卒業論文

$D = 4\ , \mathcal{N} = 1$ AdS 超重力理論

埼玉大学
理学部　物理学科
素粒子理論研究室　谷井研
17RP029 田畑 佑磨

2021 年 2 月 24 日

目次

1　序論

近年、超弦理論と物性物理分野の研究者の間で盛んに研究が行われている分野の 1 つに AdS/CFT 対応と呼ばれる分野がある。それは AdS 時空 (anti de Sitter spacetime) 上の重力理論が、その時空の境界に相当する、それよりも 1 つ次元の低い時空における共形場理論 (conformal field theory) と理論として等価になるというものである。この定式化は超弦理論と呼ばれる理論で行われている。超弦理論は量子重力を記述するミクロな理論であり、その低エネルギー有効理論として超重力理論が存在するのである。本論文では、そのための理解を深める第一歩として、AdS 時空における重力理論の中で、簡単な例である、時空の次元 $D = 4$、理論に含まれる超対称性の数 $\mathcal{N} = 1$ の場合の AdS 超重力理論について議論する。

本論文の構成は、まず第 2 章で、超重力理論を議論するために必要な定式化、時空そのものがもつ対称性、また超対称性について述べる。そして第 2 章での準備の下、第 3 章では、まず AdS 超重力理論の特別な場合である、Poincaré 超重力理論についてから始めることとする。そこでは局所変換による作用の不変性、局所変換の交換関係がつくる代数、それからそれらの変換に対し場の方程式の解が不変に保たれるような変換の形についてなど、種々の性質について述べる。そしてその後 Poincaré 超重力理論の拡張として、AdS 超重力理論を議論する。流れとしては Poincaré 超重力理論の場合と同じような流れだが、AdS 超重力理論は、Poincaré 超重力理論を含む形になっているので、上で述べた作用の不変性、代数の閉包性はここでまとめて示すこととする。ただし、Poincaré 超重力理論に含まれる Rarita-Schwinger 場についての計算の詳細は、紙面の数を要するため付録 B としてまとめた。また付録では、Einstein 方程式の導出、先ほどの Rarita-Schwinger 場に関する計算の詳細、反 de Sitter 時空の定義や性質についてまとめてある。この論文では、全体にわたり、必要な計算はできるだけ省略せずにそのまま式変形を記すことを心掛けた。

2 重力場と超対称性

この章では、超重力理論を議論するにあたり必要な下準備を行う。超重力理論は理論の中にフェルミオンが含まれるため、重力場と結合させるには多脚場形式という新たな形式を用いて定式化しなくてはならない。よってまず通常の計量を用いた定式化を示したのち、多脚場形式について議論する。その後 2.3 節では時空の対称性について、2.4 節では超対称性について述べる。この議論から、第 3 章の超対称性をもつ重力理論、超重力理論へと続いていく。

また 2.1 節から 2.3 節にかけては特に明記しない限り時空は時間 1 次元、空間 $D-1$ 次元、合わせて D 次元の、一般の次元の場合で議論する。

2.1 計量形式

Einstein の一般相対性理論において、重力理論の定式化を行う際の重力場を記述する力学変数として用いられるのは、時空の曲がり具合を表す計量 $g_{\mu\nu}(x)$ である。これはスカラー場やベクトル場などのボソン場と重力場を結びつける理論であり、この定式化では、重力場 $g_{\mu\nu}(x)$ に対するラグランジアン (密度) は、

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16\pi G}\sqrt{-g}(R-2\Lambda) \tag{2.1}$$

である。第 1 項は Eienstein のラグランジアン、第 2 項は宇宙項と呼ばれる。G は万有引力定数、Λ は宇宙定数であり、また $g=\mathrm{det}g_{\mu\nu}$ である。このような $g_{\mu\nu}(x)$ を用いた定式化を計量形式と呼ぶ。簡単のため以下では $16\pi G=1$ となるような単位系を用いることにする。(2.1) で用いられている R はスカラー曲率と呼ばれ、Ricci テンソル $R_{\mu\nu}$、Riemann の曲率テンソル $R_{\mu\nu}{}^{\rho}{}_{\sigma}$ と共に以下で定義される。

$$\begin{aligned} R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}, \quad R_{\mu\nu} = R_{\rho\mu}{}^{\rho}{}_{\nu}, \\ R_{\mu\nu}{}^{\rho}{}_{\sigma} = \partial_\mu\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \partial_\nu\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} \end{aligned} \tag{2.2}$$

ここで $g^{\mu\nu}$ は $g_{\mu\nu}$ の逆行列である。また $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ はアフィン接続と呼ばれ、一般には不定性があるが、一般相対性理論では次の 2 つの条件を定めて一意に定める。

$$\begin{aligned} \text{計量条件}: \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma^{\rho}_{\lambda\mu}g_{\rho\nu} - \Gamma^{\rho}_{\lambda\nu}g_{\mu\rho} = 0 \\ \text{捩率条件}: \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} \end{aligned} \tag{2.3}$$

これらの条件により定まる $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ は、

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \tag{2.4}$$

であり、(2.3) の条件の下でのアフィン接続を特に Christoffel 記号と呼ぶ。この Christoffel 記号を用いると、ベクトルやテンソルに対して一般座標変換に関する共変微分を定義できる。たとえば、反変ベクトル V^μ と共変ベクトル V_μ に対する共変微分は、

$$\begin{aligned} D_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma^{\nu}_{\mu\rho}V^\rho, \\ D_\mu V_\nu = \partial_\mu V_\nu - \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}V_\rho \end{aligned} \tag{2.5}$$

と定義される。[*1] これらの共変微分は一般座標変換に対してテンソルとしてふるまう。また (2.3) の計量条件は、共変微分を用いると、$D_\lambda g_{\mu\nu} = 0$ と簡潔に表せる。

ラグランジアン (2.1) から、変分原理を用いて $g_{\mu\nu}$ について場の方程式を求めると、

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{1}{2} T_{\mu\nu} \tag{2.6}$$

が得られ、この式は Einstein 方程式と呼ばれる。$T_{\mu\nu}$ は重力場以外の物質の運動量・エネルギーテンソルである。特に真空 ($T_{\mu\nu} = 0$) の場合、(2.6) 式は、空間の次元が D 次元であるとして、

$$R_{\mu\nu} = \frac{2}{D-2} \Lambda g_{\mu\nu} \tag{2.7}$$

と簡潔な形になる。(Einstein 方程式の導出は付録 A 参照)

また (2.1) で定義されるラグランジアンを D 次元時空で積分して得られる作用は、任意の無限小ベクトル関数 $\xi^\mu(x)$ を変換パラメータとする無限小一般座標変換

$$\begin{aligned} \delta_G g_{\mu\nu} &= \xi^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi^\rho g_{\rho\nu} + \partial_\nu \xi^\rho g_{\mu\rho} \\ &= \xi^\rho (\Gamma^\lambda_{\rho\mu} g_{\lambda\nu} + \Gamma^\lambda_{\rho\nu} g_{\mu\lambda}) + \partial_\mu \xi^\rho g_{\rho\nu} + \partial_\nu \xi^\rho g_{\mu\rho} \\ &= D_\mu \xi^\rho g_{\rho\nu} + D_\nu \xi^\rho g_{\rho\mu} = D_\mu \xi_\nu + D_\nu \xi_\mu \qquad (\because D_\lambda g_{\mu\nu} = 0) \end{aligned} \tag{2.8}$$

に対し不変であることが確かめられる。このことを具体的に見るには、付録 A の (A.17) 式から始めればよい。

$$\delta_G S = \int d^D x \sqrt{-g} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu}) \delta_G g^{\mu\nu} \tag{2.9}$$

ここで Einstein テンソル $G_{\mu\nu}$ を導入する。Einstein テンソル $G_{\mu\nu}$ は以下で定義され、次の性質を満たすものとして知られる。

$$\begin{gathered} G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \\ G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu}, \qquad D_\mu G^{\mu\nu} = 0 \end{gathered} \tag{2.10}$$

したがって (2.9) は、(2.8)、(2.10)、また計量条件 (2.3) から、

$$\begin{aligned} \delta_G S &= \int d^D x \sqrt{-g} (G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}) \delta_G g^{\mu\nu} \\ &= \int d^D x \sqrt{-g} (G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu})(D^\mu \xi^\nu + D^\nu \xi^\mu) \\ &= 2 \int d^D x \sqrt{-g} (G^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu}) D_\mu \xi_\nu \\ &= -2 \int d^D x \sqrt{-g} D_\mu (G^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu}) \xi_\nu = 0 \end{aligned} \tag{2.11}$$

と表面項を無視することで 0 となり、この作用は一般座標変換に対し不変であることがわかる。またこのことは (2.1) の表式は、全ての添字が縮約されていることからも明示的に理解できる。

[*1] 本論文では、共変微分を表す記号としては全て D で統一することとする。

2.2 多脚場形式

前節では、スカラー場、テンソル場などのボソン場は、計量を用いることで一般座標変換に対して共変な理論を作ることができることを確かめた。ではスピノルで記述されるフェルミオン場に対してはどうであろうか。スピノルは元来 Lorenrz 変換に対し一定の変換則をもつ表現であった。すなわち平坦な Minkowski 時空においてのみ変換則が定義されている。したがってこれをそのまま重力の存在する曲がった時空に拡張することはできない。フェルミオン場と重力場を結合させせるには、曲がった時空と平坦な時空を結びつける新たな量が必要なのである。そこで用いられるのが多脚場による定式化である。多脚場は、曲がった時空の各点における接空間である局所 Lorentz 系と曲がった時空を結びつける。その局所 Lorentz 系においてスピノルは定義され、そのスピノルは多脚場を通じて曲がった時空内で記述される。

具体的には、まず時空の各点 x^μ に D 個の独立なベクトル $e_a{}^\mu(x)$ $(a=0,1,\cdots,D-1)$ を、

$$\begin{aligned} e_a{}^\mu(x)e_b{}^\nu(x)g_{\mu\nu}(x) = \eta_{ab} \quad \text{ただし}\eta_{ab} = \mathrm{diag}(-1,+1,\cdots,+1), \\ e_\mu{}^a(x)e_a{}^\nu(x) = \delta_\mu^\nu, \quad e_a{}^\mu(x)e_\mu{}^b(x) = \delta_a^b \end{aligned} \tag{2.12}$$

のように互いに直交し、単位長さをもつように選ぶ。*2 ここで $e_\mu{}^a(x)$ は $e_a{}^\mu(x)$ の逆行列として定義される。そしてこの場 $e_a{}^\mu(x)$ を多脚場 (4 次元の場合は四脚場) と呼ぶ。$e_a{}^\mu(x)$ は 2 種類の添字を持つ量であり、ギリシャ添字 μ は世界添字、またローマ添字 a は局所 Lorentz 添字と呼ばれ、それぞれ曲がった時空の添字と平坦な時空の添字に対応する。(2.12) を用いると、曲がった時空の計量 $g_{\mu\nu}(x)$ は、

$$g_{\mu\nu}(x) = e_\mu{}^a(x)e_\nu{}^b(x)\eta_{ab} \tag{2.13}$$

と多脚場を用いて表される。すなわち多脚場は計量 $g_{\mu\nu}(x)$ よりも基本的な量だといえ、曲がった時空の座標依存性を請け負っている。よって、多脚場形式では、計量の代わりに多脚場を力学変数として用いることができる。(2.12)、(2.13) より多脚場 $e_a{}^\mu(x)$ の変換性に着目すると、下付き添え字 a に対しては、局所 Lorentz 変換に対し共変ベクトルとして変換し、また上付き添字 μ については一般座標変換に対し反変ベクトルとして変換されなければならないことが分かる。したがって、多脚場の添字の上げ下げは、以下に示すように計量 $g_{\mu\nu}$ と Minkowski 計量 η_{ab} によって行われる。

$$e_{\mu a} = \eta_{ab}e_\mu{}^b, \qquad e_a{}^\mu = g^{\mu\nu}e_{\nu a} \tag{2.14}$$

また多脚場の行列式 e を $e = \det(e_\mu{}^a)$ と定義し、行列式が正になるように多脚場を選ぶと、計量 $g_{\mu\nu}$ の行列式 g との関係は、(2.13) から、

$$\begin{aligned} \det(g_{\mu\nu}) &= \det(\eta_{ab})\det(e_\mu{}^a)\det(e_\nu{}^b) \\ &= -\{\det(e_\mu{}^a)\}^2 \\ \Rightarrow e &= \sqrt{-g} \end{aligned} \tag{2.15}$$

となることが分かる。

*2 以下の全ての議論では平坦な時空の計量については $\eta_{ab} = \mathrm{diag}(-1,+1,\cdots,+1)$ を用いることとする。

計量 $g_{\mu\nu}$ は対称テンソルのため自由度としては $D(D+1)/2$ 個あるが、それに対し多脚場の自由度は添え字に対する制限がないため D^2 個である。すなわち、多脚場はその差 $D(D-1)/2$ 個の余分な自由度をもっている。実際 (2.13) を満たす ${e_\mu}^a$ に対し、

$$e'_\mu{}^a(x) = {e_\mu}^b(x){\Lambda_b}^a(x) \qquad {\Lambda_a}^c(x){\Lambda_b}^d(x)\eta_{cd} = \eta_{ab} \tag{2.16}$$

と変換を施しても、それは同じ $g_{\mu\nu}$ に対し (2.13) を満たす。この変換は局所 Lorentz 変換と呼ばれ、${\Lambda_a}^b(x)$ は $D(D-1)/2$ 個の自由度を持ち、多脚場の余分な自由度を表す。したがって、計量形式の理論を多脚場で書き直したものは、一般座標変換だけでなく、局所 Lorentz 変換に対しても不変な理論になっている。

また多脚場を用いると、世界添字や局所 Lorentz 添字を持つベクトルやテンソルの添字を互いに入れ替えることができる。

$$A_a(x) = {e_a}^\mu(x)A_\mu(x) \qquad A_\mu(x) = {e_\mu}^a(x)A_a(x) \tag{2.17}$$

この性質から、世界添字、局所 Lorentz 添字を持つベクトルの添字の上げ下げも通常通り行えることがわかる。

$$A^\mu(x) = g^{\mu\nu}(x)A_\nu(x) \qquad A^a(x) = \eta^{ab}A_b(x) \tag{2.18}$$

多脚場は ${e_\mu}^a(x)$ 世界添字と局所 Lorentz 添字を 1 つずつ持っているので、先ほどの変換性の議論から、無限小の一般座標変換 δ_G と局所 Lorentz 変換 δ_L に対し、

$$\begin{aligned} \delta_G {e_\mu}^a &= \xi^\nu \partial_\nu {e_\mu}^a + \partial_\mu \xi^\nu {e_\nu}^a \\ \delta_L {e_\mu}^a &= -{\lambda^a}_b {e_\mu}^b \end{aligned} \tag{2.19}$$

と変換する。ここで $\xi^\mu(x)$ と $\lambda^{ab}(x) = -\lambda^{ab}(x)$ (${\Lambda^a}_b = \delta^a_b - {\lambda^a}_b$) は無限小の変換パラメータである。

局所 Lorentz 添字を持ったテンソルを微分したものは、局所 Lorentz 変換に対しもとのテンソルと同じ変換性を示すだろうか。例として局所 Lorentz 添字を持つ反変ベクトル $V^a(x)$ の微分 $\partial_\mu V^a(x)$ について考えてみると、(2.19) から分かるように、変換のパラメータが局所的である場合は一般に余分な項が残ることがわかる。

$$\delta_L(\partial_\mu V^a(x)) = \partial_\mu(\delta_L V^a(x)) = -{\lambda^a}_b \partial_\mu V^b(x) - \partial_\mu {\lambda^a}_b V^b \tag{2.20}$$

ラグランジアンには一般に場の運動項が入るため、理論を局所 Lorentz 不変に保つためには、局所 Lorentz 変換に対しても、一般座標変換の場合と同様に、ゲージ場を導入することで共変微分を定義しなくてはならない。そこで導入されるゲージ場がスピン接続 ${\omega_\mu}^a{}_b(x)$ (${\omega_\mu}^{ab} = -{\omega_\mu}^{ba}$) であり、局所 Lorentz 変換に対し、

$$\delta_L {\omega_\mu}^{ab} = D_\mu \lambda^{ab} \equiv \partial_\mu \lambda^{ab} + {\omega_\mu}^a{}_c \lambda^{cb} + {\omega_\mu}^b{}_c \lambda^{ac} \tag{2.21}$$

