D}_{ij}(r^{-1}) f_j(y) \quad (\text{B.10})$$

と変換される。ここで、 y', r は (2.19) により y, s で与えられる。また、この関係から展開係数の変換は

$$f'_{q\zeta}{}^{(m)} = D_{qp}^{(m)}(s^{-1}) f_{p\zeta}^{(m)} \quad (\text{B.11})$$

となることが示される。また、詳しい証明は省略するが展開係数は

$$f_{p\zeta}^{(m)} = \frac{1}{V_{S/R}} \sqrt{\frac{d_m}{d_{\mathfrak{D}}}} \int_{S/R} d\mu \sum_i D_{p, i\zeta}^{(m)}(L(y)^{-1}) f_i(y) \quad (\text{B.12})$$

によって与えられる。

以上の解析は $M^D = M^4 \times S/R$ 上の場に対して適用できる。違いとしては展開係数が M^4 の座標に依存するようになることである。また、我々はベクトル場やスピノル場などの R の可約な表現の調和展開を考える。そのときは R の $\text{SO}(d)$ への埋め込みを考慮して R の既約表現に分解し、その既約表現ごとに調和展開を行う。

C 交換関係

ここでは本文で用いられた Lie 群の生成子とそれらの交換関係およびトレースについてまとめた [2]。

• $\text{SU}(3)$ 生成子

(3.31) で与えられた随伴表現の分解

$$\text{SU}(3) \supset \text{U}(1) \times \text{U}(1),$$

$$8 = (0, 0) + (0, 0) + (1, 2) + (-1, -2) + (1, -2) + (-1, 2) + (2, 0) + (-2, 0)$$

に対応した $\text{SU}(3)$ 生成子の基底は

$$Q_{\text{SU}(3)} = \{Q_0, Q'_0, Q_1, Q^1, Q_2, Q^2, Q_3, Q^3\} \quad (\text{C.1})$$

と与えられる。この基底の下での生成子間の交換関係とトレースは table(C.1) で与えられる。

$[Q_1, Q_0] = \sqrt{3}Q_1$	$[Q_1, Q'_0] = Q_1$	$[Q_2, Q_0] = -\sqrt{3}Q_2$
$[Q_2, Q'_0] = Q_2$	$[Q_3, Q_0] = 0$	$[Q_3, Q'_0] = 2Q_3$
$[Q_1, Q^1] = -\sqrt{3}Q_0 - Q'_0$	$[Q_2, Q^2] = \sqrt{3}Q_0 - Q'_0$	$[Q_1, Q_2] = \sqrt{2}Q_3$
$[Q_2, Q^3] = \sqrt{2}Q^1$	$[Q^1, Q_3] = \sqrt{2}Q_2$	$[Q_3, Q^3] = -2Q'_0$

$$Tr(Q_1Q^1) = Tr(Q_2Q^2) = Tr(Q_3Q^3) = Tr((Q'_0)^2) = Tr(Q_0^2) = 2$$

table(C.1)

(3.41) で与えられた随伴表現の分解

$$SU(3) \supset SU(2) \times U(1), \quad 8 = 1(0) + 3(0) + 2(2) + 2(-2)$$

に対応した $SU(3)$ 生成子の基底は

$$Q_{SU(3)} = \{Q_i, Q_0, Q_a, Q^a\} \quad (i = 1, 2, 3 \ a = 1, 2) \quad (C.2)$$

と与えられる。この基底の下での生成子間の交換関係とトレースは table(C.2) で与えられる。

$[Q_i, Q_j] = 2i\epsilon_{ijk}Q_k$	$[Q_0, Q_a] = Q_a$
$[Q_i, Q_a] = (\tau_i)_a^b Q_b$	$[Q_a, Q^b] = (\tau_i)_a^b Q_i + \delta_a^b Q_0$

$$Tr(Q_iQ_j) = 2\delta_{ij} \quad Tr(Q_aQ^b) = \delta_a^b \quad Tr(Q_0^2) = 2$$

table(C.2)

• $SU(4)$ 生成子

(3.55) で与えられた随伴表現の分解

$$SU(4) \supset SU(3) \times U(1), \quad 15 = 8(0) + 1(0)3(-4) + \bar{3}(4)$$

に対応した $SU(4)$ 生成子の基底は

$$Q_{G_2} = \{Q_i, Q, Q^\rho, Q_\rho\} \quad (i = 1, \dots, 8 \ \rho = 1, 2, 3) \quad (C.3)$$

と与えられる。この基底の下での生成子間の交換関係とトレースは table(C.3) で与えられる。

$[Q_i, Q_j] = 2if_{ijk}Q_k$	$[Q_i, Q^\rho] = -(\lambda_i)_\sigma^\rho Q^\sigma$	$[Q_i, Q_\rho] = -(\lambda_i)_\rho^\sigma Q_\sigma$
$[Q, Q^\rho] = \sqrt{\frac{8}{3}}Q^\rho$	$[Q, Q_\rho] = -\sqrt{\frac{8}{3}}Q_\rho$	$[Q^\rho, Q_\sigma] = -(\lambda_i)_\sigma^\rho Q_i + \sqrt{\frac{8}{3}}\delta_\beta^\alpha Q$

$$Tr(Q_iQ_j) = 2\delta_{ij} \quad Tr(Q^\rho Q_\sigma) = 2\delta_\sigma^\rho \quad Tr(Q^2) = 2$$

table(C.3)

