

目 次

1	introduction	3
2	dark matter の存在証拠	4
2.1	標準宇宙論	4
2.2	銀河スケールにおいての dark matter の存在証拠	6
2.3	銀河団スケールにおいての dark matter の存在証拠	8
2.4	その他のスケールでの dark matter 存在証拠	11
3	dark matter candidate	14
3.1	Standard Model neutrinos	14
3.2	sterile neutrinos	15
3.3	axion	16
3.4	sneutrinos	16
3.5	gravitinos	16
3.6	axinos	17
3.7	light scalar dark matter	17
3.8	dark matter from little Higgs models	17
3.9	Kaluza-Klein states	18
3.10	neutralinos	19
3.11	その他の dark matter 候補	20
4	relic abundance calculation	21
4.1	このセクションで見ていく内容	21
4.2	standard calculation of relic abundance	21
4.3	relic abundance from coannihilation	25
4.4	annihilation into forbidden channels	32
4.5	annihilation near poles	42
4.6	このセクションの応用例	50
5	long lifetime stau	52
5.1	超対称性粒子の研究への応用	52
5.2	二体崩壊	53
5.3	四体崩壊	55
5.4	三体崩壊	64
5.5	stau lifetime のパラメーター依存性	66
6	summary	70

A ボルツマン方程式	71
A.1 導出のための予備知識	71
A.2 リュービルの定理	72
A.3 ボルツマン方程式	74
A.4 短距離相互作用による衝突項	74
A.5 ボルツマン方程式と熱平均化について	77
A.6 ボルツマン方程式導出に関する補足事項	81
B x_f[(49)式] の導出	83

1 introduction

我々の宇宙を成り立たせている物質成分、エネルギー成分はどのような密度構成になっているのか？この質問はアインシュタイン方程式が登場して以来、宇宙の研究に携わる者達を悩ませてきたものである。その理由の1つとして、この密度構成を明らかにすることが出来れば宇宙の幾何構造、ひいては宇宙の過去、現在、未来の姿が解明できるからである。近年、観測技術の進歩により、この宇宙は一様等方的で曲率がほぼ0の幾何構造を持つ、ということが明らかにされた。しかし、それと同時に、物質成分の大半は目に見えない何か、すなわち dark matter や dark energy で構成されていることも明らかになった。観測によるこの結果が出る以前から、dark matter の存在は理論的に予測されており、これまでに数多くの研究がなされてきた。それにより dark matter の候補が宇宙論的なスケールのものから、素粒子的なものまで様々なものが考え出されてきたが、どれもまだ決定的な証拠は得られていない。この論文では、dark matter 候補として Weekly Interaction Massive Particles(WIMPs)、特に超対称性理論における素粒子の1つである neutralino を考える。

次のセクションでは、dark matter を研究するうえで基礎となる標準宇宙論について触れ、それに関連して論じられてきた dark matter の存在証拠と考えられてきた多数のものの一部を見ていく。セクション3においては、これまでにどのような素粒子的 dark matter が研究されてきたのかを論じていく。セクション4では、dark matter の relic abundance 計算の標準的なものと、特別な修正が必要な3つの場合についてを考えていき、セクション5でその3つの中の1つに注目した応用を調べていく。

2 dark matter の存在証拠

2.1 標準宇宙論

dark matter の存在証拠について考えていく前に、まずは、dark matter の存在を予測する上で土台となる標準宇宙論についてみていく。ここではモデルとして Big Bang scenario を採用して考えていく。このモデルは

- 宇宙が誕生時の超高温状態から冷えていくにしたがって移り変わっていく様子
- 宇宙背景放射の存在
- Big Bang Nucleosynthesis(BBN) と呼ばれる元素合成により生成される軽元素量の予言
- 銀河や銀河団がどのように造られてきたのかを表わす大規模構造

などをうまく説明しうる、非常に完成度の高いモデルである。セクション 3 でも議論するように、dark matter の性質を考えていく上で大規模構造の詳細が重要になるので、ここでもう少し詳しく見ていく。大規模構造には大きく分けて 2 つのシナリオがある。1 つは top-down 型構造形成と呼ばれるものである。これは、まずははじめに超銀河団のような大きな塊が造られ、それが銀河団などのより小さなスケールのものに分かれていく。そして最終的に今の宇宙の構造を造りあげるというものである。もう 1 つは bottom-up 型構造形成と呼ばれるものである。これは、top-down 型とは逆に、はじめに銀河などの小さな構造が造られ、それらが集まっていきより大きな構造の銀河団などを造っていくというものである。

上で見たような宇宙論モデルをつくりあげていくために必要となるのは以下に記す 3 つの根本的指針である：

- アインシュタイン方程式 (\Rightarrow 宇宙の幾何学構造と宇宙に含まれる物質成分、エネルギー成分を関係づける)
- メトリック (\Rightarrow 宇宙の幾何構造を決定)
- 状態方程式 (\Rightarrow 物質成分、エネルギー成分の物理的性質を特定)

ここに出てきたアインシュタイン方程式は次の 3 つの条件のもとで導かれる：

一般座標変換のもとで方程式不变

弱重力の極限のもとでニュートンの重力則に一致

2 階の微分方程式

これらの条件のもとで導かれたアインシュタイン方程式は次式のようになる：

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{8\pi G_N}{c^4}T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \quad (1)$$

$g_{\mu\nu} \Rightarrow$ メトリックテンソル

$G_N \Rightarrow$ ニュートンの重力定数

$T_{\mu\nu} \Rightarrow$ エネルギー運動量テンソル

$\Lambda \Rightarrow$ 宇宙定数

ここで、 $R_{\mu\nu}$ 、 R はそれぞれリッチテンソル、リッチスカラーと呼ばれるものであり、リーマンの曲率テンソルを用いて次式で定義される：

$$\begin{aligned} R_{\nu\sigma} &\equiv R^{\mu}_{\nu\mu\sigma} \\ R &\equiv R_{\nu\sigma}g^{\nu\sigma} \end{aligned} \tag{2}$$

また、曲率テンソルの表式における $\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}$ はクリストッフェル記号と呼ばれるものであり、計量 $g^{\mu\nu}$ を用いて以下のように表わされる：

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\rho} = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}(\partial_{\nu}g_{\rho\lambda} + \partial_{\rho}g_{\nu\lambda} - \partial_{\lambda}g_{\nu\rho}) \tag{3}$$

(1) 式における宇宙定数の表わすものは、物質成分ではなく、むしろ時空そのものに関連する "真空のエネルギー" であると考えられる。type Ia 型超新星爆発や CMB の解析が正しいとすると、この "真空のエネルギー" は宇宙の幾何構造を考えていくうえで重要な役割を果たしていることになる。しかしこの先では、解析のシンプル化のために、宇宙定数の項は除いて議論を進めていく。

(1) 式のAINシュタイン方程式をとくために、宇宙の一様等方性を仮定する。(補足となるが、実際、宇宙はほぼ一様等方であることが WMAP などの解析により分かっている。) この一様等方性の仮定により次式の線素が導かれる：

$$ds^2 = -c^2dt^2 + a^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2d\Omega^2\right) \tag{4}$$

$a(t) \Rightarrow$ スケールファクター

$k \Rightarrow$ 空間的曲率 (-1 or 0 or +1)

このメトリックを用いてAINシュタイン方程式を解き、その第0成分をとることによりフリードマン方程式が得られる：

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G_N}{3}\rho_{tot} \tag{5}$$

$\rho_{tot} \Rightarrow$ 宇宙の全エネルギー密度

ハッブルパラメーター $H(t) = \dot{a}/a$

このフリードマン方程式から、空間的曲率 k が 0 になるときの密度は簡単に求めることができる：

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G_N} \quad (6)$$

これは臨界密度と呼ばれるものである。この臨界密度を用いて、あるエネルギー寄与物質 i ($i \Rightarrow$ 物質成分、輻射成分、真空のエネルギー) からの寄与の度合を表わす量として次式を定義する：

$$\begin{aligned} \Omega_i &\equiv \frac{\rho_i}{\rho_c} \\ \Omega &= \sum_i \Omega_i \equiv \sum_i \frac{\rho_i}{\rho_c} \end{aligned} \quad (7)$$

Ω を用いて書き直すと、フリードマン方程式は次のようになる：

$$\Omega - 1 = \frac{k}{H^2 a^2} \quad (8)$$

ここで注目すべき点は Ω が 1 以下か 1 以上かで k の符号が決まる、ということである。すなわち、 k が正であるか負であるかによって宇宙の時間発展は大きく変わってくる、という事を意味している。各 Ω_i は別々に時間発展し、その表式を用いると宇宙の時間発展、すなわち膨張率の一般式が次のように表わされることになる：

$$\begin{aligned} \frac{H^2(z)}{H_0^2} &= \Omega_X (1+z)^{3(1+\alpha_X)} + \Omega_k (1+z)^2 + \Omega_M (1+z)^3 + \Omega_R (1+z)^4 \\ \Omega_k &= \frac{-k}{a_0^2 H_0^2} \end{aligned} \quad (9)$$

$X \Rightarrow$ 状態方程式 $p_X = \alpha_X \rho_X$ を持つ成分からの寄与を表わす指標

(10) 式において使われている z は銀河の赤方偏移を表わすファクターであり、ハッブルの法則によって距離 r の銀河（一般的には銀河に限らずあらゆる天体）の z は

$$z = \frac{H_0}{c} r \quad (10)$$

となる。ここで H_0 は現在のハッブルパラメーターの値、 c は光速を表わす。

これらの理論式と、宇宙年齢や宇宙の平坦性の観測の結果から現在の宇宙の成分の割合が下図のようになっていることがわかっている。この図を見て分かるように、物質成分の大半は dark matter で占められている。言い換えれば、宇宙の構造を理解するうえで dark matter の解析は避けては通れぬ道となっている、ということである。

2.2 銀河スケールにおいての dark matter の存在証拠

前のサブセクションでは、理論的には dark matter が必要になる、という事を見た。しかし、我々の宇宙において実際に dark matter の存在を示す証拠となるものはあるのであ

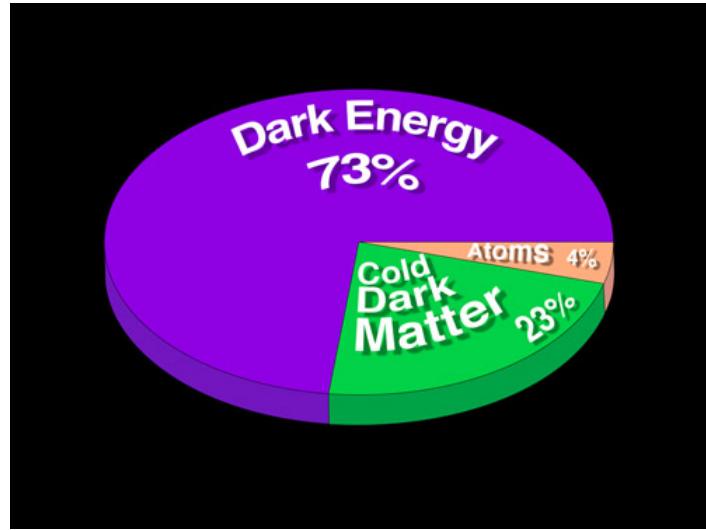


図 1: 宇宙の密度成分の割合 (WMAP のホームページより引用)

ろうか？ここでは、銀河スケールでこの dark matter の存在証拠について見ていくことにする。

dark matter の存在を確かめる 1 つの方法は、見える物質に作用する重力の影響を調べることである。具体的によく知られている方法は M31 や銀河系のような渦巻銀河の星の軌道速度を測ることである。銀河中心を回る円軌道上の星に注目する。この星の軌道半径を R 、軌道速度を v とすると、銀河中心方向の加速度と星に働く遠心力の釣り合いから次式が成り立つ：

$$v = \sqrt{\frac{GM(R)}{R}} \quad (11)$$

$M(R) \Rightarrow$ 銀河中心から半径 R の球に含まれる全質量

ところで、渦巻銀河の円盤の表面輝度 I は典型的に中心からの距離と共に指数的に減少していくことが知られている：

$$I(R) = I(0) \exp\left[-\frac{R}{R_s}\right] \quad (12)$$

$R_s \Rightarrow$ スケール長さ

これは典型的に数 kpc(例：銀河系 $R_s \approx 4kpc$)

この式は、一旦、中心からスケール長さの 2~3 倍離れてしまえば半径 R の中の星の全質量は一定になる、という事を意味している。この事と (12) 式とを合わせて考えると、星が銀河の質量のほとんどまたは全てを担っているならば、軌道速度 v は大きな半径 ($R \geq 3R_s$) で $v \propto 1/\sqrt{R}$ のように遅くなっていくはずである。

ところが、下の図から見てわかるように大きな半径で見られるはずの軌道速度 v の遅れが観測においては見られない。つまり、大きな半径における星やガスの軌道速度は、星と

ガスだけが物質であるとした場合よりも大きい、ということになる。この事から、見えて いる銀河の円盤部分を取り巻いている、なにか目に見えない物質、すなわちダークハローの存在が推測できる。このダークハローの質量は、高速の星やガスが銀河間空間に飛び去つてしまわぬために必要な重力の『錨』となっている。

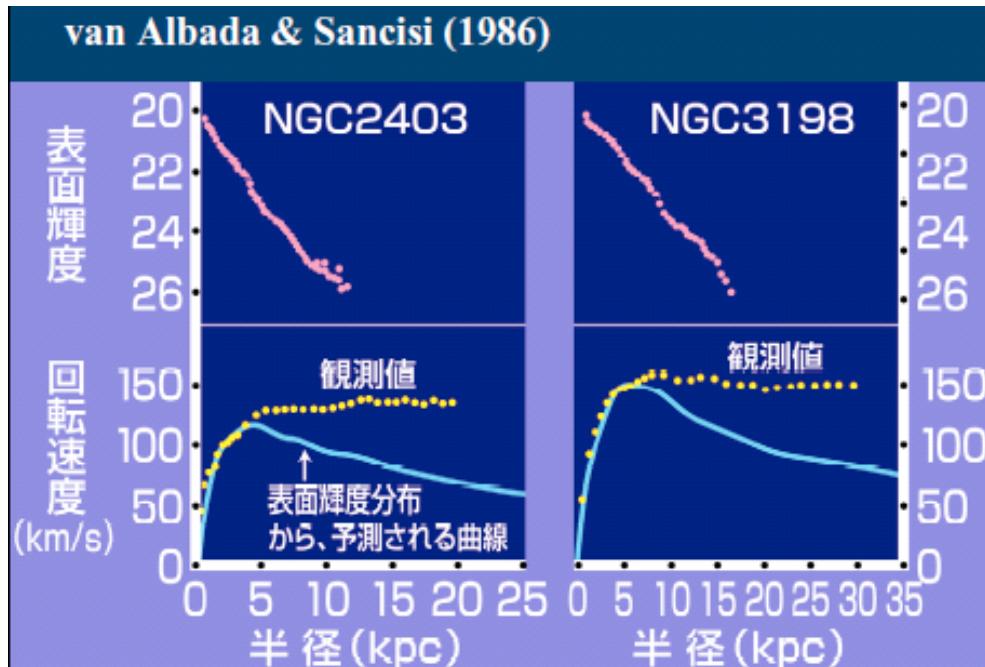


図 2: 銀河の回転曲線 (www-utap.phys.s.u-tokyo.ac.jp より引用)

2.3 銀河団スケールにおいての dark matter の存在証拠

歴史的に dark matter の存在が初めて主張されたのは、実はこの銀河団スケールにおいてであった。時は 1930 年代、発案者はスイスの天文学者 Fritz Zwicky であり、その主張は次のようなものであった：

『銀河団から銀河が飛び去っていかないようにするために、引き止める重力源、すなわち dark matter が大量にあるはず』

Zwicky の主張を数学的に考察するために N 個の銀河からなる銀河団を考える。各々の銀河を質点とみなして調べていく：

位置 : $\vec{x}_i (i = 1, 2, \dots, N)$

速度 : $\dot{\vec{x}}_i (i = 1, 2, \dots, N)$

銀河団は孤立した系であり、銀河団外の質量は無視できると仮定すると、 i 番目の銀河の加速度は次式で表わされることになる：

$$\ddot{\vec{x}}_i = G \Sigma_j m_j \frac{\vec{x}_j - \vec{x}_i}{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|} \quad (13)$$

ただし、和の j は i 以外についてとるものとする。お互いに離れた N 個の銀河を引っぱつて集めるために必要なエネルギー、すなわち、 N 個の銀河からなる系の重力ポテンシャルエネルギーは次の式で表わされる：

$$W = -\frac{1}{2} G \Sigma_{i,j} \frac{m_i m_j}{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|} \quad (14)$$

ここでファクター $\frac{1}{2}$ は i, j の二重数えの分を打ち消すものである。この重力ポテンシャルエネルギーは以下のように別の表わし方をすることも出来る：

$$W = -\alpha \frac{GM^2}{r_h} \quad (15)$$

$$M = \Sigma m_i$$

$$\alpha \implies \text{銀河団の密度の形状に関する数値係数}$$

$$(\text{観測から } \alpha \approx 0.4 \text{ が最もよく合うことがわかっている})$$

$$r_h \implies \text{銀河団の半値質量半径}$$

$$(\text{すなわち、銀河団の重心を中心とした質量 } M/2 \text{ を含む半径})$$

また、銀河団中の銀河の相対運動の運動エネルギーは、銀河団内の銀河全てについての二乗平均速度 $\langle v^2 \rangle$ を使うと、次式のようになる：

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \Sigma_i m_i |\dot{\vec{x}}_i|^2 \\ &= \frac{1}{2} M \langle v^2 \rangle \\ \langle v^2 \rangle &= \frac{1}{M} \Sigma_i m_i |\dot{\vec{x}}_i|^2 \end{aligned} \quad (16)$$

これらのエネルギーと、銀河団の慣性モーメント I

$$I \equiv \Sigma_i m_i |\vec{x}_i|^2 \quad (17)$$

を用いて、銀河団の質量に関する関係式を以下のようにして導いていく：

$$\begin{aligned} \ddot{I} &= 2 \Sigma_i m_i (\vec{x}_i \cdot \ddot{\vec{x}}_i + \dot{\vec{x}}_i \cdot \dot{\vec{x}}_i) \\ &= 2 \Sigma_i m_i (\vec{x}_i \cdot \ddot{\vec{x}}_i) + 4K \\ &= 2 \left[\frac{1}{2} [\Sigma_i m_i (\vec{x}_i \cdot \ddot{\vec{x}}_i) + \Sigma_j m_j (\vec{x}_j \cdot \ddot{\vec{x}}_j)] \right] + 4K \\ &= 2 \left[\frac{1}{2} [G \Sigma_{i,j} m_i m_j \frac{\vec{x}_i \cdot (\vec{x}_j - \vec{x}_i)}{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|^3} - G \Sigma_{i,j} m_i m_j \frac{\vec{x}_j \cdot (\vec{x}_j - \vec{x}_i)}{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|^3}] \right] + 4K \\ &= 2 \left[\frac{1}{2} [-G \Sigma_{i,j} m_i m_j \frac{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|^2}{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|^3}] \right] + 4K \\ &= 2W + 4K \end{aligned} \quad (18)$$

ここでは、銀河団は孤立した系であると考えているので慣性モーメント I は一定である。よって上の結果より

$$\begin{aligned} K &= -\frac{W}{2} \\ &\Downarrow \\ \frac{1}{2}M < v^2 > &= \frac{\alpha}{2} \frac{GM^2}{r_h} \end{aligned} \quad (19)$$

したがって、銀河団の質量の評価式として次式が得られることになる：

$$M = \frac{< v^2 > r_h}{\alpha G} \quad (20)$$

しかし、この式の形だけでは実際に銀河団の質量を評価することは出来ない。上で得られた評価式を実在の銀河団に適用しようとすると、大きな困難があることに気付く。それは $< v^2 >$ と r_h の正確な値が分からぬということである。しかし、幸運なことに、 $< v^2 >$ に関しては以下で見ていくようにある程度知ることはできる。ここからは、発案者の Zwicky が当時対象としていたかみのけ座銀河団を例に考えていく。かみのけ座銀河団の中の銀河の平均赤方偏移は、測定から、以下のようになることが分かっている：

$$< z > = 0.0232 \quad (21)$$

これを動径速度に換算すると

$$< v_r > = c < z > = 6960 \text{ km s}^{-1} \quad (22)$$

となり、これを用いると動径方向の速度分散はつぎのように求められる：

$$\sigma_r = < (v_r - < v_r >)^2 >^{\frac{1}{2}} = 880 \text{ km s}^{-1} \quad (23)$$

ここで、速度分散が等方的であるとすると、3 次元の二乗平均速度 $< v^2 >$ は 1 次元の二乗平均速度の 3 倍に等しいと考えることができるので、結果として次式が得られる：

$$< v^2 > = 3 \times (880 \text{ km s}^{-1})^2 = 2.32 \times 10^{12} \text{ m}^2 \text{s}^{-2} \quad (24)$$

二乗平均速度 $< v^2 >$ についてはこれを用いれば良いであろう。しかし、銀河団の半値質量半径 r_h の評価は二乗平均速度よりもかなり難しい。なぜなら、最終的に求めたいものは dark matter の全質量なのだが、 r_h を求めるためにはこの dark matter の全質量の値が必要となるからである。しかたないので、質量光度比が半径方向について一定であり、銀河団の質量の半分を含む球の半径は銀河団の光度の半分を含む球の半径と同じであろう、と仮定して r_h を近似的に求める。この仮定に加え、銀河団が球形であると仮定すると、結果として r_h が次のように求められる：

$$r_h \approx 1.5 \text{ Mpc} \approx 4.6 \times 10^{22} \text{ m} \quad (25)$$

これでようやく銀河団の質量を評価できる。これらの仮定や近似から、最終的にかみのけ座銀河団の質量として次式が得られる：

$$\begin{aligned}
 M_{coma} &= \frac{\langle v^2 \rangle r_h}{\alpha G} \\
 &\approx \frac{(2.32 \times 10^{12} m^2 s^{-2})(4.6 \times 10^{22} m)}{(0.4)(6.7 \times 10^{-11} m^3 s^{-2} kg^{-1})} \\
 &\approx 4 \times 10^{45} kg \\
 &\approx 2 \times 10^{15} M_\odot
 \end{aligned} \tag{26}$$

ここで M_\odot は太陽質量を表わす記号である。ちなみに、かみのけ座銀河団の中に含まれる星の全質量 $M_{coma,*}$ 、ガスの全質量 $M_{coma,gas}$ は

$$\begin{aligned}
 M_{coma,*} &\approx 3 \times 10^{13} M_\odot \\
 M_{coma,gas} &\approx 2 \times 10^{14} M_\odot
 \end{aligned} \tag{27}$$

となる。見ての通り、これらの両方を足してもかみのけ座銀河団の質量の 10 % 程度にしかなり得ないという予想外の事実が明らかになった。つまり、銀河団の全質量の約 90 % は目にみえない dark matter が独占しているということになる。また、太陽光度 $L_{\odot,B}$ を使って表わしたかみのけ座銀河団の光度 $L_{coma,B} = 8 \times 10^{12} L_{\odot,B}$ を用いると

$$\langle \frac{M}{L_B} \rangle_{coma} \approx \frac{250 M_\odot}{L_{\odot,B}} \tag{28}$$

という関係が得られる。この値は太陽周辺のそれと比べて 2 衡も大きい、という驚くべき結果になっている。これらの事より、銀河団スケールにおける dark matter の存在は明らかであると言えよう。

2.4 その他のスケールでの dark matter 存在証拠

上で見てきた 2 つのスケールの議論だけでは宇宙全体の dark matter の量は分からない。これは CMB のデータから評価し得るということをここから見ていく。ここで CMB とは Cosmic Microwave Background の略語であり、宇宙の晴れ上がりによって自由に飛びまわるようになった光子のことである。今日、この CMB の解析により宇宙論パラメーターには様々な制限が厳しく付けられる。それによる最新データを以下に記しておく：

Mean and 68% Confidence Errors	
Amplitude of fluctuations	$A = 0.83^{+0.09}_{-0.08}$
Spectral Index at $k = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$	$n_s = 0.93 \pm 0.03$
Derivative of Spectral Index	$dn_s/d\ln k = -0.031^{+0.016}_{-0.018}$
Hubble Constant	$h = 0.71^{+0.04}_{-0.03}$
Baryon Density	$\Omega_b h^2 = 0.0224 \pm 0.0009$
Matter Density	$\Omega_m h^2 = 0.135^{+0.008}_{-0.009}$
Optical Depth	$\tau = 0.17 \pm 0.06$
Matter Power Spectrum Normalization	$\sigma_8 = 0.84 \pm 0.04$
Characteristic Amplitude of Velocity Fluctuations	$\sigma_8 \Omega_m^{0.6} = 0.38^{+0.04}_{-0.05}$
Baryon Density/Critical Density	$\Omega_b = 0.044 \pm 0.004$
Matter Density/Critical Density	$\Omega_m = 0.27 \pm 0.04$
Age of the Universe	$t_0 = 13.7 \pm 0.2 \text{ Gyr}$
Reionization Redshift ^b	$z_r = 17 \pm 4$
Decoupling Redshift	$z_{dec} = 1089 \pm 1$
Age of the Universe at Decoupling	$t_{dec} = 379^{+8}_{-7} \text{ kyr}$
Thickness of Surface of Last Scatter	$\Delta z_{dec} = 195 \pm 2$
Thickness of Surface of Last Scatter	$\Delta t_{dec} = 118^{+3}_{-2} \text{ kyr}$
Redshift of Matter/Radiation Equality	$z_{eq} = 3233^{+194}_{-210}$
Sound Horizon at Decoupling	$r_s = 147 \pm 2 \text{ Mpc}$
Angular Size Distance to the Decoupling Surface	$d_A = 14.0^{+0.2}_{-0.3} \text{ Gpc}$
Acoustic Angular Scale ^c	$\ell_A = 301 \pm 1$
Current Density of Baryons	$n_b = (2.5 \pm 0.1) \times 10^{-7} \text{ cm}^{-3}$
Baryon/Photon Ratio	$\eta = (6.1^{+0.3}_{-0.2}) \times 10^{-10}$

^aFit to the WMAP, CBI, ACBAR, 2dFGRS and Lyman α forest data

^bAssumes ionization fraction, $x_e = 1$

^c $l_A = \pi d_C / r_s$

表1 (Ref[65] より引用)

CMB の観測から、CMB anisotropy maps と呼ばれる、宇宙の一様性を表わす立体図が作られる。この CMB anisotropy maps から様々な情報を取り出す方法は、少なくとも原理的には、シンプルである。その方法とは、パラメーターの数をいくつか (たいてい 6 つか 7 つ) に固定したある宇宙論のモデルを使って考えていくと、N 次元尤度表面 (N-dimensional likelihood surface) のピークから最も最適なパラメーターが決定される、というものである。

このような解析方法により WMAP のデータのみから導出すると baryon abundance $\Omega_b h^2$ と matter abundance $\Omega_M h^2$ は以下のように得られる :

$$\begin{aligned} \Omega_b h^2 &= 0.024 \pm 0.001 \\ \Omega_M h^2 &= 0.14 \pm 0.02 \end{aligned} \tag{29}$$

ここで h は $100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ を単位としたハッブル定数を表わすものである。さらに、ACBAR や CBI などの研究グループのデータも合わせて考慮すると、これらはより詳しく

決定される：

$$\begin{aligned}\Omega_b h^2 &= 0.0224 \pm 0.0009 \\ \Omega_M h^2 &= 0.135^{+0.008}_{-0.009}\end{aligned}\tag{30}$$

ちなみに、この結果が BBN により予言される値

$$0.018 < \Omega_b h^2 < 0.023\tag{31}$$

とも一致しているという事実は Big Bang scenario の完成度の高さを表わす良い例である。
(30) 式、(31) 式のどちらからも、目に見えない非バリオン的物質が宇宙には大量に存在していることが読み取れる。

3 dark matter candidate

前のセクションで見たように、様々なスケールで非バリオン的 dark matter の存在証拠が観測されている。ところが、初めに存在が指摘されてから半世紀以上経った現在でもその正体については謎のままである。このセクションでは、これまでの多数の研究においてどんな dark matter 候補が提案されてきたのか、また、それらの候補に対して今現在どのような制限がつけられているのかを、Ref[15] の議論に基づき見ていく。特に、現在有力な候補の 1 つであり、この論文でも後に研究対象とする超対称性粒子については詳しく調べていくことにする。

また、以下で様々な候補を見ていくにあたって注意点がある。それは、dark matter が 1 つの粒子種で構成されているとは限らない、ということである。実際、dark matter の成分に対するニュートリノからの寄与が 0 ではない、という事は既に分かっている。したがって、dark matter が数種類の成分から成っていると考えると、relic density の上限については厳しく守る必要があるが、ある一種類の成分の寄与のみで観測から分かっている density にまで到達しなくとも良い、ということになる。

3.1 Standard Model neutrinos

ニュートリノはこれまで数多くの研究において dark matter の有力候補として考えられてきた。相対論的な粒子に対するボルツマン方程式を解くことにより、ニュートリノの total relic density は次式のようになることがわかっている：

$$\Omega_\nu h^2 = \sum_i \frac{m_i}{93eV} \quad (32)$$

$m_i \Rightarrow$ i 世代目のニュートリノの mass

一方、ニュートリノの mass には実験から次のように制限がつけられている：

$$m_\nu < 2.05eV \quad (33)$$

また、太陽ニュートリノに関する実験、大気ニュートリノに関する実験がそれぞれ以下のような結果を出したことにより 3 つのニュートリノの質量差がかなり小さいということも分かっている：

$$\begin{aligned} \Delta m^2 &\approx 7 \times 10^{-5} (eV)^2 \\ \Delta m^2 &\approx 3 \times 10^{-3} (eV)^2 \end{aligned} \quad (34)$$

よって、(34) 式の mass 上限値を 3 つのニュートリノ全てに適用することができ、このことと (33) 式とを合わせて考えると、以下のように relic density に対しての上限が得られる：

$$\Omega_\nu h^2 \leq 0.07 \quad (35)$$

この結果と図 1 とを比較すれば、ニュートリノは dark matter の dominant component としては足りなすぎる、ということは明らかである。また、補足となるが、CMB の解析からは relic density により厳しく制限が付けられている：

$$\Omega_\nu h^2 \leq 0.0067 \quad (36)$$

この結果からニュートリノの mass に制限を付けると、上で見た制限 [(34) 式] より、以下のように厳しく上限が付けられることが分かっている：

$$m_\nu < 0.23eV \quad (37)$$

もしニュートリノに新たな相互作用が存在すれば、ここで調べてきたニュートリノの mass に対する制限はかなり変わりうるが、そのような相互作用は今のところ見つかっていない。

宇宙論的なスケールからもニュートリノと dark matter との関係に制限が付けられる。ニュートリノは相対論的な collisionless particle であることから、free-streaming length と呼ばれるスケール ($\sim 40Mpc(m_\nu/30eV)$) 以下の揺らぎを消す、ということが知られている (Ref[22] 参照)。もしニュートリノが dark matter の dominant component であるとすると、この現象により宇宙の大規模構造は top-down 型構造形成によって作られることになる。ところが、我々の銀河が local group より古く見えるなどの宇宙論的観測により、現在では、宇宙の大規模構造は bottom-up 型構造形成で作られたということが分かっており、このことからもニュートリノを dark matter の dominant component と見なすのは難しくなってきている。

3.2 sterile neutrinos

上で見たように、標準理論のニュートリノで dark matter の正体を解明することは出来なかった。そこで、sterile neutrino と呼ばれる粒子を dark matter の候補として仮定した研究がなされた (Ref[23] 参照)。これは標準理論のニュートリノに似てはいるが、弱い相互作用をせず、非相対論的にもなり得る仮定的粒子である。

reionization の光学的厚みに対する WMAP の解析結果がもし正しいとすると、 $z > 20$ 以前に massive stars を形成するためには、その時期には dark matter も配置されていなくてはならないことになる。しかし、これはもし $m_{DM} \leq 10KeV$ であれば、無理であることが分かっている。これにより、 $mass <$ 数 KeV のニュートリノは dark matter の候補から除外される。ところが、この光学的厚みに対して、sterile neutrino のような decaying particle による reionization であると考える別解釈が出来る、という研究もある [Ref[7]]。また、かなり小さな lepton asymmetry が存在するならば、sterile neutrino は cold dark matter にもなり得る (Ref[24] 参照)。この場合 sterile neutrino は上で述べた mass の制限に反することなく dark matter の候補となることが可能である。

3.3 axion

素粒子物理における CP の破れの問題を解決するために導入された粒子である axion は、dark matter の候補としても研究対象となっている。実験や stellar cooling、supernovae 1987A の dynamics から axion には以下のように mass の制限がつけられている：

$$m_{\text{axion}} < 0.01 \text{eV} \quad (38)$$

また、axion は他の粒子との相互作用が非常に弱いため、宇宙初期において熱平衡状態には無かったということが分かっている。現在のところ axion について他に分かっていることはかなり少ない。production mechanism についてもほとんど分かっていないのだが、axion の relic density の計算は production mechanism によっているため、結果として不確かな relic density の値しか得られない。しかし、このように確かな情報があまりにも少なく、より詳しい研究が困難であるにも関わらず、現在の制限に反しないパラメーター領域も存在しており、axion は今日においても dark matter 候補の 1 つとして考えられている (Ref[25] などを参照)。

3.4 sneutrinos

これは標準理論における neutrino の superpartner である。その mass が $550 \text{GeV} \leq m \leq 2300 \text{GeV}$ の範囲内にあれば sneutrino は dark matter の有力候補になる、と長い間考えられてきた。しかし、核子を用いた直接検出の実験から sneutrino は dark matter にはなり得ない、ということが既に分かっている (Ref[26] 参照)。

3.5 gravitinos

gravitino は重力相互作用の伝達粒子である graviton の superpartner であり、gauge mediated SUSY などいくつかのモデルにおいては、gravitino は最も軽い超対称性粒子 (Lightest Supersymmetric Particle : LSP) であると考えられている。セクション 3.10 で論じていくように、LSP は dark matter 候補になりえることより、LSP gravitino も dark matter の候補としてかなり有力視されているものの 1 つである。しかし重力相互作用しかしないために検出が極めて困難であるという問題がある。また、宇宙論においても長寿命の gravitino は BBN への影響を通してなどで、gravitino 問題と呼ばれる様々な問題を抱えていることが知られている (Ref[27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36])。さらに、もし再加熱温度が十分に低くない場合、宇宙初期に gravitino が overproduce されてしまうかもしれない、という問題点もある (Ref[33])。gravitino は宇宙論的に問題が多いため dark matter 候補として不適切であるかのように見えるが、これらの問題に対してはいくつかうまい解決策が存在しそる、そのため現在でも有力候補の 1 つとなっている。