と変換される。このスピン接続を用いると、局所 Lorentz 変換に対する共変微分を定義でき、たとえばベクトル V^a に対しては、

$$D_\mu V^a = \partial_\mu V^a + {\omega_\mu}^a{}_b V^b \tag{2.22}$$

と定義される。(一般座標変換に対する共変微分と同じ記号 D を用いる。したがって書き下した表式は作用する場の添字の種類に依存することに注意されたい) この定義により、$D_\mu V^a$ の局所 Lorentz 変換を考えると、(2.21) より、

$$
\begin{aligned}
\delta_L(D_\mu V^a) &= \partial_\mu \delta_L V^a + \delta_L \omega_\mu{}^a{}_b V^b + \omega_\mu{}^a{}_b \delta_L V^b \\
&= \partial_\mu(-\lambda^a{}_b V^b) + (\partial_\mu \lambda^a{}_b + \omega_\mu{}^a{}_c \lambda^c{}_b + \omega_{\mu b}{}^c \lambda^a{}_c) V^b - \omega_\mu{}^a{}_b \lambda^b{}_c V^c \\
&= -\lambda^a{}_b(\partial_\mu V^b + \omega_\mu{}^b{}_c V^c) = -\lambda^a{}_b(D_\mu V^b)
\end{aligned} \tag{2.23}
$$

と確かに共変的に変換することがわかる。

一般座標変換に対する共変微分を定義する際に導入されたアフィン接続は、(2.3)、(2.4) でみたように条件を課すことによって、Christoffel 記号として計量を用いて表すことができた。それと同様に、スピン接続も多脚場を用いて表すことができ、そのためにスピン接続に対して次の条件を要請する。

$$
D_\mu e_\nu{}^a - D_\nu e_\mu{}^a = \partial_\mu e_\nu{}^a + \omega_\mu{}^a{}_b e_\nu{}^b - (\mu \leftrightarrow \nu) = 0 \tag{2.24}
$$

この条件は捩率条件と呼ばれる。ここで一般座標変換に対する共変微分に伴い現れるアフィン接続は条件 (2.3) を満たす Christoffel 記号 (2.4) であるとし、そのため μ, ν に反対称化されている上のような場合には相殺される。また同様に平坦な時空の計量に対する計量条件を考えると、

$$
\begin{aligned}
D_\lambda \eta^{ab} = \partial_\lambda \eta^{ab} + \omega_\mu{}^a{}_c \eta^{cb} + \omega_\mu{}^b{}_c \eta^{ac} = 0 \\
\Rightarrow \omega_\mu{}^{ab} = -\omega_\mu{}^{ba}
\end{aligned} \tag{2.25}
$$

であり、今考えているスピン接続に関しては自動的に満たされていることが分かる。(2.24) の条件により $\omega_{\mu ab}$ は一意に定まり、

$$
\begin{aligned}
\omega_{\mu ab}(e) &= \frac{1}{2}(e_a{}^\nu \Omega_{\mu\nu b} - e_b{}^\nu \Omega_{\mu\nu a} - e_a{}^\rho e_b{}^\sigma e_\mu{}^c \Omega_{\rho\sigma c}) \\
\Omega_{\mu\nu a} &= \partial_\mu e_{\nu a} - \partial_\nu e_{\mu a}
\end{aligned} \tag{2.26}
$$

と多脚場を用いて表される。$\Omega_{\mu\nu a}$ はリッチ回転係数と呼ばれる量である。実際に (2.24) に対し (2.26) の $\omega_{\mu ab}$ を代入すると、

$$
\begin{aligned}
&D_\mu e_\nu{}^a - D_\nu e_\mu{}^a \\
&= \partial_\mu e_\nu{}^a + \omega_\mu{}^a{}_b e_\nu{}^b - (\mu \leftrightarrow \nu) \\
&= \partial_\mu e_\nu{}^a + \frac{1}{2}\left\{ e^{a\rho} e_\nu{}^b (\partial_\mu e_{\rho b} - \partial_\rho e_{\mu b}) - (\partial_\mu e_\nu{}^a - \partial_\nu e_\mu{}^a) - e^{a\rho} e_\mu{}^c (\partial_\rho e_{\nu c} - \partial_\nu e_{\rho c}) \right\} - (\mu \leftrightarrow \nu) \\
&= \frac{1}{2}\left\{ (\partial_\mu e_\nu{}^a + \partial_\nu e_\mu{}^a) - e^{a\rho}(e_\nu{}^b \partial_\rho e_{\mu b} + e_\mu{}^c \partial_\rho e_{\nu c}) + e^{a\rho}(e_\nu{}^b \partial_\mu e_{\rho b} + e_\mu{}^c \partial_\nu e_{\rho c}) \right\} - (\mu \leftrightarrow \nu) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{2.27}
$$

と 3 番目の等号における中括弧内の添字が μ, ν の交換に対し対称になるため、(2.26) は捩率条件 (2.24) を満たすことが分かる。

また (2.26) のようにスピン接続を定めると、Christoffel 記号 (2.4) とスピン接続の間には関係が付き、

$$
D_\mu e_\nu{}^a = \partial_\mu e_\nu{}^a + \omega_\mu{}^a{}_b e_\nu{}^b - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} e_\lambda{}^a = 0 \tag{2.28}
$$

が成立する。すなわち多脚場の共変微分はゼロとなる。これにより計量形式の計量条件 (2.3) とも無矛盾となる。こちらも実際に確かめてみる。そのためには (2.4) に含まれる $g_{\mu\nu}$ を (2.13) を用いて多脚場に置き換えればよい。

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} e_{\lambda}{}^{a} &= \frac{1}{2} e^{\rho a}\left(\partial_{\mu}(e_{\nu}{}^{b} e_{\rho b}) - \partial_{\nu}(e_{\mu}{}^{b} e_{\rho b}) - \partial_{\rho}(e_{\mu}{}^{b} e_{\nu b})\right) \\
&= \frac{1}{2} e^{\rho a}(e_{\rho b}\partial_{\mu} e_{\nu}{}^{b} + e_{\nu}{}^{b}\partial_{\mu} e_{\rho b} + e_{\rho b}\partial_{\nu} e_{\mu}{}^{b} + e_{\mu}{}^{b}\partial_{\nu} e_{\rho b} - e_{\nu b}\partial_{\rho} e_{\mu}{}^{b} - e_{\mu}{}^{b}\partial_{\rho} e_{\nu b}) \\
&= \frac{1}{2}(\partial_{\mu} e_{\nu}{}^{a} + \partial_{\nu} e_{\mu}{}^{a} + e^{\rho a} e_{\nu}{}^{b}\partial_{\mu} e_{\rho b} + e^{\rho a} e_{\mu}{}^{b}\partial_{\nu} e_{\rho b} - e^{\rho a} e_{\nu}{}^{b}\partial_{\rho} e_{\mu b} - e^{\rho a} e_{\mu}{}^{b}\partial_{\rho} e_{\nu b}) \\
&= \partial_{\mu} e_{\nu}{}^{a} + \frac{1}{2}\left\{e^{\rho a}(\partial_{\mu} e_{\rho b} - \partial_{\rho} e_{\mu b}) - e_{b}{}^{\rho}(\partial_{\mu} e_{\rho}{}^{a} - \partial_{\rho} e_{\mu}{}^{a}) - e^{\rho a} e_{b}{}^{\sigma} e_{\mu}{}^{c}(\partial_{\rho} e_{\nu c} - \partial_{\nu} e_{\rho c})\right\} e_{\nu}{}^{b} \\
&= \partial_{\mu} e_{\nu}{}^{a} + \frac{1}{2}(e^{\rho a}\Omega_{\mu\rho b} - e_{b}{}^{\rho}\Omega_{\mu\rho}{}^{a} - e^{\rho a} e_{b}{}^{\sigma} e_{\mu}{}^{c}\Omega_{\rho\sigma c}) e_{\nu}{}^{b} \\
&= \partial_{\mu} e_{\nu}{}^{a} + \omega_{\mu}{}^{a}{}_{b} e_{\nu}{}^{b} \\
\Rightarrow D_{\mu} e_{\nu}{}^{a} &= \partial_{\mu} e_{\nu}{}^{a} + \omega_{\mu}{}^{a}{}_{b} e_{\nu}{}^{b} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} e_{\lambda}{}^{a} = 0
\end{aligned}
\tag{2.29}
$$

また (2.28) から、Christoffel 記号は多脚場を用いて、

$$
\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = e_{a}{}^{\lambda}\partial_{\mu} e_{\nu}{}^{a} + \omega_{\mu}{}^{a}{}_{b} e_{\nu}{}^{b} e_{a}{}^{\lambda} \tag{2.30}
$$

と表せるので、(2.2) の Riemann 曲率テンソルを多脚場形式で表すことができる。

$$
\begin{aligned}
\partial_{\mu}\Gamma^{\rho}_{\sigma\nu} &= \partial_{\mu}\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} = \partial_{\mu}(e_{a}{}^{\rho}\partial_{\nu} e_{\sigma}{}^{a} + \omega_{\nu}{}^{a}{}_{b} e_{\sigma}{}^{b} e_{a}{}^{\rho}) \\
&= \underline{\partial_{\mu} e_{a}{}^{\rho}\partial_{\nu} e_{\sigma}{}^{a}} + e_{a}{}^{\rho}\partial_{\mu}\partial_{\nu} e_{\sigma}{}^{a} + \partial_{\mu}\omega_{\nu}{}^{a}{}_{b} e_{\sigma}{}^{b} e_{a}{}^{\rho} + \omega_{\nu}{}^{a}{}_{b}\partial_{\mu} e_{\sigma}{}^{b} e_{a}{}^{\rho} + \underline{\omega_{\nu}{}^{a}{}_{b} e_{\sigma}{}^{b}\partial_{\mu} e_{a}{}^{\rho}} \\
\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} &= (e_{a}{}^{\rho}\partial_{\mu} e_{\lambda}{}^{a} + \omega_{\mu}{}^{a}{}_{b} e_{\lambda}{}^{b} e_{a}{}^{\rho})(e_{c}{}^{\lambda}\partial_{\nu} e_{\sigma}{}^{c} + \omega_{\nu}{}^{c}{}_{d} e_{\sigma}{}^{d} e_{c}{}^{\lambda}) \\
&= \underline{e_{a}{}^{\rho} e_{c}{}^{\lambda}\partial_{\mu} e_{\lambda}{}^{a}\partial_{\nu} e_{\sigma}{}^{c}} + \underline{e_{a}{}^{\rho} e_{\sigma}{}^{d} e_{c}{}^{\lambda}\partial_{\mu} e_{\lambda}{}^{a}\omega_{\nu}{}^{c}{}_{d}} + e_{a}{}^{\rho}\partial_{\nu} e_{\sigma}{}^{b}\omega_{\mu}{}^{a}{}_{b} + e_{a}{}^{\rho} e_{\sigma}{}^{d}\omega_{\mu}{}^{a}{}_{b}\omega_{\nu}{}^{b}{}_{d}
\end{aligned}
\tag{2.31}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{また}\quad 0 &= \partial_{\mu}\delta^{a}_{c} = \partial_{\mu}(e_{\lambda}{}^{a} e_{c}{}^{\lambda}) = e_{c}{}^{\lambda}\partial_{\mu} e_{\lambda}{}^{a} + e_{\lambda}{}^{a}\partial_{\mu} e_{c}{}^{\lambda} \\
\Rightarrow\quad e_{a}{}^{\rho} e_{c}{}^{\lambda}\partial_{\mu} e_{\lambda}{}^{a} &= e_{a}{}^{\rho}(-e_{\lambda}{}^{a}\partial_{\mu} e_{c}{}^{\lambda}) = -\partial_{\mu} e_{c}{}^{\rho}
\end{aligned}
\tag{2.32}
$$

(2.32) から、(2.31) の下線部分と波線部分の組み合わせはそれぞれ打ち消しあうことが分かる。すると Riemann 曲率テンソルはスピン接続を含む以下の形で与えられる。

$$
\begin{aligned}
R_{\mu\nu}{}^{\rho}{}_{\sigma} &= \partial_{\mu}\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - (\mu \leftrightarrow \nu) \\
&= \partial_{\mu}\omega_{\nu}{}^{a}{}_{b} e_{\sigma}{}^{b} e_{a}{}^{\rho} + e_{a}{}^{\rho} e_{\sigma}{}^{b}\omega_{\mu}{}^{a}{}_{c}\omega_{\nu}{}^{c}{}_{b} \\
&\quad + e_{a}{}^{\rho}(\cancel{\omega_{\mu}{}^{a}{}_{b}\partial_{\nu} e_{\sigma}{}^{b} + \omega_{\nu}{}^{a}{}_{b}\partial_{\mu} e_{\sigma}{}^{b}}) + \cancel{e_{a}{}^{\rho}\partial_{\mu}\partial_{\nu} e_{\sigma}{}^{a}} - (\mu \leftrightarrow \nu) \\
&= e_{a}{}^{\rho} e_{\sigma}{}^{b}(\partial_{\mu}\omega_{\nu}{}^{a}{}_{b} - \partial_{\nu}\omega_{\mu}{}^{a}{}_{b} + \omega_{\mu}{}^{a}{}_{c}\omega_{\nu}{}^{c}{}_{b} - \omega_{\nu}{}^{a}{}_{c}\omega_{\mu}{}^{c}{}_{b}) \\
&= e_{a}{}^{\rho} e_{\sigma}{}^{b} R_{\mu\nu}{}^{a}{}_{b}
\end{aligned}
\tag{2.33}
$$

2 番目の等号では、斜線部分は μ, ν にの交換に対し対称な項であるので打ち消される。また (2.33) で定義した

$$
R_{\mu\nu}{}^{a}{}_{b} = \partial_{\mu}\omega_{\nu}{}^{a}{}_{b} - \partial_{\nu}\omega_{\mu}{}^{a}{}_{b} + \omega_{\mu}{}^{a}{}_{c}\omega_{\nu}{}^{c}{}_{b} - \omega_{\nu}{}^{a}{}_{c}\omega_{\mu}{}^{c}{}_{b} \tag{2.34}
$$

は Christoffel 記号の場合と同様、スピン接続より作られた場の強さと解釈できる。一般相対性理論における場の強さ、すなわち Riemann 曲率テンソルは、世界添字をもつベクトル V^{μ} に対する共変微分の交換関係で、

$$[D_\mu, D_\nu]V^\rho = R_{\mu\nu}{}^\rho{}_\sigma V^\sigma \tag{2.35}$$

と表されるので、(2.35) の両辺に $e_\rho{}^a$ を作用させ、多脚場の共変微分はゼロであったことを思い出すと、

$$[D_\mu, D_\nu]V^a = R_{\mu\nu}{}^a{}_\sigma V^\sigma = (e_\sigma{}^b e_c{}^\sigma)R_{\mu\nu}{}^a{}_b V^c = R_{\mu\nu}{}^a{}_b V^b \tag{2.36}$$

と、局所 Lorentz 添字をもつベクトル V^a に対する式となり、そこに含まれる場の強さが (2.34) で与えられることが分かる。

2.3 時空の対称性

重力場の形 $e_\mu{}^a$、すなわち時空の曲がり具合が与えられたとき、その時空の持つ対称性を考える。そのような時空の対称性をアイソメトリと呼ぶ。これは、一般座標変換と局所 Lorentz 変換のうち、その重力場の形を保つような変換で与えられる。$e_\mu{}^a$ に対する一般座標変換と局所 Lorentz 変換は、(2.19) より、

$$(\delta_G + \delta_L)e_\mu{}^a = \xi^\nu \partial_\nu e_\mu{}^a + \partial_\mu \xi^\nu e_\nu{}^a - \lambda^a{}_b e_\mu{}^b \tag{2.37}$$