• SU(5) 生成子

(3.46) で与えられた随伴表現の分解

$$\begin{aligned} \text{SU}(5) &\supset \text{SU}(3) \times \text{SU}(2) \times \text{U}(1) \\ 24 &= (8, 1)(0) + (1, 3)(0) + (\bar{3}, 2)(1) + (3, 2)(-1) + (1, 1)(0) \end{aligned}$$

に対応した SU(5) 生成子の基底は

$$Q_{G_2} = \{G_i, G_\alpha, Q_{a\rho}, Q^{a\rho}\} \quad (i = 1, \dots, 8 \quad \rho = 1, 2, 3 \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad a = 1, 2) \quad (\text{C.4})$$

と与えられる。この基底の下での生成子間の交換関係とトレースは table(C.4) で与えられる。

$$\begin{aligned} [G_i, G_j] &= 2if_{ijk}G_k & [G_\alpha, G_\beta] &= 2i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}G_\gamma & [G_i, G^{a\rho}] &= -(\lambda_i)_\sigma^\rho G^{a\sigma} \\ [G_i, G_{a\rho}] &= (\lambda_i)_\rho^\sigma G_{a\sigma} & [G_\alpha, G^{a\rho}] &= -(\tau_\alpha)_b^a G^{b\rho} & [G_\alpha, G_{a\rho}] &= (\tau_\alpha)_a^b G_{b\rho} \\ [G, G^{a\rho}] &= -\sqrt{\frac{5}{3}}G^{a\rho} & [G, G_{a\rho}] &= \sqrt{\frac{5}{3}}G_{a\rho} \\ [G^{a\rho}, G_{b\sigma}] &= -\sqrt{\frac{5}{3}}\delta_b^a\delta_\sigma^\rho G - (\lambda_i)_\sigma^\rho\delta_b^a G_i - (\tau_\alpha)_b^a\delta_\sigma^\rho G_\alpha \\ \text{Tr}(G_i G_j) &= 2\delta_{ij} & \text{Tr}(G_\alpha G_\beta) &= 2\delta_{\alpha\beta} & \text{Tr}(G^{a\rho} G_{b\rho}) &= 2\delta_b^a\delta_\sigma^\rho & \text{Tr}(G^2) &= 2 \end{aligned}$$

table(C.4)

• G₂ 生成子

(3.47) で与えられた随伴表現の分解

$$\text{G}_2 \supset \text{SU}(3), \quad 14 = 8 + 3 + \bar{3}$$

に対応した G₂ 生成子の基底は

$$Q_{G_2} = \{Q_i, Q^\rho, Q_\rho\} \quad (i = 1, \dots, 8 \quad \rho = 1, 2, 3) \quad (\text{C.5})$$

と与えられる。この基底の下での生成子間の交換関係とトレースは table(C.5) で与えられる。

$$\begin{aligned} [Q_i, Q_j] &= 2if_{ijk}Q_k & [Q^\rho, Q_\sigma] &= -(\lambda_i)_\sigma^\rho Q_i & [Q_i, Q^\rho] &= -(\lambda_i)_\sigma^\rho Q^\sigma \\ [Q_i, Q_\rho] &= (\lambda_i)_\rho^\sigma Q_\sigma & [Q^\rho, Q^\sigma] &= 2\sqrt{\frac{2}{3}}\epsilon^{\rho\sigma\tau}Q_\tau & [Q_\rho, Q_\sigma] &= -2\sqrt{\frac{2}{3}}\epsilon_{\rho\sigma\tau}Q^\tau \\ \text{Tr}(Q_i Q_j) &= 2\delta_{ij} & \text{Tr}(Q^\rho Q_\sigma) &= 2\delta_\sigma^\rho \end{aligned}$$

table(C.5)

• Sp(4) 生成子

(4.22) で与えられた随伴表現の分解

$$\text{Sp}(4) \supset (\text{SU}(2) \times \text{U}(1))_{\text{non-max}}, \quad 10 = 3(0) + 1(0) + 2(1) + 2(-1) + 1(2) + 1(-2)$$

に対応した $\text{Sp}(4)$ 生成子の基底は

$$Q_{\text{Sp}(4)} = \{Q_\alpha, Q, Q_+, Q_-, Q_{a+}, Q^{a-}\} \quad (\alpha = 1, 2, 3 \ a = 1, 2) \quad (\text{C.6})$$