3.6 axinos

これは axion の superpartner であり、最近まで hot dark matter、warm dark matter 両方の候補として研究されてきた (Ref[37, 38])。また、再加熱温度がかなり低い場合には、axino は cold dark matter にもなり得るという研究もある [Ref[8, 9, 10, 11]]。すなわちこの粒子には様々な可能性が秘められているといえる。補足となるが、多くの面において axino は gravitino と現象論的に類似の性質を持っていると考えられている。

3.7 light scalar dark matter

フェルミオンの dark matter 候補を考えると、その mass は Lee-Weinberg bound により以下のように制限される (Ref[17]) :

$$m_{fermion} \geq few(GeV) \quad (39)$$

この制限はフェルミオンにのみ適用可能なものであり、その他の場合（例えば、スカラー粒子など）には無効となることから mass が $1 \sim 100\text{MeV}$ のスカラー粒子候補などの研究もなされている (Ref[39, 40])。この “その他の場合” に相当する候補が、最近、実験的な方面から注目されている。どういうことかというと、例えば Ref[1] の研究で次のような主張がなされている：

『galactic bulge から観測される 511KeV の γ -ray line emission は、dark matter の annihilation から生じた e^+ の annihilation によって生成されたものかもしれない』

この仮説を確かなものにするため、今後さらなる観測確認が必要とされている。

また、最近には、この 511KeV の γ -ray line emission の観測を基にして、sterile neutrinos (Ref[42]) や R-parity の破れをもつ axino (Ref[41]) などが light decaying dark matter として研究され始めている。この 511KeV emission は今後注目すべき対象であるかもしれない。

3.8 dark matter from little Higgs models

weak scale を安定化させる機構としては、SUSY が最も知られているが、それにかわる機構として “little Higgs models” というものが存在し、研究されている (Ref[43, 44, 45, 46])。このモデルにおいては、標準理論の Higgs は pseudo-Goldstone boson であり、その mass は近似的な非線形大局的対称性によりまもられている。このモデルでは、Higgs mass に対する発散は 2-ループレベルにのみ存在し、それにより、 10TeV ほどまでであれば effective field theory は安定化され得る。

このような little Higgs の機構において、少なくとも 2 つのモデルが dark matter 候補となり得る粒子を含んでいる。その中の 1 つは “theory space” little Higgs models と呼ばれるものであり、観測に矛盾しない dark matter relic density を与え得る安定なスカラー粒

子を含んでいる。このモデルの dark matter 候補粒子に関して Ref[12] の研究は次のような主張をしている：

『この候補粒子の検出可能性は、SUSY または universal extra dimension において存在する WIMPs の検出可能性と同様のものになるようである』

もう 1 つのモデルは Cheng と Low により考え出されたもので、もともとは電弱スケールと電弱精密測定により制限される新粒子の mass との間の階層性を解決するためのモデルである (Ref[16])。その具体的な解決策は、TeV スケールにおける新たな対称性を導入する、というものであった。この新たな対称性の導入による結果として、数 TeV の mass を持つ安定な WIMP が理論の中に現れることになり、これが dark matter の候補になり得るのである。

これらの little Higgs model から出てくる dark matter 候補粒子を安定化させるためには、この粒子の decay を防ぐ離散的対称性が必要となる。この対称性は fundamental なものであり、UV completion における演算子により破られることはない、という仮定をつけなくてはならない。

3.9 Kaluza-Klein states

我々の世界は 4 次元だが高エネルギー スケールでは別の次元が出現する可能性がある。このような概念をもとにして 1921 年に Kaluza は電磁力と重力とを統一し得る理論、すなわち余剰次元理論を提唱した。この余剰次元理論では次の用語が用いられる：

brane \implies 通常の $(3 + 1)$ 次元の時空

bulk \implies brane が埋め込まれている $(3 + \delta + 1)$ 次元の時空

この余剰次元理論の一般的特徴として以下のようなものがある：

『余次元のコンパクト化により bulk における全ての場の propagating は $p^2 \sim 1/R^2$ を単位として量子化される運動量をもつ』

ただし R は余次元がコンパクト化されている空間のサイズを表わす。この量子化の結果として、各 bulk の場に対し Kaluza-Klein(KK) states と呼ばれる、フーリエ展開で表わされる様々なモードのセットが現れる。この KK-states も dark matter 候補となり得るもの 1 つである (Ref[47])。具体的に候補として考えられているのは、フォトンの first KK excitation、より正確にはフォトンの hypercharge を持ったゲージボソンの first KK excitation である。Servant と Tait によるフォトンの first KK excitation relic density の計算結果を基にして考えると、dark matter として観測に矛盾しないようにするために、この粒子の mass は以下のように制限される [Ref[13]]：

$$400\text{GeV} \leq m \leq 1200\text{GeV} \quad (40)$$

このように重い mass をもつ KK particle の直接検出のためには非常に大きな検出器が必要であり、次代の実験 (GENIUS や XENON) を待たなくてはならないようだ。また、2007 年稼動予定の LHC でも TeV スケールまでの余剰次元理論については調べることが出来るはずであり、その成果に余剰次元理論解明、また KK-states dark matter 検出の期待がかかる。

3.10 neutralinos

neutralinos は、4 つの粒子

- bino \implies 標準理論における力の媒介粒子である B-boson の superpartner
- wino \implies 標準理論における力の媒介粒子である W^3 -boson の superpartner
- Higgsino 1 \implies 標準理論において質量の起源となる Higgs boson の superpartner
- Higgsino 2 \implies 標準理論において質量の起源となる Higgs boson の superpartner

の線形結合で構成されるもので、以下のように表わされる：

$$\chi = N_{11}\tilde{B} + N_{12}\tilde{W}_3 + N_{13}\tilde{H}_1^0 + N_{14}\tilde{H}_2^0 \quad (41)$$

この表式のように、質量の固有状態 $(\tilde{B}, \tilde{W}_3, \tilde{H}_1^0, \tilde{H}_2^0)$ で neutralinos を表わした場合、 N_{11} などを決定する neutralino mass matrix は次のように書くことが出来る：

$$\begin{pmatrix} M_1 & 0 & -M_Z \cos\beta \sin\theta_W & M_Z \sin\beta \sin\theta_W \\ 0 & M_2 & M_Z \cos\beta \cos\theta_W & -M_Z \sin\beta \cos\theta_W \\ -M_Z \cos\beta \sin\theta_W & M_Z \cos\beta \cos\theta_W & 0 & -\mu \\ M_Z \sin\beta \sin\theta_W & -M_Z \sin\beta \cos\theta_W & -\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (42)$$

$M_1 \implies$ bino mass parameter

$M_2 \implies$ wino mass parameter

$\tan\beta \implies$ Higgs boson の真空期待値の比

$\mu \implies$ higgsino mass parameter

最小限に標準理論を拡張した超対称性理論 (Minimal Supersymmetric Standard Model:MSSM) のいくつかのモデルにおいては neutralinos が LSP であると考えられており、それに関連し dark matter の有力候補としても考えられている。この論文においても後のほうで neutralinos を dark matter として扱い研究していくので、このサブセクションにおいて詳しく調べていくことにする。

neutralinos が dark matter の最も有力な候補の 1 つであると考えられるにはいくつかの理由がある、まずはそれについてを見ていく。MSSM を作り上げていく際に、proton decay を禁止するため R-parity という次式で表わされる離散的対称性の保存を要請する：

$$R = (-1)^{2S+3(B-L)} \quad (43)$$

ここで S、B、L はそれぞれある粒子のスピン、バリオン数、レプトン数を表わす。この式に従い計算すると標準理論の粒子には $R = +1$ 、超対称性理論の粒子には $R = -1$ となる。R-parity の保存とは、ある反応において始状態粒子の各 R の積の値は終状態粒子の各 R の積の値と同じになる、というものである。すなわち、これを考慮すると、LSP は他の粒子に decay することが出来ず、宇宙論的なスケールの時間で安定な粒子となる。これこそが neutralinos が dark matter の候補と考えられる最も大きな理由である。

また、観測により dark matter は非バリオン的な中性物質であることが分かっているが、neutralinos はこの条件も満たしている。さらに、セクション 3.1 で述べたように、構造形成の議論から dark matter は非相対論的な粒子でなければならない、これについても neutralinos の mass は実験から十分に重いことが分かっているので、条件をしっかりと満たしている。これらの理由などから neutralinos が有力候補として考えられるのである。

neutralino が dark matter であるとした場合に観測と矛盾しないようにするために、その mass の可能な範囲がおよそ $200\text{GeV} \sim 2000\text{GeV}$ となることが様々な研究により分かっている。これは近い将来加速器において到達しえるエネルギーレベルであるので、dark matter の研究と加速器の物理が密接に関わってくるであろう事が予想される。(セクション 5 参照)

3.11 その他の dark matter 候補

ここまで見てきたいいくつかの dark matter 候補の他にも多数の候補が研究されてきた。ここでは詳しく取り上げないが、以下にその候補名のみを記しておく：

- Q-balls (Ref[48, 49])
- mirror particles (Ref[50, 51, 52, 53, 54])
- charged massive particles(CHAMPs)(Ref[55])
- self interacting dark matter(Ref[56, 57])
- D-matter(Ref[58])
- cryptons(Ref[59, 60])
- superweakly interacting dark matter(Ref[61])
- heavy fourth generation neutrinos(Ref[62])
- brane world dark matter(Ref[63, 64])

4 relic abundance calculation

4.1 このセクションで見ていく内容

dark matter の研究において、relic abundance の計算は数多くなされてきた。代表例としては、Lee-Weinberg calculation(Ref[17]) などがあげられる。ここでは、スタンダードな方法では正確な結果が出せず、修正された扱いが必要となるような 3 つのケースについてを、Ref[18] の議論に基づいて考えていく。

一つ目のケースは、relic particle がある理論の枠組みにおける粒子の中で最も軽く、その mass とほとんど同じくらいだがわずかにより重い mass を持った粒子が存在する場合である。このケースにおいては、最も軽い粒子の relic abundance はそれ自身の annihilation cross section だけでなく、この粒子と extra particles との annihilation も含めて考慮して決定される。この extra particles との annihilation を coannihilation と呼ぶことにする。

二つ目のケースにおいては、relic particle より重い粒子への annihilation を含めて考える。この annihilation を "forbidden" channel annihilation と呼ぶことにする。これまでの研究ではこれは運動学的に無理であると見なされてきた。しかし、もし heavier particle が 5~10 %だけ重いものであれば、これらの channel が annihilation cross section において支配的となり、relic abundance を決定するうえで重要となる場合がある。ちなみに、annihilating particle が final-state particle より軽い場合に考えられる final-state としては次のようなものが一例として考えられる： $t\bar{t}$, W^+W^- , Higgs bosons, などなど。

三つ目のケースは、annihilation がプロパゲーターのポール付近領域で起こる場合である。これは、例えば、relic particle mass $\simeq m_Z/2$ の場合に、Z boson propagator を通して反応が起こる時にこの propagator 内からポールが出来ることにより起こりうる。このケースにおいても通常の場合に比べ大きくクロスセクションがかわり、relic abundance にもかなりの影響がすることになる。

3 つのケース全てに対して、より正確な取り扱いを可能とする simple formula を導出していく。

4.2 standard calculation of relic abundance

ここでは、Lee-Weinberg scenario における粒子種 χ の relic abundance 計算の standard technique について見ていく。計算をしていくうえで以下の 2 つの点に注意する：

- 10~20 % の補正は大して気にせずに進めていく
- 最近の improvements はあまり深く考慮しない

relic abundance は χ の個数密度 n に対する次式のボルツマン方程式を解くことによって得られる（導出については appendix を参照せよ）：

$$\frac{dn}{dt} = -3Hn - \langle \sigma v \rangle [n^2 - (n^{eq})^2] \quad (44)$$

H : ハップルパラメーター

n^{eq} : 平衡状態における χ の個数密度

v : 相対速度

$\langle \sigma v \rangle$: $\chi + \chi \rightarrow (all)$ に対するクロスセクションの熱平均

n^{eq} としては以下の非相対論的近似式を使う :

$$n^{eq} \approx g(mT/2\pi)^{\frac{3}{2}} \exp(-m/T) \quad (45)$$

g : χ の自由度 (スピン、カラー、など)

T : 温度

m : χ の mass

非相対論的な dark matter (Cold dark matter: CDM) として振舞う粒子に対しては以下のことが分かっている :

- freeze-out temperature $T \sim m/25$
- 非相対論的 equilibrium abundance

多くの場合、熱平均化前のクロスセクションは v^2 でテイラーフォーマンスされたものであらわされる (ただし、反応時の相対速度はそれほど大きくないと仮定して v^2 の高次の項は落として考える):

$$\sigma v = a + bv^2 \quad (46)$$

このクロスセクションの熱平均をとると次式のようになる :

$$\langle \sigma v \rangle = a + 6bT/m \quad (47)$$

(45) 式は数値的に解くことが可能であるが、以下では近似的に解析的な解を求めていく。まず用語の説明をしておく。ある粒子の反応率が宇宙の膨張率に比べ大きい場合、その粒子は熱平衡の状態にあることになる。しかし、宇宙膨張による個数密度低下によってこの粒子の反応率が宇宙の膨張率以下になり、この粒子は熱平衡状態でいられなくなる。ある粒子が熱平衡状態から外れるこの瞬間の事を freeze-out という。また、freeze-out 後に非相対論的に振舞う粒子種を cold relics、相対論的に振舞う粒子種を hot relics と呼ぶ。freeze-out 前の段階では $n \simeq n^{eq}$ であるが、温度が下がっていき freeze-out の状態になると n^{eq} は指数関数的に落ちていき $n^{eq} = 0$ となる。つまり、freeze-out 時以降であれば (45) 式の n^{eq} は落として考えることができ、(45) 式は積分可能になる。このようにして、2つの時期それぞれにおける近似解を出し、それらを freeze-out point で一致させるようにすることで、(45) 式の解を近似的にではあるが解析的に求めることができる。

以下では、Ref[2] を参考にして、cold relics に限定して考えていく。freeze-out point は次式であらわされる：

$$x_f = \ln \left[\frac{0.038 g m_{pl} m < \sigma v >}{g_*^{1/2} x_f^{1/2}} \right] \quad (48)$$

$$x = m/T$$

$$m_{pl} = 1.22 \times 10^{19} GeV$$

g_* : freeze-out 時の相対論的自由度

((49) 式の導出については appendix を参照せよ。) (49) 式を解く方法としては一般的には逐次近似法が用いられる。

freeze-out 時では $n \simeq n^{eq}$ であるが、freeze-out 後では relic particles の annihilation により relic abundance は減少していく。この annihilation の効果は以下の積分 J を通して relic density 計算の中に現れる：

$$J(x_f) = \int_{x_f}^{\infty} \frac{< \sigma v >}{x^2} dx \quad (49)$$

この $J(x_f)$ を使うと、 χ particle の今日の mass density は以下のようにあらわされる：

$$\Omega h^2 \approx \frac{1.09 \times 10^9 GeV^{-1}}{J g_*^{1/2} m_{pl}} \quad (50)$$

$$\Omega = (\text{今日の mass density}) / (\text{critical density})$$

$$h : 100 \text{ } km s^{-1} Mpc^{-1} \text{ を単位としたハッブル定数}$$

また、 $< \sigma v >$ を展開形で表した場合、 χ particle の今日の relic density は近似的に次のように書ける：

$$\Omega h^2 = \frac{1.09 \times 10^9 x_f}{g_*^{1/2} m_{pl} (GeV) (a + 3b/x_f)} \quad (51)$$

ここまで見てきた計算にはいくつか弱点が存在している、以下にそれらを列挙していく：

弱点 1

equilibrium abundance の計算においての非相対論的近似の仮定

弱点 2

熱平均化クロスセクションの計算においても非相対論的アプローチを仮定

⇒ ref[3] で指摘されているように、これは 10 % ほどのエラーを導くことになるかもしれない

弱点 3

g_* は annihilation が効かなくなるまで一定のまま、という仮定

⇒ この近似は quark-hadron transition が起こっているときに freeze-out が起こっていると最も精度が悪くなる。しかし、実際には、この場合でさえ大したエラーにはならない

しかしながら、ここで述べてきたことそれほど重要な問題にはならないので、この論文においてはこれらの小さな omissions は無視していくことにする。むしろ我々の議論においてより問題となる重要な点は、

『 x_f の決定、または、ボルツマン方程式が近似的に解ける 2 つの時期の matching point の決定』

である。 x_f は early times で $n \approx n^{eq}$ を仮定することによって導くことができる。このとき、 $\delta = n - n^{eq}$ については解析的に解くことが可能である (Ref[2] 参照)。また、この δ を用いると freeze-out point は、 $\delta = cn^{eq}$ (c はオーダー 1 の定数) となるとき、という定義で与えられる。これらについて考えていく際に、ベキの形で温度依存が入っている熱平均化クロスセクション $\langle \sigma v \rangle \sim T^n$ に対する c の便利なとり方は以下のとり方である：

$$c(c+1) = n+1 \quad (52)$$

ちなみに、(49) 式で使った値は $n = 0$ 、 $c = \sqrt{2} - 1$ である。この論文で考えるケースに対しては、クロスセクションはシンプルなベキ則ではなく、もっと複雑な温度依存性をもっているかもしれない。したがって、 x_f と matching point の決定についてもより複雑化するため、可能な限り正確なものに考え方直す必要がある。

x_f の小さなエラーはせいぜい annihilation integral J に小さな違いをもたらす程度である。しかし、我々が考えていくケースではこれが実際に起こりうるので、気にとめておく。これらの事を気にとめておきつつ、この論文で考えていく際には $c = \sqrt{2} - 1$ を使って考えていく。この c のとり方で大きなエラーが出ることはない、という事を示すために、後の方でボルツマン方程式を数値的に解いた結果と比較することにする。

ここまでで見てきた relic abundance 計算の流れをまとめておく：

- (a) (45) 式のように方程式を立てる
- (b) (49) 式と適切な $\langle \sigma v \rangle$ を使って x_f を求める
- (c) annihilation integral J を評価し、その結果を (51) 式に代入する

このとき重要なポイントとなるのは、ステップ (b)、(c) において適切な $\langle \sigma v \rangle$ を使うことである。

4.3 relic abundance from coannihilation

ここでは relic particle(χ_1) よりわずかに重い mass の粒子 (extra particle) が存在する、というケースに注目して考えていく。もし mass difference $\delta m = m - m_1$ が $T_f (\Rightarrow \chi_1)$ の annihilation が freeze-out するときの温度) に比べて大きければ、この extra particle の存在はほとんど無意味になる。しかし、もし $\delta m \cong T_f$ であれば、この extra particle が relic particle と同じくらい熱浴から生成されることになる。 T_f と m_1 の関係が

$$T_f \approx m_1/25 \quad (53)$$

となるようなケースが我々が注目すべきものである。このような場合に、もし mass degeneracy が 5~10 % くらいであれば、extra particle がからんだ annihilation が relic abundance に大きく影響しえる。

ここから、初期宇宙における、粒子 $\chi_i (i = 1, 2, \dots, N)$ の時間発展について考える。この χ_i は standard model には存在しない、なにか特別の対称性を持った粒子である。具体例としては以下のようなものが考えられる：

- R-parity を課した SUSY particle
- それ自身のある対称性を課した pseudo-Higgs particles(Ref(4) 参照)

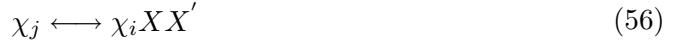
これらの粒子に、 $i < j$ ならば $m_i < m_j$ となるように label づけする：

$$\chi_1(\text{mass} : m_1) \implies \text{lightest}$$

$$\chi_2(\text{mass} : m_2) \implies \text{second lightest}$$

ここで 1 つ注意点がある。それは我々が興味があるのは、とにかく何か安定な lightest particle が dark matter 候補となる場合であり、決してこの候補のために特別に保存される対称性を仮定するわけではない、という点である。

χ_i の個数密度を変え、それらの abundance 決定に関わってくる反応は以下のようものが考えられる：



ここで X 、 X' は standard model の粒子である。また、仮定されている対称性により以下の反応は禁止されている：



もし (57) 式の反応が reasonable rate で起こるのであれば、全ての $\chi_i (i > 1)$ は今日までに χ_1 へと decay したと考えるのが自然である。(55~57) 式の反応全てを考慮したボルツマン方程式は次式で表わされる：

$$\frac{dn_i}{dt} = -3Hn_i - \Sigma_{j,X} [\langle \sigma_{ij} v \rangle (n_i n_j - n_i^{eq} n_j^{eq}) - \langle \sigma'_{ij} v \rangle n_i n_X - \langle \sigma'_{ji} v \rangle n_j n_{X'}] - \Gamma_{ij} (n_i - n_i^{eq}) \quad (58)$$

このボルツマン方程式の右辺の各項が表わしている内容：

第 1 項

⇒ 宇宙膨張による個数密度の希薄化

第 2 項

⇒ (55) 式の反応 (both forward and backward) の効果

第 3 項

⇒ (56) 式の反応 (both forward and backward) の効果

第 4 項

⇒ decay と inverse decay の効果

これで lightest particle の個数密度について解析していく用意が出来たわけではない。なぜなら、annihilation で消え尽くさなかった $\chi_i (i > 1)$ も最終的には χ_1 に decay するので、 n_i に關係してくるのは単純に n_i だけではなく、 χ_i の total density $n = \Sigma_i n_i$ となる。したがって、ボルツマン方程式も全粒子種を含めて以下のように書き直さなくてはならない：

$$\frac{dn}{dt} = -3Hn - \Sigma_{i,j} [\langle \sigma_{ij} v \rangle (n_i n_j - n_i^{eq} n_j^{eq})] \quad (59)$$

このボルツマン方程式をどのようにして導出したのかを見していく。簡単化のために $N = 2$ の場合で考える。まず、左辺と右辺第一項、第二項は単純に (59) 式の左辺と右辺第一項、第二項において i についての和をとるだけである。(59) 式の右辺の残りの項についても同様にすれば良いのであるが、ここで注意が必要となる。注意点そのものは残りの項全てに共通であるので、一番最後の項についてだけ具体的に示していく。一番最後の項において i について和をとると

$$\begin{aligned} \Sigma_{i,j} \Gamma_{ij} (n_i - n_i^{eq}) &= \Sigma_j (\Gamma_{1j} + \Gamma_{2j}) (n_1 + n_2 - n_1^{eq} - n_2^{eq}) \\ &= (\Gamma_{12} + \Gamma_{21}) (n_1 + n_2 - n_1^{eq} - n_2^{eq}) \end{aligned} \quad (60)$$

となる。ここで、 Γ_{12} と Γ_{21} は decay と inverse decay によりキャンセルして 0 と見なすことが可能なので、結局 $\Gamma_{12} + \Gamma_{21} = 0$ となり、この一番最後の項の寄与は実質無くなってしまうことになる。他の残っていた二項についても同様にして考えると、その寄与は 0 になる。これで (60) 式の導出は完成となる。しかし (60) 式に関するいくつか注意点が残っている：

- χ particle は自分自身と annihilate しうる、 cosmic asymmetry を持たないスカラーまたはマヨラナフェルミオンであると暗に仮定を付けてあった
⇒ しかしディラックフェルミオンの場合の方程式も同様の手順で簡単に導出可能である
- (55) 式の反応において $i = j$ の場合は (60) 式にファクター 2 を付けなくてはならないのでは？

↓

同種粒子が入ってくることを考慮すると、熱平均化においてファクター $\frac{1}{2}$ がつくので、 $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ となり結局式の形は変わらない

- (60) 式の和は i, j 両方でとり、 σ_{ij} は symmetric であることから、 σ_{12} のような項の前にはファクター 2 がつく

ここから先ではいよいよ、freeze-out に関連する温度あたりでの、(55) 式の反応と (56) 式、(57) 式の反応との反応率の大きな違いについて調べていき、それによりもたらされる効果についてを見ていく。(55) 式、(57) 式のタイプの反応率はそれぞれ概算で以下のようになる：

$$\begin{aligned} n_i n_j \sigma_{ij} &\sim T^3 m_i^{\frac{3}{2}} m_j^{\frac{3}{2}} \sigma_{ij} \exp[-(m_i + m_j)/T] \\ n_i n_X \sigma'_{ij} &\sim T^{\frac{9}{2}} m_i^{\frac{3}{2}} \sigma'_{ij} \exp[-m_i/T] \end{aligned} \quad (61)$$

ここで、

- dark matter 候補の粒子は $T_f \sim m/25$ で freeze-out
- $\sigma_{ij} \simeq \sigma'_{ij}$

という 2 つの仮定を用いると、これら 2 タイプの反応率の違いは大雑把に次式のように評価することができる：

$$\begin{aligned} n_i n_X \sigma'_{ij} / n_i n_j \sigma_{ij} &\sim n_X / n_j \\ &\sim (T/m_j)^{\frac{3}{2}} \exp[m_i/T] \\ &\cong (1/25)^{\frac{3}{2}} \exp[25] \\ &\cong 10^9 \end{aligned} \quad (62)$$

relic particle の freeze-out を決定するのは (55) 式のタイプの反応であるが、今見てきたようにこのタイプの反応は他のタイプに比べて非常に弱い。よって、以下の近似関係式が成り立つことになる：

$$n_i / n \approx n_i^{eq} / n^{eq} \quad (63)$$

すなわちこの関係式は、total χ density と χ_i density の比は freeze-out 前、最中、後それぞれ同じくらいになる、ということを意味している。ここで、後の便利化のために次の量を定義する：

$$\begin{aligned} r_i &\equiv n_i^{eq}/n^{eq} \\ &= \frac{g_i(1 + \Delta_i)^{\frac{3}{2}} \exp[-x\Delta_i]}{g_{eff}} \end{aligned} \quad (64)$$

$$\begin{aligned} \Delta_i &= (m_i - m_1)/m_1 \\ g_{eff} &= \Sigma_i g_i (1 + \Delta_i)^{\frac{3}{2}} \exp[-x\Delta_i] \end{aligned} \quad (65)$$

これらの定義と $n_i/n \approx n_i^{eq}/n^{eq}$ を用いると、ボルツマン方程式 (60) 式は次のように書き直すことが出来る：

$$\frac{dn}{dt} = -3Hn - \langle \sigma_{eff} v \rangle (n^2 - n_{eq}^2) \quad (66)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{eff} &= \Sigma_{ij} \sigma_{ij} r_i r_j \\ &= \Sigma_{ij} \sigma_{ij} \frac{g_i g_j}{g_{eff}^2} (1 + \Delta_i)^{\frac{3}{2}} (1 + \Delta_j)^{\frac{3}{2}} \exp[-x(\Delta_i + \Delta_j)] \end{aligned} \quad (67)$$

この書き直されたボルツマン方程式はスタンダードな方程式の形、すなわち前のサブセクションで論じた帰着させるべき方程式の形になっている。したがって、前のサブセクションと同様の手順、すなわち、 x_f を求め、適切な annihilation integral を実行することにより relic abundance を求めることが可能である。

σ_{eff} を用いて freeze-out temperature を書き直すと

$$x_f = \ln \left[\frac{0.038 g_{eff} m_{pl} m_1 \langle \sigma_{eff} v \rangle}{g_*^{1/2} x_f^{1/2}} \right] \quad (68)$$

と表わされる。この式における σ_{eff} を前の方でもやったようにテイラー展開する：

$$\begin{aligned} \sigma_{eff} &= a_{eff} + b_{eff} v^2 \\ &= a_{eff} + 6b_{eff} x_f^{-1} \end{aligned} \quad (69)$$

これを用いた annihilation integral J は次式で表わされる：

$$\begin{aligned} J &= \int_{x_f}^{\infty} \frac{\sigma_{eff}}{x^2} dx \\ &= \int_{x_f}^{\infty} x^{-2} a_{eff} dx + \int_{x_f}^{\infty} 6x^{-3} b_{eff} dx \\ &= (a_{11} I_a + 3b_{11} I_b/x_f)/x_f \end{aligned} \quad (70)$$

$$\begin{aligned} I_a &= \frac{x_f}{a_{11}} \int_{x_f}^{\infty} x^{-2} a_{eff} dx \\ I_b &= \frac{2x_f^2}{b_{11}} \int_{x_f}^{\infty} x^{-3} b_{eff} dx \end{aligned} \quad (71)$$

この式に現れた a_{eff} 、 b_{eff} は (68) 式において σ_{ij} のところを a_{ij} 、 b_{ij} と置き換えることによって求めることができる。ここまで来れば、上の新たな J を用いて書き表した relic abundance、すなわち、extra particle の存在を考慮して計算した relic abundance を導出することができる：

$$\Omega h^2 = \frac{1.07 \times 10^9 x_f}{g_*^{1/2} m_{pl}(GeV)(a_{11}I_a + 3b_{11}I_b/x_f)} \quad (72)$$

ここで注意すべきことがある；この新たに求められた relic abundance は x_f に当然新しい x_f を用いて計算しなくてはならない。これでようやく extra particle 有りの場合と無しの場合を比較評価するための準備完了となる。実際に比較評価をしていく際には以下の R を用いて考えていく：

$$\begin{aligned} R &\equiv \Omega_{old}/\Omega_{new} \\ &\approx J_{new}(x_{f,new})/J_{old}(x_{f,old}) \end{aligned} \quad (73)$$

具体例として、まずは次のような極限で考える：

- σ_{ij} が全て同じ値
- I_a と I_b はどちらも 1

このような極限の場合、relic abundance を変えうるのは x_f 、すなわち freeze-out temperature のみとなる。また、 σ_{ij} が全て同じ値、ということより、extra particle χ_i は χ_1 particles の extra degrees of freedom として振舞う。よって、mass と自由度が共に縮退していれば、 $g_{eff} = Ng_1$ となる。この極限の仮定に加え、さらに s-wave annihilation のみで考えると、最終的に R は以下のようになる：

$$R \approx 1 - x_f^{-1} \ln[N] \approx 1 - 0.04 \ln[N] \quad (74)$$

この結果に、具体的に $N = 2$ などの典型的な値を入れてみると、5 % 以下の影響しかもたらし得ないということが分かる。つまり、ここでの解析で分かったことは、extra particle の mass が dark matter 候補と同じくらいの mass であっても、クロスセクションが同じくらいである限り、extra particle の影響はほとんど出ない、という結果である。

次の具体例として、SUSY を考慮に入れたモデルを考えてみる。注目すべき粒子を次のように設定する：

$LSP(\chi_1) \Rightarrow$ neutralino

$NLSP(\chi_2) \Rightarrow$ squarks

NLSP とは LSP の次に重い mass をもつ粒子 Next Lightest Supersymmetric Particle の事である。また、これらの粒子の mass は縮退しているとする： $m_{LSP} \cong m_{NLSP}$ 。このケースであれば、前のケースのように σ_{ij} が全て同じ値、という事にはならないであろう。実

際、適切なファインマンダイアグラムを用いて大雑把に評価することにより、それぞれの反応のクロスセクションの比は以下のようになるであろうと予測がたつ：

$$\begin{aligned}\sigma_{22}(\tilde{q}\tilde{q} \rightarrow gg) &\cong (\alpha_s/\alpha)\sigma_{12}(\tilde{\chi}\tilde{q} \rightarrow gg) \\ &\cong (\alpha_s/\alpha)^2\sigma_{11}(\tilde{\chi}\tilde{\chi} \rightarrow q\bar{q})\end{aligned}\quad (75)$$

$g \Rightarrow \text{グルーオン}$

$q \Rightarrow \text{クォーク}$

$\alpha_s \Rightarrow \text{strong-interaction coupling}$

$\alpha \Rightarrow \text{electroweak coupling}$

さらなる具体化と便利化のために、以下では、温度によらない(\Rightarrow a term only)クロスセクション $\sigma_{22} = A\sigma_{12} = A^2\sigma_{11}$ ($\alpha_s/\alpha \approx 20$ なので、 $A \approx 20$ とする)をもつ2粒子系を考える。前に求めた effective cross section を用いて、この系の effective cross section を計算すると以下のように求められる：

$$\sigma_{eff} = \sigma_{11} \left[\frac{1 + A\omega}{1 + \omega} \right]^2 \quad (76)$$

$$\begin{aligned}\omega &= (1 + \Delta)^{\frac{3}{2}} \exp(-x\Delta) g_2/g_1 \\ \Delta &= (m_2 - m_1)/m_1 \\ x &= m_1/T\end{aligned}\quad (77)$$

また、effective number of degrees of freedom を具体的に計算していくと、今考えているケースの場合、シンプルな形に帰着する：

$$\begin{aligned}g_{eff} &= \sum_i g_i (1 + \Delta_i)^{\frac{3}{2}} \exp(-x\Delta_i) \\ &= g_1 + g_2 (1 + \Delta)^{\frac{3}{2}} \exp(-x\Delta) \\ &= g_1 (1 + \omega)\end{aligned}\quad (78)$$

これらの式を利用して、まずは、degenerate limit、すなわち $\Delta = 0$ の場合について考えてみる。この limit においては、 $A \approx 20$ であることから、effective cross section は次式のように求められる：

$$\begin{aligned}\sigma_{eff}(deg) &= \sigma_{11} \left[\frac{(1 + Ag_2/g_1)^2}{(1 + g_2/g_1)^2} \right] \\ &\approx \sigma_{11} \left[\frac{A^2 g_2^2/g_1^2}{(1 + g_2/g_1)^2} \right] \\ &= \sigma_{11} \left[\frac{A^2}{(1 + g_1/g_2)^2} \right]\end{aligned}\quad (79)$$

また、ここでも s-wave annihilation が主な反応モードであると考えると、今得られた effective cross section より $R(deg)$ は次のように近似形で表わすことができる：

$$R(deg) \approx I_a \approx A^2 / (1 + g_1/g_2)^2 \quad (80)$$

この結果を具体的な状況ごとに当てはめてみる。はじめに最もシンプルな状況、すなわち、LSP と縮退した mass を持つ squark が一つだけ存在している場合を調べてみる。このとき、squark がカラーの自由度 3 を持つということに注意して考えると、 $g_2/g_1 = 3$ となり、 $R(deg)$ は以下のように求められることになる：

$$\begin{aligned} R(deg) &\approx A^2/(1+g_1/g_2)^2 \\ &\approx 400/(1+1/3)^2 \approx 200 \end{aligned} \quad (81)$$