であった。これを独立な 2 つの項 $e_\nu{}^a$ と $e_\mu{}^b$ で括ることを考えると、計量に対する無限小一般座標変換の形 (2.8)、λ_{ab} の添字の反対称性から類推して、

$$(D_\mu \xi_\nu + D_\nu \xi_\mu) \qquad (D^a \xi_b - D_b \xi^a) \tag{2.38}$$

という構造があると予想される。実際、(2.38) の 2 つに対し、以下のような項を考えると、(2.37) に帰着する項が得られる。

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(D_\mu \xi_\nu + D_\nu \xi_\mu)e^{\nu a} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu)e^{\nu a} - \Gamma^\rho_{\mu\nu}\xi_\rho e^{\nu a} \\
\frac{1}{2}(D^a \xi_b - D_b \xi^a)e_\mu{}^b &= \frac{1}{2}(e^{\nu a} e_\mu{}^b D_\nu \xi_b - D_\mu \xi^a) \\
&= \frac{1}{2}e^{\nu a} e_\mu{}^b \partial_\nu \xi_b + \frac{1}{2}e^{\nu a} e_\mu{}^b \omega_{\nu bc}\xi^c - \frac{1}{2}\partial_\mu \xi^a - \frac{1}{2}\omega_\mu{}^a{}_c \xi^c \\
&= \frac{1}{2}\partial_\nu \xi_\mu e^{\nu a} - \frac{1}{2}e^{\nu a}\xi_b \partial_\nu e_\mu{}^b - \frac{1}{2}e^{\nu a}\xi_c(\omega_\nu{}^c{}_b e_\mu{}^b) - \frac{1}{2}\partial_\mu \xi^a - \frac{1}{2}e_b{}^\nu \xi^b(\omega_\mu{}^a{}_c e_\nu{}^c) \\
&= \frac{1}{2}\partial_\nu \xi_\mu e^{\nu a} - \frac{1}{2}e^{\nu a}\xi_b \partial_\nu e_\mu{}^b - \frac{1}{2}e^{\nu a}\xi_c(-\partial_\nu e_\mu{}^c + \Gamma^\rho_{\nu\mu}e_\rho{}^c) \\
&\quad - \frac{1}{2}\xi^\nu \partial_\mu e_\nu{}^a - \frac{1}{2}e_\nu{}^a \partial_\mu \xi^\nu - \frac{1}{2}\xi^\nu(-\partial_\mu e_\nu{}^a + \Gamma^\rho_{\mu\nu}e_\rho{}^a) \\
&= \frac{1}{2}\partial_\nu \xi_\mu e^{\nu a} - \frac{1}{2}\partial_\mu \xi^\nu e^{\nu a} - \frac{1}{2}\Gamma^\rho_{\mu\nu}\xi_\rho e^{\nu a} - \frac{1}{2}\Gamma^\rho_{\mu\nu}\xi^\nu e_\rho{}^a
\end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(D_\mu \xi_\nu + D_\nu \xi_\mu)e^{\nu a} - \frac{1}{2}(D^a \xi_b - D_b \xi^a)e_\mu{}^b \\
&= \frac{1}{2}\partial_\mu \xi^\nu e_\nu{}^a + \frac{1}{2}\partial_\mu \xi_\nu e^{\nu a} - \frac{1}{2}\Gamma^\rho_{\mu\nu}\xi_\rho e^{\nu a} + \frac{1}{2}\Gamma^\rho_{\mu\nu}\xi^\nu e_\rho{}^a \\
&= \partial_\mu \xi^\nu e_\nu{}^a + \frac{1}{2}\xi^\rho e^{\nu a}\partial_\mu g_{\nu\rho} - \frac{1}{2}\Gamma^\rho_{\mu\nu}\xi_\rho e^{\nu a} + \frac{1}{2}\Gamma^\rho_{\mu\nu}\xi^\nu e_\rho{}^a \\
&= \partial_\mu \xi^\nu e_\nu{}^a + \Gamma^\rho_{\mu\nu}\xi^\nu e_\rho{}^a
\end{aligned} \tag{2.39}$$

が得られる。最後の等号へは、計量条件 (2.3) を用いた。(2.39) の最後の等号の Christoffel 記号の含まれる項を打ち消すために、両辺から $\xi^\nu \omega_\nu{}^a{}_b e_\mu{}^b = -\xi_\nu \partial^\nu e_\mu{}^a + \Gamma^\rho_{\nu\mu}\xi^\nu e_\rho{}^a$ を引くと、

$$\frac{1}{2}(D_\mu\xi_\nu + D_\nu\xi_\mu)e^{\nu a} - \frac{1}{2}(D^a\xi_b - D_b\xi^a)e_\mu{}^b - \xi^\nu\omega_\nu{}^a{}_b e_\mu{}^b = \xi^\nu\partial_\nu e_\mu{}^a + \partial_\mu\xi^\nu e_\nu{}^a \tag{2.40}$$

が得られる。よって、(2.37) から、$e_\mu{}^a$ に対する一般座標変換と局所 Lorentz 変換は、

$$(\delta_G + \delta_L)e_\mu{}^a = \frac{1}{2}(D_\mu\xi_\nu + D_\nu\xi_\mu)e^{\nu a} - \left[\lambda^a{}_b + \frac{1}{2}(D^a\xi_b - D_b\xi^a) - \xi^\nu\omega_\nu{}^a{}_b\right] e_\mu{}^b \tag{2.41}$$

のように書くことができる。したがって、$e_\mu{}^a$ が不変であるためには、

$$D_\mu\xi_\nu + D_\nu\xi_\mu = 0 \qquad \lambda_{ab} = -D_{[a}\xi_{b]} - \xi^\nu\omega_{\nu ab} \tag{2.42}$$

が成立しなければならない。(ここで角括弧 [ ] は添字の反対称化を表す括弧である。)[*3]初めの式は、一般座標変換のパラメータ ξ^μ が満たすべき方程式で、Killing 方程式と呼ばれる。また、それを満たすベクトル ξ^μ を Killing ベクトルと呼ぶ。また Killing ベクトル ξ^μ が得られると、2 番目の式から、局所 Lorentz 変換のパラメータ λ_{ab} が一意に定まる。

後のために、平坦な Minkowski 時空の場合について具体的な形を求めておく。この場合は、$e_\mu{}^a = \delta^a_\mu$、$\omega_{\mu ab} = 0$ であるので、このとき ξ^μ と λ_{ab} は (2.42) より、

$$\xi^\mu = a^\mu{}_\nu x^\nu + b^\mu \qquad \lambda_{ab} = a_{ab} \qquad (a_{\mu\nu} = -a_{\nu\mu}\text{、}b^\mu\text{は定数}) \tag{2.43}$$

と求まる。この ξ^μ は、大域的 Lorentz 変換 $a^\mu{}_\nu$ と並進 b^μ からなる座標変換 (Poincaré 変換) を表している。また、それと同時に定数 a_{ab} をパラメータとする局所 Lorentz 変換を同時に行う必要がある。したがって Minkowski 時空における場の理論では、この特別な一般座標変換と局所 Lorentz 変換に対する対称性が存在する。この Minkowski 時空がもつ対称性を Poincaré 対称性という。

2.4 超 Poincaré 代数と超重力多重項

超重力理論における「超」とは、本章の題にもあるように、超対称性のことである。超対称性とは、整数スピンを持つボソンと、半整数スピンを持つフェルミオンの間の対称性である。超対称性を持つ理論はいくつかのボソンとフェルミオンとで多重項から成り、それらは超対称性の変換、超変換によってお互い結びついている。超変換は、Poincaré 対称性などの時空対称性とともに、超代数 (superalgebra) をつくる。この超代数は一般に、考えている時空の次元、時空対称性の種類、超対称性の個数 ($\mathcal{N}$ と表す) に応じていろいろな種類があるが、ここでは、単純で基本的な超代数であり、後の Poincaré 超重力理論へとつながる $\mathcal{N} = 1$ 超 Poincaré 代数について述べる。

そのためにまず、フェルミオンを記述するスピノル場の理論に欠かせないガンマ行列について述べておく。ただし、この節では後のため $D = 4$ とする。4 次元のガンマ行列は、反交換関係

$$\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\eta^{ab} \tag{2.44}$$

[*3] 一般に、n 個の添字の反対称化は、角括弧 [ ] を用いて、$T_{[a_1\cdots a_n]} = \frac{1}{n!}\sum_P (-1)^P T_{P(a_1\cdots a_n)}$ のように表される。$(-1)^P$ は、$P(a_1\cdots a_n)$ が $a_1\cdots a_n$ の偶置換の時は $+1$、奇置換の時は -1 を表す。この記法は、以下の議論でしばしば用いられる。

を満たす 4×4 行列である。ここで $\eta^{ab} = (-1, +1, +1, +1)$ である。よってガンマ行列がかかるスピノル場 ψ は 4 つの成分を持つ。またスピノルの Dirac 共役 $\bar{\psi}$ を、

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger i\gamma^0 \tag{2.45}$$

で定義する。

さて超 Poincaré 代数とは、時空並進の生成子 (4 元運動量演算子)P_a と Lorentz 変換の生成子 M_{ab} ($M_{ab} = -M_{ba}$) からなる Poincaré 代数に、超変換の生成子である超電荷 (supercharge) Q_α を付け加えてできる代数である。(ここでスピノル添字としては $\alpha, \beta, \cdots = 1, 2, 3, 4$ を用いる) そのうち、Mojorana スピノルの超電荷 1 種類だけ含む場合を $\mathcal{N} = 1$ 超 Poincaré 代数と呼ぶ。ここで Majorara スピノル ψ とは、Majorana 条件 $\psi = \psi^c$ を満たすスピノルであり、スピノルの荷電共役 ψ^c は、

$$\psi^c = C\bar{\psi}^T \tag{2.46}$$

と定義される。ここで荷電共役行列 C は、

$$C^{-1}\gamma^a C = -\gamma^{aT} \qquad C^T = -C \qquad C^\dagger C = 1 \tag{2.47}$$

を満たす 4×4 行列である。$\mathcal{N} = 1$ 超 Poincaré 代数の (反) 交換関係は、

$$\begin{aligned}
&[M_{ab}, M_{cd}] = -i\eta_{bc}M_{ad} + i\eta_{bd}M_{ac} + i\eta_{ac}M_{bd} - i\eta_{ad}M_{bc} \\
&[M_{ab}, P_c] = -i\eta_{bc}P_a + i\eta_{ac}P_b \\
&[P_a, P_b] = 0 \\
&[M_{ab}, Q_\alpha] = \frac{i}{2}(\gamma_{ab})_\alpha{}^\beta Q_\beta \\
&[P_a, Q_\alpha] = 0 \\
&\{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\} = -2i(\gamma^a)_{\alpha\beta}P_a
\end{aligned} \tag{2.48}$$

である。ここで $\gamma_{ab} = \gamma_{[a}\gamma_{b]}$ はガンマ行列の反対称積として定義される。(2.48) の上 3 つの交換関係は通常の Poincaré 代数である。4 番目の交換関係は Q_α がスピノルとして変換されることを示している。また超電荷はフェルミオン的な生成子であるので、超電荷どうしは反交換関係になっている。

超対称性をもつ理論では、いくつかの異なるスピンの粒子が集まって多重項をなす。これを超多重項 (supermultiplet) という。超 Poincaré 代数の 1 粒子状態に対する既約表現を求めることで、どのような粒子が超多重項をつくるかを知ることができる。まず、交換関係 (2.48) の 5 番目の式より、超多重項の中の 1 つの状態に Q_α を作用させてできる状態は全て P_a の同じ固有値 p_a を持つことが分かる。また P_aP^a は全ての生成子と交換することが分かるので、1 つの超多重項の中の全ての状態の質量 $m^2 = -p_ap^a$ は等しくなる。ここでこの状態を具体的に求めるため、ガンマ行列の具体的な表示として

$$\gamma^0 = -i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^i = -i\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{2.49}$$

を用いる。ここで、σ_i は 2×2 Pauli 行列

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.50}$$

である。また、(2.47) を満たす荷電共役行列 C と Majorana 超電荷 Q は、この表示において

$$C = \begin{pmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -i\sigma_2 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} i\sigma_2 Q^{\dagger T} \\ Q \end{pmatrix} \tag{2.51}$$

という形になる。Q に対する Majorana 条件 (2.46) から、超電荷の独立な成分は下の 2 成分 Q_3, Q_4 であり、上の 2 成分はそのエルミート共役で表すことができる。

ここで質量がゼロの 1 粒子状態からなる超多重項を考える。この場合は、4 元運動量固有値が $p^a = (E, 0, 0, E)$ $(E > 0)$ となる慣性系が存在し、そこでは超電荷の反交換関係は (2.48) から $\bar{Q} = Q^\dagger i\gamma^0$ を用いると、

$$\{Q_\alpha, (Q_\beta)^\dagger\} = 2(\gamma^a\gamma^0)_{\alpha\beta}P_a = 2E(1+\gamma^3\gamma^0)_{\alpha\beta} = 2E\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{\alpha\beta} \tag{2.52}$$

であるから、$\alpha = 3, 4$ のうちゼロでないものは

$$\{Q_3, (Q_3)^\dagger\} = 4E \tag{2.53}$$

である。この Q_3 から

$$b = (4E)^{-\frac{1}{2}}Q_3 \qquad b^\dagger = (4E)^{-\frac{1}{2}}Q_3^\dagger \tag{2.54}$$

で新たな演算子 $b, b^\dagger$ を定義すると、これらはフェルミオンの生成・消滅演算子と同じ反交換関係

$$\begin{aligned} &\{b, b^\dagger\} = (4E)^{-1}\{Q_3, Q_3^\dagger\} = 1 \\ &\{b, b\} = 0 \qquad\qquad \{b^\dagger, b^\dagger\} = 0 \end{aligned} \tag{2.55}$$

を満たしている。下の 2 式は、(2.51) から具体的に計算すると、$Q_3 = -Q_2^\dagger$(場の演算子とすると複素共役はエルミート共役に等しい) となることから (2.52) より確かめられる。ここで、$b\,|\lambda\rangle = 0$ を満たす状態 $|\lambda\rangle$ を用意する。(もしこのような状態が無くても、(2.55) から b を 2 回作用させればゼロになるので、必要な分だけ作用させることによって必ずその状態は得られる) するとその表現の基底は

$$|\lambda\rangle \qquad\qquad b^\dagger\,|\lambda\rangle \tag{2.56}$$

で与えられる。b も $b^\dagger$ も 2 回作用させればゼロとなるので、独立な状態はこれだけである。また Q_4 については、任意の状態 $|\psi\rangle$ に作用させても、

$$\begin{aligned} &||Q_4^\dagger\,|\psi\rangle\,||^2 + ||Q_4\,|\psi\rangle\,||^2 = \langle\psi|\,\{Q_4, Q_4^\dagger\}\,|\psi\rangle = 0 \\ &\Rightarrow \quad Q_4^\dagger\,|\psi\rangle = 0 \quad , \quad Q_4\,|\psi\rangle = 0 \end{aligned} \tag{2.57}$$

であり、物理的な状態を与えないので、$Q_4 = 0$ としてもよい。

ここで生成子 M_{12} と $b, b^\dagger$ の交換関係を考えてみると、(2.48) の 4 番目の項関係から、

$$
\begin{aligned}
[M_{12}, b^\dagger] &= -(2E)^{-\frac{1}{2}}[M_{12}, Q_2] = -(2E)^{-\frac{1}{2}}\frac{i}{2}(-i)Q_2 \\
&= \frac{1}{2}(2E)^{-\frac{1}{2}}Q_3^\dagger = \frac{1}{2}b^\dagger
\end{aligned} \tag{2.58}
$$

同様にして　$[M_{12}, b] = -\frac{1}{2}b$

が得られる。M_{12} の固有値は z 軸方向の角運動量であり、$m=0$ で $p^a=(E,0,0,E)$ のような慣性系の場合はそれはヘリシティに等しい。よって $|\lambda\rangle$ としてヘリシティ h を持つ M_{12} の固有状態 $|h\rangle$ を選ぶと、

$$
\begin{aligned}
&M_{12}\,|h\rangle = h\,|h\rangle \\
&M_{12}b^\dagger\,|h\rangle = \left(b^\dagger M_{12} + [M_{12}, b^\dagger]\right)|h\rangle = \left(h+\frac{1}{2}\right)b^\dagger\,|h\rangle
\end{aligned} \tag{2.59}
$$

であるので、$b^\dagger$ はヘリシティを $\frac{1}{2}$ だけ上げる役割を担い、$b^\dagger\,|h\rangle$ はヘリシティ $h+\frac{1}{2}$ を持つ状態を表す。同様に、b はヘリシティを $\frac{1}{2}$ だけ下げる役割を担っている。したがって、これらの状態はヘリシティ $(h, h+\frac{1}{2})$ の超多重項をなしている。また場の理論の CPT 定理によると、ヘリシティが h の状態が存在すれば、$-h$ の状態も存在するので、場の理論で実現される超多重項は

$$
\left(h, h+\frac{1}{2}\right) \oplus \left(-h-\frac{1}{2}, -h\right) \qquad \left(h = 0,\ \frac{1}{2},\ 1, \cdots\right) \tag{2.60}
$$

となる。そのうち $h=\frac{3}{2}$ としたものは超重力多重項とよばれ、

$$
\left(\frac{3}{2}, 2\right) \oplus \left(-2, -\frac{3}{2}\right) \tag{2.61}
$$