と与えられる。この基底の下での生成子間の交換関係とトレースは table(C.6) で与えられる。

$[Q_\alpha, Q_\beta] = 2if_{\alpha\beta\gamma}Q_\gamma$	$[Q_+, Q_-] = 2Q$	$[Q_\alpha, Q_{a+}] = (\tau_\alpha)_a^b Q_b$
$[Q_\alpha, Q^{a-}] = -(\tau_\alpha)_b^a Q^{b-}$	$[Q, Q_{a+}] = Q_{a+}$	$[Q, Q^{a-}] = -Q^{a-}$
$[Q, Q_+] = 2Q_+$	$[Q, Q_-] = -2Q_-$	$[Q_{a+}, Q_-] = -\sqrt{2}\epsilon_{ab}Q^{b-}$
$[Q^{a-}, Q_+] = \sqrt{2}\epsilon^{ab}Q_b$	$[Q_{a+}, Q_{b+}] = \sqrt{2}\epsilon_{ab}Q_+$	$[Q^{a-}, Q^{b-}] = -\sqrt{2}\epsilon^{ab}Q_-$
$[Q_{a+}, Q^{b-}] = \delta_a^b Q + (\tau_\alpha)_a^b Q_\alpha$		

$$\text{Tr}(Q_\alpha Q_\beta) = 2\delta_{\alpha\beta} \quad \text{Tr}(Q_{a+} Q^{b-}) = 2\delta_a^b \quad \text{Tr}(Q_+ Q_-) = \text{Tr}(Q^2) = 2$$

table(C.6)

参考文献

- [1] P. Forgacs and N.S. Manton, Commun. Math. Phys. 72(1980) 15.
- [2] D. Kapetanakis and G. Zoupanos, Phys. Rept. 219(1992) 1.
- [3] N.S Manton, Nucl. Phys. B 193(1981) 391.
- [4] S. Kobayashi and K. Nomizu, Foundations of Differential Geometry, Vol. (Wiley, New York, 1969).
- [5] P. Van Nieuwenhuizen, General theory of coset manifolds and antisymmetric tensors applied to Kaluza-Klein supergravity, in: Supersymmetry and Supergravity '84, eds. B. de wit, P. Fayet and P. Van Nieuwenhuizen (world Scientific, Singapore, 1984).
- [6] F. Muller-Hoissen and R. Stuckl, Class. Quantum Grav. 5(1988) 27;
F. Muller-Hoissen, Class. Quantum Grav. 4(1987) L143;
P.A Horváthy, Ann. Phys. 142(1982) 10
- [7] L. Castellani, L.J. Romans and N.P Warner, Ann. Phys. 157(1984) 394
- [8] J. Harnad, S. Shnider and L. Vinet, J. Math. Phys. 20(1979) 931; 21(1980) 2719.
- [9] K. Farakos, G. Koutsoumbas, M. Surridge and G. Zoupanos, Nucl. Phys. B 291(1987) 128.
- [10] L. Michel, preprint CERN-TH-2716; contribution to the A. Visconti seminar, Rev. Mod. Phys. 52(1980) 617.
- [11] R. Slansky, Phys. Rep, 79(1981) 1.
- [12] G. Chapline and N.S Manton, Nucl. Phys. B 184(1981) 107.
- [13] C. Chapline and R. Slansky, Nucl. Phys. B 209(1982) 461.
- [14] K.J. barnes, R.C King and M. Surridge, Nucl. Phys. B 281(1987) 253.
- [15] S. Randjbar-Daemi, A. Salam and J.Strathdee, Phys. Lett. B 132(1982) 56
- [16] C. Wetterich, Nucl. Phys. B 222(1983) 20; B 223(1983) 109; B 244(1984) 355.
- [17] R. Bott, in: Differential and Combinatorial Tpology, ed. S.S. Cairns(Princeton Univ. Press, Princeton, 1965).
- [18] S. Randjbar-Daemi, and E. Percacci, Phys. Lett. B 117(1982) 41.
- [19] K. Pilch and A.N. Schellekens, Nucl. Phys. B 256(1985) 109.
- [20] L. Palla, Z. Phys. C 24(1984) 195.
- [21] D. Kapetanakis and G. Zoupanos, Phys. Lett. B 249(1990) 73.
- [22] N.S. Manton. Nucl. Phys. B 158(1979) 141.
- [23] D. Lüst and G. Zoupanos, Phys. Lett. B 165(1985) 309.
- [24] Y. Hosotani, Phys. Lett. B 201(1988) 193;
E. Witten, Nucl. Phys. Lett. B 258(1985) 75;
J.D. Breit, B.A. Ovrut and G.C. Segré, Phys. Lett. B 158(1985) 33;
B.R. Greene, K. Kirklin, P.J. Miron, Nucl. Phys. B 274(1986) 575;
B.R. Greene, K. Kirklin, P.J. Miron and G.G Ross, Nucl. Phys. B 278(1986) 667;
- [25] G. Zoupanos, Phys. Lett. B 201(1988) 301.
- [26] D. Kapetanakis and G. Zoupanos, Phys. Lett. B 232(1989) 104.