また、今見た状況をより複雑化させた場合、すなわち、6 つの squark の left chiral state、right chiral state の全ての mass が LSP mass と縮退していればどうなるか調べてみる。この場合には、 $g_2/g_1 = 18$ になり、 $R(deg)$ は

$$\begin{aligned} R(deg) &\approx A^2/(1+g_1/g_2)^2 \\ &\approx 400/(1+1/18)^2 \approx 380 \end{aligned} \quad (82)$$

となる。ここで見てきた 2 つの具体的な状況のどちらにおいても、extra particle が大きく影響することは $R(deg)$ の値から明らかである。

ここまで LSP と NLSP の mass が完全に縮退している場合について調べてきた。では、完全には縮退していない場合 ($\Delta \neq 0$) にはどうなるであろうか？このような場合について調べるためにには、(72) 式の積分に戻って考え直さなくてはならない。以下では、様々な A 、 $x_{f,old}$ 、 g_2 に対しての数値積分の結果をグラフ化し、それを用いて extra particle の影響などを考察していく。

まず、 $A = 20$ 、 $g_2/g_1 = 3$ 、すなわち squark の 1 つのフレーバー、1 つの chiral state の mass だけが LSP mass と同じくらいであるような状況を考える。図の縦軸にある Ω_{old} 、 Ω_{new} はそれぞれ standard calculation、coannihilation を考慮した calculation によって求められた relic density を表わしているものである。また図において『+』印は $x_{f,old} = 25$ に対応したクロスセクションに対するボルツマン方程式を数値的に解いたものを、曲線は前のサブセクションで見てきた matching technique を用いて解いたものを表わしている。見れば明らかのように、matching technique の結果と数値的に解いた結果は高精度で一致している。したがって、前のサブセクションで残されていた不確かな部分は取り除かれたことになる。すなわち、matching point を freeze-out の時点に決めて解析を行ったことに問題は無かった、という結論が得られた。ここで注意すべきことがある。それは実際の $x_{f,old}$ の値は neutralino の構成とその mass の詳細によっているものであるが、ここではそれらについては深くは考慮せずに大まかな振る舞いを見ている、ということである。

次に、 $x_{f,old} = 25$ 、 $g_2/g_1 = 3$ に固定して A を様々な値に変化させた場合、また、 $A = 20$ 、 $x_{f,old} = 25$ を固定して g_2/g_1 、すなわち最も軽い粒子の mass と同じくらいの mass を持つ種の数を変化させた場合の二つのケースを同時に調べていく。それぞれの場合を matching technique で解いた結果を図 4、図 5 に示す。これらの図から、共通して、最も軽い粒子の mass とそれに次ぐ軽い粒子の mass が近づくことが coannihilation に対していかに重要な影響をもたらすかが読み取れる。他のパラメーターがどんな値であれ、 $\Delta < 0.1$ を満たす限り、すなわち、注目している粒子の質量差が最も軽い粒子の mass の 10 % 以下でさ

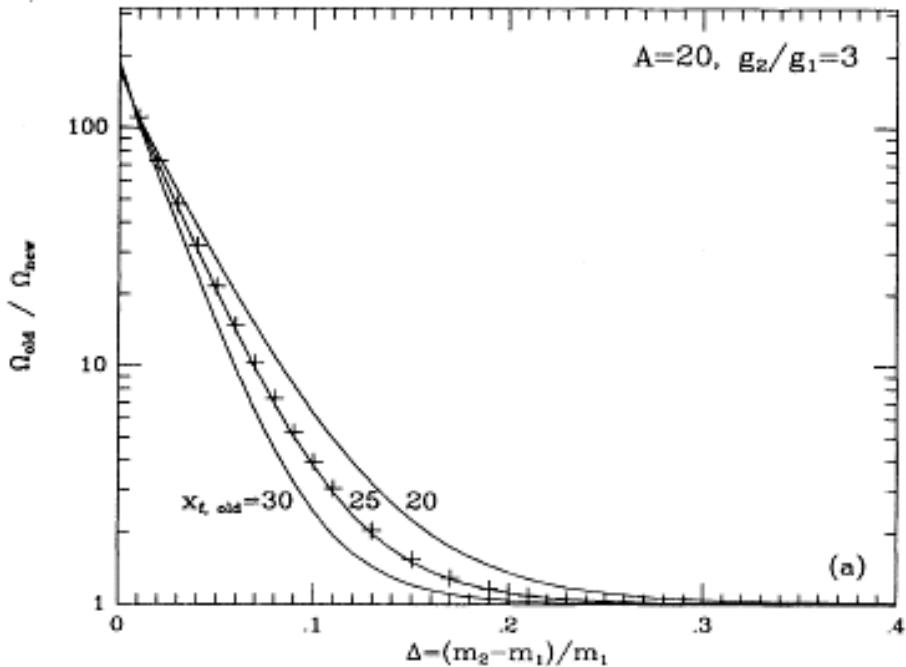


図 3: standard calculation の結果と coannihilation を考慮した calculation の結果の比較 (Ref[18] より引用)

えあれば、extra particle の存在は coannihilation に対し必ず大きく影響をもたらすことになる。質量差がこれほどまでにきつくなくとも、 A が 20 以上、または最も軽い粒子と同じくらいの mass を持つ種の数を増やせば、coannihilation に対し大きな影響がもたらされ得る、という点も重要である。

4.4 annihilation into forbidden channels

『annihilation で消える dark matter の mass の和』が『annihilation で生成される粒子の mass の和』よりわずかに軽い場合、クロスセクションが通常より大きくなる、ここではそのようなケースについて考えていく。このようなケースの具体例として、LSP χ (mass m_1) と 2 つの Higgs boson (mass m_{H_2} 、 m_{H_3}) による反応 $\chi\chi \rightarrow H_2 H_3$ を考えてみる。もし、 $2m_1 \leq m_{H_2} + m_{H_3}$ であるときにこの反応が出来るのであれば、この反応のクロスセクションは他の反応のものより 500 倍もの大きさになる。その結果、この反応が annihilation において支配的となり、relic abundance 決定に大きく関わってくることになる。標準的な扱いにおいては、この channel は相対速度が 0 の場合禁じられることから考慮されることはない。しかし、freeze-out は $T_f \approx m_1/25$ のときに起こり、このくらいの温度であれば粒子 χ はボルツマン分布状態にあるので相対速度 0 とはならず、heavier particle への

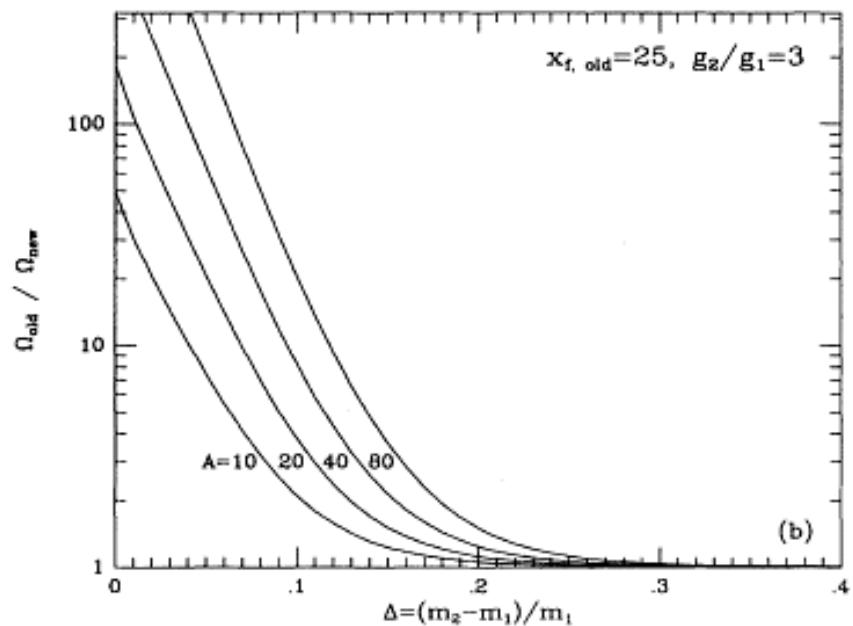


図 4: standard calculation の結果と coannihilation を考慮した calculation の結果の比較 ($x_{f,old} = 25$ 、 $g_2/g_1 = 3$ に固定して A を様々な値に変化させた場合) (Ref[18] より引用)

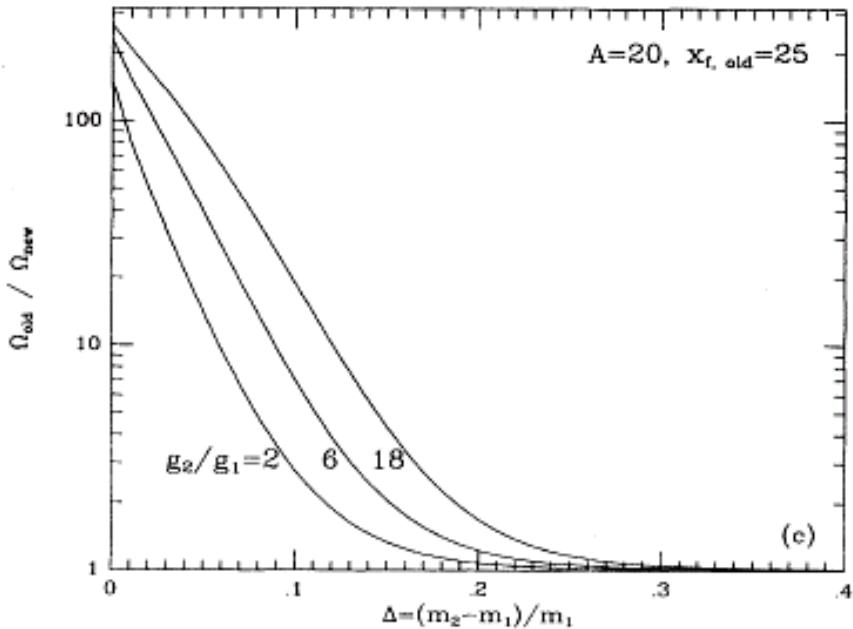


図 5: standard calculation の結果と coannihilation を考慮した calculation の結果の比較 ($A = 20$ 、 $x_{f,old} = 25$ を固定して g_2/g_1 、すなわち最も軽い粒子の mass と同じくらいの mass を持つ種の数を変化させた場合) (Ref[18] より引用)

annihilation も起こるはずである。そして、もしこの annihilation products の mass が m_1 に比べて大きすぎなければ、この種の annihilation がクロスセクションにおいて支配的になる。

具体的に forbidden case について考えていく前に、allowed channel への annihilation について先に調べていく。その際以下の設定のもとで考えていく：

- relic particle $\Rightarrow \chi_1$ (mass m_1)
- 簡単化のため、終状態粒子は両方とも mass m_2 を持つとする

前と同様に、クロスセクションはテイラー展開した形で用いる：

$$\sigma v = a + bv^2 \quad (83)$$

終状態粒子の mass が小さく、それらが相対論的に動く場合にはこの展開で問題ない。ところが、kinematics threshold 付近ではこの展開形では最も適した形とは言えない。このような場合は以下のような形の展開式を用いてクロスセクションを扱うべきである：

$$\sigma v = (a' + b' v^2) v_2 \quad (84)$$

ここで v_2 は重心系における終状態粒子の速度をあらわしている。この v_2 のファクターは終状態の位相空間積分から出てくるものであり、常に σv の中に入ってくるファクターである。このファクターこそが threshold 付近で σv が増大化する原因となるものである。

解析に便利なようにするために、mass ratio $z = m_2/m_1$ を定義し、 v_2 を以下のように書き直す：

$$\begin{aligned} v_2 &= (1 - z^2 + z^2 v^2/4)^{\frac{1}{2}} \\ &= z(v^2/4 + \mu_+^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (85)$$

$$\mu_+ = (1 - z^2)^{\frac{1}{2}}/z : v_2 の最小値$$

$$v = 2P_1/E_1 : 重心系における \chi_1 同士の相対速度$$

relic particle 同士の相対速度が小さいケースにおいては、 v_2 を展開形で表わすことができる：

$$\begin{aligned} v_2 &= (1 - z^2 + z^2 v^2/4)^{\frac{1}{2}} \\ &= (1 - z^2)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{z^2 v^2}{4(1 - z^2)}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\cong (1 - z^2)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{z^2 v^2}{8(1 - z^2)}\right) \end{aligned} \quad (86)$$

ところが、この展開式は threshold のごく近く、すなわち $z \rightarrow 1$ とした場合には不十分なものになってしまふ。なぜなら、展開時に "小さい" として扱った部分が無限大になってしまふからである。したがって、threshold 近傍でクロスセクションや relic abundance を計算す

る際には、 v_2 のファクターを近似なしでそのままにしておくことが重要となる。threshold の上 ($\Rightarrow z < 1$ or "allowed") での熱平均化クロスセクションは、ボルツマン分布にしたがって平均化することにより次のように求められる：

$$\begin{aligned} <\sigma v>_{all} &= <(a' + b' v^2)v_2> \\ &= \frac{x^{3/2}}{2\pi^{1/2}} \int_0^\infty dv v^2 \exp[-v^2 x/4] v_2(a' + b' v^2) \\ &= \frac{2z}{\pi^{1/2}} \int_0^\infty (t/x + \mu_+^2)^{1/2} t^{1/2} (a' + 4b' t/x) e^{-t} dt \end{aligned} \quad (87)$$

ここで最後の式変形においては変数変換 $t = v^2 x/4$ を用いた。

m_1 が threshold より下 ($\Rightarrow z > 1$ or forbidden) の場合にも同様の式が求められる。ただし、その際注意点がある。このようなケースにおいては、 $v = 0$ では反応が起こりえないなので、クロスセクションを熱平均化する際の積分範囲は $v_c \sim \infty$ に取り直さなくてはならない、という点である。ここで、

$$v_c = 2\mu_- = 2(1 - m_1^2/m_2^2)^{1/2} \quad (88)$$

は臨界速度と呼ばれるもので、反応が起こりえる最小の相対速度である。これを用いれば、(84) 式と対応する式は次のようになる：

$$\begin{aligned} <\sigma v>_{for} &= <(a' + b' v^2)v_2> \\ &= \frac{x^{3/2}}{2\pi^{1/2}} \int_{2\mu_-}^\infty dv v^2 \exp[-v^2 x/4] v_2(a' + b' v^2) \\ &= \exp[-\mu_-^2 x] \frac{2z}{\pi^{1/2}} \int_{2\mu_-}^\infty (t/x + \mu_-^2)^{1/2} t^{1/2} [(a' + 4b' \mu_-^2) + 4b' t/x] e^{-t} dt \end{aligned} \quad (89)$$

ここで、

$$\mu_- = (z - 1)^{1/2}/z \quad (90)$$

である。threshold($z = 1$) では $\mu_+^2 = \mu_-^2 = 0$ となる。このとき上で求めた各ケースの熱平均化クロスセクション (88)、(90) 式は同じものになり、またその積分は以下のようにガウス積分を用いてシンプルに実行可能なものとなる：

$$\begin{aligned} <(a' + b' v^2)v_2>_{z=1} &= \frac{2}{\pi^{1/2}} \int_0^\infty (t/x)^{1/2} t^{1/2} (a' + 4b' t/x) e^{-t} dt \\ &= \frac{2}{\pi^{1/2} x^{1/2}} \int_0^\infty t e^{-t} (a' + 4b' t/x) dt \\ &= \frac{2}{\pi^{1/2} x^{1/2}} (a' + 8b' / x) \end{aligned} \quad (91)$$

この $z = 1$ の場合のクロスセクションを、freeze-out 付近 ($x_f \approx 25$) で、終状態が massless 粒子のものと比べると、結果は以下のようになる：

- s-wave annihilation の場合

約 0.25 のファクターにより suppress される

- p-wave annihilation の場合

約 0.30 のファクターにより suppress される

一般的には、(88)、(90) 式は数値的に評価されるものだが、s-wave のクロスセクションの場合 ($b' = 0$) には解析的に積分を実行することが可能となる：

$$\begin{aligned}
 \langle a' v_2 \rangle_{all} &= \frac{2z}{\pi^{1/2}} \int_0^\infty (t/x + \mu_+^2)^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}} a' e^{-t} dt \\
 &= a' \frac{2z}{\pi^{1/2}} \cdot \frac{\mu_+^2 x^{1/2}}{\mu_+^2 x^{1/2}} \int_0^\infty (t/x + \mu_+^2)^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}} e^{-t} dt \\
 &= a' \frac{\mu_+^2 z x^{1/2}}{\pi^{1/2}} \frac{2}{\mu_+^2 x} \int_0^\infty e^{-t} t (1 + \frac{\mu_+^2 x}{t})^{\frac{1}{2}} dt \\
 &= a' \frac{\mu_+^2 z x^{1/2}}{\pi^{1/2}} \frac{2}{\mu_+^2 x} \exp[\mu_+^2 x/2] \exp[-(\mu_+^2 x/2)] \int_0^\infty e^{-t} t (1 + \frac{2 \mu_+^2 x}{t})^{\frac{1}{2}} dt
 \end{aligned} \tag{92}$$

ここで、変形ベッセル関数の積分表示形

$$K_1(z) = \frac{e^{-z}}{z} \int_0^\infty e^{-t} t (1 + \frac{2z}{t}) dt \tag{93}$$

を用いると、結局 $\langle \sigma v \rangle_{all}$ は次式で表わされることになる：

$$\langle a' v \rangle_{all} = a' \frac{\mu_+^2 z x^{1/2}}{\pi^{1/2}} \exp[\mu_+^2 x/2] K_1(\mu_+^2 x/2) \tag{94}$$

$\langle a' v_2 \rangle_{for}$ についても同じ計算により同様の式が得られる。threshold から離れたところ ($\mu_\pm^2 \rightarrow \infty$) では、このベッセル関数は近似形で表わすことができる：

$$K_1(\mu_\pm^2 x/2) \sim \sqrt{\pi/\mu_\pm^2 x} \exp[-\mu_\pm^2 x/2] \tag{95}$$

この式を代入することにより、それぞれの極限領域におけるクロスセクションは次のように求められる：

$$\begin{aligned}
 \langle a' v_2 \rangle &\approx a' \mu_+ z = a' (1 - z^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{for } m_1 \gg m_2 \\
 \langle a' v_2 \rangle &\approx a' \mu_- z \exp[-\mu_-^2 x] \quad \text{for } m_1 \ll m_2
 \end{aligned}$$

逆に、threshold ($z \rightarrow 1, \mu_\pm \rightarrow 0$) では、近似形のベッセル関数とそれにより得られる熱平均化クロスセクションは以下のようになる：

$$\begin{aligned}
 K_1(\mu_\pm^2 x/2) &\approx 2/\mu_\pm^2 x \\
 \langle a' v_2 \rangle &\approx 2a' / (\pi x)^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

上で求めた (95) 式のような形に熱平均化クロスセクションを置き換えることは便利なことなのか？あまりそうとは言えない。なぜなら、relic abundance を計算するためには、まず annihilation integral J を計算しなくてはならないのだが、(95) 式のような形では複雑すぎるからである。複雑すぎると言えども、一応数値的にであればこれらを評価することは可能である。しかし、ここでは、 $\langle \sigma v \rangle$ の振る舞いを理解しやすくするために、 $\langle \sigma v \rangle$ についての様々な展開式を利用して、近似的な解析的評価について調べていく。まず大きな $\mu_{\pm}^2 x$ の場合について考えていく。 μ_+ の場合 (allowed channel)、これは、生成された粒子が m_1 に比べ小さな mass をもっているケースに相当し、これに対応する熱平均化クロスセクションは

$$\langle (a' + b' v^2) v_2 \rangle_{all} \approx (1 - z^2)^{\frac{1}{2}} \left[a' \left(1 + \frac{3z^2}{4x(1 - z^2)} \right) + \frac{6b'}{x} \left(1 + \frac{5z^2}{4x(1 - z^2)} \right) \right] \quad (96)$$

となる。そして、 μ_- の場合 (forbidden channel) は m_2 がとり得る限界の大きさである場合に相当しており、この場合の熱平均化クロスセクションは次式で与えられる：

$$\begin{aligned} \langle (a' + b' v^2) v_2 \rangle_{for} &\approx z \mu_- \exp[-\mu_-^2 x] \\ &\times \left[a' \left(1 + \frac{3}{4\mu_-^2 x} \right) + 4b' \mu_-^2 \left(1 + \frac{9}{4\mu_-^2 x} + \frac{45}{32\mu_-^4 x^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (97)$$

逆に、threshold のかなり近く、すなわち $\mu_{\pm}^2 x \ll 1$ の場合には熱平均化クロスセクションは次式のように求められる：

$$\begin{aligned} \langle (a' + b' v^2) v_2 \rangle_{thr} &\approx \frac{2z}{\pi^{1/2} x^{1/2}} \left[a' (1 - x\Delta) + \frac{8b'}{x} \left(1 - \frac{x\Delta}{2} \right) \right] \\ \Delta &= z - 1 = (m_2 - m_1)/m_1 \end{aligned} \quad (98)$$

図 6 に、 $x = 25$ の場合の、3 つの近似的結果を数値積分の結果と共に示す：(97) 式を見れば allowed case に対しての近似において $z = 1$ のときに問題が生じるのは明らかである。しかし、この近似は threshold から離れたところではうまく機能する、ということが図から読み取れる。これも図から明らかであることであるが、threshold 付近では (99) 式を用いて解析がなされるべきである。したがって、より正確な解析を行うためには、以下のように区分的にそれぞれの近似を用いて考えていくべきである：

- for s-wave annihilation

$$\langle \sigma v \rangle_{a,PW} = \begin{cases} \langle \sigma v \rangle_{all} & x\Delta < -0.023 \\ \langle \sigma v \rangle_{thr} & -0.023 < x\Delta < 0.023 \\ \langle \sigma v \rangle_{for} & 0.023 < x\Delta \end{cases} \quad (99)$$

- for p-wave annihilation

$$\langle \sigma v \rangle_{b,PW} = \begin{cases} \langle \sigma v \rangle_{all} & x\Delta < -0.046 \\ \langle \sigma v \rangle_{thr} & -0.046 < x\Delta < 0.046 \\ \langle \sigma v \rangle_{for} & 0.046 < x\Delta \end{cases} \quad (100)$$

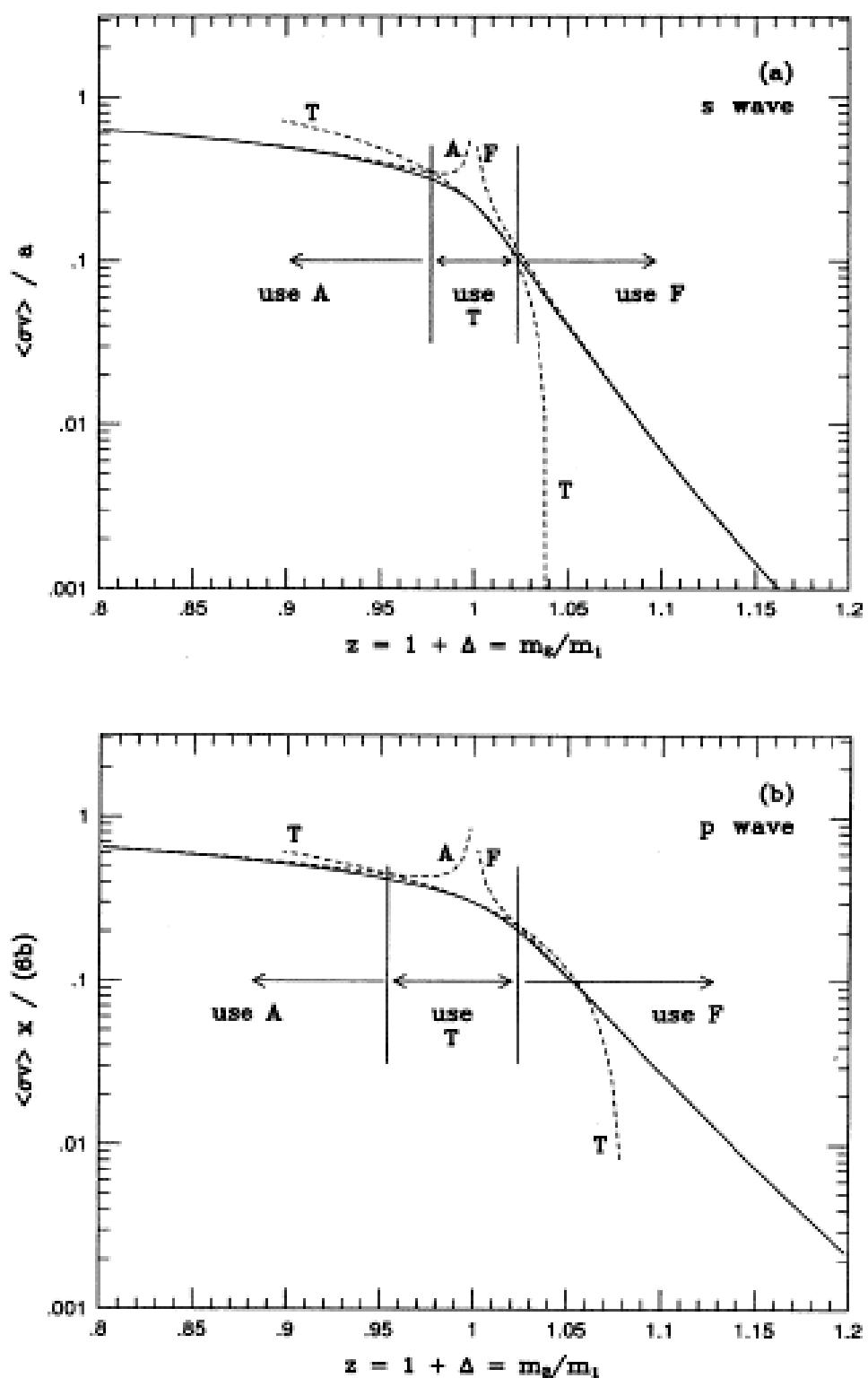


図 6: 図 6(a) は "pure s-wave" annihilation(a' terms only) の結果、図 6(b) は "pure p-wave" annihilation(b' terms only) の結果を表わしている (Ref[18] より引用)

上図の縦の実線は用いる近似の変更点を示している。

熱平均化クロスセクションに対する、ここまで調べてきた様々な結果を用いれば、(50)、(51)式を利用してセクション4.2で論じた方法によって relic abundance を計算することが可能となる。それによって得られた結果を標準的な結果と比較しやすいようにするために、ordinary channels($\chi_1\chi_1 \rightarrow XX$) と forbidden channels を明確に分離して書き表わす：

$$(\sigma v)_{tot} = a_{11} + b_{11}v^2 + [(a' + b'v^2)v_2] \quad (101)$$

また、この $(\sigma v)_{tot}$ に対応する annihilation integral J は次式のように書き直される：

$$J = (a_{tot} + 3b_{tot}/x_f)/x_f \quad (102)$$

この J に関して注意点がある。それは、ここで x_f は $(\sigma v)_{tot}$ と (49) 式を使って逐次近似法で求められる新たな x_f である、という点である。 a_{tot} 、 b_{tot} も forbidden channels と ordinary channels の部分を分けて表わされる：

$$\begin{aligned} a_{tot} &= a_{11} + a' I'_a \\ b_{tot} &= b_{11} + b' I'_b \end{aligned} \quad (103)$$

$$\begin{aligned} I'_a &\equiv \frac{x_f}{a'} \int_{x_f}^{\infty} \langle a' v_2 \rangle x^{-2} dx \\ I'_b &\equiv \frac{2x_f^2}{b'} \int_{x_f}^{\infty} \frac{\langle b' v^2 v_2 \rangle}{6} x^{-2} dx \end{aligned} \quad (104)$$

この式に (99) 式を代入して積分を実行すると、threshold 付近での値が求められる：

$$\begin{aligned} I'_{a,thr} &\approx \frac{4z}{3\pi^{1/2}x_f^{1/2}} (1 - 3x_f\Delta) \\ I'_{b,thr} &\approx \frac{32z}{15\pi^{1/2}x_f^{1/2}} (1 - \frac{5}{6}x_f\Delta) \end{aligned} \quad (105)$$

forbidden region、allowed region に対応する I'_a 、 I'_b も同様にして求めることが出来る：

$$\begin{aligned} I'_{a,for} &\approx \frac{z}{\mu_- x_f} \exp[-\mu_-^2 x_f] \\ I'_{b,for} &\approx \frac{4}{3} z \mu_- \exp[-\mu_-^2 x_f] (1 + \frac{1}{4\mu_-^2 x_f}) \end{aligned} \quad (106)$$

$$\begin{aligned} I'_{a,all} &\approx (1 - z^2)^{1/2} (1 + \frac{3z^2}{8(1 - z^2)x_f}) \\ I'_{b,all} &\approx (1 - z^2)^{1/2} (1 + \frac{5z^2}{6(1 - z^2)x_f}) \end{aligned} \quad (107)$$

threshold のはるか上 ($z \ll 1$) では、 $I'_a \approx I'_b \approx 1$ となり、当然のことながら、standard の場合と同じ結果になる。これまでに他の研究でなされてきた計算では threshold での annihilation による relic abundance への影響は特に何も示されてこなかった。ところが実際には、 $x_f = 25$ の場合、(106) 式により

- s-wave annihilation に対しては、 $z \ll 1$ という極限下での結果に対して 15 % の影響
- p-wave annihilation に対しては、 $z \ll 1$ という極限下での結果に対して 25 % の影響

が出てくるという結論が導き出された。

より詳しく解析を行うために、ここから forbidden channel case が重要となる場合の Δ の値について議論していく。まずは、pure s-wave annihilation のケースについて考えていいく。以下のように表記法を定義して使っていく：

$(\sigma v) = a_{11} \Rightarrow$ マスレス粒子への annihilation のクロスセクション

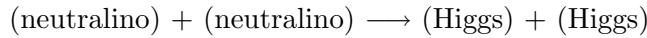
$(\sigma v)_{for} = a' v_2 \Rightarrow$ forbidden channel のクロスセクション

また、評価しやすくするために、forbidden channel の強さを次のようにパラメーター化する：

$$a' = A' a_{11} \quad (108)$$

\Rightarrow すなわち A' は、もし forbidden channel が運動学的に suppress されていなければ、forbidden annihilation がクロスセクションの中でどれだけ支配的になっているかを表わすファクターである

例えば、



という反応に対しては $A' \approx 50 \sim 500$ となる。また、neutralino が annihilation して終状態が top quarks や W^+W^- となる場合でも A' の値は大きくなるであろうことが予測される。

図 7 に、 $x_{f,old} = 25$ の場合の、様々な A' の値に対応して relic abundance がどのように変化するかを示す：図の中の実線は $A' = 20, 100, 500$ に対して $\langle \sigma v \rangle$ を数値積分した結果を表わしている。また、図の中の点線は、 $A' = 500$ に対して、annihilation integral J を (100) 式、(101) 式のクロスセクションを用いて数値的に評価したものを表わしている。実線と点線との一致精度は 10 % 以下でしかエラーが出ないほどの良さであり、近似式も区分的に用いれば有効であることが実証されたことになる。

図 7 から、mass が threshold より 10~15 % ほど下の場合でさえも、 A' の値次第では new channels が重要となる、ということが分かる。このサブセクションで調べたことをまとめると以下のようにになる：

- もし $\Delta < 0.05 \sim 0.1$ であり、unsuppressed forbidden channels のクロスセクションが allowed channels のクロスセクションより 10 倍以上の大さであれば、この channels の影響は重要である
- threshold より上で普段使っているテイラーフェーバー展開が適用可能である領域は $\Delta \geq -0.02$ である

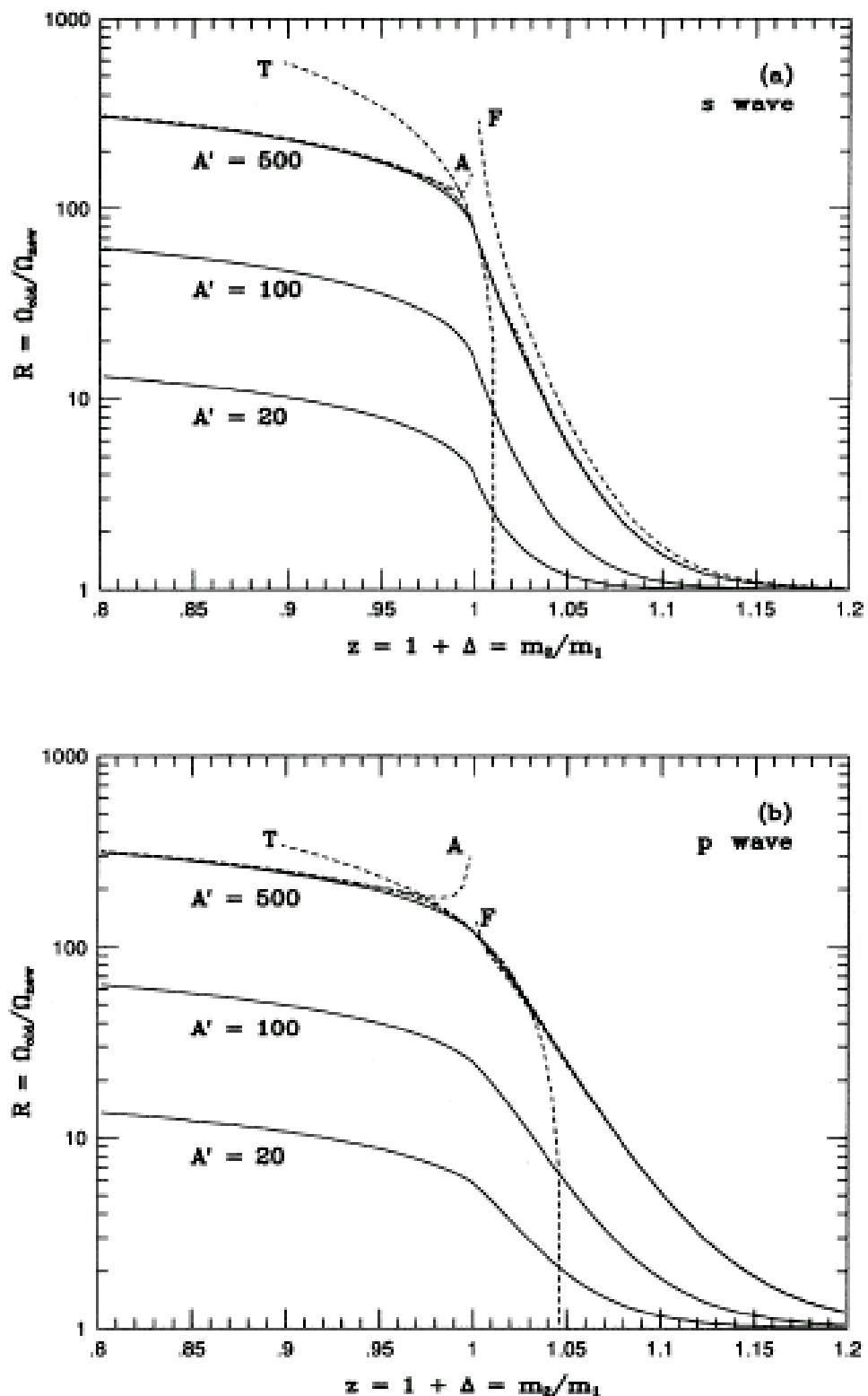


図 7: 様々な A' に対応して変化する relic abundance の様子。図 7(a) は pure s-wave annihilation の場合の Ω の変化を表わしており $R = \Omega_{old}/\Omega_{new} = (1 + A' I'_a) x_{f,old}/x_{f,new}$ 、また図 7(b) は pure p-wave annihilation の場合の Ω の変化を表わしており $R = \Omega_{old}/\Omega_{new} = (1 + A' I'_b) x_{f,old}^2/x_{f,new}^2$ である。(Ref[18] より引用)
41