である。これはスピン 2 とスピン 3/2 の状態を超多重項として含む理論に対応し、次章で議論する超重力理論へとつながることが後に分かる。

3　$D=4$ 超重力理論

前章では、重力場をフェルミオン場へ結合する多脚場形式について議論した。多脚場形式を用いると、重力場の超対称性パートナーであるフェルミオン場を同時に記述することができる。そしてそれらの場を用いて、超対称性を持つ理論、すなわち超変換に対して不変な理論を構築することができる。この章では、まずそのような理論の中で最も単純なモデルである、時空の次元 $D=4$、含まれる超対称性の数 $\mathcal{N}=1$ Poincaré 超重力理論について議論する。その後、本論文の目的である、$D=4$、$\mathcal{N}=1$ AdS 超重力理論について議論する。Poincaré 超重力理論は、AdS 超重力理論に含まれ、後に示すパラメータ $m=0$ の場合の AdS 超重力理論に一致する。

3.1　$\mathcal{N}=1$ Poincaré 超重力理論

2.4 節でみたように、超対称性を持つ理論を構成するには、場を超多重項の形で導入することが必要である。超対称性を持つ理論の中で簡単な例として知られているものでは、Wess-Zumino 模型や、Maxwell 場を含んだ超 Maxwell 理論などがある。ここではこれらについては詳細に議論しないが、これらの理論に用いられる超変換のパラメータとしては、定数 Majorana スピノール ϵ_α を用いて変換されることが知られていて、その意味で、大域的超対称性を持つ理論とよばれている。一般に場の理論において、理論が大局的な内部対称性を持つ場合は、ゲージ場を導入することによって、変換のパラメータが時空の座標に依存するような局所的な変換に対して不変になるような理論を構成することができた。(身近な例では大局的 $U(1)$ 不変性を持つ理論にゲージ場としてベクトル場を導入することで、局所的 $U(1)$ 変換に対し不変な理論を作ることができるのであった。) これと同様に、大域的超対称性を持つ理論に超対称性のゲージ場を導入して、局所超対称性をもつ理論を構成することを考える。

超変換のパラメータはスピノル ϵ_α $(\alpha=1,2,3,4)$ であるので、それに対するゲージ場はスピノル添字 α とベクトル添字 μ の両方を持つ場 $\psi_{\mu\alpha}(x)$ であると考えられる。そのような場は、Rarita-Schwinger 場と呼ばれ、量子化するとスピン 3/2 の粒子を表すことが知られている。局所超対称性を持つ理論を構成するためにはさらに別のゲージ場も必要になる。超 Poincaré 代数の交換関係 (2.48) から、2 つの超電荷の反交換子が時空並進の生成子になることがわかる。したがって、局所超対称性を持つ理論は局所的な時空並進対称性も持っていなければならない。一般に時空並進のパラメータは ξ_a $(a=1,2,3,4)$ と表される。局所的な時空並進とは、一般座標変換のことであるので、それに対するゲージ場として、多脚場で記述される重力場 ${e_\mu}^a$ が導入される。また重力場はスピン 2 を持つことが知られている。

このような一般座標変換と局所超変換に対し不変な理論を超重力理論 (supergravity) という。超重力理論に含まれる場は、スピン 2 の重力場 ${e_\mu}^a(x)$ と、その超対称性パートナーであるスピン 3/2 の Majorana Rarita-Schwinger 場 $\psi_\mu(x)$ である。これは (2.61) でみた超 Poincaré 代数の超重力多重項のスピンの組み合わせであるので、これらを用いて局所超対称性を持つ理論を構成することができる。この理論は $D=4$、$\mathcal{N}=1$ 超重力理論とよばれる。

$D=4$、$\mathcal{N}=1$ 超重力理論には、重力場 ${e_\mu}^a$ と 1 つの Majorana Rarita-Schwinger 場 $\psi_{\mu\alpha}$ が含まれている。また便宜のため、Rarita-Schwinger 場のスピノル添字 α については必要のない限りは省略して ψ_μ のようにあらわす。Rarita-Schwinger 場は、 Majorana 条件 $\psi^c_\mu=\psi_\mu$ を満たす。この超重力理論におけるラグランジアンは、 Einstein 項と Rarita-Schwinger 項からなり、

$$\mathcal{L} = e\hat{R} - \frac{1}{2}e\bar{\psi}_\mu\gamma^{\mu\nu\rho}\hat{D}_\nu\psi_\rho \tag{3.1}$$

で与えられる。ここでガンマ行列 γ^μ は、

$$\gamma^\mu(x) = \gamma^a e_a{}^\mu(x) \tag{3.2}$$

で定義され、多脚場を通して座標依存性を持つ。また $\gamma^{\mu\nu\rho} = \gamma^{[\mu}\gamma^\nu\gamma^{\rho]}$ は、ガンマ行列の反対称積である。Rarita-Schwinger 場の Dirac 共役 $\bar{\psi}_\mu$ は $\bar{\psi}_\mu \equiv \psi_\mu^\dagger i\gamma^0$ で定義される。ただしこの定義に用いられる γ^0 は定数行列 $\gamma^{a=0}$ である。曲率と共変微分は、

$$\begin{aligned}
\hat{R} &= e_a{}^\mu e_b{}^\nu \hat{R}_{\mu\nu}{}^{ab} \\
\hat{R}_{\mu\nu}{}^{ab} &= \partial_\mu\hat{\omega}_\nu{}^{ab} - \partial_\nu\hat{\omega}_\mu{}^{ab} + \hat{\omega}_\mu{}^a{}_c\hat{\omega}_\nu{}^{cb} - \hat{\omega}_\nu{}^a{}_c\hat{\omega}_\mu{}^{cb} \\
\hat{D}_{[\nu}\psi_{\rho]} &= \left(\partial_{[\nu} + \frac{1}{4}\hat{\omega}_{[\nu}{}^{ab}\gamma_{ab}\right)\psi_{\rho]}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

と定義される。共変微分について、アフィン接続の項が無いのは、ラグランジアン (3.1) に含まれる $\gamma^{\mu\nu\rho}$ により、共変微分に関わる添字 ν, ρ は反対称化されているので、反対称化して定義することで、アフィン接続を導入せずともテンソルとして変換するからである。これはちょうど電磁気学における場の強さ $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ がテンソルとして変換すること本質的に同じである。またスピン接続 $\hat{\omega}_\mu{}^{ab}$ は、以下で与えられる。

$$\hat{\omega}_{\mu ab} = \omega_{\mu ab} + \frac{1}{8}(\bar{\psi}_a\gamma_\mu\psi_b + \bar{\psi}_\mu\gamma_a\psi_b - \bar{\psi}_\mu\gamma_b\psi_a) \tag{3.4}$$

ここで $\omega_{\mu ab}$ は捩率なしのスピン接続 (2.26) である。この $\hat{\omega}_\mu{}^{ab}$ は、後述するが、後に都合がよくなるよう再定義されたものである。そのため当然元の $\omega_{\mu ab}$ を用いてラグランジアン (3.1) を表すこともでき、その場合はフェルミオンの 4 体相互作用項が加わる。またスピン接続を (3.4) で定義したことで、Rarita-Schwinger 場に依存した捩率をもつようになる。

$$\begin{aligned}
\hat{D}_\mu e_\nu{}^a - \hat{D}_\nu e_\mu{}^a &= D_\mu e_\nu{}^a - D_\nu e_\mu{}^a + \frac{1}{8}(\bar{\psi}_a\gamma_\mu\psi_b + \bar{\psi}_\mu\gamma_a\psi_b - \bar{\psi}_\mu\gamma_b\psi_a)e_\nu{}^b - (\mu \leftrightarrow \nu) \\
&= \frac{1}{8}\bar{\psi}_\mu\gamma_a\psi_\nu + \frac{1}{8}\cancel{(\bar{\psi}_a\gamma_\mu\psi_\nu + \bar{\psi}_a\gamma_\nu\psi_\mu)} - (\mu \leftrightarrow \nu) \\
&= \frac{1}{8}\bar{\psi}_\mu\gamma^a\psi_\nu - \frac{1}{8}\bar{\psi}_\nu\gamma^a\psi_\mu = \frac{1}{4}\bar{\psi}_\mu\gamma^a\psi_\nu
\end{aligned} \tag{3.5}$$

2、3 番目の等号において、一般の Majorana スピノル ψ, λ の双一次形式に対する対称性

$$\bar{\psi}\gamma^a\lambda = -\bar{\lambda}\gamma^a\psi \tag{3.6}$$

を用いた。

ラグランジアン (3.1) から構成される作用は、次の 3 つの無限小局所変換に対して不変である。

(i) 一般座標変換

$$\begin{aligned}
\delta_G(\xi)e_\mu{}^a &= \xi^\nu\partial_\nu e_\mu{}^a + \partial_\mu\xi^\nu e_\nu{}^a \\
\delta_G(\xi)\psi_\mu &= \xi^\nu\partial_\nu\psi_\mu + \partial_\mu\xi^\nu\psi_\nu
\end{aligned} \tag{3.7}$$

(ii) 局所 Lorentz 変換

$$\begin{aligned}\delta_L(\lambda)e_\mu{}^a &= -\lambda^a{}_b e_\mu{}^b \\ \delta_L(\lambda)\psi_\mu &= -\frac{1}{4}\lambda^{ab}\gamma_{ab}\psi_\mu\end{aligned} \tag{3.8}$$

(iii) 局所超変換

$$\begin{aligned}\delta_Q(\epsilon)e_\mu{}^a &= \frac{1}{4}\bar{\epsilon}\gamma^a\psi_\mu \\ \delta_Q(\epsilon)\psi_\mu &= \hat{D}_\mu\epsilon \equiv \left(\partial_\mu + \frac{1}{4}\hat{\omega}_\mu{}^{ab}\gamma_{ab}\right)\epsilon\end{aligned} \tag{3.9}$$

変換のパラメータ $\xi^\mu(x)$, $\lambda^a{}_b(x)(\lambda^{ab} = -\lambda^{ba})$, $\epsilon_\alpha(x)(\epsilon^c = \epsilon)$ は、時空の座標 x^μ の任意関数である。(3.1) の表式から、ラグランジアンは一般座標変換と局所 Lorentz 変換に対しては、添字が縮約されているため、明示的に不変である。局所超変換 (iii) に対する不変性は次節にてまとめて示す。これらの局所変換の交換関係を計算すると、

$$\begin{aligned}[\delta_G(\xi_1), \delta_G(\xi_2)] &= \delta_G(\xi_2\cdot\partial\xi_1 - \xi_1\cdot\partial\xi_2) \\ [\delta_L(\lambda_1), \delta_L(\lambda_2)] &= \delta_L([\lambda_1, \lambda_2]) \\ [\delta_G(\xi), \delta_L(\lambda)] &= \delta_L(-\xi\cdot\partial\lambda) \\ [\delta_G(\xi), \delta_Q(\epsilon)] &= \delta_Q(-\xi\cdot\partial\epsilon) \\ [\delta_L(\lambda), \delta_Q(\epsilon)] &= \delta_Q(\frac{1}{4}\lambda^{ab}\gamma_{ab}\epsilon) \\ [\delta_Q(\epsilon_1), \delta_Q(\epsilon_2)] &= \delta_G(\xi) + \delta_L(\lambda) + \delta_Q(\epsilon)\end{aligned} \tag{3.10}$$

となり、再び 3 つの局所変換を使って表すことができるので、閉じた代数をつくっている。こちらの計算も、次節にてまとめて示すこととする。ただし、Rarita-Schwinger 場 ψ_μ に対する局所超変換の交換関係 $[\delta_Q, \delta_Q]$ については、付録 B にて示してある。またここで最後の交換関係 $[\delta_Q, \delta_Q]$ の右辺に現れる変換パラメータ ξ , λ , ϵ は、

$$\xi^\mu = \frac{1}{4}\bar{\epsilon}_2\gamma^\mu\epsilon_1 \qquad \lambda_{ab} = -\xi\cdot\hat{\omega} = -\xi^\mu\hat{\omega}_{\mu ab} \qquad \epsilon = -\xi\cdot\psi = -\xi^\mu\psi_\mu \tag{3.11}$$

と定義される。また、付録 B から、この代数はオン・シェルでのみ閉じることが確かめられるが、今考えている理論においては、物理的自由度をもたないいくつかの補助場を導入することで、場の方程式を使わずにオフ・シェルで閉じる代数を構成できることが知られている。しかし、一般的な超重力理論 (拡張された超対称性 ($\mathcal{N} \geq 2$) を持つ理論や高次元時空での理論) においては、そのようなオフ・シェルの定式化は知られていない。

ラグランジアン (3.1) から導かれる場の方程式は、Minkowski 時空

$$e_\mu{}^a = \delta_\mu^a \qquad \psi_\mu = 0 \tag{3.12}$$

を解に持っている。解 (3.12) を不変に保つような一般座標変換と局所 Lorentz 変換は、前章で議論したように、(2.43) をパラメータとするような Poincaré 変換である。また、この解を不変に保つ局所超変換は、

$$\delta_Q\psi_\mu = \partial_\mu\epsilon = 0 \tag{3.13}$$

であるので、これは定数スピノール ϵ による変換である。($\psi_\mu = 0$ より、$\delta_Q e_\mu{}^a = 0$ は自動的に成立する。) 一般に、Minkowski 時空を場の方程式の解としてもつ超重力理論を Poincaré 超重力理論という。

また、この理論は、局所的対称性のほか大域的対称性も持っており、ラグランジアン (3.1) は、変換のパラメータ Λ が定数であるような大域的カイラル $U(1)$ 変換

$$\delta e_\mu{}^a = 0 \qquad \delta\psi_\mu = i\Lambda\gamma_5\psi_\mu \tag{3.14}$$

に対して不変である。ここで $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ である。(γ_5 に含まれる $\gamma_0, \cdots, \gamma_3$ は全て定数行列により定義される。) 実際に確かめると、$\bar{\psi}_\mu$ に対しては $\delta\bar{\psi}_\mu = i\Lambda\bar{\psi}_\mu\gamma_5$ となるので、

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} &= -\frac{1}{2}e\delta(\bar{\psi}_\mu\gamma^{\mu\nu\rho}\hat{D}_\nu\psi_\rho) \\
&= -\frac{1}{2}e\delta\bar{\psi}_\mu\gamma^{\mu\nu\rho}\left(\partial_\nu + \frac{1}{4}\hat{\omega}_\nu{}^{ab}\gamma_{ab}\right)\psi_\rho - \frac{1}{2}e\bar{\psi}_\mu\gamma^{\mu\nu\rho}\left(\partial_\nu + \frac{1}{4}\hat{\omega}_\nu{}^{ab}\gamma_{ab}\right)\delta\psi_\rho \\
&= -\frac{i}{2}e\Lambda\bar{\psi}_\mu\gamma_5\gamma^{\mu\nu\rho}\left(\partial_\nu + \frac{1}{4}\hat{\omega}_\nu{}^{ab}\gamma_{ab}\right)\psi_\rho - \frac{i}{2}e\Lambda\bar{\psi}_\mu\gamma^{\mu\nu\rho}\left(\partial_\nu + \frac{1}{4}\hat{\omega}_\nu{}^{ab}\gamma_{ab}\right)\gamma_5\psi_\rho \\
&= -\frac{i}{2}e\Lambda\bar{\psi}_\mu\gamma_5\gamma^{\mu\nu\rho}\hat{D}_\nu\psi_\rho + \frac{i}{2}e\Lambda\bar{\psi}_\mu\gamma_5\gamma^{\mu\nu\rho}\hat{D}_\nu\psi_\rho = 0
\end{aligned} \tag{3.15}$$

となり、大域的カイラル変換に対し (3.1) は不変であることがわかる。ここで 3 番目から 4 番目の等号へは、γ_5 がガンマ行列の反対称積 $\gamma^{\mu\nu\rho}$ と γ_{ab} に対し含まれる添字の数だけ反交換することを用いた。単純な大域的 $U(1)$ 変換 $\delta\psi_\mu = i\Lambda\psi_\mu$ は ψ_μ に対する Majorana 条件と矛盾するが、このカイラル変換は矛盾しない。

3.2 $\mathcal{N} = 1$ AdS 超重力理論

$\mathcal{N} = 1$ Poincaré 超重力理論のラグランジアン (2.1) に宇宙項を加えた理論を考えることができる。そのラグランジアンは、

$$\mathcal{L} = e\hat{R} + 6m^2 e - \frac{1}{2}e\bar{\psi}_\mu\gamma^{\mu\nu\rho}\hat{D}_\nu\psi_\rho + \frac{1}{2}me\bar{\psi}_\mu\gamma^{\mu\nu}\psi_\nu \tag{3.16}$$

で与えられる。第 2 項が宇宙項であり、前章の (2.1) のラグランジアンと比べると、負の宇宙定数 $\Lambda = -3m^2$ をもつことが分かる。最後の項は、Rarita-Shwinger 場の質量項であり、パラメータ m に比例している。上の表式からすぐわかるように、$m = 0$ では、Poincaré 超重力理論と一致する。またパラメータ m を純虚数とすると、宇宙定数が正になるが、その分 Rarita-Shwinger 場の質量項が実数でなくなってしまうため、負の場合のみを考える。

さて、この (3.16) で示したラグランジアンは、一般座標変換 (3.7)、また局所 Lorentz 変換 (3.8) に対し不変である。これらはその表式から明らかである。またラグランジアン (3.16) を不変に保つような局所超変換は、(3.9) と比べて質量項を加えたことによって m に比例した項が加わり、

$$\begin{aligned}
\delta_Q e_\mu{}^a &= \frac{1}{4}\bar{\epsilon}\gamma^a\psi_\mu \\
\delta_Q\psi_\mu &= \hat{D}_\mu\epsilon + \frac{1}{2}m\gamma_\mu\epsilon
\end{aligned} \tag{3.17}$$

となる。以下で、前節で述べたように、この局所超変換に対する作用の不変性、また (3.10) で示した局所変換の交換関係が閉じた代数をつくっていることをパラメータ m を含めた形で実際に示していく。

3.2.1　局所超変換に対する作用の不変性

実際にこれらの超変換 (3.17) に対して (3.16) のラグランジアンから構成される作用が不変であることを示す。そのためにまずこれからの式変形においてよく用いる式をあらかじめ示しておく。まず、多脚場の行列式 $e = \det(e_\mu{}^a)$ は完全反対称テンソルを用いて、

$$e = -\frac{1}{4!}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{abcd}e_\mu{}^a e_\nu{}^b e_\rho{}^c e_\sigma{}^d \tag{3.18}$$

と表される。ここで $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ はテンソル密度であり、(3.18) から

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = e\epsilon^{abcd}e_a{}^\mu e_b{}^\nu e_c{}^\rho e_d{}^\sigma \tag{3.19}$$

である。局所 Lorentz 添字の完全反対称テンソルについては、

$$\epsilon^{0123} = +1 \qquad \epsilon_{0123} = -1 \tag{3.20}$$

と選ぶ。

次に任意の 4 つのスピノール ψ, ξ, λ, ϕ に対して、次の変換が成立する。

$$\begin{aligned}\bar{\psi}\xi\bar{\lambda}\phi = -\frac{1}{4}\Big[&\bar{\psi}\phi\bar{\lambda}\xi + \bar{\psi}\gamma^a\phi\bar{\lambda}\gamma_a\xi - \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^{ab}\phi\bar{\lambda}\gamma_{ab}\xi \\ &-\bar{\psi}\gamma^a\gamma_5\phi\bar{\lambda}\gamma_a\gamma_5\xi + \bar{\psi}\gamma_5\phi\bar{\lambda}\gamma_5\xi\Big]\end{aligned} \tag{3.21}$$

これを Fierz 恒等式という。また、一部は (3.6) で与えたが、任意の Majorana スピノール ψ, λ の双一次形式には、次の対称性がある。

$$\begin{aligned}\bar{\psi}\lambda &= \bar{\lambda}\psi \\ \bar{\psi}\gamma^a\lambda &= -\bar{\lambda}\gamma^a\psi \\ \bar{\psi}\gamma^{ab}\lambda &= -\bar{\lambda}\gamma^{ab}\psi \\ \bar{\psi}\gamma^a\gamma_5\lambda &= \bar{\lambda}\gamma^a\gamma_5\psi \\ \bar{\psi}\gamma_5\lambda &= \bar{\lambda}\gamma_5\psi\end{aligned} \tag{3.22}$$

Rarita-Schwinger 場の双一次形式において、場のベクトル添字が反対称化されている場合、スピノルの入れ替えに対して + の符号が出る 1、4、5 番目は、1 番目を例とすると $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\bar{\psi}_\mu\psi_\nu = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\bar{\psi}_\nu\psi_\mu = -\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\bar{\psi}_\mu\psi_\nu = 0$ のようにゼロとなる。この性質はこれからの計算に大いに役立つ。これらの式を以下では適宜用いて、式変形を行う。

まず、ラグランジアン (3.16) を、

$$\mathcal{L} = \underbrace{e\hat{R}}_{\mathcal{L}_{\rm E}} + \underbrace{6m^2 e}_{\mathcal{L}_\Lambda} - \underbrace{\frac{1}{2}e\bar{\psi}_\mu\gamma^{\mu\nu\rho}\hat{D}_\nu\psi_\rho}_{\mathcal{L}_{\rm RS}} + \underbrace{\frac{1}{2}me\bar{\psi}_\mu\gamma^{\mu\nu}\psi_\nu}_{\mathcal{L}_{\rm RSmass}} \tag{3.23}$$

と分ける。$\mathcal{L}_{\rm E}$ と $\mathcal{L}_{\rm RS}$ について、以下のように変形する。

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\mathrm{E}} &= e e_a{}^{\mu} e_b{}^{\nu} \hat{R}_{\mu\nu}{}^{ab} \\
&= -\frac{1}{4!}\epsilon^{\rho\sigma\lambda\tau}\epsilon_{cdef} e_\rho{}^c e_\sigma{}^d e_\lambda{}^e e_\tau{}^f e_a{}^{\mu} e_b{}^{\nu} \hat{R}_{\mu\nu}{}^{ab} \\
&= -\frac{1}{4}\epsilon^{\rho\sigma\mu\nu}\epsilon_{cdab} e_\rho{}^c e_\sigma{}^d \hat{R}_{\mu\nu}{}^{ab} \\
&= -\frac{1}{4}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{abcd} e_\rho{}^c e_\sigma{}^d \hat{R}_{\mu\nu}{}^{ab}
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

1 番目のから 2 番目の等号へは (3.18)、2 番目から 3 番目へは、$e_a{}^{\mu} e_b{}^{\nu}$ に含まれる添字が、完全反対称テンソルに含まれる 4 つずつの添字のいずれか 2 つと重複することを用いた。その重複の仕方の数は ${}_4\mathrm{C}_2 = 6$ 通りである。また $\mathcal{L}_{\mathrm{RS}}$ については、

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\mathrm{RS}} &= -\frac{1}{2} e e_a{}^{\mu} e_b{}^{\nu} e_c{}^{\rho} \bar{\psi}_\mu \gamma^{abc} \hat{D}_\nu \psi_\rho \\
&= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4!}\right)\epsilon^{\sigma\lambda\tau\delta}\epsilon_{defg} e_\sigma{}^d e_\lambda{}^e e_\tau{}^f e_\delta{}^g e_a{}^{\mu} e_b{}^{\nu} e_c{}^{\rho} \bar{\psi}_\mu \gamma^{abc} \hat{D}_\nu \psi_\rho \\
&= \frac{1}{12}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{abcd} e_\sigma{}^d \bar{\psi}_\mu \gamma^{abc} \hat{D}_\nu \psi_\rho \\
&= \frac{1}{12}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{abcd} e_\sigma{}^d \bar{\psi}_\mu i\epsilon^{abce}\gamma_e\gamma_5 \hat{D}_\nu \psi_\rho \\
&= \frac{1}{2} i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{\psi}_\mu \gamma_\sigma\gamma_5 \hat{D}_\nu \psi_\rho \\
&= \frac{1}{2} i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{\psi}_\mu \gamma_\nu\gamma_5 \hat{D}_\rho \psi_\sigma
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

と変形する。ここで 3 番目から 4 番目の等号へは $\gamma^{abc} = i\epsilon^{abce}\gamma_e\gamma_5$、4 番目から 5 番目へは $\epsilon^{abcd}\epsilon_{abce} = -6\delta^d_e$ を用いた。ここで $\mathcal{L}_{\mathrm{E}}$ の Riemann テンソル $\hat{R}_{\mu\nu}{}^{ab}$、$\mathcal{L}_{\mathrm{RS}}$ の共変微分 $\hat{D}_\rho$ は、スピン接続 $\hat{\omega}_\mu{}^{ab}$ を通してのみ四脚場 $e_\mu{}^a$ に依存している。実は、作用を $e_\mu{}^a$、ψ_μ、$\hat{\omega}_\mu{}^{ab}$ の汎関数とみなすと、スピン接続 (2.4) は、次の方程式

$$
\frac{\delta}{\delta\hat{\omega}_{\mu ab}}\int d^4x \mathcal{L}(e_\mu{}^a, \psi_\mu, \hat{\omega}_\mu{}^{ab}) = 0 \tag{3.26}
$$

を満たす。したがって超変換に対する作用の変化を調べるときは、スピン接続の変分を無視できるのである。そのためにスピン接続を (3.4) のように定義したのである。このことをこれから具体的に確かめる。まず $\mathcal{L}_{\mathrm{E}}$ を $\hat{\omega}_\mu{}^{ab}$ について変分を取る。Riemann テンソルの表式 (3.3) より、

$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}_{\mathrm{E}} &= -\frac{1}{4}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{abcd} e_\rho{}^c e_\sigma{}^d (\partial_\mu \delta\hat{\omega}_\nu{}^{ab} + \delta(\hat{\omega}_\mu{}^a{}_e \hat{\omega}_\nu{}^{eb}) - (\mu \leftrightarrow \nu)) \\
&= -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{abcd} e_\rho{}^c e_\sigma{}^d (\partial_\mu \delta\hat{\omega}_\nu{}^{ab} + \delta(\hat{\omega}_\mu{}^a{}_e \hat{\omega}_\nu{}^{eb}))
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

と表される。まず括弧内第 1 項について変形する。このとき部分積分に伴う全微分項は無視する。

$$
\begin{aligned}
\text{第 1 項} &= \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{abcd}e_\rho{}^c e_\sigma{}^d\partial_\nu\delta\hat{\omega}_\mu{}^{ab} = -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{abcd}\partial_\nu(e_\rho{}^c e_\sigma{}^d)\delta\hat{\omega}_\mu{}^{ab} \\
&= -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{abcd}(e_\sigma{}^d\partial_\nu e_\rho{}^c + e_\rho{}^c\partial_\nu e_\sigma{}^d) = -\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{abcd}e_\sigma{}^d(\partial_\nu e_\rho{}^c)\delta\hat{\omega}_\mu{}^{ab} \\
&= \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{abcd}e_\sigma{}^d(\omega_\nu{}^c{}_e e_\rho{}^e)\delta\hat{\omega}_\mu{}^{ab} = e\epsilon^{fged}\epsilon_{abcd}e_f{}^\mu e_g{}^\nu\omega_\nu{}^c{}_e\delta\hat{\omega}_\mu{}^{ab} \\
&= e(e_a{}^\mu e_c{}^\nu\omega_\nu{}^c{}_b + e_c{}^\mu e_b{}^\nu\omega_\nu{}^c{}_a - e_c{}^\mu e_a{}^\nu\omega_\nu{}^c{}_b - e_b{}^\mu e_c{}^\nu\omega_\nu{}^c{}_a)\delta\hat{\omega}_\mu{}^{ab} \\
&= 2e(e_c{}^\mu e_b{}^\nu\omega_\nu{}^c{}_a + e_a{}^\mu e_c{}^\nu\omega_\nu{}^c{}_b)\delta\hat{\omega}_\mu{}^{ab}
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

ここで 3 行目では (2.28) を用い、3 行目から 4 行目は $\epsilon^{fged}\epsilon_{abcd} = -3!\delta_a^{[f}\delta_b^g\delta_c^{e]}$ を用いた。また第 2 項も同様に変形すると、

$$
\begin{aligned}
\text{第 2 項} &= -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{abcd}e_\rho{}^c e_\sigma{}^d(\hat{\omega}_\nu{}^{eb}\delta\hat{\omega}_\mu{}^a{}_e + \hat{\omega}_\mu{}^a{}_e\delta\hat{\omega}_\nu{}^{eb}) \\
&= -\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{abcd}e_\rho{}^c e_\sigma{}^d\hat{\omega}_{\nu e}{}^b\delta\hat{\omega}_\mu{}^{ae} = -\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{aecd}e_\rho{}^c e_\sigma{}^d\hat{\omega}_{\nu b}{}^e\delta\hat{\omega}_\mu{}^{ab} \\
&= -e\epsilon^{fgcd}\epsilon_{aecd}e_f{}^\mu e_g{}^\nu\hat{\omega}_{\nu b}{}^e\delta\hat{\omega}_\mu{}^{ab} = 2e(e_a{}^\mu e_e{}^\nu\hat{\omega}_{\nu b}{}^e - e_e{}^\mu e_a{}^\nu\hat{\omega}_{\nu b}{}^e)\delta\hat{\omega}_\mu{}^{ab} \\
&= -2e(e_a{}^\mu e_c{}^\nu\hat{\omega}_\nu{}^c{}_b + e_c{}^\mu e_b{}^\nu\hat{\omega}_\nu{}^c{}_a)\delta\hat{\omega}_\mu{}^{ab}
\end{aligned}
\tag{3.29}
$$

とできる。したがって、(3.27)、(3.28) から、

$$
\delta\mathcal{L}_{\mathrm{E}} = 2ee_c{}^\mu e_b{}^\nu(\omega_\nu{}^c{}_a - \hat{\omega}_\mu{}^c{}_a)\delta\hat{\omega}_\mu{}^{ab} + 2ee_a{}^\mu e_c{}^\nu(\omega_\nu{}^c{}_b - \hat{\omega}_\mu{}^c{}_b)\delta\hat{\omega}_\mu{}^{ab} \tag{3.30}
$$

を得る。

同様に $\mathcal{L}_{\mathrm{RS}}$ も $\hat{\omega}_\mu{}^{ab}$ について変分を取る。

$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}_{\mathrm{RS}} &= \frac{1}{2}i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\bar{\psi}_\mu\gamma_\nu\gamma_5\delta\hat{D}_\rho\psi_\sigma = \frac{i}{8}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\bar{\psi}_\mu\gamma_\nu\gamma_5\gamma_{ab}\psi_\sigma\delta\hat{\omega}_\rho{}^{ab} \\
&= \frac{i}{8}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}e_\mu{}^c e_\sigma{}^d\bar{\psi}_c\gamma_\nu\gamma_5\gamma_{ab}\psi_d\delta\hat{\omega}_\rho{}^{ab} = -\frac{i}{8}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}e_\rho{}^c e_\sigma{}^d e_\nu{}^e\bar{\psi}_c\gamma_e\gamma_5\gamma_{ab}\psi_d\delta\hat{\omega}_\mu{}^{ab}
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

ここで、

$$
\gamma_e\gamma_{ab}\gamma_5 = (\gamma_{eab} + 2\eta_{e[a}\gamma_{b]})\gamma_5 = -i\epsilon_{eabf}\gamma^f + 2\eta_{e[a}\gamma_{b]}\gamma_5 \tag{3.32}
$$

であり、$\gamma_a\gamma_5$ に比例する項は、双一次形式に対し (3.22) の対称性、$\rho\sigma$ の反対称性から消える。これより、(3.31) は、