これを neutralino から Higgs boson への反応を例に考えてみる。前に述べたように、 $\chi\chi \rightarrow HH$ という反応では $A' = 50\sim500$ が典型的な値である。したがって neutralino の relic abundance を調べる際には、neutralino mass が $v = 0$ の kinematic threshold より $10\sim15\%$ ほど小さな場合、この channels も含めて考えるべきである。

ここまで 2 つのサブセクションで見てきたように、coannihilation case、forbidden case ともに relic particles よりもわずかに重い粒子が存在していた。同様の設定をもつこれら 2 つのケースであるが、これらには大きな違いがある。それは、dark matter の relic abundance 決定に大きく影響する反応の違いである。coannihilation case においては、relic particles と extra particles との annihilation がクロスセクションにおいて支配的になるのに対し、forbidden case においては relic particles 同士の annihilation が重要となる。つまり、relic particles がどんな粒子であるか、extra particles とどんな関係にあるか、などによってどちらのケースが relic abundance 決定に影響するかが決まることになるということである。

4.5 annihilation near poles

こここのサブセクションでは、プロパゲーターのポール付近領域で起こる annihilation は relic abundance 決定に大きく関わる、ということについて調べていく。これは、例えば、プロパゲーターとして z-ボソンまたはスカラー粒子が入る s-channel の反応において起こりえる。また、annihilation する dark matter が J/ψ 、 η 、 Υ 粒子などの resonance の $1/2$ くらいの mass を持っている場合にも今考えているケースに関わってくる。これまでの研究では様々な近似を使ってこれらののようなケースを扱ってきた。しかし、それらのような近似ではポール付近でかなりのエラーがでてしまうので、その適切な処置について考えていく。

ここでは、次式のような形のクロスセクションを用いて解析を進めていく：

$$\sigma v = \frac{\alpha^2 s}{(M_{ex}^2 - s) + M_{ex}^2 \Gamma_{ex}^2} \quad (109)$$

$\alpha \approx 0.01 \Rightarrow$ 何らかの coupling constant

$M_{ex} \Rightarrow$ プロパゲーターに入る粒子の mass

$\Gamma_{ex} \Rightarrow$ プロパゲーターに入る粒子の total width

$s = 4m_1^2/(1 - v^2/4) \Rightarrow$ マンデルシュタム变数

$v \Rightarrow$ 相対速度

プロパゲーターにどんな粒子が入った場合でも統一的に扱えるようにするために以下の量を定義する：

$$\begin{aligned} u &= \left(\frac{2m_1}{M_{ex}}\right)^2 \\ \epsilon &= \left(\frac{\Gamma_{ex}}{M_{ex}}\right)^2 \end{aligned} \quad (110)$$

これらを使うとクロスセクションは次式のように書き直される：

$$\sigma v = \frac{\alpha^2 u / (1 - v^2/4)}{M_{ex}^2 [(1 - u / (1 - v^2/4))^2 + \epsilon]} \quad (111)$$

ϵ は非常に小さな量なので 0 とみなして考えると、相対速度 $v = 0$ ではポールは $u = 1$ のところに現れる。より一般的には、ポールは以下の点に現れる：

$$\begin{aligned} u_p &= 1 - v_p^2/4 \\ v_p &= 2(1 - u_p)^{1/2} \end{aligned} \quad (112)$$

また、ポールにおけるクロスセクションは次の値になる：

$$(\sigma v)_{pole} = \alpha^2 / (M_{ex}^2 \epsilon) \quad (113)$$

初期の頃の relic abundance の研究においては軽い dark matter に重点が置かれて調べられており、相互作用としては 4-フェルミ相互作用が用いられて議論されていた。当然のことながら、これではポールが存在する場合の影響について正しく評価することは出来ない。大雑把な見積もりでも、以下の 2 つの例に示すように、ポールの有無は重要である：

例 1 (z resonance の場合)

この場合 $\epsilon_z \approx 7.5 \times 10^{-4}$ であり、(114) 式などと合わせて考えるとポール付近でのクロスセクションの値はポールから離れたところでの値よりかなり大きくなる

例 2 (J/ψ 、 η 、 Υ 粒子などの resonance の場合)

この場合 $\epsilon_{\psi} \approx 4.8 \times 10^{-10}$ 、 $\epsilon_{\eta} \approx 3.7 \times 10^{-6}$ 、 $\epsilon_{\Upsilon} \approx 3.0 \times 10^{-11}$ であり、ポール付近でのクロスセクションの値は z -ボソンのケースより、さらに高いピークをもつことになる

⇒ しかし、これらのケースにおいては、クロスセクションは (110) 式のような形のままではないため、修正が必要となる

さて、実際に relic abundance の具体的な計算においてクロスセクションを利用するためには、まず、それを熱平均化しなくてはならない。この熱平均化の標準的な方法には、クロスセクションを v^2 についてテイラー展開し $\langle v^2 \rangle = 6/x$ で置き換える、というものがある（ただし、 $x = m_1/T$ ）。ところが、小さな ϵ に対しては v^2 についての展開はポール付近で破綻し、適切な結果が得られない。(112) 式のケースにおいてはクロスセクションが負にすらなりえてしまう。これまでの研究では、ポール付近でもこのような展開を使ってしまっている。この展開に対しては、より一般的なアプローチも存在する。それは、テイラー展開する前にまずポールファクター

$$P(v^2) = [(1 - u / (1 - v^2/4))^2 + \epsilon]^{-1}$$

を一旦取り除き、展開後の結果に相対速度 $v = 0$ としたこのファクター $P(0)$ をかける、という方法である。今考えているクロスセクション (112) 式は、この方法により、次式のように近似熱平均化が求められる：

$$\langle \sigma v \rangle_0 = \frac{\alpha^2 u}{M_{ex}^2} \left[1 + \frac{3}{2x} \right] \quad (114)$$

他にも熱平均化の方法として、 σv の中の v^2 を $v^2 \rightarrow 6/x$ とじかに置き換え、それを $\langle \sigma v \rangle$ の近似的結果とする、というものがある。この方法で求められた近似熱平均化クロスセクションは単純に次式で表わされる：

$$\langle \sigma v \rangle_{subs} = (\sigma v)_{v^2=6/x} \quad (115)$$

以下で見ていくように、この近似式はポールから離れたところで高精度の近似結果をもたらす展開式である。

このサブセクションのメインポイントの1つは、前の段落で見てきた2つの近似は ϵ が小さい場合のポール付近では全くあてにならない、という事を示すことである。そのため以下に以下の図8で、 u の関数として $\langle \sigma v \rangle$ の数値的評価をプロットし、それと近似式 $\langle \sigma v \rangle_0$ 、 $\langle \sigma v \rangle_{subs}$ 、テイラー展開との比較を示す：図において'num'、'subs'、'0'、'Taylor' と記してある曲線は、それぞれ、 $\langle \sigma v \rangle_{num}$ 、 $\langle \sigma v \rangle_{subs}$ 、 $\langle \sigma v \rangle_0$ 、 $\langle \sigma v \rangle_{Taylor}$ を用いて導出したものを表わしている。 $\langle \sigma v \rangle$ の数値的評価は次式を用いてなされる：

$$\langle \sigma v \rangle_{num} = \frac{x^{3/2}}{2\pi^{1/2}} \int_0^\infty dv v^2 (\sigma v) \exp[-xv^2/4] \quad (116)$$

図8(a)は、z-ボソンがプロパゲーターとして入る場合、すなわち、 $\epsilon = 7.5 \times 10^{-4}$ 、 $M_{ex} = 91\text{GeV}$ 、 $\alpha = 0.01$ 、 $x = 25$ の場合の結果を表わしている。テイラー展開式は $m_1 < M_{ex}$ の場合は有効であるけれども、 $m_1 > M_{ex}$ の場合には（負のクロスセクションを生み出してしまう、という意味でも）かなり不適切である。また、z-ボソンがプロパゲーターとして入るケースでは、ポールから離れたところでの $\langle \sigma v \rangle_{subs}$ は $\langle \sigma v \rangle_0$ よりわずかに良い精度で結果を与えており、しかしどちらの近似においても正しい位置にポールはこない。クロスセクションの値に注目すると、同じ u の点において見比べることにより、数値的結果とこれら2つの近似の値とではファクターで3以上のズレが生じていることが読み取れる。

図8(b)は $\epsilon = 10^{-6}$ とし、それ以外のパラメーターは (a) と同じにしてそれぞれの結果をプロットしたものである。このようなパラメーター設定の場合、グラフに以下の特徴が現れる：

- 近似評価と数値的評価とのズレが (a) より大きい
- 数値の結果にくらべ近似の方はかなり狭く、鋭いピークをもつ

すなわち、 ϵ が小さいほど近似とのズレが顕著になり、ポール付近での扱いをしっかりと考慮する必要があるということになる。

上の議論において注意しておくべき点がある；それは、(117) 式においてさえも少なくとも2つの近似が使われている、という点である。具体的には以下のようなものである：

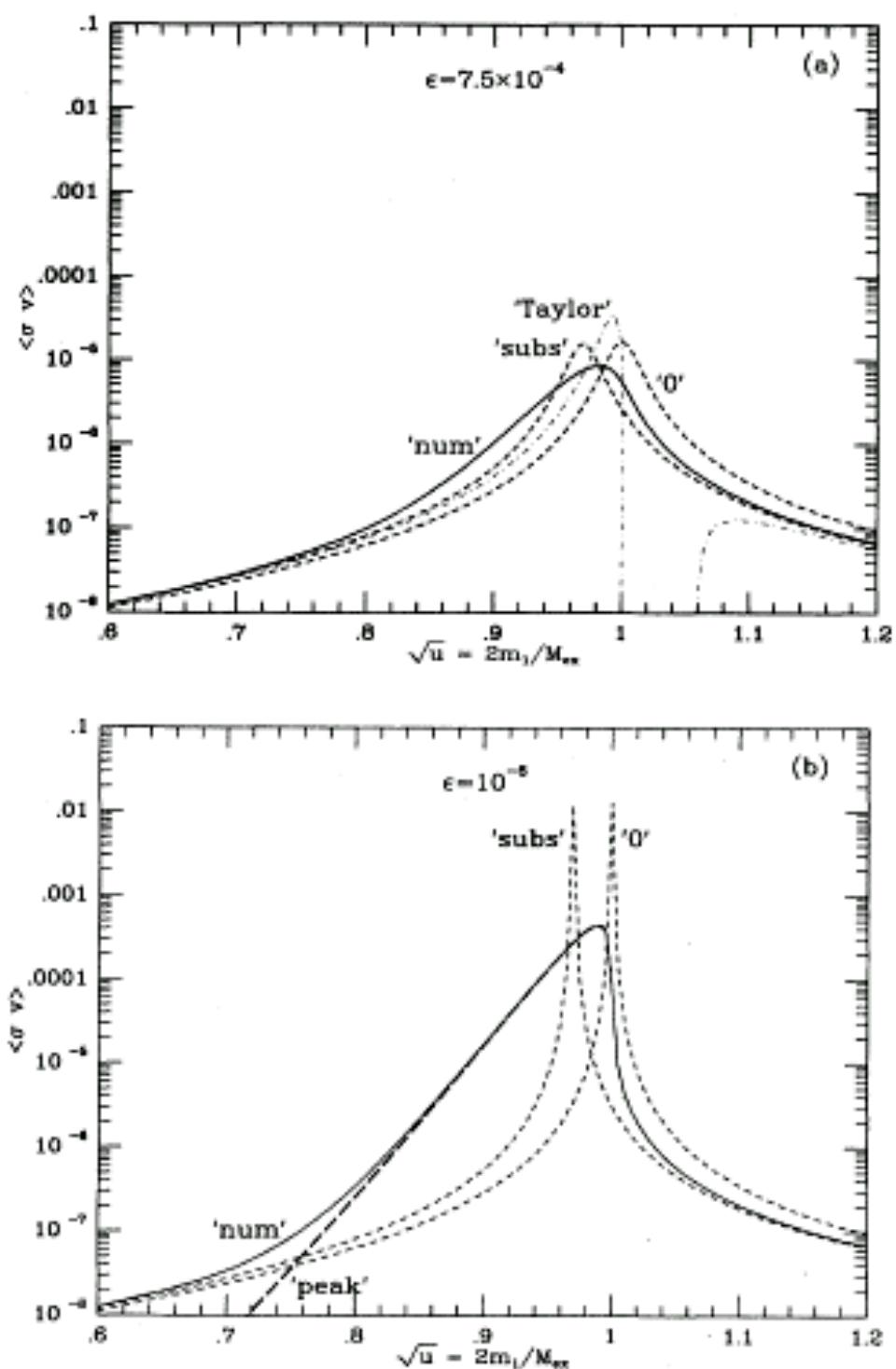


図 8: $\langle \sigma v \rangle$ の数値的評価と $\langle \sigma v \rangle_0$ と $\langle \sigma v \rangle_{subs}$ とテイラーアンペイクとの比較 (Ref[18] より引用)

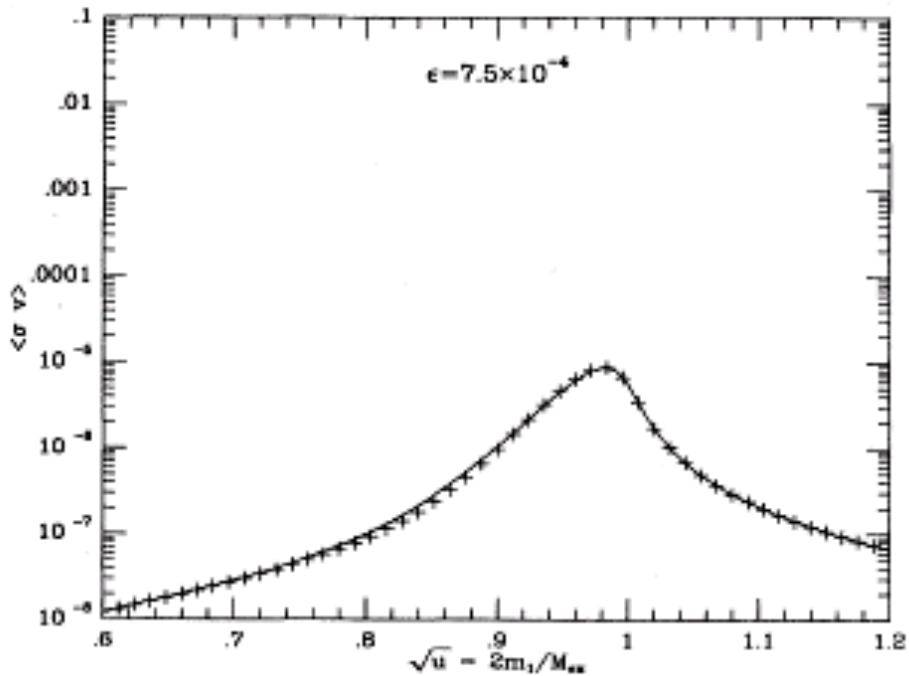


図 9: (117) 式の数値的評価と Ref[3] において与えられている 3 次元積分の数値評価の比較 (Ref[18] より引用)

- x は十分に大きい、すなわち $\exp[-xv^2/4]$ は非常に小さい、という仮定
- 重心系における様々な物理量の平均化
 ⇒ これは、Srednicki、Watkins、Olive によって指摘されているように、完全には正しいものではない [Ref[14]]

今考えているようなポールの有無を考慮したケースにおいては、クロスセクションは v^2 について非多項式の依存形をもっているが、これまでには多項式依存に関してのみしかテストされていない。よってこれらの近似が 10~20 % 以上のエラーを出してしまうかもしれない、という不安が残る。(117) 式において使われているこれらの近似が有効なものであるかどうかをチェックするためには、Ref[3] において与えられている 3 次元積分を実行してみればよい。下の図 9 に (117) 式の数値的評価と 3 次元積分の数値評価の比較を示す。図 9 から分かるように、これら 2 つの評価方法は 20 % 以下のズレでかなり精度よく一致している。このズレについて補足を加えておく；このズレのいくつかは、実際には、数値積分のルーチンが原因となっているものかもしれない、このルーチンではかなり鋭いピークをもつ関数の積分を実行する際にトラブルを出しそる。最も高精度の結果を必要とするのであれば、(117) 式を Ref[3] の (26) 式に置き換えて解析すべきである。ただし、Ref[3] において与えられている展開式は使うべきではない、という点を注意しておく。その理由は、この展開式は前に論じたポール付近でのテイラー展開と同じ問題点を抱えているからである、つま

りこれは上で見てきたシンプルな近似よりも不適切なものということになる。

図 8 に戻り、シンプルな近似 [(115) 式、(116) 式] と (117) 式によって調べられる数値的評価との違いについて考察していく。数値的評価における熱平均の式は、数学的には単純に、"重み付き" の面積を表わしているものである。一方、近似の二つにおいては、どちらもピークの高さをそのまま平均として用いている。(117) 式の数値的評価についてをより詳しく考えていく。小さな ϵ と $u < 1$ の場合、ピーク近傍の面積によってこの積分の値は支配されている。実際、ピーク $[v_p = 2(1-u)^{1/2} \text{ for } u < 1]$ のまわりで展開することによって、この積分は近似的に表わすことが可能である。これを具体的に示していく。ピーク近傍において変数を $\nu = v - v_p$ と置き換え、 ν が小さいことを用いると

$$\frac{u}{1 - v^2/4} \approx 1 + \nu(1 - u)^{1/2} \quad (117)$$

と近似することができ、これによって (117) 式も次式のように近似できることになる：

$$\langle \sigma v \rangle \approx \frac{x^{3/2}}{2\pi^{1/2}} v_p^2 \exp[-xv_p^2/4] \frac{\alpha^2}{M_{ex}^2} \int_{-\nu_0}^{\nu_0} \frac{d\nu}{[\nu^2(1-u)/u^2] + \epsilon} \quad (118)$$

$\nu_0 \ll v_p \implies$ ピーク近傍のある小さな区間を決めているパラメーター

この式中の積分を評価すると

$$\int_{-\nu_0}^{\nu_0} \frac{[\nu^2(1-u)/u^2] + \epsilon}{d\nu} = \frac{2u}{\sqrt{\epsilon(1-u)}} \arctan[\nu_0(\frac{1-u}{\epsilon u^2})^{1/2}] \quad (119)$$

となる。ここで、もし $\sqrt{\epsilon}$ が $\nu_0\sqrt{1-u}$ に比べて小さければ、 $\arctan[\nu_0(\frac{1-u}{\epsilon u^2})^{1/2}] \approx \pi/2$ と近似できる、この値が ν_0 と独立の値になっている点に注目しておく。この近似を代入後の (119) 式とクロスセクションの最大値 $\langle \sigma v \rangle_{pole} = \alpha^2/(\epsilon M_{ex}^2)$ とを比べると、以下の結果が得られる：

$$\begin{aligned} r_\sigma &= \frac{\langle \sigma v \rangle}{\langle \sigma v \rangle_{pole}} \\ &\approx \frac{\frac{x^{3/2}}{2\pi^{1/2}} 4(1-u) \exp[-x(1-u)] \frac{\alpha^2}{M_{ex}^2} \frac{2u}{\sqrt{\epsilon(1-u)}} \frac{\pi}{2}}{\frac{\alpha^2}{\epsilon M_{ex}^2}} \\ &= 2\sqrt{\pi} x^{3/2} u \sqrt{\epsilon} (1-u)^{1/2} \exp[-x(1-u)] \end{aligned} \quad (120)$$

最終的に、ポールの位置として $\sqrt{u} \approx 0.98$ とすると、 $x \approx 25$ に対して、次式が得られることになる：

$$r_\sigma \approx 31\sqrt{\epsilon} \quad (121)$$

$\epsilon = 10^{-6}$ の場合、 $r_\sigma \approx 0.03$ という結果になり、これは図 8(b) で示したことと一致する。しかし $\epsilon = 7.5 \times 10^{-4}$ の場合には、適切な ν_0 の値に対して不等式 $\sqrt{\epsilon} \ll \nu_0\sqrt{1-u}$ と $\nu_0 \ll v_p$ が満たされない。そのため $\arctan[\sim]$ のファクターを近似的に扱えず、複雑な式の形のまま解析しなくてはならない。図 8(b) に対応するパラメーターの選び方があったように、図

8(a) に対応するパラメーターのとり方も存在している。具体的には、 $\nu_0 \approx 0.1$ と取ると $r_\sigma \approx 0.37$ という結果が得られ、これは確かに図 8(a) の曲線に一致するものになる。一般的に、(120) 式の解が ν_0 と独立な値になるくらい小さな ϵ に対しては、(121) 式はポール付近で精度良い近似を与える。この近似による結果は図 8(b) に long-dashed curve で示されている。ただし、大きな ϵ に対しては、(119) 式から導かれるこの近似は有効な精度をもつものではなくなってしまう、という点は注意すべきである。

ここまで $\langle \sigma v \rangle$ についての議論をいろいろとしてきたが、実際に知りたいのは relic abundance $\Omega_1 h^2$ である。これを求めるためにはまず annihilation integral J を計算しなくてはならない。計算便利化のために J を x と v についての二重積分の形に書き直す。そうすると、 x についての積分は容易に実行可能となる：

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty dv \frac{v^2(\sigma v)}{\sqrt{4\pi}} \int_{x_f}^\infty dx x^{-1/2} \exp[-xv^2/4] \\ &= \int_0^\infty dv (\sigma v) \operatorname{erfc}(v\sqrt{x_f}/2) \end{aligned} \quad (122)$$

$\sigma v \implies$ 熱平均化していないクロスセクション

$\operatorname{erfc} \implies$ complementary error function

この J の表式は完全に一般的なものであり、annihilation integral を求めるためにあらゆるケースにおいて使用可能なものである。 $a + bv^2$ の形の σv に対しては、(123) 式は標準的な結果 [(52) 式] を与えることになる。ところが、ここで考えているようなポールを持つクロスセクションの場合、(123) 式は数値的に評価されなくてはならないものである。

図 10、11 は freeze-out 方程式の逐次近似解と (123) 式の数値評価から得られる結果を表わしたものである（比較のために $\langle \sigma v \rangle$ に対する近似解の結果も示してある）： 前に論じた近似 $\langle \sigma v \rangle_0$ 、 $\langle \sigma v \rangle_{\text{subs}}$ を用いるとそれぞれに対応する annihilation integral J は以下のように求められる：

$$\begin{aligned} J_0 &= \frac{\alpha^2 u}{M_{ex}^2} \left[1 + \frac{3}{4x_f} \right] \frac{P(0)}{x_f} \\ J_{\text{subs}} &\approx \langle \sigma v \rangle_{\text{subs}} \left[1 - \frac{3}{4x_f} \right] \frac{1}{x_f} \end{aligned} \quad (123)$$

図 10、11 はこれを用いてプロットしてある。この図から読み取れるように、近似を用いた結果では $\epsilon = 7.5 \times 10^{-4}$ の場合にはファクターでおよそ 3、 $\epsilon = 10^{-6}$ の場合にいたってはオーダーでいくつか異なるほどのズレがどうしても出てしまうようである。

最後に、図 10、11 に示されている結果を解析的に調べていく。その方法は σv をポールのまわりで展開する、というものであり、これによって次式の annihilation integral J が得られる：

$$J \approx \frac{4\alpha^2}{M_{ex}^2} \frac{u}{\sqrt{\epsilon}} \operatorname{erfc}[\sqrt{x_f(1-u)}] \arctan\left[\nu_0 \left(\frac{1-u}{\epsilon u^2}\right)^{1/2}\right] \quad (124)$$

この近似的な J を用いた結果を図 11 に long-dashed curve で示しておく。前の方での議論と同様に、小さな ϵ に対してはポール付近においてこれは精度良い近似となるが、 ϵ がある

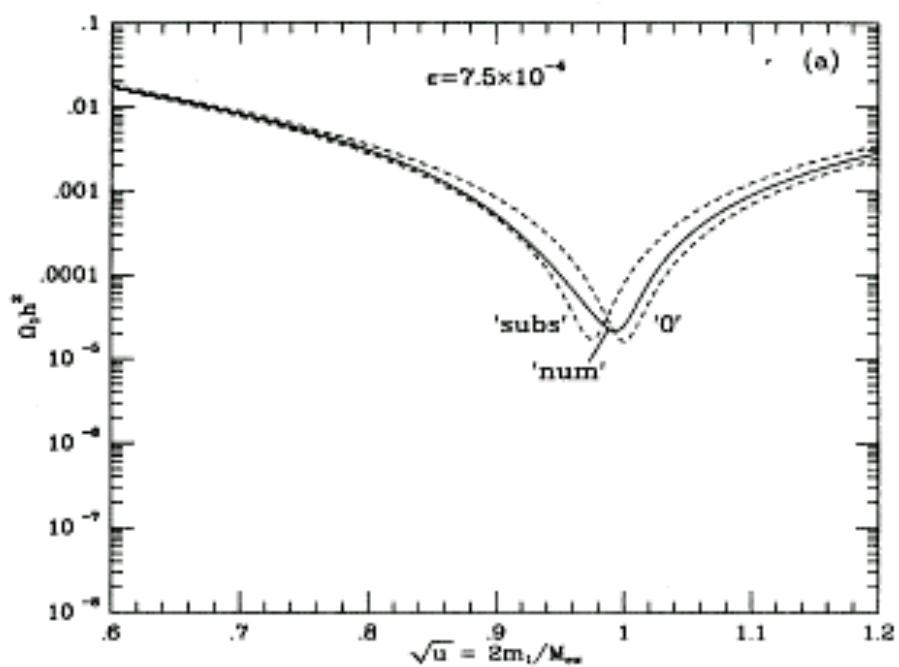


図 10: freeze-out 方程式の逐次近似解と (123) 式の数値評価から得られる結果の比較 ($\epsilon = 7.5 \times 10^{-4}$ の場合の結果) (Ref[18] より引用)

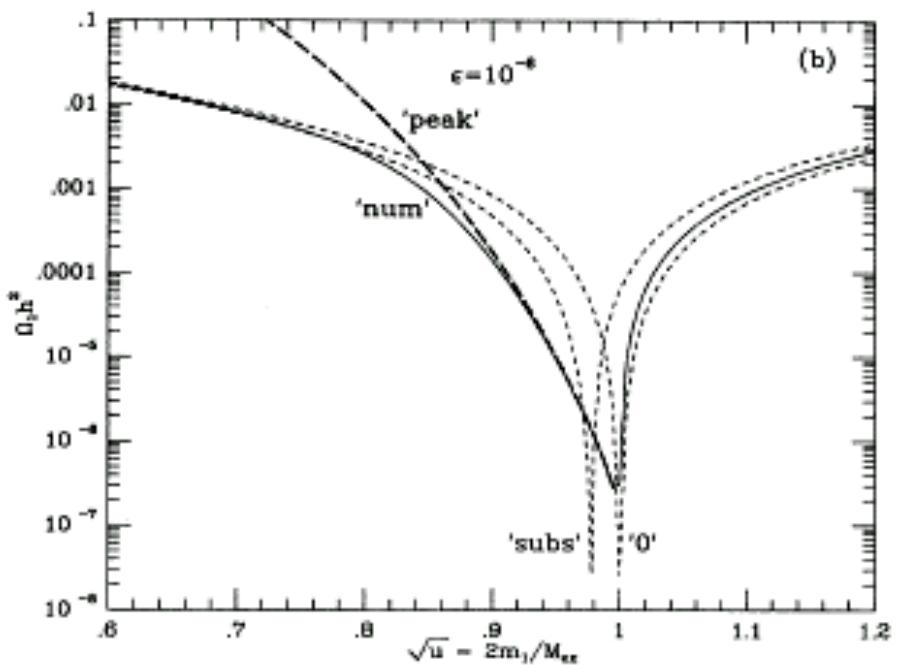


図 11: freeze-out 方程式の逐次近似解と (123) 式の数値評価から得られる結果の比較 ($\epsilon = 10^{-6}$ の場合の結果) (Ref[18] より引用)

程度以上の大きさになると（例えば $\epsilon = 7.5 \times 10^{-4}$ の場合）うまく整合性が保てなくなってしまう、という点は注意しておくべきである。小さな ϵ に対しての Ω の変化は以下の r_Ω を用いて評価することが出来る：

$$\begin{aligned} r_\Omega &= \frac{\Omega}{\Omega_{pole}} = \frac{J_{pole}}{J} \\ &\approx [2\pi\epsilon^{1/2}ux_f erfc[\sqrt{x_f(1-u)}]]^{-1} \\ J_{pole} &\approx \frac{\alpha^2 u_p}{M_{ex}^2 \epsilon x_f} \\ \Omega_{pole} &\implies \text{ポールにおける relic abundance} \end{aligned} \tag{125}$$

[このサブセクションのまとめ]

- ポールから離れた領域では、クロスセクションを普段利用している形のテイラーフェルビングで解析すればよいのだが、dark matter の annihilation がポール近傍の領域で起こる場合には特殊な扱い方が必要となる
- このサブセクションでは 1 つのタイプのポールについてのみ調べてきたが、一般的に、クロスセクションの中にせまい resonances があるならば、熱平均と annihilation integral はその解析方法を考え直す必要がある

4.6 このセクションの応用例

このセクション、特に coannihilation case についての応用例についてを Ref[19] の議論に基づいて見ていく。具体的に考えてるのは LSP を neutralinos、NLSP を stau として考えている MSSM である。現在、宇宙論的な観測と素粒子論的実験とから dark matter 粒子の relic abundance と mass には厳しく制限が付けられている。ところが、coannihilation が大きく影響する場合、すなわち neutralinos と stau の mass が非常に近いとした場合には、この制限に大きな変化が現れる。ここでは詳しい計算は避けるが、この制限をこれらの質量差に注目して考えると、観測に反しないパラメーター領域は以下の図によって示されることになる。図における薄い影の部分は、coannihilation を考慮した場合に、 $0.1 \leq \Omega h^2 \leq 0.3$ に対応する宇宙論的に許される質量領域を表わしている。一方 light dashed lines は、coannihilation を考慮しない場合に、宇宙論的に許される質量領域を表わしている。 $\tan\beta$ などのパラメーターによって多少異なるが、いずれの図においても許される質量領域は、coannihilation を考慮しない場合に比べて、広がっていることが読み取れる。したがって、ここのセクションで論じてきた特殊な扱いを考慮するかしないかで注目すべき質量領域も大きく異なるものになる。

次のセクションでは本研究の集大成として、この coannihilation case の結果が将来の加速器における物理にもたらしえる成果について調べていく [Ref[20]]。その成果とは、後のセクションで詳しく見ていくように、coannihilation が十分効果的になるくらいの質量差を考えた場合 NLSP であると考えている stau が超長寿命化しそうなので、それを大型 detector を用いて捕獲、さらに研究に利用するというものである。

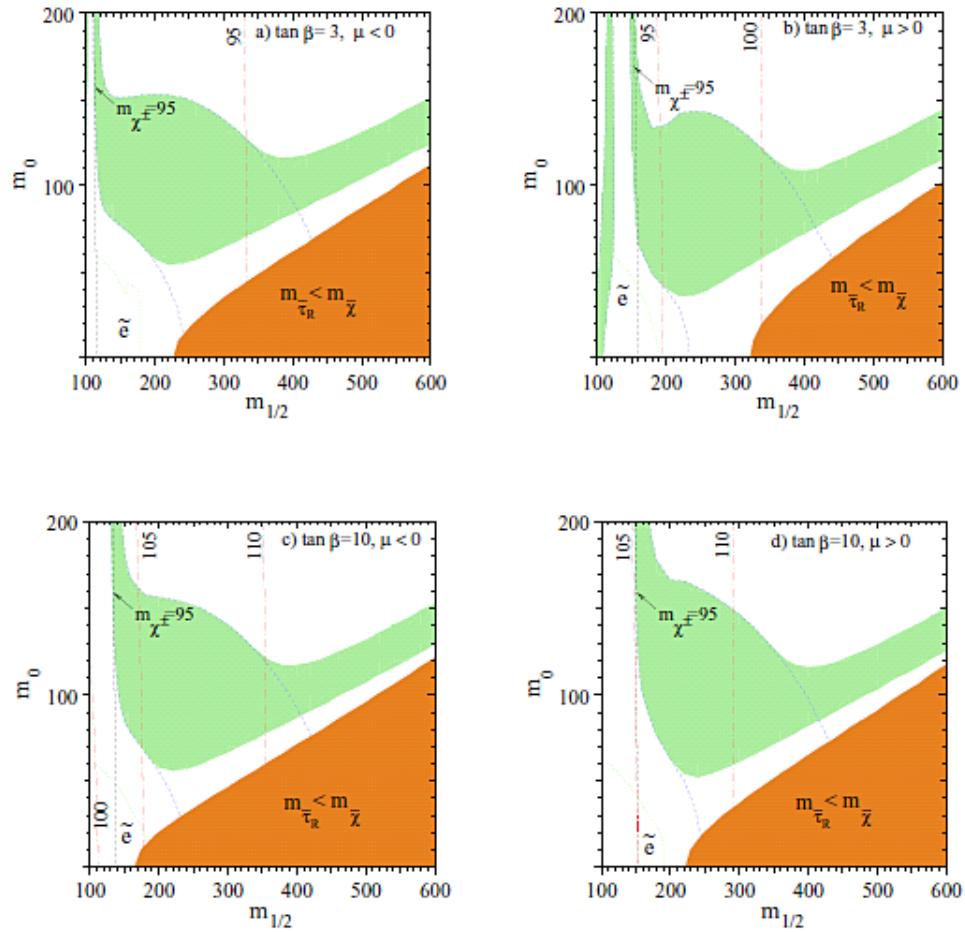


図 12: 様々な MSSM パラメーターに対応する許される質量パラメーター領域 (Ref[19] より引用)

5 long lifetime stau

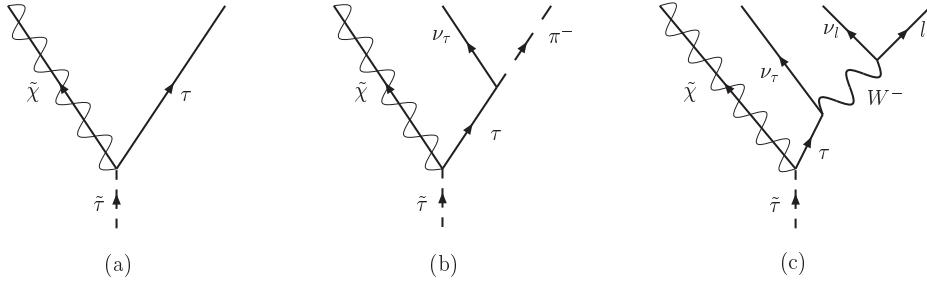
5.1 超対称性粒子の研究への応用

LHC や ILC のような将来稼動予定の超高エネルギー加速器実験においては、超対称性粒子の生成反応が起こりうる。超対称性理論の研究のためには、これらを大量に集め、様々な反応を観測、解析しなくてはならない。しかし、素粒子の寿命は一般的に非常に短く、前のセクションでも少し触れたように、最も軽い超対称性粒子以外はすぐにより軽い粒子へと崩壊してしまう。R-parity の保存を考慮すると、この最も軽い超対称性粒子 (LSP) は崩壊せずに安定な粒子となるのだが、多くのモデルでは、LSP として neutralino、または gravitino を考えている。この neutralino というのは、B-ボソン、ウィークボソン、ヒッグスボソンそれぞれの superpartner の線形結合からなる粒子であり、gravitino というのは graviton の superpartner である。どちらも相互作用が弱く、また、charge を持たないため検出が非常に難しい。よって、LSP を大量に集めるのはほぼ不可能であると考えられる。

ここで dark matter に目を向ける。既に述べたように LSP は R-parity の保存を考慮すると宇宙年齢のスケールで安定な粒子となるため、dark matter の候補となり得る。したがって、この論文においては、dark matter として bino-like neutralino (以後 bino と呼ぶことにする) を仮定して考える。さらに、前のセクションでこの bino の mass と同じくらいの mass を持つ粒子が存在すれば、bino の relic abundance に大きな影響ができるということを見たが、この事から neutralino は dark matter である可能性がより高くなる。よって、この論文においても、LSP mass と同じくらいの mass をもつ、LSP の次に重い粒子 (NLSP) の存在を仮定する。ここでは、tau 粒子の superpartner である stau を NLSP として考えていく。

ここから LSP と同程度の mass を持つ NLSP を含めて考えていくわけであるが、では一体どのくらいの質量差であれば neutralino は dark matter の候補となり得るのであろうか？この疑問の答えとも言える議論は既に前のセクションのまとめで見た通りである。ここでの内容に関する事のみ簡単に述べると、以下のようになる。質量差が大きくなりすぎると、coannihilation が効かなくなり、観測に反する量の neutralino がこの宇宙に残っていることになってしまう。では逆に質量差が小さすぎるとどうなるか、というと、この場合には特に制限が付けられるということはない。なぜなら、セクション 3 で述べたように、dark matter の全成分を neutralino のみで説明する必要が無く、dark matter は数種類の粒子から構成されていると考えることが可能であるからである。(実際、ニュートリノの寄与はわずかではあるが入っていることが分かっている。)

NLSP として stau を考えた場合、stau から tau と neutralino という反応が stau の崩壊モードの中でかなり支配的になる。ところが、もし stau mass と neutralino mass の質量差が tau mass 以下であれば、tau を on-shell で生成することが出来なくなり、stau は electron や pion などを生成するモードでしか崩壊できなくなる。これらの反応のダイアグラムを以下に示しておく：



以下では (a)、(b)、(c) それぞれの場合の decay rate を計算し、特に (c) の場合には decay rate は非常に小さくなり、stau は超長寿命化することを示す。そうすると、加速器で生成された stau を大量に集めることができ、超対称性理論の研究に大いに利用することができる。

5.2 二体崩壊

まずは、質量差が tau mass 以上の場合について調べていく。このとき stau の崩壊は tau と neutralino への二体崩壊がメインとなるので、以下ではこの崩壊の decay rate を計算していく。この相互作用を記述している部分のラグランジアンは次式のものである：

$$\mathcal{L} = \tilde{\tau}^* \tilde{B} \tilde{G}^{(\tau)} \tau + h.c. \quad (126)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \tilde{G}^{(\tau)} &= g_R P_R + g_L P_L \\ &= (\sqrt{2} g_2 \sin[\theta_\tau] e^{i\gamma_\tau}) P_R + (\frac{1}{\sqrt{2}} g_2 \cos[\theta_\tau]) P_L \end{aligned} \quad (127)$$

である。ここで θ_τ は stau の混合角、 γ_τ は CP violating phase を表わすものである。まずは、このラグランジアンを用いて振幅 \mathcal{M} とその複素共役 \mathcal{M}^* を求める：

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \langle \tilde{B} \tau | \tilde{\tau}^* \tilde{B} \tilde{G}^{(\tau)} \tau + h.c. | \tilde{\tau} \rangle \\ &= \langle \tilde{B} \tau | \tilde{\tau} \tilde{G}^{(\tau)'} \tilde{B} \tilde{\tau} | \tilde{\tau} \rangle \\ &= \bar{u}^s(p_\tau) \tilde{G}^{(\tau)'} v^t(p_{\tilde{B}}) \end{aligned} \quad (128)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^* &= [\bar{u}^s(p_\tau) \tilde{G}^{(\tau)'} v^t(p_{\tilde{B}})]^* \\ &= [u^{\dagger s}(p_\tau) \gamma^0 \tilde{G}^{(\tau)'} v^t(p_{\tilde{B}})]^* \\ &= v^{\dagger t}(p_{\tilde{B}}) \tilde{G}^{(\tau)'} \gamma^0 u^s(p_\tau) \\ &= v^{\dagger t}(p_{\tilde{B}}) \gamma^0 \tilde{G}^{(\tau)} u^s(p_\tau) \\ &= \bar{v}^t(p_{\tilde{B}}) \tilde{G}^{(\tau)} u^s(p_\tau) \end{aligned} \quad (129)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \tilde{G}^{(\tau)'} &= g_R^\dagger P_L + g_L P_R \\ &= (\sqrt{2} g_2 \sin[\theta_\tau] e^{-i\gamma_\tau}) P_L + (\frac{1}{\sqrt{2}} g_2 \cos[\theta_\tau]) P_R \end{aligned} \quad (130)$$

である。これらから振幅の二乗 $|\mathcal{M}|^2$ を計算する、また以下では $\tilde{G}^{(\tau)} = \tilde{G}$ 、 $\tilde{G}^{(\tau)'} = \tilde{G}'$ と書き表すことにする：

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= \bar{u}^s(p_\tau) \tilde{G}' v^t(p_{\tilde{B}}) \bar{v}^t(p_{\tilde{B}}) \tilde{G} u^s(p_\tau) \\ &= \text{tr}[(\not{p}_\tau + m_\tau) \tilde{G}' (\not{p}_{\tilde{B}} - m_{\tilde{B}}) \tilde{G}] \end{aligned} \quad (131)$$

ここで、

$$[\gamma^\mu, \gamma^5]_+ = 0 \implies P_L \gamma^\mu = \gamma^\mu P_R, \quad P_R \gamma^\mu = \gamma^\mu P_L$$

$$\text{tr}[\text{any odd number of } \gamma' s] = 0, \quad \text{tr}[\gamma^5] = 0, \quad \text{tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5] = 0$$

を考慮して、残る項だけを取り出すと

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= \text{tr}[\not{p}_\tau \not{p}_{\tilde{B}} \tilde{G} \tilde{G} - m_\tau m_{\tilde{B}} \tilde{G}' \tilde{G}] \\ &= \text{tr}[\not{p}_\tau \not{p}_{\tilde{B}} (g_R^\dagger g_R P_R + g_L^2 P_L) - m_\tau m_{\tilde{B}} (g_R^\dagger g_L P_L + g_L g_R P_R)] \\ &= \text{tr}\left[\frac{1}{2} p_\tau \mu p_{\tilde{B}\nu} (\gamma^\mu \gamma^\nu) (g_R^\dagger g_R + g_L^2) - \frac{1}{2} m_\tau m_{\tilde{B}} (g_R^\dagger g_L + g_L g_R)\right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4 g^{\mu\nu} p_\tau \mu p_{\tilde{B}\nu} (g_R^\dagger g_R + g_L^2) - \frac{1}{2} \cdot 4 m_\tau m_{\tilde{B}} (g_R^\dagger g_L + g_L g_R) \\ &= 2 p_\tau \cdot p_{\tilde{B}} (g_R^\dagger g_R + g_L^2) - 2 m_\tau m_{\tilde{B}} (g_R^\dagger g_L + g_L g_R) \\ &= (g_R^\dagger g_R + g_L^2) (m_{\tilde{\tau}}^2 - m_\tau^2 - m_{\tilde{B}}^2) - 2 m_\tau m_{\tilde{B}} (g_R^\dagger g_L + g_L g_R) \end{aligned} \quad (132)$$

今考えている研究において重要なのは stau と bino の質量差 $\delta m = m_{\tilde{\tau}} - m_{\tilde{B}}$ があるので、これを使って $|\mathcal{M}|^2$ を書き直すと、結果として次式が得られることになる：

$$|\mathcal{M}|^2 = (g_R^\dagger g_R + g_L^2) [(\delta m)^2 + 2\delta m m_{\tilde{B}} - m_\tau^2] - 2 m_\tau m_{\tilde{B}} (g_R^\dagger g_L + g_L g_R) \quad (133)$$

2 体崩壊の場合、一般的に、ある粒子の静止系においてその粒子 (mass m) の decay rate Γ は次の式で与えられる：

$$\Gamma = \frac{|\vec{p}| |\mathcal{M}|^2}{8\pi m^2} \quad (134)$$

すなわち、stau の二体崩壊の decay rate を求めるためには、あとは $|\vec{p}_\tau|$ さえ分かればよいということになる。以下ではこの $|\vec{p}_\tau|$ を求めていく。その準備として、まず、 E_τ を粒子の mass のみで書き表す、stau の静止系で考えるとマンデルシュタム変数 s は次のように式変形することができる：

$$\begin{aligned} \sqrt{s} &= E_\tau + E_{\tilde{B}} \\ &= E_\tau + \sqrt{\vec{p}_{\tilde{B}}^2 + m_{\tilde{B}}^2} \\ &= E_\tau + \sqrt{\vec{p}_\tau^2 + m_{\tilde{B}}^2} \\ &= E_\tau + \sqrt{E_\tau^2 - m_\tau^2 + m_{\tilde{B}}^2} \end{aligned} \quad (135)$$

あとは左辺の E_τ を右辺に移項して、両辺を二乗すれば次式が得られる：

$$E_\tau = \frac{m_{\tilde{\tau}}^2 + m_\tau^2 - m_{\tilde{B}}^2}{2m_{\tilde{\tau}}} \quad (136)$$

これを用いると、

$$\begin{aligned} |\vec{p}_\tau| &= \sqrt{E_\tau^2 - m_\tau^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{m_{\tilde{\tau}}^2 + m_\tau^2 - m_{\tilde{B}}^2}{2m_{\tilde{\tau}}}\right)^2 - m_\tau^2} \end{aligned} \quad (137)$$

となる。ここでも δm を使ってこれを書き直しておく：

$$|\vec{p}_\tau| = \frac{1}{2(\delta m + m_{\tilde{B}})} \sqrt{[(\delta m)^2 - m_\tau^2]^2 + 4m_{\tilde{B}}(\delta m + m_{\tilde{B}})[(\delta m)^2 - m_\tau^2]} \quad (138)$$

したがって、 $\tilde{\tau} \rightarrow \tilde{B}\tau$ という反応に対する stau の decay rate が次式のように求められた：

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{|\vec{p}_{\tilde{\tau}}| |\mathcal{M}|^2}{8\pi m_{\tilde{\tau}}^2} \\ &= \frac{8\pi(\delta m + m_{\tilde{B}})^2 \cdot 2(\delta m + m_{\tilde{B}})}{\sqrt{[(\delta m)^2 - m_\tau^2]^2 + 4m_{\tilde{B}}(\delta m + m_{\tilde{B}})[(\delta m)^2 - m_\tau^2]}} \\ &\times \frac{1}{(g_R^\dagger g_R + g_L^2)[(\delta m)^2 + 2\delta m m_{\tilde{B}} - m_\tau^2] - 2m_\tau m_{\tilde{B}}(g_R^\dagger g_L + g_L g_R)} \end{aligned} \quad (139)$$

この結果を用いてこの反応しか起こらないとした場合の stau の寿命を求めてみると、どんなに δm を小さくしてもせいぜい $\sim 10^{-20}$ (秒) 程度にしかならない。これでは、当然のことながら、stau を集めるのは到底無理である。ところが、さらに δm が小さい場合、すなわち $\delta m \leq m_\tau$ の場合は寿命が大幅に伸びる。以下のサブセクションではそれについてを詳しく調べていく。

5.3 四体崩壊

次に質量差が tau mass 以下の場合どうなるかについて考える。この場合、tau を on-shell で生成することが出来ないので、stau は主に以下の反応を通して decay することになる：

$$\tilde{\tau} \rightarrow \tilde{B} \nu_\tau \mu \nu_\mu \quad (140)$$

$$\tilde{\tau} \rightarrow \tilde{B} \nu_\tau e \nu_e \quad (141)$$

$$\tilde{\tau} \rightarrow \tilde{B} \nu_\tau \pi \quad (142)$$

ここで注意しておくべき点がある；それはこれら以外にも stau が decay し得る反応が存在するという点である。例えば、終状態は (139) 式や (140) 式と同じであるが、プロパゲーターが tau ではなく wino になる場合などが考えられる。しかし、このような反応のクロスセクションは、一般に、プロパゲーターに入る粒子の mass の 4 乗で suppress され、上の

3つに比べると非常に小さなクロスセクションになる。よって、質量差が tau mass 以下の場合は上の3つの反応だけが主に効いてくることになるので、他の反応は考えないことにする。ここのサブセクションでは上の3つの反応のうち、4体崩壊の decay rate についてを詳しく調べていくことにする。

4体崩壊 [(139)式、(140)式] の decay rate を求めるために必要となるラグランジアンは、電荷の保存や始状態が stau であることなどを考慮すると、次式のようになる：

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 \\
 \mathcal{L}_1 &= \tilde{\tau}^* \tilde{B} \tilde{G} \tau + \bar{\tau} \tilde{G}' \tilde{B} \tilde{\tau} \\
 &= g_R^\dagger \bar{\tau} P_L \tilde{B} \tilde{\tau} + g_L \bar{\tau} P_R \tilde{B} \tilde{\tau} \\
 \mathcal{L}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} g_2 \bar{\nu}_\tau \gamma^\mu W_\mu^+ \tau_L \\
 \mathcal{L}_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} g_2 \bar{e}_L \gamma^\mu W_\mu^- \nu_{eL}
 \end{aligned} \tag{143}$$

これらのラグランジアンを使って振幅を求めていく（ただし、以下では electron の場合のみを考えていく。muon についても導出の流れは全く同じである。）：

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M} &= \langle e \bar{\nu}_e \nu_\tau \tilde{B} | \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 \mathcal{L}_3 | \tilde{\tau} \rangle \\
 &= \frac{1}{2} g_R^\dagger g_2^2 \langle e \bar{\nu}_e \nu_\tau \tilde{B} | e \bar{L} \gamma^\mu W_\mu^- \nu_{eL} \bar{\nu}_\tau \gamma^\nu W_\nu^+ \tau_L \bar{\tau} P_L \tilde{B} \tilde{\tau} | \tilde{\tau} \rangle \\
 &+ \frac{1}{2} g_L g_2^2 \langle e \bar{\nu}_e \nu_\tau \tilde{B} | e \bar{L} \gamma^\mu W_\mu^- \nu_{eL} \bar{\nu}_\tau \gamma^\nu W_\nu^+ \tau_L \bar{\tau} P_R \tilde{B} \tilde{\tau} | \tilde{\tau} \rangle
 \end{aligned} \tag{144}$$

二行目第一項を \mathcal{M}_1 、第二項を \mathcal{M}_2 とおく。

まずは \mathcal{M}_1 を計算していく（ $\frac{1}{2} g_R^\dagger g_2^2$ は計算中省略する）。計算の際、tau が off-shell でしか出れないような状況を考えていくので、中間状態として入る W boson について $P_W^2 = m_W^2$ となることよりプロパゲーターとして次式を用いる：

$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{p_W^2 - m_W^2} \sim \frac{ig_{\mu\nu}}{m_W^2} \tag{145}$$

始状態、終状態と各粒子とで縮約を考えていくと以下のようになる：

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_1 &= \langle e \bar{\nu}_e \nu_\tau \tilde{B} | \bar{e} P_R \gamma^\mu W_\mu^- P_L \nu_e \bar{\nu}_\tau P_R \gamma^\nu W_\nu^+ P_L \tau \bar{\tau} P_L \tilde{B} \tilde{\tau} | \tilde{\tau} \rangle \\
 &= \bar{u}^s(p_e) P_R \gamma^\mu P_L v^t(p_{\bar{\nu}_e}) \bar{u}^u(p_{\nu_\tau}) P_R \gamma^\nu \frac{ig_{\mu\nu}}{m_W^2} P_L \frac{i(p_\tau + m_\tau)}{p_\tau^2 - m_\tau^2} P_L v^r(p_{\tilde{B}}) \\
 &= \frac{-1}{m_W^2} \frac{1}{p_\tau^2 - m_\tau^2} \bar{u}^s(p_e) \gamma^\mu P_L v^t(p_{\bar{\nu}_e}) \bar{u}^u(p_{\nu_\tau}) \gamma^\nu g_{\mu\nu} m_\tau P_L v^r(p_{\tilde{B}})
 \end{aligned} \tag{146}$$

ここで二行目から三行目にいく際以下の式を用いた：

$$\begin{aligned}
 P_R \gamma^\mu P_L &= \gamma^\mu P_L P_L \\
 &= \gamma^\mu P_L \\
 P_L(p_\tau + m_\tau) P_L &= P_L p_\tau P_L + P_L m_\tau P_L \\
 &= p_\tau P_R P_L + m_\tau P_L P_L \\
 &= m_\tau P_L
 \end{aligned} \tag{147}$$

振幅の二乗を求めるために、 \mathcal{M}_1 の複素共役を求める：

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_1^* &= \frac{-1}{m_W^2} \frac{1}{p_\tau^2 - m_\tau^2} (u^{s\dagger}(p_e) \gamma^0 \gamma^\mu P_L v^t(p_{\bar{\nu}_e}) u^{u\dagger}(p_{\nu_\tau}) \gamma^0 \gamma^\nu g_{\mu\nu} m_\tau P_L v^r(p_{\tilde{B}}))^* \\
&= \frac{-1}{m_W^2} \frac{1}{p_\tau^2 - m_\tau^2} v^{r\dagger}(p_{\tilde{B}}) P_L m_\tau g_{\mu\nu} \gamma^{\nu\dagger} \gamma^0 u^u(p_{\nu_\tau}) v^{t\dagger}(p_{\bar{\nu}_e}) P_L \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 u^s(p_e) \\
&= \frac{-1}{m_W^2} \frac{1}{p_\tau^2 - m_\tau^2} \bar{v}^r(p_{\tilde{B}}) P_R m_\tau g_{\mu\nu} \gamma^\nu u^u(p_{\nu_\tau}) \bar{v}^t(p_{\bar{\nu}_e}) P_R \gamma^\mu u^s(p_e)
\end{aligned} \tag{148}$$

ここで二行目から三行目にいく際に以下の関係式を用いた：

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \tag{149}$$

(145) と (147) より振幅 \mathcal{M}_1 の二乗が求まる：

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}_1|^2 &= \left(\frac{-1}{m_W^2} \frac{1}{p_\tau^2 - m_\tau^2} \right)^2 (\bar{u}^s(p_e) \gamma^\mu P_L v^t(p_{\bar{\nu}_e}) \bar{u}^u(p_{\nu_\tau}) \gamma^\nu g_{\mu\nu} m_\tau P_L v^r(p_{\tilde{B}})) \\
&\quad \times (\bar{v}^r(p_{\tilde{B}}) P_R m_\tau g_{\rho\sigma} \gamma^\sigma u^u(p_{\nu_\tau}) \bar{v}^t P_R \gamma^\rho u^s(p_e)) \\
&= \left(\frac{-1}{m_W^2} \frac{1}{p_\tau^2 - m_\tau^2} \right)^2 (\bar{u}^s(p_e) \gamma^\mu P_L v^t(p_{\bar{\nu}_e}) \bar{v}^t(p_{\bar{\nu}_e}) P_R \gamma^\rho u^s(p_e)) \\
&\quad \times (\bar{u}^u(p_{\nu_\tau}) \gamma^\nu g_{\mu\nu} m_\tau P_L v^r(p_{\tilde{B}}) \bar{v}^r(p_{\tilde{B}}) P_R m_\tau g_{\rho\sigma} \gamma^\sigma u^u(p_{\nu_\tau})) \\
&= \left(\frac{-1}{m_W^2} \frac{1}{p_\tau^2 - m_\tau^2} \right)^2 \text{tr}[(\not{p}_e + m_e) \gamma^\mu P_L (\not{p}_{\bar{\nu}_e}) P_R \gamma^\rho] \\
&\quad \times \text{tr}[m_\tau^2 (\not{p}_{\nu_\tau}) \gamma^\nu g_{\mu\nu} P_L (\not{p}_{\tilde{B}} - m_{\tilde{B}}) P_R g_{\rho\sigma} \gamma^\sigma]
\end{aligned} \tag{150}$$

(149) の trace を一つずつ計算していく：

$$\begin{aligned}
\star \longrightarrow \text{tr}[(\not{p}_e + m_e) \gamma^\mu (\not{p}_{\bar{\nu}_e}) \gamma^\rho P_L] &= \frac{1}{2} \text{tr}[(\not{p}_e + m_e) \gamma^\mu \not{p}_{\bar{\nu}_e} \gamma^\rho (1 - \gamma^5)] \\
&= \frac{1}{2} \text{tr}[p_{ex} p_{\bar{\nu}_e y} \gamma^x \gamma^\mu \gamma^y \gamma^\rho (1 - \gamma^5)] \\
&= \frac{1}{2} 4 p_{ex} p_{\bar{\nu}_e y} (g^{x\mu} g^{y\rho} - g^{xy} g^{\mu\rho} + g^{x\rho} g^{\mu y} + i \epsilon^{x\mu y\rho}) \\
&= 2(p_e^\mu p_{\bar{\nu}_e}^\rho - (p_e \cdot p_{\bar{\nu}_e}) g^{\mu\rho} + p_e^\rho p_{\bar{\nu}_e} + i p_{ex} p_{\bar{\nu}_e y} \epsilon^{x\mu y\rho}) \\
\star \star \longrightarrow \text{tr}[m_\tau^2 \not{p}_{\nu_\tau} \gamma_\mu p_{\tilde{B}} \gamma_\rho P_L] &= \frac{1}{2} m_\tau^2 \text{tr}[\not{p}_{\nu_\tau} \gamma_\mu \not{p}_{\tilde{B}} \gamma_\rho (1 - \gamma^5)] \\
&= \frac{1}{2} m_\tau^2 p_{\nu_\tau}^\alpha p_{\tilde{B}}^\beta \text{tr}[\gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta \gamma_\rho (1 - \gamma^5)] \\
&= \frac{1}{2} 4 m_\tau^2 p_{\nu_\tau}^\alpha p_{\tilde{B}}^\beta (g_{\alpha\mu} g_{\beta\rho} + g_{\alpha\rho} g_{\mu\beta} - g_{\alpha\beta} g_{\mu\rho} - i \epsilon_{\alpha\mu\beta\rho}) \\
&= 2 m_\tau^2 (p_{\nu_\tau\mu} p_{\tilde{B}\rho} + p_{\nu_\tau\rho} p_{\tilde{B}\mu} - (p_{\nu_\tau} \cdot p_{\tilde{B}}) g_{\mu\rho} - i p_{\nu_\tau}^\alpha p_{\tilde{B}}^\beta \epsilon_{\alpha\mu\beta\rho})
\end{aligned} \tag{151}$$

\star と $\star \star$ の実部同士の積：

$$\begin{aligned}
\text{Re}(\star) \times \text{Re}(\star \star) &= 4 m_\tau^2 (p_e^\mu p_{\bar{\nu}_e}^\rho - (p_e \cdot p_{\bar{\nu}_e}) g^{\mu\rho} + p_e^\rho p_{\bar{\nu}_e}^\mu) \times (p_{\nu_\tau\mu} p_{\tilde{B}\rho} + p_{\nu_\tau\rho} p_{\tilde{B}\mu} - (p_{\nu_\tau} \cdot p_{\tilde{B}}) g_{\mu\rho}) \\
&= 8 m_\tau^2 [(p_e \cdot p_{\nu_\tau}) (p_{\bar{\nu}_e} \cdot p_{\tilde{B}}) + (p_e \cdot p_{\tilde{B}}) (p_{\bar{\nu}_e} \cdot p_{\nu_\tau})]
\end{aligned} \tag{152}$$

\star と $\star\star$ の虚部同士の積 :

$$\begin{aligned}
Im(\star) \times Im(\star\star) &= 4m_\tau^2 p_{ex} p_{\bar{e}y} p_{\nu_\tau}^\alpha p_{\tilde{B}}^\beta \epsilon^{x\mu y\rho} \epsilon_{\alpha\mu\beta\rho} \\
&= 4m_\tau^2 p_{ex} p_{\bar{e}y} p_{\nu_\tau}^\alpha p_{\tilde{B}}^\beta \epsilon^{xy\mu\rho} \epsilon_{\alpha\beta\mu\rho} \\
&= 4m_\tau^2 p_{ex} p_{\bar{e}y} p_{\nu_\tau}^\alpha p_{\tilde{B}}^\beta (-2)(\delta_\alpha^x \delta_\beta^y - \delta_\beta^x \delta_\alpha^y) \\
&= -8m_\tau^2 [(p_e \cdot p_{\nu_\tau})(p_{\bar{e}} \cdot p_{\tilde{B}}) - (p_e \cdot p_{\tilde{B}})(p_{\bar{e}} \cdot p_{\nu_\tau})]
\end{aligned} \tag{153}$$

\star と $\star\star$ の実部と虚部の積は 0 になるので、最終的に $|\mathcal{M}_1|^2$ は以下のようになる :

$$|\mathcal{M}_1|^2 = \left(\frac{-1}{m_W^2} \frac{1}{p_\tau^2 - m_\tau^2} \right)^2 m_\tau^2 (p_e \cdot p_{\tilde{B}})(p_{\bar{e}} \cdot p_{\nu_\tau}) \tag{154}$$

振幅 \mathcal{M}_2 についても同様に計算すると次式が得られる :

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_2 &= \frac{-1}{m_W^2} \frac{1}{p_\tau^2 - m_\tau^2} \bar{u}^s(p_e) \gamma^\mu P_L v^t(p_{\bar{e}}) \bar{u}^u(p_{\nu_\tau}) \gamma^\nu g_{\mu\nu} p_\tau^\mu P_R v^r(p_{\tilde{B}}) \\
\mathcal{M}_2^* &= \frac{-1}{m_W^2} \frac{1}{p_\tau^2 - m_\tau^2} \bar{v}^r(p_{\tilde{B}}) P_L p_\tau^\mu g_{\mu\nu} \gamma^\nu u^u(p_{\nu_\tau}) \bar{v}^t(p_{\bar{e}}) P_R \gamma^\mu u^s(p_e)
\end{aligned} \tag{155}$$

これらを使って振幅の二乗 $|\mathcal{M}|^2 = |\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2|^2$ を求める :

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}|^2 &= (\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2)(\mathcal{M}_1^* + \mathcal{M}_2^*) \\
&= |\mathcal{M}_1|^2 + |\mathcal{M}_2|^2 + \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2^* + \mathcal{M}_2 \mathcal{M}_1^* \\
|\mathcal{M}_2|^2 &= \left(\frac{-1}{m_W^2} \frac{1}{p_\tau^2 - m_\tau^2} \right)^2 [2(p_e \cdot p_\tau)(p_{\tilde{B}} \cdot p_\tau) - (p_{\tilde{\tau}} - p_{\tilde{B}})^2 (p_e \cdot p_{\tilde{B}})] (p_{\nu_\tau} \cdot p_{\bar{e}}) \\
\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2^* &= \left(\frac{-1}{m_W^2} \frac{1}{p_\tau^2 - m_\tau^2} \right)^2 [\bar{u}^s(p_e) \gamma^\mu P_L v^t(p_{\bar{e}}) \bar{u}^u(p_{\nu_\tau}) \gamma^\nu g_{\mu\nu} m_\tau P_L v^r(p_{\tilde{B}})] \\
&\quad \times [\bar{v}^r(p_{\tilde{B}}) P_L p_\tau^\mu g_{\rho\sigma} \gamma^\sigma u^u(p_{\nu_\tau}) \bar{v}^t(p_{\bar{e}}) P_R \gamma^\rho u^s(p_e)] \\
&= \left(\frac{-1}{m_W^2} \frac{1}{p_\tau^2 - m_\tau^2} \right)^2 [\bar{u}^s(p_e) \gamma^\mu P_L v^t(p_{\bar{e}}) \bar{v}^t(p_{\bar{e}}) P_R \gamma^\rho u^s(p_e)] \\
&\quad \times [\bar{u}^u(p_{\nu_\tau}) \gamma^\nu g_{\mu\nu} m_\tau P_L v^r(p_{\tilde{B}}) \bar{v}^r(p_{\tilde{B}}) P_L p_\tau^\mu g_{\rho\sigma} \gamma^\sigma u^u(p_{\nu_\tau})] \\
&= \left(\frac{-1}{m_W^2} \frac{1}{p_\tau^2 - m_\tau^2} \right)^2 m_\tau \text{tr}[(p_e + m_e) \gamma^\mu P_L p_{\bar{e}}^\mu P_R \gamma^\rho] \\
&\quad \times \text{tr}[p_{\nu_\tau} \gamma_\mu P_L (p_{\tilde{B}} - m_{\tilde{B}}) P_L p_\tau^\mu P_R \gamma_\rho]
\end{aligned} \tag{156}$$

(155) の最後に出てくる trace の一つ目を \otimes 、二つ目を $\otimes\otimes$ とする。これらを一つずつ計算していく、計算の際 $\text{tr}[\text{any odd number of } s] = 0$ となることを用いると以下のようになる :

$$\begin{aligned}
\otimes \Rightarrow tr[(\not{p}_e + m_e)\gamma^\mu P_L \not{p}_{\bar{\nu}_e} P_R \gamma^\rho] &= \frac{1}{2} tr[(\not{p}_e + m_e)\gamma^\mu \not{p}_{\bar{\nu}_e} \gamma^\rho (1 - \gamma^5)] \\
&= \frac{1}{2} p_{ex} p_{\bar{\nu}_e y} tr[\gamma^x \gamma^\mu \gamma^y \gamma^\rho (1 - \gamma^5)] \\
&= \frac{1}{2} 4 p_{ex} p_{\bar{\nu}_e y} (g^{x\mu} g^{y\rho} - g^{xy} g^{\mu\rho} + g^{x\rho} g^{\mu y} + i\epsilon^{x\mu y\rho}) \\
&= 2(p_e^\mu p_{\bar{\nu}_e}^\rho - (p_e \cdot p_{\bar{\nu}_e}) g^{\mu\rho} + p_e^\rho p_{\bar{\nu}_e}^\mu + i p_{ex} p_{\bar{\nu}_e y} \epsilon^{x\mu y\rho}) \\
\otimes \otimes \Rightarrow tr[\not{p}_{\nu_\tau} \gamma_\mu P_L (\not{p}_{\tilde{B}} - m_{\tilde{B}}) P_L \not{p}_\tau \gamma_\rho] &= -\frac{1}{2} m_{\tilde{B}} tr[\not{p}_{\nu_\tau} \gamma_\mu \not{p}_\tau \gamma_\rho (1 - \gamma^5)] \\
&= -\frac{1}{2} m_{\tilde{B}} p_{\nu_\tau}^\alpha p_\tau^\gamma tr[\gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\gamma \gamma_\rho (1 - \gamma^5)] \\
&= -2 m_{\tilde{B}} p_{\nu_\tau}^\alpha p_\tau^\gamma (g_{\alpha\mu} g_{\gamma\rho} + g_{\alpha\rho} g_{\mu\gamma} - g_{\alpha\gamma} g_{\mu\rho} - i\epsilon_{\alpha\mu\gamma\rho}) \\
&= -2 m_{\tilde{B}} (p_{\nu_\tau\mu} p_{\tau\rho} + p_{\nu_\tau\rho} p_{\tau\mu} - (p_{\nu_\tau} \cdot p_\tau) g_{\mu\rho} - i p_{\nu_\tau}^\alpha p_\tau^\gamma \epsilon_{\alpha\mu\gamma\rho}) \\
&\quad (157)
\end{aligned}$$