$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}_{\mathrm{RS}} &= -\frac{1}{8}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{eabf}e_\nu{}^e\bar{\psi}_\rho\gamma^f\psi_\sigma\delta\hat{\omega}_\rho{}^{ab} = \frac{1}{8}e\epsilon^{eghi}\epsilon_{eabf}e_g{}^\mu e_h{}^\rho e_i{}^\sigma\bar{\psi}_\rho\gamma^f\psi_\sigma\delta\hat{\omega}_\mu{}^{ab} \\
&= -\frac{1}{8}e\left(e_a{}^\mu\bar{\psi}_b\gamma^\sigma\psi_\sigma + e_b{}^\mu\bar{\psi}_\rho\gamma^\rho\psi_a + \bar{\psi}_a\gamma^\mu\psi_b - e_b{}^\mu\bar{\psi}_a\gamma^\sigma\psi_\sigma - e_a{}^\mu\bar{\psi}_\rho\gamma^\rho\psi_b - \bar{\psi}_b\gamma^\mu\psi_a\right)\delta\hat{\omega}_\mu{}^{ab} \\
&= \frac{1}{4}e\left(e_b{}^\mu\bar{\psi}_a\gamma^\sigma\psi_\sigma + e_a{}^\mu\bar{\psi}_\rho\gamma^\rho\psi_b + \bar{\psi}_b\gamma^\mu\psi_a\right)\delta\hat{\omega}_\mu{}^{ab} \\
&= e\left\{\frac{1}{4}e_a{}^\mu e_c{}^\nu(\bar{\psi}^c\gamma_\nu\psi_b + \bar{\psi}_\nu\gamma^c\psi_b - \bar{\psi}_\nu\gamma_b\psi^c) + \frac{1}{4}e_c{}^\mu e_b{}^\nu(\bar{\psi}^c\gamma_\nu\psi_a + \bar{\psi}_\nu\gamma^c\psi_a - \bar{\psi}_\nu\gamma_a\psi^c)\right. \\
&\quad \underline{-\frac{1}{4}e_a{}^\mu e_c{}^\nu\bar{\psi}_\nu\gamma^c\psi_b} \cancel{-\frac{1}{4}e_c{}^\mu e_b{}^\nu\bar{\psi}^c\gamma_\nu\psi_a} -\frac{1}{4}e_c{}^\mu e_b{}^\nu\bar{\psi}_\nu\gamma^c\psi_a \\
&\quad \left.\cancel{+\frac{1}{4}e_c{}^\mu e_b{}^\nu\bar{\psi}_\nu\gamma^a\psi^c} \underline{+\frac{1}{4}e_a{}^\mu\bar{\psi}_\rho\gamma^\rho\psi_b} +\frac{1}{4}\bar{\psi}_b\gamma^\mu\psi_a\right\}\delta\hat{\omega}_\mu{}^{ab} \\
&= 2ee_c{}^\mu e_b{}^\nu(\hat{\omega}_\nu{}^c{}_a - \omega_\mu{}^c{}_a)\delta\hat{\omega}_\mu{}^{ab} + 2ee_a{}^\mu e_c{}^\nu(\hat{\omega}_\nu{}^c{}_b - \omega_\mu{}^c{}_b)\delta\hat{\omega}_\mu{}^{ab}
\end{aligned} \tag{3.33}
$$

となる。下線部、波線部どうしはそれぞれ相殺され、斜線部どうしも (3.22)、a, b の反対称性を使うと相殺する。したがって、$\hat{\omega}_\mu{}^{ab}$ の変分に対し、全微分の項を除いて $\delta\mathcal{L}_{\mathrm{E}} + \delta\mathcal{L}_{\mathrm{RS}} = 0$、すなわち $\delta\mathcal{L} = 0$ であるので、作用が $\hat{\omega}_\mu{}^{ab}$ の変化分には依らないため、(3.26) 式が確かに成立していることが確かめられた。

したがって、局所超変換に対する不変性をみるには、ラグランジアンの中のあらわな $e_\mu{}^a, \psi_\mu$ に対してのみの変分を調べればよい。それに先立ち、多脚場の行列式 e に対する変分の形を先に求めておく。

$$
\delta e = \delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}eg^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = \frac{1}{2}e(e^{\mu a}e_a{}^\nu)\delta(e_\mu{}^b e_{\nu b}) = \frac{1}{2}ee^{\mu a}e_a{}^\nu(e_{\nu b}\delta e_\mu{}^b + e_\mu{}^b\delta e_{\nu b}) = ee_a{}^\mu\delta e_\mu{}^a \tag{3.34}
$$

まず $\delta_Q\mathcal{L}_{\mathrm{E}}$ から計算する。

$$
\begin{aligned}
\delta_Q\mathcal{L}_{\mathrm{E}} &= \delta_Q(ee_a{}^\mu e_b{}^\nu)\hat{R}_{\mu\nu}{}^{ab} = (\delta_Q e)e_a{}^\mu e_b{}^\nu\hat{R}_{\mu\nu}{}^{ab} + 2ee_b{}^\nu(\delta_Q e_a{}^\mu)\hat{R}_{\mu\nu}{}^{ab} \\
&= \frac{1}{4}ee_c{}^\rho\bar{\epsilon}\gamma^c\psi_\rho\hat{R} - \frac{1}{2}ee_b{}^\nu\bar{\epsilon}\gamma_a\psi^\mu\hat{R}_{\mu\nu}{}^{ab} \\
&= \frac{1}{4}ee_\mu{}^a\bar{\epsilon}\gamma^\mu\psi_a\hat{R} - \frac{1}{2}ee_{\rho a}e_b{}^\nu\bar{\epsilon}\gamma^\rho\psi^\mu\hat{R}_{\mu\nu}{}^{ab}
\end{aligned} \tag{3.35}
$$

ここで 1 行目においては (2.17) から求まる $e_a{}^\mu$ に対する局所超変換 $\delta_Q e_a{}^\mu = -\frac{1}{4}\bar{\epsilon}\gamma_a\psi^\mu$ を用いている。また最終行第 2 項において、Riemann テンソルの対称性、

$$
e_{\rho a}e_b{}^\nu\hat{R}_{\mu\nu}{}^{ab} = \hat{R}_{\mu\nu\rho}{}^\nu = \hat{R}_{\rho\nu\mu}{}^\nu = e_{\mu a}e_b{}^\nu\hat{R}_{\rho\nu}{}^{ab} \tag{3.36}
$$

を用いると、(3.35) は、

$$
\delta_Q\mathcal{L}_{\mathrm{E}} = -\frac{1}{2}e\bar{\epsilon}\gamma^\mu\psi_a\left(e_b{}^\nu\hat{R}_{\mu\nu}{}^{ab} - \frac{1}{2}e_\mu{}^a\hat{R}\right) \tag{3.37}
$$

のようにまとまる。

次に $\mathcal{L}_{\mathrm{RS}}$ の変分を考える。その際 $\bar{\psi}_\mu$ に対して変分をとるが、具体的な表式は (3.17) より求まり、

$$
\delta_Q\bar{\psi}_\mu = \bar{\epsilon}\underbrace{\left(\overleftarrow{\partial_\mu} - \frac{1}{4}\hat{\omega}_\mu{}^{ab}\gamma_{ab}\right)}_{\equiv\overleftarrow{\hat{D}_\mu}} - \frac{1}{2}m\bar{\epsilon}\gamma_\mu = \bar{\epsilon}\overleftarrow{\hat{D}_\mu} - \frac{1}{2}m\bar{\epsilon}\gamma_\mu = \hat{D}_\mu\bar{\epsilon} - \frac{1}{2}m\bar{\epsilon}\gamma_\mu \tag{3.38}
$$

ここで表記上 $\bar{\epsilon}\overleftarrow{\hat{D}_\mu} = \hat{D}_\mu\bar{\epsilon}$ と表すこととする。したがって、$\mathcal{L}_{\mathrm{RS}}$ の変分は (3.25) の最後の表式を用いることにすると、

$$
\begin{aligned}
\delta_Q\mathcal{L}_{\mathrm{RS}} &= \frac{1}{2}i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\left(\delta_Q\bar{\psi}_\mu\gamma_\nu\gamma_5\hat{D}_\rho\psi_\sigma + \bar{\psi}_\mu\gamma_\nu\gamma_5\hat{D}_\rho\delta_Q\psi_\sigma + \delta_Q e_\nu{}^a\bar{\psi}_\mu\gamma_a\gamma_5\hat{D}_\rho\psi_\sigma\right)\\
&= \frac{1}{2}i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\left(\hat{D}_\mu\bar{\epsilon}\gamma_\nu\gamma_5\hat{D}_\rho\psi_\sigma + \bar{\psi}_\mu\gamma_\nu\gamma_5\hat{D}_\rho\hat{D}_\sigma\epsilon + \delta_Q e_\nu{}^a\bar{\psi}_\mu\gamma_a\gamma_5\hat{D}_\rho\psi_\sigma\right)\\
&\quad + \frac{1}{2}i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\left(-\frac{1}{2}m\bar{\epsilon}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_5\hat{D}_\rho\psi_\sigma + \frac{1}{2}m\bar{\psi}_\mu\gamma_\nu\gamma_5\hat{D}_\rho(\gamma_\sigma\epsilon)\right)
\end{aligned}
\tag{3.39}
$$

と求まる。ここで (3.39)2 行目の最初の項は、部分積分をして表面項を落とすと、

$$
\frac{1}{2}i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\hat{D}_\mu\bar{\epsilon}\gamma_\nu\gamma_5\hat{D}_\rho\psi_\sigma = -\frac{1}{2}i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\bar{\epsilon}\gamma_\nu\gamma_5\hat{D}_\mu\hat{D}_\rho\psi_\sigma - \frac{1}{2}i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\hat{D}_\mu e_\nu{}^a\bar{\epsilon}\gamma_a\gamma_5\hat{D}_\rho\psi_\sigma \tag{3.40}
$$

と変形できる。このように変形すると、(3.39)2 行目の括弧内第 3 項と (3.40) 右辺第 2 項が相殺する。それは、(3.39)2 行目の括弧内第 3 項に対し Fierz 恒等式 (3.21) を用いればわかる。

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\delta_Q e_\nu{}^a\bar{\psi}_\mu\gamma_a\gamma_5\hat{D}_\rho\psi_\sigma\\
&= \frac{1}{8}i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\bar{\epsilon}\gamma^a\psi_\nu\bar{\psi}_\mu\gamma_a\gamma_5\hat{D}_\rho\psi_\sigma\\
&= -\frac{1}{32}i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\Bigg(\bar{\epsilon}\gamma_a\gamma_5\hat{D}_\rho\psi_\sigma\bar{\psi}_\mu\gamma^a\psi_\nu + \bar{\epsilon}\gamma_b\gamma_a\gamma_5\hat{D}_\rho\psi_\sigma\bar{\psi}_\mu\gamma^b\gamma^a\psi_\nu - \frac{1}{2}\bar{\epsilon}\gamma^{bc}\gamma_a\gamma_5\hat{D}_\rho\psi_\sigma\bar{\psi}_\mu\gamma_{bc}\gamma^a\psi_\nu\\
&\qquad -\bar{\epsilon}\gamma^b\gamma_5\gamma_a\gamma_5\hat{D}_\rho\psi_\sigma\bar{\psi}_\mu\gamma_b\gamma_5\gamma^a\psi_\nu + \cancelto{0}{\bar{\epsilon}\gamma_5\gamma_a\gamma_5\hat{D}_\rho\psi_\sigma\bar{\psi}_\mu\gamma_5\gamma^a\psi_\nu}\Bigg)
\end{aligned}
\tag{3.41}
$$

最後の項は双一次形式の対称性 (3.22) より消える。括弧内第 2、3、4 項について整理する。

$$
\begin{aligned}
\text{括弧内第 2 項} &= \bar{\epsilon}(\gamma_{ba}+\eta_{ba})\gamma_5\hat{D}_\rho\psi_\sigma\bar{\psi}_\mu(\gamma^{ba}+\eta^{ba})\psi_\nu = \bar{\epsilon}\gamma_{ba}\gamma_5\hat{D}_\rho\psi_\sigma\bar{\psi}_\mu\gamma^{ba}\psi_\nu + \cancelto{0}{4\bar{\epsilon}\gamma_5\hat{D}_\rho\psi_\sigma\bar{\psi}_\mu\psi_\nu}\\
&= \bar{\epsilon}\left(-\frac{i}{2}\epsilon_{bacd}\gamma^{cd}\right)\hat{D}_\rho\psi_\sigma\bar{\psi}_\mu\gamma^{ba}\psi_\nu = -\frac{i}{2}\epsilon_{abcd}\bar{\epsilon}\gamma^{cd}\hat{D}_\rho\psi_\sigma\bar{\psi}_\mu\gamma^{ab}\psi_\nu\\
&= -\frac{i}{2}\epsilon_{abcd}\bar{\epsilon}\gamma^{ab}\hat{D}_\rho\psi_\sigma\bar{\psi}_\mu\gamma^{cd}\psi_\nu
\end{aligned}
\tag{3.42}
$$

ここでガンマ行列について $\gamma_a\gamma_b = \gamma_{ab}+\eta_{ab}$、$\gamma_{ab}\gamma_5 = -\frac{i}{2}\epsilon_{abcd}\gamma^{cd}$ を用いた。

$$
\begin{aligned}
\text{括弧内第 3 項} &= -\frac{1}{2}\bar{\epsilon}\gamma^{bc}\gamma^a\gamma_5\hat{D}_\rho\psi_\sigma\bar{\psi}_\mu\gamma_{bc}\gamma_a\psi_\nu\\
&= -\frac{1}{2}\bar{\epsilon}(\gamma^{bca}+\eta^{ac}\gamma^b-\eta^{ab}\gamma^c)\gamma_5\hat{D}_\rho\psi_\sigma\bar{\psi}_\mu(\underbrace{\gamma_{bca}}_{\propto\,\gamma_a\gamma_5}+\eta_{ac}\gamma_b-\eta_{ab}\gamma_c)\psi_\nu\\
&= \frac{1}{2}\Big\{\bar{\epsilon}(4\gamma^b)\gamma_5\hat{D}_\rho\psi_\sigma\bar{\psi}_\mu\gamma_b\psi_\nu - \bar{\epsilon}\gamma^b\gamma_5\hat{D}_\rho\psi_\sigma\bar{\psi}_\mu\gamma_b\psi_\nu\\
&\qquad -\bar{\epsilon}\gamma^b\gamma_5\hat{D}_\rho\psi_\sigma\bar{\psi}_\mu\gamma_b\psi_\nu + \bar{\epsilon}(4\gamma^b)\gamma_5\hat{D}_\rho\psi_\sigma\bar{\psi}_\mu\gamma_b\psi_\nu\Big\}\\
&= -3\bar{\epsilon}\gamma_b\gamma_5\hat{D}_\rho\psi_\sigma\bar{\psi}_\mu\gamma^b\psi_\nu
\end{aligned}
\tag{3.43}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{括弧内第 4 項} &= \bar{\epsilon}\gamma^b\gamma^a\hat{D}_\rho\psi_\sigma\bar{\psi}_\mu\gamma_b\gamma_5\gamma_a\psi_\nu = -\bar{\epsilon}(\gamma^{ba}+\eta^{ba})\hat{D}_\rho\psi_\sigma\bar{\psi}_\mu(\gamma_{ba}+\eta_{ab})\gamma_5\psi_\nu \\
&= -\bar{\epsilon}\gamma^{ba}\hat{D}_\rho\psi_\sigma\bar{\psi}_\mu\left(-\frac{i}{2}\epsilon_{bacd}\gamma^{cd}\right)\psi_\nu \\
&= \frac{i}{2}\epsilon_{abcd}\bar{\epsilon}\gamma^{ab}\hat{D}_\rho\psi_\sigma\bar{\psi}_\mu\gamma^{cd}\psi_\nu
\end{aligned} \tag{3.44}
$$

したがって、括弧内第 2、4 項は相殺し、(3.41) の表式は、整理すると、

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{8}i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\bar{\epsilon}\gamma^a\psi_\nu\bar{\psi}_\mu\gamma_a\gamma_5\hat{D}_\rho\psi_\sigma = \frac{1}{16}i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\bar{\epsilon}\gamma_a\gamma_5\hat{D}_\rho\psi_\sigma\bar{\psi}_\mu\gamma^a\psi_\nu \\
&= \frac{1}{4}i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\bar{\epsilon}\gamma_a\gamma_5\hat{D}_\rho\psi_\sigma(\hat{D}_\mu{e_\nu}^a-\hat{D}_\nu{e_\mu}^a) = \frac{1}{2}i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\hat{D}_\mu{e_\nu}^a\bar{\epsilon}\gamma_a\gamma_5\hat{D}_\rho\psi_\sigma
\end{aligned} \tag{3.45}
$$

よって、この項は (3.40) 右辺第 2 項と相殺する。したがって $\delta_Q\mathcal{L}_{\mathrm{RS}}$ で残ったのは、(3.39)2 行目第 2 項、3 行目、(3.40) 右辺第 1 項であり、

$$
\begin{aligned}
\delta_Q\mathcal{L}_{\mathrm{RS}} = &-\frac{1}{4}i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\bar{\epsilon}\gamma_\nu\gamma_5\left[\hat{D}_\mu,\hat{D}_\rho\right]\psi_\sigma + \frac{1}{4}i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\bar{\psi}_\mu\gamma_\nu\gamma_5\left[\hat{D}_\rho,\hat{D}_\sigma\right]\epsilon \\
&+\frac{1}{2}i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\left(-\frac{1}{2}m\bar{\epsilon}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_5\hat{D}_\rho\psi_\sigma+\frac{1}{2}m\bar{\psi}_\mu\gamma_\nu\gamma_5\hat{D}_\rho(\gamma_\sigma\epsilon)\right)
\end{aligned} \tag{3.46}
$$

のようにまとまる。ここで右辺第 1 行目は、任意のスピノルに対して成立する (2.35) に対応する共変微分の交換関係

$$
\left[\hat{D}_\mu,\hat{D}_\rho\right]\psi = \frac{1}{4}{\hat{R}_{\mu\rho}}{}^{ab}\gamma_{ab}\psi \tag{3.47}
$$