\otimes と $\otimes \otimes$ の実部同士の積と虚部同士の積 :

$$\begin{aligned}
Re(\otimes) \times Re(\otimes \otimes) &= -4 m_{\tilde{B}} [p_e^\mu p_{\bar{\nu}_e}^\rho - (p_e \cdot p_{\bar{\nu}_e}) g^{\mu\rho} + p_e^\rho p_{\bar{\nu}_e}^\mu] \\
&\quad \times [p_{\nu_\tau\mu} p_{\tau\rho} + p_{\nu_\tau\rho} p_{\tau\mu} - (p_{\nu_\tau} \cdot p_\tau) g_{\mu\rho}] \\
&= -8 m_{\tilde{B}} [(p_e \cdot p_{\nu_\tau}) (p_{\bar{\nu}_e} \cdot p_\tau) + (p_e \cdot p_\tau) (p_{\bar{\nu}_e} \cdot p_{\nu_\tau})] \\
Im(\otimes) \times Im(\otimes \otimes) &= -4 m_{\tilde{B}} p_{\nu_\tau}^\alpha p_\tau^\gamma p_{ex} p_{\bar{\nu}_e y} \epsilon_{\alpha\mu\gamma\rho} \epsilon^{x\mu y\rho} \\
&= -4 m_{\tilde{B}} p_{\nu_\tau}^\alpha p_\tau^\gamma p_{ex} p_{\bar{\nu}_e y} (-2)(\delta_\alpha^x \delta_\gamma^y - \delta_\alpha^y \delta_\gamma^x) \\
&= 8 m_{\tilde{B}} [(p_e \cdot p_{\nu_\tau}) (p_{\bar{\nu}_e} \cdot p_\tau) - (p_e \cdot p_\tau) (p_{\bar{\nu}_e} \cdot p_{\nu_\tau})]
\end{aligned} \quad (158)$$

この結果と、 $[(\otimes \text{の実部}) \times (\otimes \otimes \text{の虚部})] + [(\otimes \text{の虚部}) \times (\otimes \otimes \text{の実部})] = 0$ となることを用いると、結局以下の結果が得られる :

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2^* &= \left(\frac{-1}{m_W^2} \frac{1}{p_\tau^2 - m_\tau^2}\right)^2 m_\tau [-16 m_{\tilde{B}} (p_e \cdot p_\tau) (p_{\bar{\nu}_e} \cdot p_{\nu_\tau})] \\
&= -\left(\frac{-1}{m_W^2} \frac{4}{p_\tau^2 - m_\tau^2}\right)^2 m_\tau m_{\tilde{B}} (p_e \cdot p_\tau) (p_{\bar{\nu}_e} \cdot p_{\nu_\tau})
\end{aligned} \quad (159)$$

$\mathcal{M}_2 \mathcal{M}_1^*$ についても同様に計算していくと $\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2^*$ の結果と全く同じになることが分かる :

$$\mathcal{M}_2 \mathcal{M}_1^* = -\left(\frac{-1}{m_W^2} \frac{4}{p_\tau^2 - m_\tau^2}\right)^2 m_\tau m_{\tilde{B}} (p_e \cdot p_\tau) (p_{\bar{\nu}_e} \cdot p_{\nu_\tau}) \quad (160)$$

したがって、これらの結果を全て用いると $|\mathcal{M}|^2$ は次式のように得られる :

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}|^2 &= |\mathcal{M}_1|^2 + |\mathcal{M}_2|^2 + \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2^* + \mathcal{M}_2 \mathcal{M}_1^* \\
&= \left(\frac{-1}{m_W^2} \frac{4}{p_\tau^2 - m_\tau^2} \right)^2 \frac{1}{4} [g_R^{\dagger 2} g_2^4 m_\tau^2 (p_e \cdot p_{\tilde{B}}) (p_{\nu_\tau} \cdot p_{\bar{\nu}_e}) \\
&\quad + g_L^2 g_2^4 [(2(p_e \cdot p_\tau) (p_{\tilde{B}} \cdot p_\tau) - (p_{\tilde{\tau}} - p_{\tilde{B}})^2 (p_e \cdot p_{\tilde{B}})) (p_{\nu_\tau} \cdot p_{\bar{\nu}_e})] \\
&\quad - 2g_L g_R^{\dagger} g_2^4 m_\tau m_{\tilde{B}} (p_e \cdot p_\tau) (p_{\nu_\tau} \cdot p_{\bar{\nu}_e})] \\
&= \left(\frac{2g_2^2}{m_W^2 (p_\tau^2 - m_\tau^2)} \right)^2 [g_R^{\dagger 2} m_\tau^2 (p_e \cdot p_{\tilde{B}}) - 2g_L g_R^{\dagger} m_\tau m_{\tilde{B}} (p_e \cdot p_\tau) \\
&\quad + g_L^2 [2(p_e \cdot p_\tau) (p_{\tilde{B}} \cdot p_\tau) - (p_{\tilde{\tau}} - p_{\tilde{B}})^2 (p_e \cdot p_{\tilde{B}})]] (p_{\nu_\tau} \cdot p_{\bar{\nu}_e})
\end{aligned} \tag{161}$$

微分崩壊率は振幅の二乗を用いて以下のように表される：

$$\begin{aligned}
d\Gamma &= \frac{1}{2m_{\tilde{\tau}}} \frac{d^3 p_e}{(2\pi)^3 2E_{\tilde{B}}} \frac{d^3 p_e}{(2\pi)^3 2E_e} \frac{d^3 p_{\nu_\tau}}{(2\pi)^3 2E_{\nu_\tau}} \frac{d^3 p_{\bar{\nu}_e}}{(2\pi)^3 2E_{\bar{\nu}_e}} \\
&\times |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{\tilde{\tau}} - p_{\tilde{B}} - p_e - p_{\nu_\tau} - p_{\bar{\nu}_e})
\end{aligned} \tag{162}$$

$d\Gamma$ についてまずは終状態の neutrino $\bar{\nu}_e$ 、 ν_τ についての積分を実行する：

$$\begin{aligned}
\frac{d\Gamma}{\frac{d^3 p_e}{(2\pi)^3 2E_{\tilde{B}}} \frac{d^3 p_e}{(2\pi)^3 2E_e}} &= \frac{1}{2m_{\tilde{\tau}}} \left(\frac{2g_2^2}{m_W^2 (p_\tau^2 - m_\tau^2)} \right)^2 (2\pi)^4 [g_R^{\dagger 2} m_\tau^2 (p_e \cdot p_{\tilde{B}}) - 2g_L g_R^{\dagger} m_\tau m_{\tilde{B}} (p_e \cdot p_\tau) \\
&\quad + g_L^2 [2(p_e \cdot p_\tau) (p_{\tilde{B}} \cdot p_\tau) - (p_{\tilde{\tau}} - p_{\tilde{B}})^2 (p_e \cdot p_{\tilde{B}})] \\
&\quad \times \int \frac{d^3 p_{\nu_\tau}}{(2\pi)^3 2E_{\nu_\tau}} \frac{d^3 p_{\bar{\nu}_e}}{(2\pi)^3 2E_{\bar{\nu}_e}} (p_{\nu_\tau} \cdot p_{\bar{\nu}_e}) \delta^{(4)}(q - p_{\nu_\tau} - p_{\bar{\nu}_e}) \\
&\quad q = p_{\tilde{\tau}} - p_{\tilde{B}} - p_e
\end{aligned} \tag{163}$$

(162) の中の積分を $(p_{\bar{\nu}_e} \cdot p_{\nu_\tau}) = \frac{1}{2}q^2$ であることを用いて計算する：

$$\begin{aligned}
&\int \frac{d^3 p_{\nu_\tau}}{(2\pi)^3 2E_{\nu_\tau}} \frac{d^3 p_{\bar{\nu}_e}}{(2\pi)^3 2E_{\bar{\nu}_e}} (p_{\nu_\tau} \cdot p_{\bar{\nu}_e}) \delta^{(4)}(q - p_{\nu_\tau} - p_{\bar{\nu}_e}) \\
&= \frac{q^2}{2} \int \frac{d^3 p_{\nu_\tau}}{(2\pi)^3 2E_{\nu_\tau}} \frac{d^3 p_{\bar{\nu}_e}}{(2\pi)^3 2E_{\bar{\nu}_e}} \delta^{(4)}(q - p_{\bar{\nu}_e} - p_{\nu_\tau})
\end{aligned} \tag{164}$$

この積分はローレンツ不变積分であるから、もともとを考えていた系は stau の静止系であったが、この積分の実行時にはどんな慣性系に移して実行してもよい。よって、この積分は electron-neutrino と tau-neutrino の重心系で実行する。

electron-neutrino と tau-neutrino の重心系であれば $p_{\bar{\nu}_e} = -p_{\nu_\tau}$ 、また neutrino の質量が 0 であることより $E_{\bar{\nu}_e} = E_{\nu_\tau}$ となることを考慮すると、(163) の積分は以下のようになる：

$$\begin{aligned}
& \frac{q^2}{2} \int \frac{d^3 p_{\nu_\tau}}{(2\pi)^3 2E_{\nu_\tau}} \frac{d^3 p_{\bar{\nu}_e}}{(2\pi)^3 2E_{\bar{\nu}_e}} \delta^{(4)}(q - p_{\bar{\nu}_e} - p_{\nu_\tau}) \\
&= \frac{q^2}{2} \frac{1}{4(2\pi)^6} \int d^3 p_{\bar{\nu}_e} \frac{1}{E_{\bar{\nu}_e} E_{\nu_\tau}} \delta(q^0 - E_{\bar{\nu}_e} - E_{\nu_\tau}) \\
&= \frac{q^2}{2} \frac{1}{4(2\pi)^6} \int d\Omega \int d|p_{\bar{\nu}_e}| \frac{|p_{\bar{\nu}_e}|^2}{E_{\bar{\nu}_e}^2} \delta(q^0 - 2E_{\bar{\nu}_e}) \\
&= \frac{q^2}{2} \frac{1}{4(2\pi)^6} (4\pi) \frac{1}{2} \\
&= \frac{q^2}{2} \frac{1}{4(2\pi)^5}
\end{aligned} \tag{165}$$

したがって次式が得られる：

$$\begin{aligned}
\frac{d\Gamma}{\frac{d^3 p_e}{(2\pi)^3 2E_{\tilde{B}}} \frac{d^3 p_e}{(2\pi)^3 2E_e}} &= \frac{1}{2m_{\tilde{\tau}}} \left(\frac{2g_2^2}{m_W^2 (p_\tau^2 - m_\tau^2)} \right)^2 (2\pi)^4 \frac{1}{2} \frac{1}{4(2\pi)^5} [g_R^{\dagger 2} m_\tau^2 (p_e \cdot p_{\tilde{B}}) \\
&\quad - 2g_L g_R^\dagger m_\tau m_{\tilde{B}} (p_e \cdot p_\tau) + g_L^2 [2(p_e \cdot p_\tau)(p_{\tilde{B}} \cdot p_\tau) - (p_{\tilde{\tau}} - p_{\tilde{B}})^2 (p_e \cdot p_{\tilde{B}})]] q^2
\end{aligned} \tag{166}$$

これをまずは electron の終状態について積分をしていくのだが、electron の運動量に角度依存性が入らないようにするために、この積分を stau の静止系から tau の静止系に移して実行する。以下に計算で用いる tau の静止系での量を示す（ただし、bino の放出方向を軸にとり、bino と electron の放出方向の間の角度を θ とする）：

$$\begin{aligned}
q^2 &= (p_{\tilde{\tau}} - p_{\tilde{B}} - p_e)^2 \\
&= m_{\tilde{\tau}}^2 + m_{\tilde{B}}^2 + m_e^2 - 2p_{\tilde{\tau}} \cdot p_{\tilde{B}} - 2(E_{\tilde{\tau}} E_e - \vec{p}_{\tilde{\tau}} \cdot \vec{p}_e) + 2(E_{\tilde{B}} E_e - \vec{p}_{\tilde{B}} \cdot \vec{p}_e) \\
&= m_{\tilde{\tau}}^2 + m_{\tilde{B}}^2 + m_e^2 - 2p_{\tilde{\tau}} \cdot p_{\tilde{B}} - 2E_{\tilde{\tau}} E_e + 2E_{\tilde{B}} E_e
\end{aligned} \tag{167}$$

$$\begin{aligned}
p_e \cdot p_\tau &= p_e \cdot (p_{\tilde{\tau}} - p_{\tilde{B}}) \\
&= E_{\tilde{\tau}} E_e - E_{\tilde{B}} E_e
\end{aligned}$$

ただし計算途中で、tau の静止系では $\vec{p}_{\tilde{\tau}} = \vec{p}_{\tilde{B}}$ となることを用いた。

これを用いると (165) の $[\sim]q^2$ は以下のようになる :

$$\begin{aligned}
& [g_R^{\dagger 2} m_\tau^2 (p_e \cdot p_{\tilde{B}}) - 2g_L g_R^\dagger m_\tau m_{\tilde{B}} (p_e \cdot p_\tau) + g_L^2 [2(p_e \cdot p_\tau)(p_{\tilde{B}} \cdot p_\tau) - (p_{\tilde{\tau}} - p_{\tilde{B}})^2 (p_e \cdot p_{\tilde{B}})]] q^2 \\
& = [g_R^{\dagger 2} m_\tau^2 (E_{\tilde{B}} E_e - \vec{p}_e \cdot \vec{p}_{\tilde{B}}) - 2g_L g_R^\dagger m_\tau m_{\tilde{B}} (E_{\tilde{\tau}} E_e - E_{\tilde{B}} E_e) \\
& + g_L^2 [(E_{\tilde{\tau}} E_e - E_{\tilde{B}} E_e)(p_{\tilde{B}} \cdot p_\tau) - (p_{\tilde{\tau}} - p_{\tilde{B}})^2 (E_{\tilde{B}} E_e - \vec{p}_e \cdot \vec{p}_{\tilde{B}})]] \\
& \times [m_{\tilde{\tau}}^2 + m_{\tilde{B}}^2 + m_e^2 - 2p_{\tilde{\tau}} \cdot p_{\tilde{B}} - 2E_{\tilde{\tau}} E_e + 2E_{\tilde{B}} E_e] \\
& = [g_R^{\dagger 2} m_\tau^2 (m_{\tilde{\tau}}^2 + m_{\tilde{B}}^2 + m_e^2 - 2p_{\tilde{\tau}} \cdot p_{\tilde{B}}) E_{\tilde{B}} - 2g_L g_R^\dagger m_\tau m_{\tilde{B}} (m_{\tilde{\tau}}^2 + m_{\tilde{B}}^2 + m_e^2 - 2p_{\tilde{\tau}} \cdot p_{\tilde{B}}) (E_{\tilde{\tau}} - E_{\tilde{B}}) \\
& + g_L^2 (m_{\tilde{\tau}}^2 + m_{\tilde{B}}^2 + m_e^2 - 2p_{\tilde{\tau}} \cdot p_{\tilde{B}}) (p_{\tilde{B}} \cdot p_\tau) (E_{\tilde{\tau}} - E_{\tilde{B}}) - g_L^2 (m_{\tilde{\tau}}^2 + m_{\tilde{B}}^2 + m_e^2 - 2p_{\tilde{\tau}} \cdot p_{\tilde{B}}) (p_{\tilde{\tau}} - p_{\tilde{B}})^2 E_{\tilde{B}}] E_e \\
& + [-2g_R^{\dagger 2} m_\tau^2 E_{\tilde{B}} (E_{\tilde{\tau}} - E_{\tilde{B}}) + 4g_L g_R^\dagger m_\tau m_{\tilde{B}} (E_{\tilde{\tau}} - E_{\tilde{B}})^2 \\
& - 2g_L^2 (p_{\tilde{B}} \cdot p_\tau) (E_{\tilde{\tau}} - E_{\tilde{B}})^2 + 2g_L^2 (p_{\tilde{\tau}} - p_{\tilde{B}})^2 (E_{\tilde{\tau}} - E_{\tilde{B}}) E_{\tilde{B}}] E_e^2
\end{aligned} \tag{168}$$

ただし bino と stau の重心系で考えると、bino の放出方向に対して electron は等方的に放出されるので θ の積分範囲は単純に $0 \sim \pi$ となり、この積分範囲で考えると、

$$\int \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{1}{2} \int \sin 2\theta d\theta = 0 \tag{169}$$

となるので、 $\cos \theta$ の一次の項は落として考えた。

ここで、electron の終状態について積分をするために、electron のエネルギー上限値を求める。electron のエネルギーが最大値になるのは、electron の運動量が最大値になるときであり、これは electron が中間状態の tau から electron neutrino、tau neutrino と正反対に出たときであり、このときに electron のエネルギーは上限値をとる。

以下では、 $p_{\bar{\nu}_e} \cdot p_{\nu_\tau} = 0$ であることを用いて、運動量保存則から electron のエネルギー上限値を求める :

$$\begin{aligned}
p_\tau^2 &= (p_{\tilde{\tau}} - p_{\tilde{B}})^2 \\
&= (p_e + p_{\bar{\nu}_e} + p_{\nu_\tau})^2 \\
&= m_e^2 + 2p_e \cdot (p_{\bar{\nu}_e} + p_{\nu_\tau}) + 2p_{\bar{\nu}_e} \cdot p_{\nu_\tau} \\
&= m_e^2 + 2E_e (E_{\bar{\nu}_e} + E_{\nu_\tau}) - 2\vec{p}_e \cdot (\vec{p}_{\bar{\nu}_e} + \vec{p}_{\nu_\tau}) \\
&= m_e^2 + 2E_e \sqrt{E_e^2 - m_e^2} + 2(E_e^2 - m_e^2)
\end{aligned} \tag{170}$$

ここで、4 行目から 5 行目にいく際に $E_{\bar{\nu}_e} + E_{\nu_\tau} = |\vec{p}_{\bar{\nu}_e}| + |\vec{p}_{\nu_\tau}| = |\vec{p}_e|$ 、 $\vec{p}_{\bar{\nu}_e} + \vec{p}_{\nu_\tau} = -\vec{p}_e$ であることを用いた。この (169) の両辺を二乗すると以下のようになる :

$$\begin{aligned}
4E_e^2 (E_e^2 - m_e^2) &= (p_\tau^2 + m_e^2 - 2E_e^2)^2 \\
&= p_\tau^4 + m_e^4 + 4E_e^4 + 2m_e^2 p_\tau^2 - 4p_\tau^2 E_e^2 - 4m_e^2 E_e^2
\end{aligned} \tag{171}$$

したがって、electron のエネルギー上限値 $(E_e)_{max}$ として次式が得られる :

$$(E_e)_{max} = \frac{p_\tau^2 + m_e^2}{2\sqrt{p_\tau^2}} \tag{172}$$

今求めた積分上限値と積分下限値 m_e を用いると、electron の終状態について積分は次のようになる：

$$\begin{aligned}
\int \frac{E_e d^3 p_e}{(2\pi)^3 2E_e} &= \frac{1}{2(2\pi)^3} \int d\Omega \int |\vec{p}_e|^2 d|\vec{p}_e| \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{m_e}^{(E_e)_{max}} E_e \sqrt{E_e^2 - m_e^2} dE_e \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{3} [(E_e^2 - m_e^2)^{\frac{3}{2}}]_{m_e}^{(E_e)_{max}} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{3} [(E_e)_{max}^2 - m_e^2]^{\frac{3}{2}} \\
\int \frac{E_e^2 d^3 p_e}{(2\pi)^3 2E_e} &= \frac{1}{2(2\pi)^3} \int d\Omega \int E_e |\vec{p}_e|^2 d|\vec{p}_e| \tag{173} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{m_e}^{(E_e)_{max}} E_e \sqrt{E_e^2 - m_e^2} dE_e \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{8} [E_e(2E_e^2 - m_e^2) - m_e^4 \log[E_e + \sqrt{E_e^2 - m_e^2}]]_{m_e}^{(E_e)_{max}} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{8} [(E_e)_{max}(2(E_e)_{max}^2 - m_e^2) \sqrt{(E_e)_{max}^2 - m_e^2} \\
&\quad - m_e^4 \log[(E_e)_{max} + \sqrt{(E_e)_{max}^2 - m_e^2}] + m_e^4 \log[m_e]]
\end{aligned}$$

本来求めたいものは stau の静止系での stau の寿命である。したがって、(172) の結果と (167) を (165) に代入し、stau の静止系にブーストして bino の終状態について積分を実行する。tau の静止系でのエネルギーを $E_{\tilde{B}}^*$ 、stau の静止系でのエネルギーを $E_{\tilde{B}}$ とすると、系のローレンツ変換により以下のような関係が成り立つ：

$$E_{\tilde{B}}^* = \frac{m_{\tilde{\tau}} E_{\tilde{B}} - m_{\tilde{B}}^2}{\sqrt{m_{\tilde{\tau}}^2 + m_{\tilde{B}}^2 - 2m_{\tilde{\tau}} E_{\tilde{B}}}} \tag{174}$$

この変換によって stau の静止系では様々な物理量が以下のようになる：

$$\begin{aligned}
E_{\tilde{\tau}}^* - E_{\tilde{B}}^* &= (m_{\tilde{\tau}}^2 + m_{\tilde{B}}^2 - 2m_{\tilde{\tau}} E_{\tilde{B}})^{\frac{1}{2}} \\
(E_e)_{max} &= \frac{1}{2} (m_{\tilde{\tau}}^2 + m_{\tilde{B}}^2 - 2m_{\tilde{\tau}} E_{\tilde{B}})^{-\frac{1}{2}} (m_{\tilde{\tau}}^2 + m_{\tilde{B}}^2 + m_e^2 - 2m_{\tilde{\tau}} E_{\tilde{B}}) \\
p_{\tilde{\tau}} \cdot p_{\tilde{B}} &= m_{\tilde{\tau}} E_{\tilde{B}} \\
p_{\tilde{B}} \cdot p_{\tau} &= m_{\tilde{\tau}} E_{\tilde{B}} - m_{\tilde{B}}^2 \\
p_{\tau}^2 &= (p_{\tilde{\tau}} - p_{\tilde{B}})^2 \\
&= m_{\tilde{\tau}}^2 + m_{\tilde{B}}^2 - 2m_{\tilde{\tau}} E_{\tilde{B}} \tag{175}
\end{aligned}$$

したがって、最終的に decayrate は次式で表される：

$$\begin{aligned}
\Gamma = & \frac{g_2^4}{4m_{\tilde{\tau}}m_W^4(2\pi)^5} \int_{m_{\tilde{B}}}^{\frac{m_{\tilde{\tau}}^2 + m_{\tilde{B}}^2 - m_e^2}{2m_{\tilde{\tau}}}} dE_{\tilde{B}} \frac{\sqrt{E_{\tilde{B}}^2 - m_{\tilde{B}}^2}}{[m_{\tilde{\tau}}^2 + m_{\tilde{B}}^2 - m_e^2 - 2m_{\tilde{\tau}}E_{\tilde{B}}]^2} \\
& \times [|g_R|^2 (m_{\tilde{\tau}}E_{\tilde{B}} - m_{\tilde{B}}^2)(m_{\tilde{\tau}}^2 + m_{\tilde{B}}^2 - 2m_{\tilde{\tau}}E_{\tilde{B}})^{-1} - 2g_L g_R^\dagger m_{\tilde{B}} m_{\tau} + g_L^2 (m_{\tilde{\tau}}E_{\tilde{B}} - m_{\tilde{B}}^2)] \\
& \times \left[\frac{1}{24} (m_{\tilde{\tau}}^2 + m_{\tilde{B}}^2 - 2m_{\tilde{\tau}}E_{\tilde{B}})^{-1} (m_{\tilde{\tau}}^2 + m_{\tilde{B}}^2 + m_e^2 - 2m_{\tilde{\tau}}E_{\tilde{B}}) (m_{\tilde{\tau}}^2 + m_{\tilde{B}}^2 - m_e^2 - 2m_{\tilde{\tau}}E_{\tilde{B}})^3 \right] \\
& + \left[-\frac{1}{32} (m_{\tilde{\tau}}^2 + m_{\tilde{B}}^2 - 2m_{\tilde{\tau}}E_{\tilde{B}})^{-1} (m_{\tilde{\tau}}^2 + m_{\tilde{B}}^2 + m_e^2 - 2m_{\tilde{\tau}}E_{\tilde{B}})^3 (m_{\tilde{\tau}}^2 + m_{\tilde{B}}^2 - m_e^2 - 2m_{\tilde{\tau}}E_{\tilde{B}}) \right. \\
& + \frac{1}{16} m_e^2 (m_{\tilde{\tau}}^2 + m_{\tilde{B}}^2 + m_e^2 - 2m_{\tilde{\tau}}E_{\tilde{B}}) (m_{\tilde{\tau}}^2 + m_{\tilde{B}}^2 - m_e^2 - 2m_{\tilde{\tau}}E_{\tilde{B}}) \\
& \left. + \frac{1}{4} m_e^4 (m_{\tilde{\tau}}^2 + m_{\tilde{B}}^2 - 2m_{\tilde{\tau}}E_{\tilde{B}}) \log \left[\frac{(m_{\tilde{\tau}}^2 + m_{\tilde{B}}^2 - 2m_{\tilde{\tau}}E_{\tilde{B}})^{1/2}}{m_e} \right] \right] \\
\end{aligned} \tag{176}$$

あとはこれを数値的に積分することにより stau の decay rate、寿命を求めることが出来る。その数値積分の際に注意すべきことがある；それは tau のプロパゲーターの扱いである。 $\delta m < m_{\tau}$ の場合は (175) 式のプロパゲーターのままで何も問題はない。問題となるのは $\delta m > m_{\tau}$ の場合に 4 体崩壊の decay rate を計算するときに生じる。プロパゲーターの表式を思い出せば明らかなことであるが、積分の際に $p_{\tau}^2 = m_{\tau}^2$ となる点において特異点が現れ、decay rate が発散してしまうのである。この発散を避けるため、一般的には、プロパゲーターを以下のように置き換えるという手法が用いられる：

$$\frac{1}{(p_{\tau}^2 - m_{\tau}^2)^2} \Rightarrow \frac{1}{(p_{\tau}^2 - m_{\tau}^2)^2 + m_{\tau}^2 \Gamma_{\tau}^2} \tag{177}$$

ここで Γ_{τ} は tau の total width である。これにより特異点の出現は避けることは出来るが、 $p_{\tau}^2 = m_{\tau}^2$ となる点の近傍においてはかなり鋭いピークが現れ、このままでは数値積分の際に数値精度が悪くなってしまう。したがって、(175) 式に (176) 式を代入して数値積分するだけではあまり精度の良くない結果しか得られない。そのため、数値積分する前に (175) 式において変数変換などを施し、計算に現れる数値の幅を少しでも狭くしてから積分を実行するべきである。さらに、置き換えたプロパゲーターもうまく式変形をして、ピークの高さを出来る限り低くしてから用いるべきである。

この結果を用いた stau の寿命に関する議論は、3 体崩壊の結果と合わせて、サブセクション 5.5 において行う。

5.4 三体崩壊

このサブセクションでは 3 体崩壊 [(141) 式] の decay rate を求めていく。計算の流れは 2 体崩壊、4 体崩壊の decay rate 導出と全く同じであるので、ここでは要点と結果のみを

簡潔に記していく。用いるラグランジアンは次式で与えられる：

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_4 \\
 \mathcal{L}_1 &= \tilde{\tau}^* \tilde{B} \tilde{G} \tau + \bar{\tau} \tilde{G}' \tilde{B} \tilde{\tau} \\
 &= g_R^\dagger \bar{\tau} P_L \tilde{B} \tilde{\tau} + g_L \bar{\tau} P_R \tilde{B} \tilde{\tau} \\
 \mathcal{L}_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}} G \nu_\tau \gamma_\mu P_L \tau J^\mu
 \end{aligned} \tag{178}$$

ここで、 G は 4-フェルミ相互作用の結合定数であり、 J^μ は pion の生成・消滅を記述するカレントであり、状態に作用させると以下のようになるものとする：

$$\begin{aligned}
 < \pi^-(p_\pi) | J^\mu | 0 > &= -i\sqrt{2} f_\pi \cos\theta_c p_\pi^\mu \\
 &= g_\pi p_\pi^\mu
 \end{aligned} \tag{179}$$

ただし、 f_π は pion の崩壊定数、 θ_c はカビボ角を表わしている。これらを用いて、前と同様に計算していくと、今考えている 3 体崩壊 [(141) 式] の振幅 $|\mathcal{M}|^2$ は次のように得られる：

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{M}|^2 &= \frac{G^2 |g_\pi|^2}{(p_\tau^2 - m_\tau^2)} [g_L^2 [4(p_{\tilde{B}} \cdot p_\tau)(p_\pi \cdot p_{\nu_\tau})(p_\pi \cdot p_\tau) - 2m_\pi^2(p_{\tilde{B}} \cdot p_\tau)(p_{\nu_\tau} \cdot p_\tau) \\
 &\quad - 2p_\tau^2(p_{\tilde{B}} \cdot p_\pi)(p_\pi \cdot p_{\nu_\tau}) + m_\pi^2 p_\tau^2(p_{\tilde{B}} \cdot p_{\nu_\tau})] \\
 &\quad - \text{Re}[g_L g_R] \cdot 2m_{\tilde{B}} m_\tau [2(p_\pi \cdot p_{\nu_\tau})(p_\pi \cdot p_\tau) - m_\pi^2(p_{\nu_\tau} \cdot p_\tau)] \\
 &\quad + |g_R|^2 m_\tau^2 [2(p_\pi \cdot p_{\nu_\tau})(p_{\tilde{B}} \cdot p_\pi) - m_\pi^2(p_{\tilde{B}} \cdot p_{\nu_\tau})]]
 \end{aligned} \tag{180}$$

あとは今得られた振幅を終状態位相空間について積分すれば decay rate を求めることができます：

$$\begin{aligned}
 \Gamma &= \frac{1}{2m_{\tilde{\tau}}} \int \frac{d^3 p_{\tilde{B}}}{(2\pi)^3 2E_{\tilde{B}}} \frac{d^3 p_\pi}{(2\pi)^3 2E_\pi} \frac{d^3 p_{\nu_\tau}}{(2\pi)^3 2E_{\nu_\tau}} \\
 &\quad \times |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{\tilde{\tau}} - p_{\tilde{B}} - p_\pi - p_{\nu_\tau})
 \end{aligned} \tag{181}$$

各積分ごとにうまく座標系を選びながら積分を実行していくと、最終的に 3 体崩壊の decay rate として次式が得られる：

$$\begin{aligned}
 \Gamma &= \frac{G^2 |g_\pi|^2}{32\pi^3 m_{\tilde{\tau}}} \int_{m_{\tilde{B}}}^{\frac{m_{\tilde{\tau}}^2 + m_{\tilde{B}}^2 - m_\pi^2}{m_{\tilde{B}}}} dE_{\tilde{B}} \frac{\sqrt{E_{\tilde{B}}^2 - m_{\tilde{B}}^2}}{(m_{\tilde{\tau}}^2 + m_{\tilde{B}}^2 - m_\pi^2 - 2m_{\tilde{\tau}} E_{\tilde{B}})^2} \\
 &\quad \times \left[\frac{1}{4} g_L^2 [-(m_{\tilde{\tau}}^2 + m_{\tilde{B}}^2 - 2m_{\tilde{\tau}} E_{\tilde{B}})^3 + (m_{\tilde{\tau}}^2 - m_{\tilde{B}}^2 + m_\pi^2)(m_{\tilde{\tau}}^2 + m_{\tilde{B}}^2 - m_\pi^2)^2 \right. \\
 &\quad \left. - m_\pi^2(m_{\tilde{\tau}}^2 - m_{\tilde{B}}^2 + m_\pi^2)(m_{\tilde{\tau}}^2 + m_{\tilde{B}}^2 - 2m_{\tilde{\tau}} E_{\tilde{B}})] \right. \\
 &\quad \left. - \text{Re}[g_L g_R] m_{\tilde{B}} m_\tau ((m_{\tilde{\tau}}^2 + m_{\tilde{B}}^2 - 2m_{\tilde{\tau}} E_{\tilde{B}})^2 - m_\pi^2(m_{\tilde{\tau}}^2 + m_{\tilde{B}}^2 - 2m_{\tilde{\tau}} E_{\tilde{B}})) \right. \\
 &\quad \left. + |g_R|^2 \frac{1}{4} m_\tau^2 [-(m_{\tilde{\tau}}^2 + m_{\tilde{B}}^2 - 2m_{\tilde{\tau}} E_{\tilde{B}})^2 + (m_{\tilde{\tau}}^2 - m_{\tilde{B}}^2 + m_\pi^2)(m_{\tilde{\tau}}^2 + m_{\tilde{B}}^2 - 2m_{\tilde{\tau}} E_{\tilde{B}}) - m_\pi^2(m_{\tilde{\tau}}^2 - m_{\tilde{B}}^2)] \right]
 \end{aligned} \tag{182}$$

これを数値積分すれば具体的に decay rate や寿命が得られるのだが、その際にも前のサブセクションで注意したようにプロパゲーターから特異点が出ないようにしなくてはならない。そのための手法は 4 体崩壊の場合と全く同じである。得られる数値結果についての議論は 4 体崩壊の場合と合わせて次のサブセクションで行う。

5.5 stau lifetime のパラメーター依存性

上で求めてきた各モードの decay rate はいくつかのパラメーターを決めてることでその値が定まる。特に重要なのは、サブセクション 5.1 でも述べたように、stau と bino の質量差 δm である。このサブセクションでは、パラメーター変化により stau の寿命にどのような影響が与えられるかについて調べていき、そこから得られる結果をまとめていく。

まずは、bino mass $m_{\tilde{B}}$ 依存性について調べていく。前のセクションで調べた coannihilation process を考慮した場合には、観測による制限 $0.094 \leq \Omega_{DM} h^2 \leq 0.129$ に対応する bino (正確には neutrino) LSP mass の制限が以下のようになることが知られている [Ref[5]]:

$$200\text{GeV} \leq m_{\tilde{B}} \leq 600\text{GeV} \quad (183)$$

(138) 式、(175) 式、(181) 式において分母の $m_{\tilde{\tau}}$ を $m_{\tilde{\tau}} \rightarrow \delta m + m_{\tilde{B}}$ と置き換えると、 δm が $m_{\tilde{B}}$ に比べて小さいという事に注意すると、stau の寿命は大雑把に考えて $m_{\tilde{B}}$ に比例していると見なすことが出来る。すなわち、この事と上の mass の制限とを合わせて考えると、bino mass $m_{\tilde{B}}$ は stau の寿命をオーダーで変えるようなことは無い、という結果が得られる。よって以後の解析、グラフにおいては bino mass $m_{\tilde{B}}$ は 300GeV に固定して扱うこととする。

次に、stau の寿命に対する CP violating phase γ_τ の依存性について見ていく。 $m_{\tilde{B}} = 300$ GeV、 $\delta m = 0.5$ GeV、 $\theta_\tau = \pi/3$ にパラメーターを取った場合の γ_τ と stau の寿命との関係を図 13 に示す：図から明らかのように、 $m_{\tilde{B}}$ と同様に γ_τ も stau の寿命に対してほとんど影響を与えない。よって、この先の解析では $\gamma_\tau = 0$ と固定する。

ここから、この研究のメインともいいくべきパラメーター δm が stau の寿命に対してどう依存しているのかを調べていく。前のセクションでも論じたように、coannihilation が relic abundance に大きく影響するには、 $\delta m/m_{\tilde{B}} \sim$ 数 % でなくてはならない。このような制限範囲内で stau の寿命がどう変化するかを図 14 に示す：図において各パラメーターは $m_{\tilde{B}} = 300$ GeV、 $\theta_\tau = \pi/3$ 、 $\gamma_\tau = 0$ としてある。またグラフの横軸は $\delta m(\text{GeV})$ にとっている。図 14 には、上で求めた decay rate を全て足し合わせて得られる寿命と共に、各モードの decay rate から得られる寿命も示してある。異なる線種を見比べることにより、各領域において支配的になっている崩壊モードが何であるかが読み取れる。図における tau mass 以下の領域に注目すると、stau の寿命が $10^{-6} \sim 10^{10}$ ほどになっており、これならばこの研究で目標としている stau の捕獲と収集が出来るであろうと思われる。

stau の寿命に対する δm 依存性についてより定量的に解析していく。この解析は Ref[6] に基づいて行う。簡単化のため、stau が bino とマスレス粒子に decay する場合を考える。decay rate の δm 依存性を決定するのは位相空間と振幅 $|\mathcal{M}|^2$ である。n 体崩壊の場合、今のように終状態が 1 つの粒子以外はマスレス粒子であるとすると、一般的に位相空間の δm 依存性は次のように表わされる：

$$\propto (\delta m)^{2(n-2)+1} \quad (184)$$

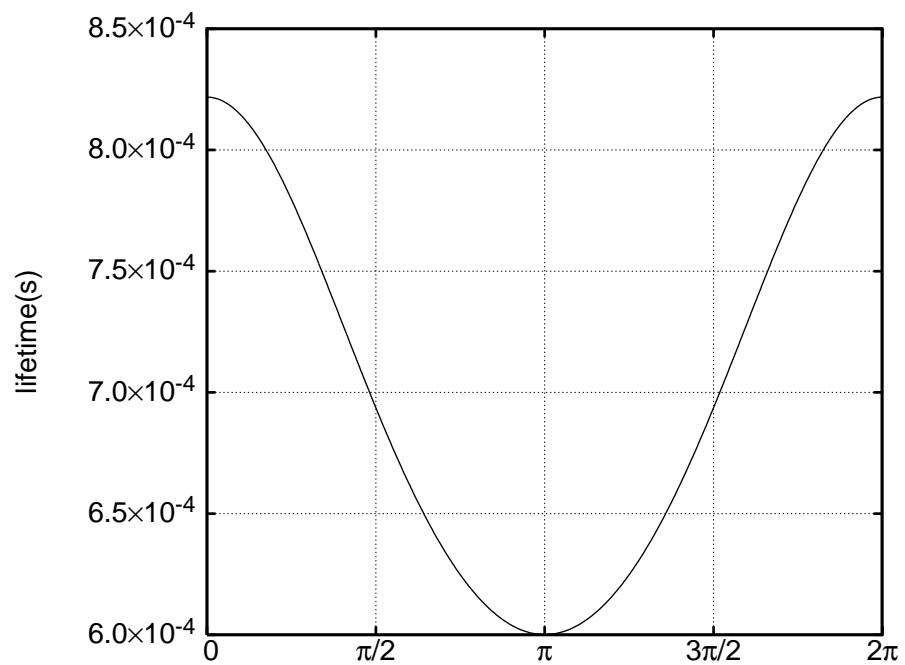


図 13: stau の寿命に対する CP violating phase γ_τ の依存性 (Ref[20] より引用)

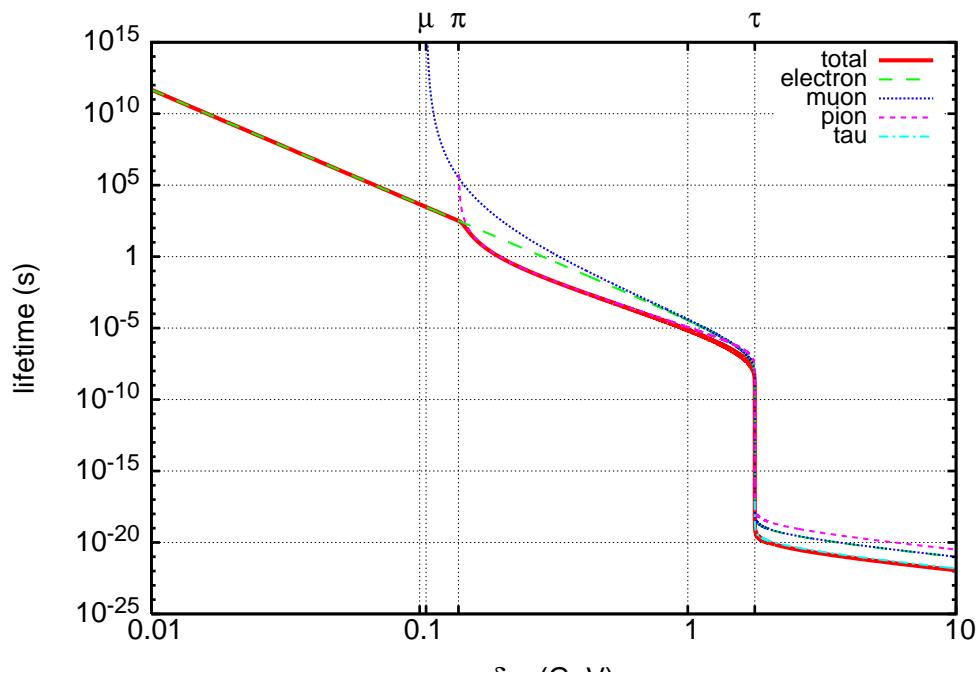


図 14: stau の寿命に対する質量差 δm の依存性 (グラフの横軸は $\delta m(GeV)$)(Ref[20] より引用)

また、1つの粒子以外がマスレスのフェルミオンである場合、フェルミオンの運動量は振幅に線形で依存するため、 δm 依存性は以下のようになる：

$$|\mathcal{M}|^2 \propto (\delta m)^{n-1} \quad (185)$$

一方、bino の他に 1 つの pion(NG-boson)、あとは (n-2) 個のマスレスのフェルミオンが終状態である場合は、pion の運動量は振幅に二乗の形で依存するため、 δm 依存性として次式が得られる：

$$|\mathcal{M}|^2 \propto (\delta m)^n \quad (186)$$

最終的にこれらをまとめて考えると 2 体、3 体、4 体崩壊の decay rate は以下のようない δm 依存性をもつことになる：

$$\begin{aligned} \Gamma_{2-body} &\propto (\delta m)^2 \\ \Gamma_{3-body} &\propto (\delta m)^6 \\ \Gamma_{4-body} &\propto (\delta m)^8 \end{aligned} \quad (187)$$

終状態の粒子がマスレスではない、より一般的な場合で考えると、それぞれの decay rate の δm 依存性は

$$\begin{aligned} \Gamma_{2-body} &\propto (\delta m)((\delta m)^2 - m_\tau^2)^{1/2} \\ \Gamma_{3-body} &\propto (\delta m)((\delta m)^2 - m_\pi^2)^{5/2} \\ \Gamma_{4-body} &\propto (\delta m)^3((\delta m)^2 - m_{\mu(e)}^2)^{5/2} \end{aligned} \quad (188)$$

となる。これは上で求めてきた各 decay rate[(138)、(175)、(181) 式]を、各崩壊モードの threshold から離れたところで近似していくことで得られる。

最後に、stau の寿命に対する stau の混合角 θ_τ の依存性について議論していく。図 15、16 に、 $m_{\tilde{B}} = 300\text{GeV}$ 、 $\gamma_\tau = 0$ と固定して θ_τ (横軸) の関数として stau の寿命を示す：図 15 は $\delta m = 2\text{GeV}$ 、図 16 は $\delta m = 0.2\text{GeV}$ の場合である。これら 2 つの図を見比べれば明らかのように、 δm が小さくなるにしたがって θ_τ による寿命の変化は大きくなる。また、 δm が小さくなるほどピークの位置は $\theta_\tau = 0$ に近づき、形は鋭くなっていくことが分かる。これらは全てニュートリノが左巻きの tau とのみ相互作用することが原因となっている。プロパゲーターにおいて $\tilde{\tau}_R$ は m_τ の項を通して τ_L と結合するのに対して、 $\tilde{\tau}_L$ は p_τ の項を通して τ_L と結合する。このときに $p_\tau \sim \delta m \ll m_\tau$ であれば、 $\tilde{\tau}_R$ による寄与が支配的になり、その結果として上の図のような大きな依存形の違いが現れることになる。

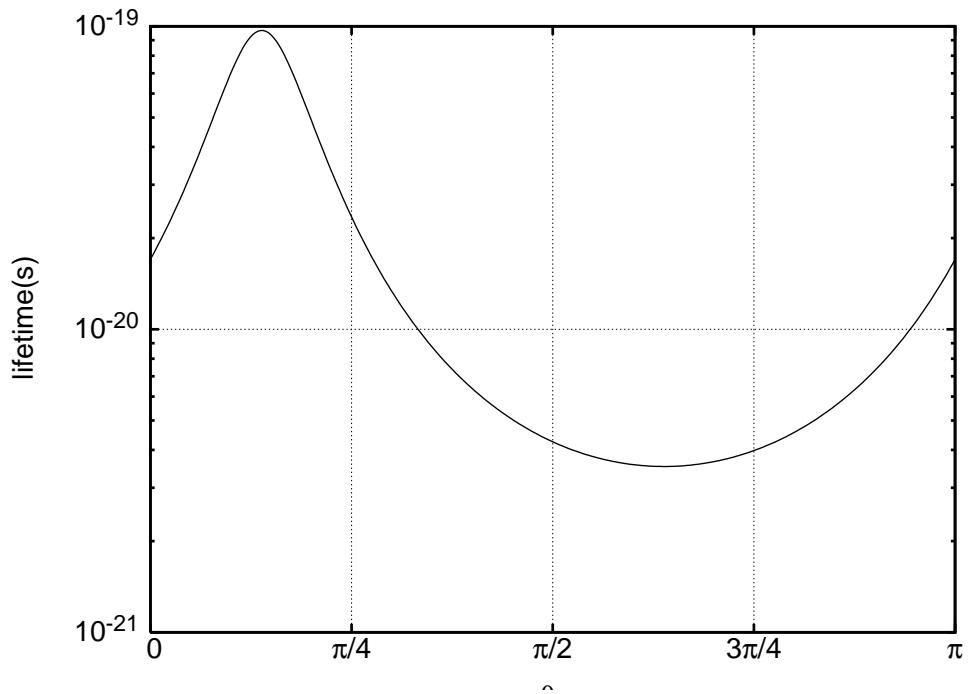


図 15: stau の寿命に対する stau の混合角 θ_τ の依存性 ($\delta m = 2\text{GeV}$) (Ref[20] より引用)

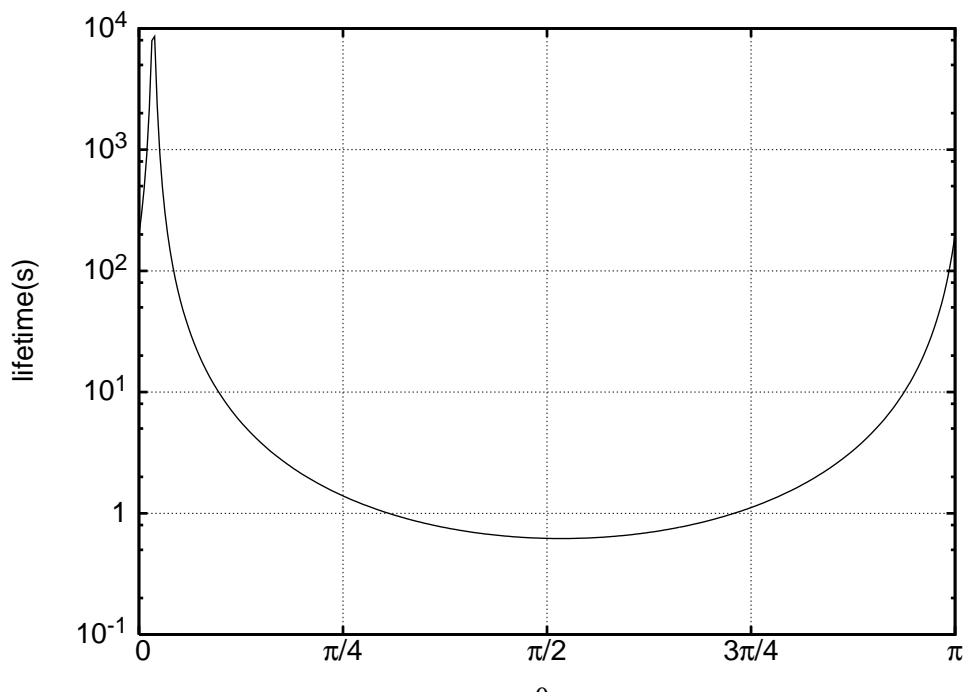


図 16: stau の寿命に対する stau の混合角 θ_τ の依存性 ($\delta m = 0.2\text{GeV}$) (Ref[20] より引用)

6 summary

本論文では、標準宇宙論を土台にし、観測により得られる数々の dark matter 存在の証拠、またそれに基づき予測される様々な dark matter の候補について論じてきた。その際、数々の観測事実と超対称性理論における R-parity の保存とを考慮すると、超対称性粒子の 1 つである neutralino が dark matter の有力候補になりえるということを見た。また、素粒子的 dark matter を考えるうえで重要となる relic density 計算の基本形についてを取り上げた。さらに、relic density 計算において特別な扱いが必要となる 3 つのケースについて議論し、その 3 つのケースを考慮した際の relic density の大幅な変化を調べた。その特別の場合の 1 つである coannihilation case に注目し、dark matter として neutralino LSP、NLSP として stau を考えて加速器における物理に関連する研究を行った。具体的には、neutralino LSP と NLSP stau との質量差が非常に小さい質量領域においては、stau の崩壊モードがかなり限定されることにより stau が超長寿命化しえる、というものであった。この超長寿命化によって将来の加速器において生成された stau の大型 detector による収集が可能になり、収集後の stau を利用して超対称性理論や SQS-decay (Ref[21]) の研究進歩が予測される。

今後の研究においては、セクション 3.7 において述べた 511KeV の γ -ray line emission に注目する。これに関連した特殊な状況下における反応を考慮した relic abundance 計算、またその結果から候補として考えられる dark matter についての研究を行っていく予定である。

A ボルツマン方程式

非平衡系においては、粒子の分布状態を記述する分布関数はボルツマン方程式を解くことにより求められる。ここからこのボルツマン方程式の導出について見ていく。

A.1 導出のための予備知識

粒子の運動を統計的に扱うために、ある粒子種について位相空間中の分布関数 $f(x, p)$ を考える。ここで (x, p) は 8 次元位相空間内の座標を表している。通常の 4 次元時空の不变体積要素は $\sqrt{-g}d^4x$ 、運動量空間の不变体積要素は $\sqrt{-g}d^4p$ となることより、今考えている 8 次元位相空間の不变体積要素は $(-g)d^4xd^4p$ となる。粒子のエネルギー $p^0 \geq 0$ と粒子の on-shell 条件を考慮して、運動量空間の不变運動量要素として次式を定義する：

$$d\Pi \equiv (2\pi)^{-3} \sqrt{-g}d^4p \theta(p^0) \delta(p^2 - m^2) \quad (189)$$

$\theta(x)$: 階段関数

この $d\Pi$ は局所ミンコフスキ空間ににおけるローレンツスカラーである。これをデルタ関数の性質を用いて式変形していくと以下のようになる：

$$\begin{aligned} d\Pi &= (2\pi)^{-3} d^4p \theta(p^0) \delta[(p^0)^2 - |\vec{p}|^2 - m^2] \\ &= \frac{d^4p}{2(2\pi)^3 p^0} \delta(p^0 - \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}) \\ &= \frac{d^3p}{2(2\pi)^3 \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}} \\ &= \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p^0} \end{aligned} \quad (190)$$

左辺はローレンツスカラーであるので、当然右辺も局所ミンコフスキ空間ににおけるローレンツスカラーとなる。

局所ミンコフスキ空間では、分布関数を運動量で積分すれば個数密度 $n(\vec{x}, t)$ になるのは明らかである：

$$\begin{aligned} n(\vec{x}, t) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f(x, p) dx \\ &= 2 \int d\Pi p^0 f(x, p) \end{aligned} \quad (191)$$

ここで式変形では (189) 式を用いた、式変形後の表式は一般座標での個数密度 $n(\vec{x}, t)$ を表している。この一般座標での個数密度 $n(\vec{x}, t)$ の表式を第 0 成分とする 4 元ベクトルを粒子 4 元流束といい、次式で定義される：

$$\begin{aligned} N^\mu(x) &= 2 \int d\Pi p^\mu f(x, p) \\ &= (n, \vec{j}) \end{aligned} \quad (192)$$

この \vec{j} を局所ミンコフスキ空空間で書き表すと次のように書ける：

$$\vec{j}(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\vec{p}}{p^0} f(x, p) \quad (193)$$

この \vec{p}/p^0 という量は粒子の 3 元速度であるから、 $\vec{j}(\vec{x}, t)$ は粒子の平均的な空間方向の流れを表わす量になっている。すなわち、 N^μ は粒子の個数密度と空間方向の平均速度から作られるベクトル量、ということになる。

A.2 リュービルの定理

粒子が重力のみの影響を受けて運動する場合、その軌跡は以下の測地線の方程式に従う：

$$\begin{aligned} \frac{dp^\mu}{d\lambda} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu p^\nu p^\lambda &= 0 \\ p^\mu &= \frac{dx^\mu}{d\lambda} \end{aligned} \quad (194)$$

ここで λ はアフィンパラメーターであり、これは粒子に mass がある場合は粒子に沿った固有時間を mass で割ったものとなる。

この先では、リュービルの定理導出のための準備として、不变体積要素 $d\Omega = (-g)d^4 x d^4 p$ が粒子の測地線に沿って不变となることを示していく。以下ではその際に使ういくつかの関係式等を求めていく。アフィンパラメーター λ が $\delta\lambda$ だけ変化すると、粒子の位相空間中の座標は以下のように変化する：

$$\begin{aligned} x'^\mu &= x^\mu + \delta x^\mu \\ &= x^\mu + \frac{dx^\mu}{d\lambda} \delta\lambda \\ &= x^\mu + p^\mu \delta\lambda \\ p'^\mu &= p^\mu + \delta p^\mu \\ &= p^\mu + \frac{dp^\mu}{d\lambda} \delta\lambda \\ &= p^\mu - \Gamma_{\nu\lambda}^\mu p^\nu p^\lambda \delta\lambda \end{aligned} \quad (195)$$

$x^\mu \rightarrow x'^\mu$ 、 $p^\mu \rightarrow p'^\mu$ に対応するヤコビアン J :

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} \partial x'^\mu / \partial x^\alpha & \partial p'^\mu / \partial x^\alpha \\ \partial x'^\mu / \partial p^\beta & \partial p'^\nu / \partial p^\beta \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \delta_\alpha^\mu & 0 \\ \delta_\beta^\mu \delta\lambda & \delta_\beta^\nu - 2\Gamma_{\beta\lambda}^\nu p^\lambda \delta\lambda \end{vmatrix} \\ &= 1 - 2\Gamma_{\mu\nu}^\mu p^\nu \delta\lambda \\ &= 1 - g^{\mu\nu} g_{\nu\mu, \lambda} \delta x^\lambda \\ &= 1 - \frac{\delta g}{g} \end{aligned} \quad (196)$$

ただし、上のヤコビアン J 計算において以下の式を用いた：

$$\begin{aligned} g &= \det(g_{\mu\nu}) \\ dg &= gg^{\mu\nu}dg_{\mu\nu} \\ \Gamma_{\lambda\nu}^{\mu} &= \frac{1}{2}g^{\mu\rho}(g_{\rho\lambda,\nu} + g_{\rho\nu,\lambda} - g_{\lambda\nu,\rho}) \end{aligned} \quad (197)$$

これらを用いて不变体積要素 $d\Omega$ の微小変化分を計算すると

$$\begin{aligned} \delta(d\Omega) &= -g \cdot \delta(d^4xd^4p) - (\delta g)d^4xd^4p \\ &= -g(d^4x'd^4p' - d^4xd^4p) - (\delta g)d^4xd^4p \\ &= -g(Jd^4xd^4p - d^4xd^4p) - (\delta g)d^4xd^4p \\ &= -g\left(-\frac{\delta g}{g}d^4xd^4p\right) - (\delta g)d^4xd^4p \\ &= 0 \end{aligned} \quad (198)$$

となり、確かに 8 次元位相空間の不变体積要素は測地線に沿って不变となることが確かめられた。

次に、不变体積要素 $d\Omega = (-g)d^4xd^4p$ を書きかえる、そのためにまずは座標空間の不变体積 $\sqrt{-g}d^4x$ を書き換えていく。この不变体積 $\sqrt{-g}d^4x$ は、 dV を空間部分の 3 次元不变体積、 dn を dV に垂直な方向を向いた単位長さ時間的間隔分とすると、次のように書き表わせる：

$$\sqrt{-g}d^4x = dVdn \quad (199)$$

また、粒子の世界線がこの微小体積中と交わる長さと同じ長さをもつ、粒子の世界線に沿った方向を持つベクトル dx^μ と、単位ベクトル n^μ を以下のように定義する：

$$\begin{aligned} dx^\mu &= (dn, dx, dy, dz) \\ n^\mu &= (1, 0, 0, 0) \end{aligned} \quad (200)$$

これらを用いると座標空間の不变体積 $\sqrt{-g}d^4x$ は

$$\begin{aligned} \sqrt{-g}d^4x &= dVdn \\ &= dV(n_\mu dx^\mu) \\ &= (n_\mu p^\mu)dVd\lambda \end{aligned} \quad (201)$$

と書ける。今求めた式の両辺に運動量空間の不变運動量要素 $d\Pi$ [(188) 式] を掛ける：

$$d\Pi\sqrt{-g}d^4x = (n_\mu p^\mu)dVd\Pi d\lambda \quad (202)$$

前の方で示した通り、8 次元位相空間の不变体積要素は測地線に沿って不变となるので、当然、(201) 式の両辺も粒子の測地線に沿って一定となる。ここまで得た結果と $d\lambda = \text{一定}$ を使うと、結論として以下のリュービルの定理が導かれる：

『粒子の運動に沿ってとった次の量は一定である』

$$(n_\mu p^\mu)dVd\Pi = \text{const} \quad (203)$$

A.3 ボルツマン方程式

ここでは、上で求めたリュービルの定理を用いていよいよボルツマン方程式を導出していく。まず、ある時刻に座標空間微小体積 dV を横切る粒子のうち、運動量が $d\Pi$ の範囲にあるものの数を dN と定義する。微小体積 $dV d\Pi$ 中にある粒子 4 元流束を

$$dN^\mu = p^\mu f(x, p) dV d\Pi \quad (204)$$

と書くことになると、粒子数 dN はこの 4 元流束の n^μ 方向の成分により与えられる：

$$\begin{aligned} dN &= n_\mu dN^\mu \\ &= (n_\mu p^\mu) f(x, p) dV d\Pi \end{aligned} \quad (205)$$

この表式とリュービルの定理を使って、粒子の測地線に沿っての dN の変化を調べる：

$$\begin{aligned} \delta(dN) &= (\delta f(x, p)) n_\mu p^\mu dV d\Pi + f(x, p) \delta((n_\mu p^\mu) dV d\Pi) \\ &= \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \lambda} \frac{\partial f}{\partial x^\mu} + \frac{\partial p^\mu}{\partial \lambda} \frac{\partial f}{\partial p^\mu} \right) \delta \lambda (n_\mu p^\mu) dV d\Pi + 0 \\ &= (p^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\nu\lambda}^\mu p^\nu p^\lambda \frac{\partial f}{\partial p^\mu}) \delta \lambda (n_\mu p^\mu) dV d\Pi \end{aligned} \quad (206)$$

粒子に重力以外の相互作用が働く場合は粒子数 dN は粒子の測地線に沿って一定となるので、 $\delta(dN) = 0$ となる。このことと (205) 式とを合わせて考えると次の方程式が成立つことになる：

$$p^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\nu\lambda}^\mu p^\nu p^\lambda \frac{\partial f}{\partial p^\mu} = 0 \quad (207)$$

この方程式のことをリュービル方程式、または無衝突ボルツマン方程式という。

粒子の相互作用により dN が変化する場合、粒子の運動に沿ってその変化率を以下のように書くこととする：

$$C[f](n_\mu p^\mu) dV d\Pi \quad (208)$$

この $C[f]$ は衝突項と呼ばれるものであり、粒子の相互作用の詳細により形が決まる。これを用いると、より一般的なボルツマン方程式が次式のように書ける：

$$p^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\nu\lambda}^\mu p^\nu p^\lambda \frac{\partial f}{\partial p^\mu} = C[f] \quad (209)$$

A.4 短距離相互作用による衝突項

衝突項 $C[f]$ について考えていく際に以下のような仮定をつける：

- 長距離力としては重力のみが作用
- 短距離力は粒子同士の衝突や生成消滅過程として瞬間的に作用するものと近似

また以下のように演算子とそれが満たす関係式を定義する：

$$\begin{aligned}
 a_i^\dagger &\implies \text{運動量 } \vec{p}_i, \text{ スピン } \sigma_i \text{ をもつ粒子 } i \text{ の生成演算子} \\
 a_i &\implies \text{運動量 } \vec{p}_i, \text{ スpin } \sigma_i \text{ をもつ粒子 } i \text{ の消滅演算子} \\
 [a_i, a_j^\dagger]_\pm &= \delta_{ij} \\
 [a_i, a_j]_\pm &= [a_i^\dagger, a_j^\dagger]_\pm = 0
 \end{aligned} \tag{210}$$

ただし

$$[a, b]_+ = ab + ba \text{ for fermion}$$

$$[a, b]_- = ab - ba \text{ for boson}$$

これらの演算子を用いると、粒子 i が n_i 個ずつあるような状態は次のように書くことができる：

$$| n_1, n_2, \dots \rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2! \dots}} a_1^\dagger a_2^\dagger \dots | 0 \rangle \tag{211}$$

この状態に生成、消滅演算子を作用させると以下のようになる：

$$\begin{aligned}
 a_i | n_1, \dots, n_i, \dots \rangle &= \sqrt{n_i} | n_1, \dots, n_i - 1, \dots \rangle \\
 a_i^\dagger | n_1, \dots, n_i, \dots \rangle &= \sqrt{1 \mp n_i} | n_1, \dots, n_i + 1, \dots \rangle
 \end{aligned} \tag{212}$$

以後、 \pm のような書き方をしたときは上の符号がフェルミオン、下の符号がボソンに対応するように表記することにする。

ここから時空の小さな領域 D の中の以下のような衝突反応を考えていく：

$$i + j + \dots \longrightarrow k + l + \dots \tag{213}$$

領域 D は空間的超平面 G と、それに垂直な時間間隔 T からなるものとする。つまり、領域 D の静止系での時間間隔は T となる。また、領域 D の初期時刻は $t=0$ とする。さらに、領域 D は十分小さく、曲率のない平坦な空間であるとする。まずは、初期時刻における多粒子系の状態ベクトルを次のように設定する：

$$| \psi_{in} \rangle = | n_1, \dots, n_i, n_j, \dots, n_k, n_l, \dots; in \rangle \tag{214}$$

この状態を時刻 $t=0$ から $t=T$ まで時間発展させると次のようになるとする：

$$| \psi_{in} \rangle \longrightarrow | \psi_{in}; T \rangle \tag{215}$$

衝突後の状態ベクトルは以下のように表わされる：

$$| \psi_{out} \rangle = | n_1, \dots, n_i - 1, n_j - 1, \dots, n_k + 1, n_l + 1, \dots; out \rangle \tag{216}$$

相互作用のハミルトニアンとして $H = H_0 + H_{int}$ を考えると、今考えている衝突が領域 D で起こる確率は散乱理論により、摂動一次近似で以下のようになる：

$$| \langle \psi_{in}; T | \psi_{out} \rangle |^2 = T \delta(E_{in} - E_{out}) | \langle \psi_{out} | H_{int} | \psi_{in} \rangle |^2 \tag{217}$$

$E_{in} \implies |\psi_{in}\rangle$ の非摂動エネルギー固有値

$E_{out} \implies |\psi_{out}\rangle$ の非摂動エネルギー固有値

$T \implies$ 領域 D の時間間隔

H_{int} はウィックの定理により正規順序積の和に展開されるので次式のように展開することができる：

$$H_{int} = \sum w(k, l, \dots; i, j, \dots) a_k^\dagger a_l^\dagger \dots a_i a_j \dots \quad (218)$$

(210) ~ (217) より

$$\begin{aligned} |\langle \psi_{in}; T | \psi_{out} \rangle|^2 &= T \delta(E_{in} - E_{out}) |\langle \psi_{out} | H_{int} | \psi_{in} \rangle|^2 \\ &= T \delta(E_{in} - E_{out}) |w(k, l, \dots; i, j, \dots)|^2 n_i n_j \dots (1 \mp n_k) (1 \mp n_l) \dots \end{aligned} \quad (219)$$

ここで、始状態において占められている粒子数 $n_i, n_j, \dots, n_k, n_l, \dots$ について座標空間に関する統計平均をとれば、この反応が起きる確率を与えることになる。ところが、今考えている反応は座標空間については領域 D で指定されており、運動量空間に関しては何も手を加えていない状態になっている。このことは、個数密度 n は座標空間に関する統計平均をとったとしても、8 次元位相空間の個数密度とはなりえず、領域 D における運動量空間個数密度分布関数 $f(\vec{p})$ にまでしかならない、という事を意味している。ここから先の議論では、座標空間に関する統計平均をとったとして、個数密度 n を運動量空間の分布関数 $f(\vec{p})$ にして考えていく。

さて、ボルツマン方程式の衝突項は、前のサブセクションで見たように、位相空間素片 $dV d\Pi$ 中における粒子数のアフィンパラメーターあたりの変化を知ることにより得られる。まずはそのための準備をしていく。不变運動量素片 $d\Pi_a (a = i, j, \dots, k, l, \dots)$ で表わされる各粒子の運動量空間における区間において、考えている反応が領域 D の中にで単位時間あたりに起こる回数の期待値を dN' とすると

$$\begin{aligned} dN'(i, j, \dots \rightarrow k, l, \dots) &= dV d\Pi_i d\Pi_j \dots d\Pi_k d\Pi_l \dots f_i f_j \dots \\ &\quad \times (1 \mp f_k) (1 \mp f_l) \dots W(i, j, \dots \rightarrow k, l, \dots) \end{aligned} \quad (220)$$

と表わされる、ここでファクター $W(i, j, \dots \rightarrow k, l, \dots)$ の中には $\delta(E_{in} - E_{out})$ などのファクターが全て吸収されている。ある粒子 a の運動に沿っての数の変化 dN_a は反応後に不变位相体積 $(n_\mu p_a^\mu) dV d\Pi_a$ に入ってくる数と反応によりこの位相体積から出していく数の差で与えられる、すなわちこれは上の式を用いると以下のように表わされる：

$$\begin{aligned} dN_a &= (n_\mu p_a^\mu) d\Pi_a \\ &\quad \times \int_{i, j, \dots, k, l, \dots} [dN'(i, j, \dots \rightarrow a, k, l, \dots) - dN'(a, i, j, \dots \rightarrow k, l, \dots)] \end{aligned} \quad (221)$$

これを (207) 式と比べると、結局衝突項 $C[f]$ は次式のようになることが分かる：

$$C[f] = \int d\Pi_i d\Pi_j \dots d\Pi_k d\Pi_l \dots \\ \times [f_i f_j \dots (1 \mp f_a)(1 \mp f_k)(1 \mp f_l) \dots W(i, j, \dots \rightarrow a, k, l, \dots) \\ - f_a f_i f_j \dots (1 \mp f_k)(1 \mp f_l) \dots W(a, i, j, \dots \rightarrow k, l, \dots)] \quad (222)$$

一般的に場の理論において、反応 $i + j + \dots \rightarrow k + l + \dots$ が起こる確率は不变振幅 $|\mathcal{M}|^2$ を用いて以下のように書ける：

$$dV \frac{d^3 p_k}{(2\pi)^3 2E_k} \frac{d^3 p_l}{(2\pi)^3 2E_l} \dots \\ \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i + p_j + \dots - p_k - p_l - \dots) |\mathcal{M}(i + j + \dots \rightarrow k + l + \dots)|^2 \quad (223)$$

この式に始状態、終状態それぞれの運動量空間分布関数をかけて、始状態運動量に関して積分をとれば考えている反応が領域 D の中に単位時間あたりに起こる回数の期待値になる、それを (219)、(220) 式と比較すれば、 $W(i, j, \dots \rightarrow k, l, \dots)$ が次のように求められる：

$$W(i, j, \dots \rightarrow k, l, \dots) \\ = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i + p_j + \dots - p_k - p_l - \dots) |\mathcal{M}(i + j + \dots \rightarrow k + l + \dots)|^2 \quad (224)$$

したがって、基本相互作用が与えられて不变振幅 $|\mathcal{M}|^2$ が求まれば、衝突項 $C[f]$ が求められることになる。

A.5 ボルツマン方程式と熱平均化について

ここまで結果から、注目する粒子を ψ で表わした場合の、反応 $\psi + a + b + \dots \longleftrightarrow i + j + \dots$ に対する衝突項付きボルツマン方程式は次式のようになることが分かった：

$$p^\mu \frac{\partial f_\psi}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\nu\lambda}^\mu p^\nu p^\lambda \frac{\partial f_\psi}{\partial p^\mu} = \int d\Pi_a d\Pi_b \dots d\Pi_i d\Pi_j \dots \\ \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\psi + p_a + p_b \dots - p_i - p_j - \dots) \\ \times [f_a f_b f_\psi \dots (1 \mp f_i)(1 \mp f_j) \dots |\mathcal{M}(\psi + a + b + \dots \rightarrow i + j + \dots)|^2 \\ - f_i f_j \dots (1 \mp f_\psi)(1 \mp f_a)(1 \mp f_b) \dots |\mathcal{M}(i + j + \dots \rightarrow \psi + a + b + \dots)|^2] \quad (225)$$