を用いると変形できる。

$$
\text{第 1 行目} = -\frac{1}{16}i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}{\hat{R}_{\mu\rho}}{}^{ab}\bar{\epsilon}\gamma_\nu\gamma_5\gamma_{ab}\psi_\sigma + \frac{1}{16}i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}{\hat{R}_{\rho\sigma}}{}^{ab}\bar{\psi}_\mu\gamma_\nu\gamma_5\gamma_{ab}\epsilon \tag{3.48}
$$

ここで

$$
\gamma_\nu\gamma_5\gamma_{ab} = {e_\nu}^c\gamma_c\gamma_{ab}\gamma_5 = {e_\nu}^c(\gamma_{cab}+2\eta_{c[a}\gamma_{b]})\gamma_5 = {e_\nu}^c(-i\epsilon_{cabd}\gamma^d+2\eta_{c[a}\gamma_{b]}\gamma_5) \tag{3.49}
$$

であり、$\gamma_b\gamma_5$ に比例する項は双一次形式の対称性 (3.22) を用いれば相殺される。よって (3.48) は、

$$
\begin{aligned}
\text{第 1 行目} &= -\frac{1}{16}i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}{\hat{R}_{\rho\sigma}}{}^{ab}\left(-2i\epsilon_{abcd}{e_\nu}^c\bar{\epsilon}\gamma^d\psi_\mu\right) = -\frac{1}{8}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{abcd}{e_\nu}^c{\hat{R}_{\rho\sigma}}{}^{ab}\bar{\epsilon}\gamma^d\psi_\mu \\
&= \frac{1}{8}e\epsilon^{cefg}\epsilon_{cabd}{e_e}^\mu{e_f}^\rho{e_g}^\sigma{\hat{R}_{\rho\sigma}}{}^{ab}\bar{\epsilon}\gamma^d\psi_\mu \\
&= -\frac{1}{8}e\left({e_b}^\rho{\hat{R}_{\rho\sigma}}{}^{ab}\bar{\epsilon}\gamma^\sigma\psi_a+{e_a}^\sigma{\hat{R}_{\rho\sigma}}{}^{ab}\bar{\epsilon}\gamma^\rho\psi_b+{e_d}^\mu\hat{R}\bar{\epsilon}\gamma^d\psi_\mu\right. \\
&\quad\left.-{e_a}^\rho{\hat{R}_{\rho\sigma}}{}^{ab}\bar{\epsilon}\gamma^\sigma\psi_b-{e_b}^\sigma{\hat{R}_{\rho\sigma}}{}^{ab}\bar{\epsilon}\gamma^\rho\psi_a+{e_d}^\mu\hat{R}\bar{\epsilon}\gamma^d\psi_\mu\right) \\
&= -\frac{1}{8}e\left(-4{e_a}^\rho{\hat{R}_{\rho\sigma}}{}^{ab}\bar{\epsilon}\gamma^\sigma\psi_b+2{e_\mu}^d\hat{R}\bar{\epsilon}\gamma^\mu\psi_d\right)
\end{aligned} \tag{3.50}
$$

となり、これはノーテーションを整えてゆくと、(3.37) より、

$$第1行目 = \frac{1}{2}e\bar{\epsilon}\gamma^\mu\psi_a\left(e_b{}^\nu\hat{R}_{\mu\nu}{}^{ab} - \frac{1}{2}e_\mu{}^a\hat{R}\right) = -\delta_Q\mathcal{L}_\mathrm{E} \tag{3.51}$$

となり、(3.46) の第 1 行目は $\delta_Q\mathcal{L}_\mathrm{E}$ と相殺することが分かる。したがって、今までの議論をまとめると、

$$\delta_Q(\mathcal{L}_\mathrm{E}+\mathcal{L}_\mathrm{RS}) = \frac{1}{2}i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\left(-\frac{1}{2}m\bar{\epsilon}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_5\hat{D}_\rho\psi_\sigma + \frac{1}{2}m\bar{\psi}_\mu\gamma_\nu\gamma_5\hat{D}_\rho(\gamma_\sigma\epsilon)\right) \tag{3.52}$$

と整理できる。$m=0$ のときは $\delta_Q(\mathcal{L}_\mathrm{E}+\mathcal{L}_\mathrm{RS})=0$ となるので、Poincaré 超重力理論のラグランジアン (3.1) の局所超変換に対する不変性はここで示されたことになる。

(3.52) を括弧内第 2 項を部分積分してさらに変形させる。

$$\delta_Q(\mathcal{L}_\mathrm{E}+\mathcal{L}_\mathrm{RS}) = \frac{1}{2}i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\left(-\frac{1}{2}m\bar{\epsilon}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_5\hat{D}_\rho\psi_\sigma - \frac{1}{2}m\hat{D}_\rho\bar{\psi}_\mu\gamma_\nu\gamma_5\gamma_\sigma\epsilon - \frac{1}{2}m\hat{D}_\rho e_\nu{}^a\bar{\psi}_\mu\gamma_a\gamma_5\gamma_\sigma\epsilon\right) \tag{3.53}$$

括弧内第 3 項は、(3.5) を用いると、

$$-\frac{1}{4}im\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\hat{D}_{[\rho}e_{\nu]}{}^a\bar{\psi}_\mu\gamma_a\gamma_5\gamma_\sigma\epsilon = -\frac{1}{32}im\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\bar{\psi}_\rho\gamma^a\psi_\nu\bar{\psi}_\mu\gamma_a\gamma_5\gamma_\sigma\epsilon \tag{3.54}$$

右辺の双一次形式の形をみると、(3.41) の 2 番目の等号の形と比べて構造が同じであることが分かる。したがって (3.41) の Fierz 恒等式の結果をそのまま使えるので、その結果は、

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{32}im\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\bar{\psi}_\rho\gamma^a\psi_\nu\bar{\psi}_\mu\gamma_a\gamma_5\gamma_\sigma\epsilon &= -\frac{1}{32}im\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-2\bar{\psi}_\rho\gamma^a\gamma_5\gamma_\sigma\epsilon\bar{\psi}_\mu\gamma^a\psi_\nu\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{32}im\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\bar{\psi}_\rho\gamma^a\psi_\nu\bar{\psi}_\mu\gamma_a\gamma_5\gamma_\sigma\epsilon\right) = 0
\end{aligned} \tag{3.55}$$

となる。(3.53) 括弧内第 1、2 項に含まれる $\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_5$ $(\gamma_\nu\gamma_5\gamma_\sigma = -\gamma_\nu\gamma_\sigma\gamma_5)$ は

$$\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_5 = e_\mu{}^a e_\nu{}^b\left(-\frac{1}{2}i\epsilon_{abcd}\gamma^{cd}\right) + g_{\mu\nu}\gamma_5 \tag{3.56}$$

と変形でき、そのうち $g_{\mu\nu}$ の項は、双一次形式の対称性 (3.22) により第 1、2 項で相殺する。よって (3.53) は

$$\begin{aligned}
\delta_Q(\mathcal{L}_\mathrm{E}+\mathcal{L}_\mathrm{RS}) &= -\frac{1}{8}m\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{abcd}(e_\mu{}^a e_\nu{}^b\bar{\epsilon}\gamma^{cd}\hat{D}_\rho\psi_\sigma - e_\nu{}^a e_\sigma{}^b\hat{D}_\rho\bar{\psi}_\mu\gamma^{cd}\epsilon) \\
&= -\frac{1}{8}m\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{abcd}(e_\mu{}^a e_\nu{}^b\bar{\epsilon}\gamma^{cd}\hat{D}_\rho\psi_\sigma + e_\nu{}^a e_\sigma{}^b\bar{\epsilon}\gamma^{cd}\hat{D}_\rho\psi_\mu) \\
&= -\frac{1}{4}m\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{abcd}e_\mu{}^a e_\nu{}^b\bar{\epsilon}\gamma^{cd}\hat{D}_\rho\psi_\sigma
\end{aligned} \tag{3.57}$$

と整理される。

次に、(3.57) を相殺する項を調べるため、$\mathcal{L}_\mathrm{RSmass}$ についての変分を調べる。そのためにまず $\mathcal{L}_\mathrm{RSmass}$ を以下の形に変形させておく。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\mathrm{RSmass} &= \frac{1}{2}me\bar{\psi}_\mu\gamma^{\mu\nu}\psi_\nu = \frac{1}{2}mee_a{}^\mu e_b{}^\nu\bar{\psi}_\mu\gamma^{ab}\psi_\nu \\
&= -\frac{1}{48}m\epsilon^{\rho\sigma\lambda\delta}\epsilon_{cdef}e_\rho{}^c e_\sigma{}^d e_\lambda{}^e e_\delta{}^f e_a{}^\mu e_b{}^\nu\bar{\psi}_\mu\gamma^{ab}\psi_\nu \\
&= -\frac{1}{8}m\epsilon^{\rho\sigma\mu\nu}\epsilon_{cdab}e_\rho{}^c e_\sigma{}^d\bar{\psi}_\mu\gamma^{ab}\psi_\nu = -\frac{1}{8}m\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{abcd}e_\rho{}^c e_\sigma{}^d\bar{\psi}_\mu\gamma^{ab}\psi_\nu
\end{aligned} \tag{3.58}$$

したがって $\delta_Q \mathcal{L}_{\mathrm{RSmass}}$ は、

$$
\begin{aligned}
\delta_Q \mathcal{L}_{\mathrm{RSmass}} &= -\frac{1}{8} m \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{abcd} \left\{ 2(\delta_Q e_\rho{}^c) e_\sigma{}^d \bar{\psi}_\mu \gamma^{ab} \psi_\nu + e_\rho{}^c e_\sigma{}^d \delta_Q \bar{\psi}_\mu \gamma^{ab} \psi_\nu + e_\rho{}^c e_\sigma{}^d \bar{\psi}_\mu \gamma^{ab} \delta_Q \psi_\nu \right\} \\
&= \underbrace{-\frac{1}{16} m \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{abcd} e_\sigma{}^d \bar{\epsilon} \gamma^c \psi_\rho \bar{\psi}_\mu \gamma^{ab} \psi_\nu}_{①} - \frac{1}{4} m \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{abcd} e_\rho{}^c e_\sigma{}^d \bar{\psi}_\mu \gamma^{ab} \hat{D}_\nu \epsilon \\
&\quad + (m \text{ の 2 次の項})
\end{aligned} \tag{3.59}
$$

と表される。m の 1 次の項からまず考える。2 行目第 2 項は、部分積分をすると、

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{4} m \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{abcd} e_\rho{}^c e_\sigma{}^d \bar{\psi}_\mu \gamma^{ab} \hat{D}_\nu \epsilon \\
&= \frac{1}{4} m \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{abcd} (e_\rho{}^c e_\sigma{}^d \hat{D}_\nu \bar{\psi}_\mu \gamma^{ab} \epsilon + 2 e_\sigma{}^d \hat{D}_{[\nu} e_{\rho]}{}^c \bar{\psi}_\mu \gamma^{ab} \epsilon) \\
&= -\frac{1}{4} m \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{abcd} e_\rho{}^c e_\sigma{}^d \bar{\epsilon} \gamma^{ab} \hat{D}_\nu \psi_\mu + \frac{1}{16} m \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{abcd} e_\sigma{}^d \bar{\psi}_\nu \gamma^c \psi_\rho \bar{\psi}_\mu \gamma^{ab} \epsilon \\
&= \frac{1}{4} m \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{abcd} e_\mu{}^a e_\nu{}^b \bar{\epsilon} \gamma^{cd} \hat{D}_\rho \psi_\sigma \underbrace{- \frac{1}{16} m \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{abcd} e_\sigma{}^d \bar{\epsilon} \gamma^{ab} \psi_\mu \bar{\psi}_\nu \gamma^c \psi_\rho}_{②}
\end{aligned} \tag{3.60}
$$

このうち第 1 項は (3.57) の $\delta_Q(\mathcal{L}_{\mathrm{E}} + \mathcal{L}_{\mathrm{RS}})$ と相殺することが分かる。あとは①と②が相殺するかを確かめる。$-\frac{i}{2} \epsilon_{abcd} \gamma^{ab} = \gamma_{cd} \gamma_5$ から以下の形になる。

$$
\begin{aligned}
& ① + ② \\
&= -\frac{1}{8} i m \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} e_\sigma{}^d \bar{\epsilon} \gamma^c \psi_\rho \bar{\psi}_\mu \gamma_{cd} \gamma_5 \psi_\nu - \frac{1}{8} i m \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} e_\sigma{}^d \bar{\epsilon} \gamma_{cd} \gamma_5 \psi_\mu \bar{\psi}_\nu \gamma^c \psi_\rho \\
&= -\frac{1}{8} i m \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{\epsilon} \gamma^c \psi_\rho \bar{\psi}_\mu \gamma_{c\sigma} \gamma_5 \psi_\nu - \frac{1}{8} i m \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} e_\sigma{}^d \bar{\epsilon} (\gamma_d \gamma_c - \eta_{dc}) \gamma_5 \psi_\nu \bar{\psi}_\mu \gamma^c \psi_\rho \\
&= -\frac{1}{8} i m \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{\epsilon} \gamma^c \psi_\rho \bar{\psi}_\mu \gamma_{c\sigma} \gamma_5 \psi_\nu \underline{- \frac{1}{8} i m \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{\epsilon} \gamma_\sigma \gamma_c \gamma_5 \psi_\nu \bar{\psi}_\mu \gamma^c \psi_\rho} + \frac{1}{8} i m \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{\epsilon} \gamma_5 \psi_\nu \bar{\psi}_\mu \gamma_\sigma \psi_\rho
\end{aligned} \tag{3.61}
$$

ここで下線部は Fierz 恒等式 (3.21) を用いるとゼロとなることが分かる。$\gamma_5 \psi_\nu \to \psi_\nu$ と再定義すると、双一次形式の対称性 (3.22) より残る項は、

$$
\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_c \psi_\nu \bar{\psi}_\mu \gamma^c \psi_\rho = -\frac{1}{4} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left[\gamma_c \gamma^a \gamma^c \psi_\rho \bar{\psi}_\mu \gamma^a \psi_\nu - \frac{1}{2} \gamma_c \gamma^{ab} \gamma^c \psi_\rho \bar{\psi}_\mu \gamma^{ab} \psi_\nu \right] \tag{3.62}
$$

となり、その中に含まれる $\gamma_c \gamma^a \gamma^c$ と $\gamma_c \gamma^{ab} \gamma^c$ は

$$
\begin{aligned}
\gamma_c \gamma^a \gamma^c &= (\gamma_{ca} + \eta_{ca}) \gamma^c = \gamma_{ca} + \gamma_a = -\gamma_{ac} \gamma^c + \gamma_a = -\gamma_a \sum_{c \neq a} \gamma_c \gamma^c + \gamma_a \\
&= -3\gamma_a + \gamma_a = -2\gamma_a \\
\gamma_c \gamma^{ab} \gamma^c &= (\gamma_{cab} + \eta_{ca} \gamma_b - \eta_{cb} \gamma_a) \gamma^c = \gamma_{cab} \gamma^c + \gamma_b \gamma_a - \gamma_a \gamma_b \\
&= \sum_{c \neq a,b} \gamma_c \gamma^c \gamma_{ab} - 2\gamma_{ab} = 2\gamma_{ab} - 2\gamma_{ab} = 0
\end{aligned} \tag{3.63}
$$

であるので、(3.62) から、

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_c\psi_\nu\bar{\psi}_\mu\gamma^c\psi_\rho = -\frac{1}{2}\left(\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_c\psi_\nu\bar{\psi}_\mu\gamma^c\psi_\rho\right) = 0 \tag{3.64}$$

と、確かにゼロとなった。すると (3.61) は

$$① + ② = -\frac{1}{8}im\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(\bar{\epsilon}\gamma^a\psi_\rho\bar{\psi}_\mu\gamma_{a\sigma}\gamma_5\psi_\nu - \bar{\epsilon}\gamma_5\psi_\nu\bar{\psi}_\mu\gamma_\sigma\psi_\rho) \tag{3.65}$$