宇宙の一様等方性を仮定し、フリードマン-ロバートソン-ウォーカーモデルで考えた場合に non-zero である成分は

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} h^{il} \left(\frac{\partial h_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial h_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial h_{jk}}{\partial x^l} \right) \\ \Gamma_{ij}^0 = \frac{\dot{R}}{R} h_{ij} \\ \Gamma_{0j}^i = \frac{\dot{R}}{R} \delta_j^i \quad (226)$$

だけとなる。ここで $h_{ij} = -g_{ij}$ である。これらを代入し、両辺を ψ の運動量空間に関して積分することにより、上のボルツマン方程式は結局次式で表わされることになる：

$$\begin{aligned} \dot{n}_\psi + 3Hn_\psi &= \int d\Pi_\psi d\Pi_a d\Pi_b \dots d\Pi_i d\Pi_j \dots \\ &\times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\psi + p_a + p_b \dots - p_i - p_j - \dots) \\ &\times [f_a f_b f_\psi \dots (1 \mp f_i)(1 \mp f_j) \dots | \mathcal{M}(\psi + a + b + \dots \rightarrow i + j + \dots) |^2 \\ &- f_i f_j \dots (1 \mp f_\psi)(1 \mp f_a)(1 \mp f_b) \dots | \mathcal{M}(i + j + \dots \rightarrow \psi + a + b + \dots) |^2] \end{aligned} \quad (227)$$

見てのとおり、この方程式には存在する全粒子種の位相空間分布が多数入っているため、このままでは解くのがかなり困難である。しかし、幸運なことに、我々が問題とするようなケースにおいては、1つ（または2つ）以外の粒子種の位相空間分布関数は全て平衡位相空間分布関数と見なすことが出来る。なぜなら、これらのその他の粒子種は、 ψ との相互作用に比べ、他の種との相互作用をしやすいからである。

さらに、ボルツマン方程式をより解きやすくするために、次のような仮定をつけてシンプル化していく：

- T(または CP) 不変性

この仮定により次式が成り立つことになる：

$$| \mathcal{M}(\psi + a + b + \dots \rightarrow i + j + \dots) |^2 = | \mathcal{M}(i + j + \dots \rightarrow \psi + a + b + \dots) |^2 = | \mathcal{M} |^2 \quad (228)$$

このシンプル化を使うと、ボルツマン方程式はよく知られた次式の形になる：

$$\begin{aligned} \dot{n}_\psi + 3Hn_\psi &= \int d\Pi_\psi d\Pi_a d\Pi_b \dots d\Pi_i d\Pi_j \dots \\ &\times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\psi + p_a + p_b \dots - p_i - p_j - \dots) | \mathcal{M} |^2 \\ &\times [f_a f_b f_\psi \dots (1 \mp f_i)(1 \mp f_j) \dots \\ &- f_i f_j \dots (1 \mp f_\psi)(1 \mp f_a)(1 \mp f_b) \dots] \end{aligned} \quad (229)$$

さらに方程式を実用的なものにしていくために、まずは、注目している種が安定（または、この種が freeze-out したときの宇宙年齢と比べて非常に長寿命）の場合を考える。この場合、対消滅（または対生成）のみが共動体積内の ψ 、 $\bar{\psi}$ の個数を変えうるので。ここから以下のようない反応に注目して考えていく：



X 、 \bar{X} ：この反応に関わりうる全ての粒子

この X 、 \bar{X} はたいてい ψ との相互作用より、 ψ 以外の別の粒子種と “強く” 相互作用するので、 ψ に注目して考える場合は、 X 、 \bar{X} は平衡状態にあるという仮定のもとで考えて問

題ない。これ以外にも、 ψ と $\bar{\psi}$ の間には非対称性無し、という仮定をつける。そうすると、この反応に対するボルツマン方程式は次のようになる：

$$\begin{aligned}\dot{n}_\psi + 3Hn_\psi &= \int d\Pi_\psi d\Pi_{\bar{\psi}} d\Pi_X d\Pi_{\bar{X}} \\ &\quad \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\psi + p_{\bar{\psi}} - p_X - p_{\bar{X}}) |\mathcal{M}|^2 \\ &\quad \times [f_\psi f_{\bar{\psi}} (1 - f_X)(1 - f_{\bar{X}}) - f_X f_{\bar{X}} (1 - f_\psi)(1 - f_{\bar{\psi}})]\end{aligned}\quad (231)$$

上のボルツマン方程式は元の形に比べればシンプルな形になってはいるが、まだまだ実用には向かない。そこで、まず、(230) 式の中の分布関数の積の部分を、エネルギー保存則 $E(p_\psi) + E(p_{\bar{\psi}}) = E(p_X) + E(p_{\bar{X}})$ を用いて、式変形していく（式変形におけるボソンとフェルミオンの違いは一部の符号が逆になるだけなので、以下ではフェルミオンの場合に注目してみていいく）：

$$\begin{aligned}f_X f_{\bar{X}} (1 - f_\psi)(1 - f_{\bar{\psi}}) &= f_\psi f_{\bar{\psi}} (f_\psi^{-1} - 1)(f_{\bar{\psi}}^{-1} - 1) f_X f_{\bar{X}} \\ &= f_\psi f_{\bar{\psi}} [\exp[\alpha(t) + E(p_\psi)/T(t)] + 1 - 1] (\exp[\alpha(t) + E(p_{\bar{\psi}})/T(t)] + 1 - 1) f_X f_{\bar{X}} \\ &= f_\psi f_{\bar{\psi}} [\exp[2\alpha(t)] \exp[(E(p_\psi) + E(p_{\bar{\psi}}))/T(t)] \frac{1}{\exp[E(p_X)/T(t)] + 1} \cdot \frac{1}{\exp[E(p_{\bar{X}})/T(t)] + 1}] \\ &= f_\psi f_{\bar{\psi}} [\exp[2\alpha(t)] \frac{\exp[E(p_X)/T(t)]}{\exp[E(p_X)/T(t)] + 1} \cdot \frac{\exp[E(p_{\bar{X}})/T(t)]}{\exp[E(p_{\bar{X}})/T(t)] + 1}] \\ &= f_\psi f_{\bar{\psi}} [\exp[2\alpha(t)] \frac{\exp[E(p_X)/T(t)] + 1 - 1}{\exp[E(p_X)/T(t)] + 1} \cdot \frac{\exp[E(p_{\bar{X}})/T(t)] + 1 - 1}{\exp[E(p_{\bar{X}})/T(t)] + 1}] \\ &= f_\psi f_{\bar{\psi}} [\exp[2\alpha(t)]] (1 - f_X)(1 - f_{\bar{X}})\end{aligned}\quad (232)$$

$\alpha(t)$: time-dependent effective chemical potential

f_X 、 $f_{\bar{X}}$: 粒子 X 、 \bar{X} の分布関数

前の方で述べたように、我々が問題とするようなケースにおいては、1つ（または2つ）以外の粒子種の位相空間分布関数は全て平衡位相空間分布関数と見なすことが出来るので、次式で表わすことができる：

$$\begin{aligned}f_X &= \frac{1}{\exp[E(p_X)/T(t)] + 1} \\ f_{\bar{X}} &= \frac{1}{\exp[E(p_{\bar{X}})/T(t)] + 1}\end{aligned}\quad (233)$$

この (231) 式を (230) 式の中に代入すると、次式が得られる：

$$\begin{aligned}\dot{n}_\psi + 3Hn_\psi &= \int d\Pi_\psi d\Pi_{\bar{\psi}} d\Pi_X d\Pi_{\bar{X}} \\ &\quad \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\psi + p_{\bar{\psi}} - p_X - p_{\bar{X}}) |\mathcal{M}|^2 \\ &\quad \times f_\psi f_{\bar{\psi}} (1 - f_X)(1 - f_{\bar{X}}) [\exp[2\alpha(t)] - 1]\end{aligned}\quad (234)$$

今、本来であれば、フェルミオンに対してはフェルミ-ディラック統計を、ボソンに対してはボーズ-AINシュタイン統計を用いるべきだが、我々が問題とするようなケースにおいては粒子密度が小さいことから、全ての粒子種に対してマクスウェル-ボルツマン統計を使って考えることが出来る。この事を用いて、いよいよ最後の式変形をしていく：

$$\begin{aligned}
& \int d\Pi_\psi d\Pi_{\bar{\psi}} d\Pi_X d\Pi_{\bar{X}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\psi + p_{\bar{\psi}} - p_X - p_{\bar{X}}) |\mathcal{M}|^2 \\
& \quad \times f_\psi f_{\bar{\psi}} (1 - f_X) (1 - f_{\bar{X}}) [\exp[2\alpha(t)] - 1] \\
& = [2 \int \frac{d^3 p_\psi}{(2\pi)^3} f_\psi] [2 \int \frac{d^3 p_{\bar{\psi}}}{(2\pi)^3} f_{\bar{\psi}}] [\exp[2\alpha(t)] - 1] \\
& \quad \times \int \frac{d^3 p_X}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_X} (1 - f_X) \int \frac{d^3 p_{\bar{X}}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\bar{X}}} (1 - f_{\bar{X}}) \\
& \quad \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\psi + p_{\bar{\psi}} - p_X - p_{\bar{X}}) |\mathcal{M}|^2 \frac{1}{4E_\psi E_{\bar{\psi}}} \\
& = [2 \int \frac{d^3 p_\psi}{(2\pi)^3} \exp[-\frac{E(p_\psi)}{T(t)}] e^{-\alpha(t)}] [2 \int \frac{d^3 p_{\bar{\psi}}}{(2\pi)^3} \exp[-\frac{E(p_{\bar{\psi}})}{T(t)}] e^{-\alpha(t)}] [e^{2\alpha(t)} - 1] \\
& \quad \times \int \frac{d^3 p_X}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_X} (1 - f_X) \int \frac{d^3 p_{\bar{X}}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\bar{X}}} (1 - f_{\bar{X}}) \\
& \quad \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\psi + p_{\bar{\psi}} - p_X - p_{\bar{X}}) |\mathcal{M}|^2 \frac{1}{4E_\psi E_{\bar{\psi}}} \tag{235} \\
& = [2 \int \frac{d^3 p_\psi}{(2\pi)^3} \exp[-\frac{E(p_\psi)}{T(t)}]] [2 \int \frac{d^3 p_{\bar{\psi}}}{(2\pi)^3} \exp[-\frac{E(p_{\bar{\psi}})}{T(t)}]] \\
& \quad \times (\frac{1}{n_0} \cdot n_0) (\frac{1}{n_0} \cdot n_0) [1 - e^{-\alpha(t)} \cdot e^{-\alpha(t)}] \\
& \quad \times \int \frac{d^3 p_X}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_X} (1 - f_X) \int \frac{d^3 p_{\bar{X}}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\bar{X}}} (1 - f_{\bar{X}}) \\
& \quad \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\psi + p_{\bar{\psi}} - p_X - p_{\bar{X}}) |\mathcal{M}|^2 \frac{1}{4E_\psi E_{\bar{\psi}} |v|} |v| \\
& = \langle \sigma v \rangle [n_0^2(t) - n^2(t)]
\end{aligned}$$

これぞ我々が追い求めていた実用的なボルツマン方程式である。また、上の式変形の中で以下の定義式等をいくつか用いた：

$$\begin{aligned}
n(t) &= e^{-\alpha(t)} n_0(t) \\
n_0(t) &= 2 \int \frac{d^3 p_\psi}{(2\pi)^3} \exp[-\frac{E(p_\psi)}{T(t)}] \\
\langle \sigma v \rangle &\equiv [\int \frac{d^3 p_\psi}{(2\pi)^3} \frac{2\exp[-E(p_\psi)/T(t)]}{n_0(t)}] [2 \int \frac{d^3 p_{\bar{\psi}}}{(2\pi)^3} \frac{2\exp[-E(p_{\bar{\psi}})/T(t)]}{n_0(t)}] \\
&\quad \times \int \frac{d^3 p_X}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_X} (1 - f_X) \int \frac{d^3 p_{\bar{X}}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\bar{X}}} (1 - f_{\bar{X}}) \\
&\quad \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\psi + p_{\bar{\psi}} - p_X - p_{\bar{X}}) |\mathcal{M}|^2 \frac{1}{4E_\psi E_{\bar{\psi}} |v|} |v| \tag{236}
\end{aligned}$$

A.6 ポルツマン方程式導出に関する補足事項

統計力学的補足 1 :

反応によって粒子が生成される n_k などの量子状態については、フェルミオンの場合 $1 - n_k$ などに比例する。パウリの排他律により、フェルミオンは同じ量子状態を複数の粒子で占めることはできないので、このとき $n_k = 0$ または 1 しかとり得ない。すなわちこの因子は、すでに占められている量子状態に対して反応後に粒子が生成される確率が 0 であることを意味している。つまり、この因子はパウリの排他律により粒子の生成を阻害するブロッキング因子である。

また、反応後の粒子がボソンの場合には遷移確率は $1 + n_k$ などに比例する。ボソンは同じ量子状態をいくらでも占めることができるので、はじめに多く占められて量子状態には、反応によりその量子状態の粒子の生成確率が大きくなることを表わしている。つまりこの因子はすでにある量子状態をさらに増やす反応を誘うような誘導因子である。

統計力学的補足 2 :

統計力学の基本的な仮説に、閉じた系ではエネルギー面上のどの状態をとる確率も同じであると仮定する、というものがある。しかし閉じていない系の場合は、あるエネルギーをもつ微視的状態は、別のエネルギーをもつ微視的状態とは異なる確率をもつ、と考えるのが自然である。つまり微視的状態の寄与を考えるときに、エネルギーに依存する何らかの重み $\rho(q_\nu, p_\nu)$ を掛ける必要があるであろう。位相空間の各点 (q_ν, p_ν) にその点の重み $\rho(q_\nu, p_\nu)$ が対応しており、その重みは巨視的な系がその点の表わす状態にいる確率密度と解釈することができる。閉じた系の場合、 ρ は与えられたエネルギーをもつ等エネルギー面上で一定の値、面外では 0 をとる。この確率密度 ρ は『位相空間中の確率密度』あるいは『位相空間中の分布』と呼ばれる。 ρ は、全位相空間上で積分すると 1 になるように規格化する：

$$\int d^{3N}q d^{3N}p \rho(q_\nu, p_\nu) = 1 \quad (237)$$

$f(q_\nu, p_\nu)$ を全エネルギー $H(q_\nu, p_\nu)$ や角運動量 $\vec{L}(q_\nu, p_\nu)$ などの物理量とすると、与えられた巨視的状態では平均値 $\langle f \rangle$ が観測されるであろう。この平均は微視的な状態 (q_ν, p_ν) が重み $\rho(q_\nu, p_\nu)$ に従うとしてとったものである：

$$\langle f \rangle = \int d^{3N}q d^{3N}p f(q_\nu, p_\nu) \rho(q_\nu, p_\nu) \quad (238)$$

同じ系がたくさんあると想像し、それぞれが位相空間の各点 (q_ν, p_ν) に対応する微視的状態をとっていて、全体として分布 ρ に従っていると考えると、ある瞬間にすべての系の平均値をとったものが (33) 式である。このような系の集合をアンサンブルと

呼ぶ。そこで $\langle f \rangle$ を物理量 f のアンサンブル平均または統計平均と呼び、 ρ をアンサンブルの重み関数と呼ぶ。

B x_f [(49)式]の導出

ここでは(49)式に出てきた x_f をボルツマン方程式

$$\frac{dn}{dt} = -3Hn - \langle \sigma v \rangle [n^2 - (n^{eq})^2] \quad (239)$$

から導出していく。計算のシンプル化のために変数を t から $x = m/T$ に、 n から

$$Y \equiv \frac{n}{s} \quad (240)$$

にして考えていく。ここで s は共動体積内のエントロピー、すなわちエントロピー密度を表わしている。これらを用いて書き直すと、ボルツマン方程式は

$$\frac{dY}{dx} = \frac{-x \langle \sigma v \rangle^s}{H(m)} (Y^2 - Y_{EQ}^2) \quad (241)$$

となる。ただし、 $Y_{EQ} = n^{EQ}/s$ 、 $H(m) = 1.67g_*^{1/2}m^2/m_{pl}$ である。変数を変えて書き直されたボルツマン方程式[(240)式]を、

$$s = \frac{2\pi^2}{45} g_{*s} T^3 \quad (242)$$

を用いてさらに式変形していく：

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dx} &= \frac{-x \langle \sigma v \rangle^s}{H(m)} (Y^2 - Y_{EQ}^2) \\ &= -\frac{x\sigma_0 x^{-n} s}{1.67g_*^{1/2} m^2 / m_{pl}} (Y^2 - Y_{EQ}^2) \\ &= -\frac{\sigma_0 x^{-n+1} m_{pl}}{1.67g_*^{1/2} m^2} \frac{2\pi^2}{45} g_{*s} T^3 (Y^2 - Y_{EQ}^2) \\ &= -\frac{\sigma_0 x^{-n+1} m_{pl}}{1.67g_*^{1/2} m^2} \frac{2\pi^2}{45} g_{*s} m^3 x^{-3} (Y^2 - Y_{EQ}^2) \\ &= -0.249(g_{*s}/g_*^{1/2}) m_{pl} m \sigma_0 x^{-n-2} (Y^2 - Y_{EQ}^2) \end{aligned} \quad (243)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \lambda &= \left[\frac{x \langle \sigma v \rangle^s}{H(m)} \right]_{x=1} \\ &= 0.249(g_{*s}/g_*^{1/2}) m_{pl} m \sigma_0 \end{aligned} \quad (244)$$

を使うと、ボルツマン方程式は次のようにシンプルな形で書けることになる：

$$\frac{dY}{dx} = -\lambda x^{-n-2} (Y^2 - Y_{EQ}^2) \quad (245)$$

この微分方程式はかなり良い精度で近似的に解くことが出来る。そのことを見ていくために、(244)式を平衡からのズレ $\Delta \equiv Y - Y_{EQ}$ を用いて書き直す：

$$\Delta' = -Y'_{EQ} - \lambda x^{-n-2} \Delta (2Y_{EQ} + \Delta) \quad (246)$$

まずは、かなり早い時期、すなわち $1 < x \ll x_f$ である頃に注目して考えてみる。この頃であれば、 $Y \cong Y_{EQ}$ であり、 Δ と Δ' はどちらもかなり小さいと見なすことが可能であるので、 $\Delta' = 0$ として扱うことにより近似解を得ることが出来る。(245) 式において $\Delta' = 0$ とすると、

$$\begin{aligned}\Delta &\cong -\frac{\lambda^{-1}x^{n+2}Y'_{EQ}}{2Y_{EQ} + \Delta} \\ &= \frac{x^{n+2}}{2\lambda} \left(-\frac{Y'_{EQ}}{Y_{EQ} + \frac{1}{2}\Delta} \right) \\ &\cong \frac{x^{n+2}}{2\lambda} \left[-\frac{Y'_{EQ}}{Y_{EQ}} \left(1 - \frac{\Delta}{2Y_{EQ}} \right) \right]\end{aligned}\tag{247}$$

となる。ここで、 $\Delta \cong 0$ であることから $1 - \Delta/2Y_{EQ} \cong 1$ である。また、 $Y_{EQ} = 0.145(g/g_{*s})x^{3/2}e^{-x}$ より $Y'_{EQ}/Y_{EQ} = (3/2x) - 1$ となる。これらの近似を用いると

$$\Delta \cong \frac{x^{n+2}}{2\lambda} \left[1 - \frac{3}{2x} \right]\tag{248}$$

が得られる。今注目している x の領域で考えると、 $[1 - \frac{3}{2x}]$ の部分は $\mathcal{O}(1)$ にしかなり得ない。よって、最終的にこの x の領域における Δ として次式が得られる：

$$\Delta \cong \frac{x^{n+2}}{2\lambda}\tag{249}$$

次に、freeze-out からかなり時間が経過した後、すなわち $x \gg x_f$ である頃における近似解を求めていく。この段階においては、 $Y_{EQ} \cong 0$ より $\Delta \cong Y \gg Y_{EQ}$ となるので、(245) 式は

$$\Delta' \cong -\lambda x^{-n-2} \Delta^2\tag{250}$$

と近似的に書ける。この微分方程式を x について $x = x_f$ から $x = \infty$ までで積分すると Y_∞ 、すなわち $x = \infty$ における Y が次のように得られる：

$$Y_\infty = \Delta_\infty = \frac{n+1}{\lambda} x_f^{n+1}\tag{251}$$

ところで、 $x = x_f$ となる瞬間というものを言葉で表現すると、ある粒子が熱平衡状態から離れる、すなわち Y の値が Y_{EQ} の値と離れ始める瞬間である、と言える。これを数式で表現する。そのために今述べた言葉の表現、 Y の値が Y_{EQ} の値と離れ始める瞬間、という部分に注目する。これは、別の表現の仕方をすると、 Δ の値が Y_{EQ} の値と同じオーダーになる時、ということができる。この事をを利用して $x = x_f$ となる瞬間を

$$\Delta(x_f) = cY_{EQ}(x_f)\tag{252}$$

となる瞬間であると定義する。ここで c は $\mathcal{O}(1)$ の定数を表わしている。この定義と (246) 式を用いて、freeze-out より前、すなわち $1 < x \ll x_f$ であるような時期から $x = x_f$ 付近

に近づけていった場合の近似解を求める。(246) 式と (251) 式より、

$$\begin{aligned}
 \Delta(x_f) &= -\lambda^{-1}x_f^{n+2}Y'_{EQ}(x_f)/(2Y_{EQ}(x_f) + \Delta(x_f)) \\
 &= -x_f^{n+2}Y'_{EQ}(x_f)/\lambda Y_{EQ}(x_f)(2+c) \\
 &= -\frac{x_f^{n+2}}{\lambda(2+c)}\frac{Y'_{EQ}(x_f)}{Y_{EQ}(x_f)}
 \end{aligned} \tag{253}$$

となる。ここで、再度、 $Y'_{EQ}(x_f)/Y_{EQ}(x_f) = (3/2x_f) - 1$ が $\mathcal{O}(1)$ にしかなり得ないということを用いると、 $1 < x \ll x_f$ であるような時期から $x = x_f$ 付近に近づけた場合の近似解として次式が得られることになる：

$$\Delta(x_f) \cong x_f^{n+2}/\lambda(2+c) \tag{254}$$

今求めた近似解を (251) 式に代入することにより

$$Y_{EQ}(x_f) \cong x_f^{n+2}/\lambda c(2+c) \tag{255}$$

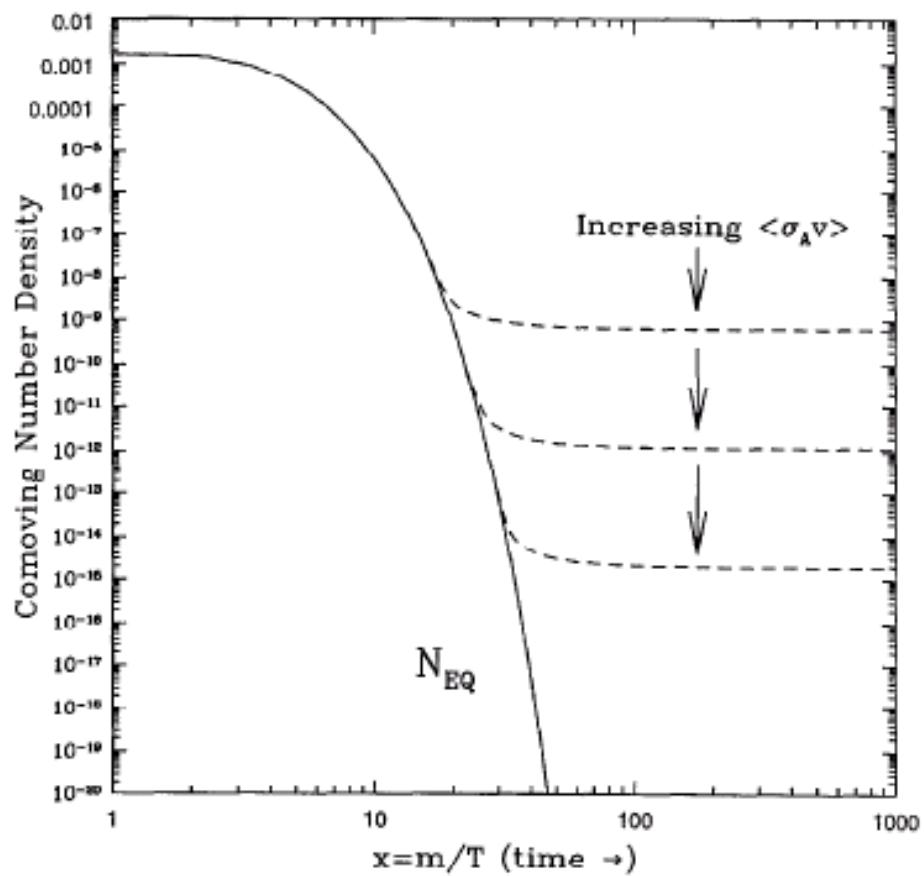
が得られる。この得られた結果と (?) 式より、

$$0.145(g/g_{*s})x_f^{3/2}e^{-x_f} = x_f^{n+2}/\lambda c(2+c) \tag{256}$$

という等式が成り立つ。ここで $a = 0.145(g/g_{*s})$ とおき、この等式を x_f について解くことによって x_f の表式が求められる：

$$\begin{aligned}
 x_f &= \log[(2+c)\lambda ac] + \log[x_f^{-n-\frac{1}{2}}] \\
 &= \log[(2+c)\lambda ac] - (n + \frac{1}{2})\log[x_f] \\
 &\cong \log[(2+c)\lambda ac] - (n + \frac{1}{2})\log[\log[(2+c)\lambda ac]]
 \end{aligned} \tag{257}$$

この式を用いて算出した数値的結果を以下の図に示す。



(256) 式において $c(c+2) = n+1$ と選ぶと、最終的に (49) 式に示されている x_f が求められることになる。ちなみに、この c の選び方であれば、 $x_f \geq 3$ の場合の final abundance Y_∞ と高精度で一致することが分かっている。

謝辞

本論文作成にあたり、指導教官である白藤孟志教授、佐藤丈助教授に深くお礼申し上げます。お二人による輪講においてのご指導、日頃の助言などのおかげで本論文を書きあげることが出来ました。また、谷井助教授には講義や輪講を通して大変お世話になりました、この場をかりてお礼申し上げます。博士前期課程において素粒子論研究室の先輩方にも様々な面でお世話になりました、大変感謝しております。

参考文献

- Ref[1] C.Boehm, D.Hooper, J.Silk and M.Casse, Phys.Rev.Lett.92, 101301(2004) [arXiv:astro-ph/0309686]
- Ref[2] E.W.Kolb and M.S.Turner, The Early Universe (Addison-Wesley, Redwood City, CA, 1989)
- Ref[3] M.Srednicki, R.Watkins and K.A.Olive, Nucl.Phys.B310, 693(1988)
- Ref[4] K.Griest and M.Sher, Phys.Rev.Lett.64, 135(1990); Phys.Rev.D 42,3834(1990)
- Ref[5] J.R.Ellis, T.Falk, K.A.Olive, and M.Srednicki, Astropart.Phys.13, 181(2000), hep-ph/9905481
- Ref[6] S.Profumo, K.Sigurdson, P.Ullio, and M.Kamionkowski,Phys.Rev.D71,023518(2005),astro-ph/041714
- Ref[7] S.H.Hansen and Z.Haiman, Astrophys.J.573(2002)L69,astro-ph/0305126
- Ref[8] L.Covi, J.E.Kim and L.Roszkowski, Phys.Rev.Lett.82, 4180(1999), hep-ph/9905212
- Ref[9] L.Covi, H.B.Kim, J.E.Kim and L.Roszkowski, JHEP 0105, 033(2001), hep-ph/0101009
- Ref[10] L.Covi, L.Roszkowski, R.R.de Austri and M.Small, hep-ph/0402240
- Ref[11] E.J.Chun, H.B.Kim and D.H.Lyth, Phys.Rev.D 62(2000) 125001, hep-ph/0008139
- Ref[12] A.Birkedal-Hansen, D.Hooper, G.Kribs and J.G.Wacker, in preparation
- Ref[13] G.Servant and T.M.Tait, Nucl.Phys.B 650 (2003) 391, hep-ph/0206071
- Ref[14] M.Srednicki, R.Watkins, and K.A.Olive, Nucl.Phys.B310, 693(1988)
- Ref[15] G.Bertone, D.Hooper, and J.Silk, hep-ph/0404175
- Ref[16] H.C.Cheng and I.Low, JHEP 0309, 051(2003), hep-ph/0308199
- Ref[17] B.W.Lee and S.Weinberg, Phys.Rev.Lett.39, 165(1977)
- Ref[18] K.Griest and D.Seckel, Phys.Rev.D 43(1991)3191
- Ref[19] K.A.Olive hep-ph/9911307
- Ref[20] T.Jittoh, J.Sato, T.Shimomura, and M.Yamanaka hep-ph/0512197
- Ref[21] T.Jittoh, S.Matsumoto, J.Sato, Y.Sato, and K.Takeda quant-ph/0408149
- Ref[22] J.R.Bond, G.Efstathiou and J.Silk, Phys.Rev.Lett.45(1980)1980
- Ref[23] S.Dodelson and L.M.Widrow, Phys.Rev.Lett.72(1994)17, hep-ph/9303287
- Ref[24] X.D.Shi and G.M.Fuller, Phys.Rev.Lett.82(1999)2832, astro-ph/9810076
- Ref[25] L.J.Rosenberg and K.A.van Bibber, Phys.Rept.325(2000)1
- Ref[26] T.Falk, K.A.Olive, and M.Srednicki, Phys.Lett.B 339, 248(1994), hep-ph/9409270
- Ref[27] J.R.Ellis, J.L.Kim and D.V.Nanopoulos, Phys.Lett.B 145, 181(1984)
- Ref[28] J.R.Ellis, D.V.Nanopoulos and S.Sarkar, Nucl.Phys.B 259,175(1985)
- Ref[29] D.V.Nanopoulos, K.A.Olive, and M.Srednicki, Phys.Lett.B 127, 30(1983)
- Ref[30] H.Pagels and J.R.Primack, Phys.Rev.Lett.48, 223(1982)
- Ref[31] S.Weinberg, Phys.Rev.Lett.48, 1303(1982)
- Ref[32] M.Yu, Khlopov and A.D.Linde, Phys.Lett.B 138(1984)265

- Ref[33] T.Moroi, H.Murayama and M.Yamaguchi, Phys.Lett.B 303, 289(1993)
- Ref[34] R.H.Cyburt, J.R.Ellis, B.D.Fields and K.A.Olive, Phys.Rev.D 67, 103521(2003), astro-ph/0211258
- Ref[35] J.R.Ellis, K.A.Olive, Y.Santoso and V.Spanos, hep-ph/0312262
- Ref[36] J.L.Feng, A.Rajaraman and F.Takayama, Phys.Rev.D 68, 063504(2003), hep-ph/0306024
- Ref[37] S.A.Bonometto, F.Gabbiani and A.Masiero, Phys.Rev.D 49, 3918(1994), hep-ph/9305237
- Ref[38] T.Goto and M.Yamaguchi, Phys.Lett.B 276, 103(1992)
- Ref[39] C.Boehm, T.A.Ensslin and J.Silk, astro-ph/0208458
- Ref[40] C.Boehm and P.Fayet, hep-ph/0311143
- Ref[41] D.Hooper and L.T.Wang, hep-ph/0402220
- Ref[42] C.Picciotto and M.Pospelov, hep-ph/0402178
- Ref[43] N.Arkani-Hamed, A.G.Cohen and H.Georgi, Phys.Lett.B 513, 232(2001), hep-ph/0105239
- Ref[44] N.Arkani-Hamed, A.G.Cohen, T.Gregoire and J.G.Wacker, JHEP 0208, 020(2002), hep-ph/0202089
- Ref[45] N.Arkani-Hamed, A.G.Cohen, E.Katz and A.E.Nelson, JHEP 0207, 034(2002), hep-ph/0206021
- Ref[46] N.Arkani-Hamed, A.G.Cohen, E.Katz, A.E.Nelson, T.Gregoire and J.G.Wacker, JHEP 0208, 021(2002), hep-ph/0206020
- Ref[47] H.C.Cheng, K.T.Matchev and M.Schmaltz, Phys.Rev.D 66, 036005(2002), hep-ph/0204342
- Ref[48] A.Kusenko, V.Kuzmin, M.E.Shaposhnikov and P.G.Tinyakov, Phys.Rev.Lett.80, 3185(1998), hep-ph/9712212
- Ref[49] A.Kusenko and M.E.Shaposhnikov, Phys.Lett.B 418, 46(1998), hep-ph/9709492
- Ref[50] H.M.Hodges, Phys.Rev.D 47, 456(1993)
- Ref[51] R.Foot, Phys.Rev.D 69, 036001(2004), hep-ph/0308254
- Ref[52] A.Y.Ignatiev and R.R.Volkas, Phys.Rev.D 68, 023518(2003), hep-ph/0304260
- Ref[53] R.N.Mohapatra, S.Nussinov and V.L.Teplitz, Phys.Rev.D 66, 063002(2002), hep-ph/0111381
- Ref[54] R.Foot and Z.K.Silagadze, astro-ph/0404515
- Ref[55] A.De Rujula, S.L.Glashow and U.Sarid, Nucl.Phys.B 333, 173(1990)
- Ref[56] D.N.Spergel and P.J.Steinhardt, Phys.Rev.Lett.84, 3760(2000), astro-ph/9909386
- Ref[57] R.Dave, D.N.Spergel, P.J.Steinhardt and B.D.Wandelt, Astrophys.J.547, 574(2001), astro-ph/0006218
- Ref[58] G.Shiu and L.T.Wang, hep-ph/0311228
- Ref[59] J.R.Ellis, J.L.Lopez and D.V.Nanopoulos, Phys.Lett.B 247, 257(1990)

- Ref[60] J.R.Ellis, G.B.Gelmini, J.L.Lopez and D.V.Nanopoulos and S.Sarkar, Nucl.Phys.B 373, 399(1992)
- Ref[61] J.L.Feng, A.Rajaraman and F.Takayama, Phys.Rev.Lett.91(2003)011302, hep-ph/0302215
- Ref[62] J.A.R.Cembranos, A.Dobado and A.L.Maroto, Phys.Rev.Lett.90, 241301(2003), hep-ph/0302041
- Ref[63] P.Roy, ICNAPP 1994:0225-237, hep-ph/9501209
- Ref[64] K.Kainulainen and K.A.Olive, hep-ph/0206163
- Ref[65] D.N.Spergel et al., astro-ph/0302209