となる。ここで右辺括弧内第 1 項に Fierz 恒等式 (3.21) を用いる。

$$\begin{aligned}
&\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\bar{\epsilon}\gamma^a\psi_\rho\bar{\psi}_\mu\gamma_{a\sigma}\gamma_5\psi_\nu \\
&= -\frac{1}{4}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\left[\bar{\psi}_\mu\gamma_b\psi_\rho\bar{\epsilon}\gamma^a\gamma^b\gamma_{a\sigma}\gamma_5\psi_\nu - \frac{1}{2}\bar{\psi}_\mu\gamma_{bc}\psi_\rho\bar{\epsilon}\gamma^a\gamma^{bc}\gamma_{a\sigma}\gamma_5\psi_\nu\right] \\
&= -\frac{1}{4}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\left[\bar{\psi}_\mu\gamma_b\psi_\rho\bar{\epsilon}(2\eta^{ab} - \gamma^b\underbrace{\gamma^a)\gamma_{a\sigma}}_{=3\gamma_\sigma}\gamma_5\psi_\nu - \frac{1}{2}\bar{\psi}_\mu\gamma_{bc}\psi_\rho\bar{\epsilon}\underbrace{\gamma^a\gamma^{bc}(\gamma_a\gamma_\sigma}_{=0\ \because\ (3.63)} - e_{\sigma a})\gamma_5\psi_\nu\right] \\
&= -\frac{1}{4}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\left[\bar{\psi}_\mu\gamma_b\psi_\rho\bar{\epsilon}(2\eta^{ab}\gamma_{a\sigma} - 3\gamma^b\gamma_\sigma)\gamma_5\psi_\nu \underline{+\frac{1}{2}\bar{\epsilon}\gamma^\sigma\gamma_{bc}\gamma_5\psi_\nu\bar{\psi}_\mu\gamma^{bc}\psi_\rho}\right]
\end{aligned} \tag{3.66}$$

下線部にさらに Fierz 恒等式 (3.21) を用いると、下線部はゼロとなることが分かる。$\gamma_5\psi_\nu \to \psi_\nu$、$\gamma_{bc} \to \gamma_{ab}$ とすると、

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_{ab}\psi_\nu\bar{\psi}_\mu\gamma^{ab}\psi_\rho = -\frac{1}{4}\left[\gamma_{ab}\gamma_c\gamma^{ab}\psi_\rho\bar{\psi}_\mu\gamma^c\psi_\nu - \frac{1}{2}\gamma_{ab}\gamma_{cd}\gamma^{ab}\psi_\rho\bar{\psi}_\mu\gamma^{cd}\psi_\nu\right] \tag{3.67}$$

となり、その中の $\gamma_{ab}\gamma_c\gamma^{ab}$ と $\gamma_{ab}\gamma_{cd}\gamma^{ab}$ は、

$$\begin{aligned}
\gamma_{ab}\gamma_c\gamma^{ab} &= (\gamma_{abc} + \eta_{cb}\gamma_a - \eta_{ca}\gamma_b)\gamma^{ab} = -\gamma_{cab}\gamma^{ba} + \eta_{cb}3\gamma^b + \eta_{ca}3\gamma^a \\
&= -\gamma_c\sum_{a\neq c, b\neq a,c}\gamma_a\gamma_b\gamma^b\gamma^a + 6\gamma_c = -\gamma_c 3\cdot 2 + 6\gamma_c = 0 \\
\gamma_{ab}\gamma_{cd}\gamma^{ab} &= (\gamma_{cd}\gamma_{ab} + 4\eta_{bc}\gamma_{ad} - 4\eta_{bd}\gamma_{ac})\gamma^{ab} \\
&= -12\gamma_{cd} + 4(-\gamma_d\gamma_a + \eta_{ad})\gamma^a{}_c - 4(-\gamma_c\gamma_a + \eta_{ac})\gamma^a{}_d \\
&= -12\gamma_{cd} - 12\gamma_d\gamma_c + 4\gamma_{dc} + 12\gamma_c\gamma_d - 4\gamma_{cd} = 4\gamma_{cd} \quad \underbrace{+24\eta_{cd}}_{=0\ (\because\ \gamma^{cd}\eta_{cd}=0)}
\end{aligned} \tag{3.68}$$

と変形できるから、(3.67) は、

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_{ab}\psi_\nu\bar{\psi}_\mu\gamma^{ab}\psi_\rho = \frac{1}{2}\left(\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_{ab}\psi_\nu\bar{\psi}_\mu\gamma^{ab}\psi_\rho\right) = 0 \tag{3.69}$$

とゼロになり、(3.66) 下線部はゼロとなる。また (3.66) について

$$\begin{aligned}
\eta^{ab}\gamma_{a\sigma} &= \eta^{ab}(\gamma_a\gamma_\sigma - e_{\sigma a}) = \eta^{ab}(-\gamma_\sigma\gamma_a + e_{\sigma a}) = -\gamma_\sigma\gamma^b + e_\sigma{}^b \\
\gamma^b\gamma_\sigma &= \eta^{ab}(-\gamma_\sigma\gamma_a + 2e_{\sigma a}) = -\gamma_\sigma\gamma^b + 2e_\sigma{}^b
\end{aligned} \tag{3.70}$$

から、

$$
\begin{aligned}
\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\bar{\epsilon}\gamma^a\psi_\rho\bar{\psi}_\mu\gamma_{a\sigma}\gamma_5\psi_\nu &= -\frac{1}{4}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\bar{\psi}_\mu\gamma_b\psi_\rho\bar{\epsilon}(-2\gamma_\sigma\gamma^b + 2e_\sigma{}^b + 3\gamma_\sigma\gamma^b - 6e_\sigma{}^b)\gamma_5\psi_\nu \\
&= -\frac{1}{4}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\bar{\psi}_\mu\gamma_b\psi_\rho\bar{\epsilon}(\underbrace{\gamma_\sigma\gamma^b}_{=0\ \because\ (3.64)} -4e_\sigma{}^b)\gamma_5\psi_\nu \\
&= \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\bar{\psi}_\mu\gamma_\sigma\psi_\rho\bar{\epsilon}\gamma_5\psi_\nu = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\bar{\epsilon}\gamma_5\psi_\nu\bar{\psi}_\mu\gamma_\sigma\psi_\rho
\end{aligned}
\tag{3.71}
$$

となるので、これは (3.65) の第 2 項を打ち消す。よって ① + ② = 0 が成立するので、これで m の 1 次の項は全て相殺されたことになる。したがって、$\delta_Q(\mathcal{L}_{\mathrm{E}} + \mathcal{L}_{\mathrm{RS}} + \mathcal{L}_{\mathrm{RSmass}})$ で残っている項は (3.59) で略記した $\mathcal{L}_{\mathrm{RSmass}}$ 由来の m の 2 次の項である。これを (3.59) で計算すると、

$$
\begin{aligned}
&\delta_Q(\mathcal{L}_{\mathrm{E}} + \mathcal{L}_{\mathrm{RS}} + \mathcal{L}_{\mathrm{RSmass}}) \\
&= \frac{1}{16}m^2\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{abcd}e_\rho{}^c e_\sigma{}^d(\bar{\epsilon}\gamma_\mu\gamma^{ab}\psi_\nu - \bar{\psi}_\mu\gamma^{ab}\gamma_\nu\epsilon) \\
&= \frac{1}{16}m^2\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{abcd}e_\rho{}^c e_\sigma{}^d(e_{\mu e}\bar{\epsilon}\gamma^e\gamma^{ab}\psi_\nu - e_{\nu e}\bar{\psi}_\mu\gamma^{ab}\gamma^e\epsilon) \\
&= \frac{1}{16}m^2\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{abcd}e_\rho{}^c e_\sigma{}^d\left\{e_{\mu e}\bar{\epsilon}(\gamma^{eab} + \eta^{ea}\gamma^b - \eta^{eb}\gamma^a)\psi_\nu - e_{\nu e}\bar{\psi}_\mu(\gamma^{abe} + \eta^{be}\gamma^a - \eta^{ae}\gamma^b)\epsilon\right\} \\
&= \frac{1}{4}m^2\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{abcd}e_\nu{}^b e_\rho{}^c e_\sigma{}^d\bar{\epsilon}\gamma^a\psi_\mu + \frac{1}{8}m^2\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{abcd}e_{\mu e}e_\rho{}^c e_\sigma{}^d\bar{\epsilon}\gamma^{abe}\psi_\nu
\end{aligned}
\tag{3.72}
$$

である。ここで 3 番目から 4 番目の等号へは $\gamma^{abe} = -i\epsilon_{eabf}\gamma^f\gamma_5$、双一次形式の対称性 (3.21) を用いた。また最終行第 2 項は、

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{8}m^2\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{abcd}e_{\mu e}e_\rho{}^c e_\sigma{}^d\bar{\epsilon}\gamma^{abe}\psi_\nu &= \frac{1}{8}em^2\epsilon^{fgcd}\epsilon_{abcd}\eta_{fe}\bar{\epsilon}\gamma^{abe}\psi_g \\
&= \frac{1}{8}em^2(-2\delta_a^f\delta_b^g + 2\delta_a^g\delta_b^f)\eta_{fe}\bar{\epsilon}\gamma^{abe}\psi_g \\
&= \frac{1}{4}em^2(\eta_{be}\bar{\epsilon}\gamma^{abe}\psi_a - \eta_{ae}\bar{\epsilon}\gamma^{abe}\psi_b) \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{3.73}
$$

よりゼロとなる。したがって、(3.72) は、

$$
\delta_Q(\mathcal{L}_{\mathrm{E}} + \mathcal{L}_{\mathrm{RS}} + \mathcal{L}_{\mathrm{RSmass}}) = \frac{1}{4}m^2\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{abcd}e_\nu{}^b e_\rho{}^c e_\sigma{}^d\bar{\epsilon}\gamma^a\psi_\mu \tag{3.74}
$$

となる。この寄与を相殺するのが $\mathcal{L}_\Lambda$ のはずである。実際に確認すると、(3.34) を用いて、

$$
\begin{aligned}
\delta_Q\mathcal{L}_\Lambda = 6m^2\delta_Q e = 6m^2 e e_a{}^\mu\delta_Q e_\mu{}^a = \frac{3}{2}m^2 e e_a{}^\mu\bar{\epsilon}\gamma^a\psi_\mu \\
= -\frac{1}{4}m^2\epsilon^{\nu\rho\sigma\mu}\epsilon_{bcda}e_\nu{}^b e_\rho{}^c e_\sigma{}^d\bar{\epsilon}\gamma^a\psi_\mu = -\frac{1}{4}m^2\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{abcd}e_\nu{}^b e_\rho{}^c e_\sigma{}^d\bar{\epsilon}\gamma^a\psi_\mu
\end{aligned}
\tag{3.75}
$$

となるので、確かに (3.74) と相殺する。したがって、ラグランジアン (3.23) に対する局所超変換は、全微分項を除いて

$$
\delta_Q\mathcal{L} = \delta_Q(\mathcal{L}_{\mathrm{E}} + \mathcal{L}_\Lambda + \mathcal{L}_{\mathrm{RS}} + \mathcal{L}_{\mathrm{RSmass}}) = 0 \tag{3.76}
$$

であるため、局所超変換に対し作用は不変に保たれる。

3.2.2　代数の閉包性

AdS 超重力理論においても、(3.10) で示した局所変換の交換関係は閉じた代数を作っている。それらを以下で確かめる。ただし、(3.11) で定義したパラメータのうち、λ は、質量項の導入により、

$$\lambda_{ab} = -\xi^\mu \hat{\omega}_{\mu ab} - \frac{1}{4} m \bar{\epsilon}_2 \gamma_{ab} \epsilon_1 \tag{3.77}$$

と変更される。残り 2 つのパラメータは共通である。当然こちらも、$m = 0$ では Poincaré 超重力理論における局所変換の交換関係に帰着する。代数が閉じているかをみるには、多脚場 ${e_\mu}^a$ と Rarita-Schwinger 場 ψ_μ の両方で具体的に確かめればよい。

○　$[\delta_G(\xi_1), \delta_G(\xi_2)] = \delta_G(\xi_2 \cdot \partial \xi_1 - \xi_1 \cdot \partial \xi_2)$ の証明

$$\begin{aligned}
[\delta_G(\xi_1), \delta_G(\xi_2)]{e_\mu}^a &= \delta_G(\xi_1)({\xi_2}^\nu \partial_\nu {e_\mu}^a + \partial_\mu {\xi_2}^\nu {e_\nu}^a) - (1 \leftrightarrow 2) \\
&= {\xi_2}^\nu \partial_\nu ({\xi_1}^\rho \partial_\rho {e_\mu}^a + \partial_\mu {\xi_1}^\rho {e_\rho}^a) + \partial_\mu {\xi_2}^\nu ({\xi_1}^\rho \partial_\rho {e_\nu}^a + \partial_\nu {\xi_2}^\rho {e_\rho}^a) - (1 \leftrightarrow 2) \\
&= {\xi_2}^\nu \partial_\nu {\xi_1}^\rho \partial_\rho {e_\mu}^a + {\xi_2}^\nu {\xi_1}^\rho \partial_\nu \partial_\rho {e_\mu}^a + {\xi_2}^\nu \partial_\nu \partial_\mu {\xi_1}^\rho {e_\rho}^a \\
&\quad + {\xi_2}^\nu \partial_\mu {\xi_1}^\rho \partial_\nu {e_\rho}^a + \partial_\mu {\xi_2}^\nu {\xi_1}^\rho \partial_\rho {e_\nu}^a + \partial_\mu {\xi_2}^\nu \partial_\nu {\xi_1}^\rho {e_\rho}^a - (1 \leftrightarrow 2) \\
&= ({\xi_2}^\nu \partial_\nu {\xi_1}^\rho) \partial_\rho {e_\mu}^a + \partial_\mu ({\xi_2}^\nu \partial_\nu {\xi_1}^\rho) {e_\rho}^a \\
&\quad + {\xi_2}^\nu {\xi_1}^\rho \partial_\nu \partial_\rho {e_\mu}^a + {\xi_2}^\nu \partial_\mu {\xi_1}^\rho \partial_\nu {e_\rho}^a + \partial_\mu {\xi_2}^\nu {\xi_1}^\rho \partial_\rho {e_\nu}^a - (1 \leftrightarrow 2) \\
&= (\xi_2 \cdot \partial {\xi_1}^\nu - \xi_1 \cdot \partial {\xi_2}^\nu) \partial_\nu {e_\mu}^a + \partial_\nu (\xi_2 \cdot \partial {\xi_1}^\nu - \xi_1 \cdot \partial {\xi_2}^\nu) {e_\mu}^a \\
&= \delta_G(\xi_2 \cdot \partial \xi_1 - \xi_1 \cdot \partial \xi_2) {e_\mu}^a
\end{aligned} \tag{3.78}$$

4 番目の等号の 2 行目は、1 と 2 の交換により相殺される項である。続いて ψ_μ についてだが、一般座標変換に対しては、多脚場 ${e_\mu}^a$ も Rarita-Schwinger 場 ψ_μ も共変ベクトルとして変換するので、上の議論がそのまま ψ_μ についても成立する。よって、

$$[\delta_G(\xi_1), \delta_G(\xi_2)]\psi_\mu = \delta_G(\xi_2 \cdot \partial \xi_1 - \xi_1 \cdot \partial \xi_2)\psi_\mu \tag{3.79}$$

が成立する。したがって、$[\delta_G(\xi_1), \delta_G(\xi_2)] = \delta_G(\xi_2 \cdot \partial \xi_1 - \xi_1 \cdot \partial \xi_2)$ が成立。

○　$[\delta_L(\lambda_1), \delta_L(\lambda_2)] = \delta_L([\lambda_1, \lambda_2])$ の証明

$$\begin{aligned}
[\delta_L(\lambda_1), \delta_L(\lambda_2)]{e_\mu}^a &= \delta_L(\lambda_1)(-{\lambda_2}^a{}_b {e_\mu}^b) - (1 \leftrightarrow 2) \\
&= {\lambda_2}^a{}_b {\lambda_1}^b{}_c {e_\mu}^c - {\lambda_1}^a{}_b {\lambda_2}^b{}_c {e_\mu}^c \\
&= -[\lambda_1, \lambda_2]^a{}_c {e_\mu}^c = \delta_L([\lambda_1, \lambda_2]){e_\mu}^a
\end{aligned} \tag{3.80}$$

$$\begin{aligned}
[\delta_L(\lambda_1), \delta_L(\lambda_2)]\psi_\mu &= \delta_L(\lambda_1)\left(-\frac{1}{4}{\lambda_2}^{ab}\gamma_{ab}\psi_\mu\right) - (1 \leftrightarrow 2) \\
&= \frac{1}{16}{\lambda_2}^{ab}{\lambda_1}^{cd}\gamma_{ab}\gamma_{cd}\psi_\mu - \frac{1}{16}{\lambda_1}^{ab}{\lambda_2}^{cd}\gamma_{ab}\gamma_{cd}\psi_\mu \\
&= \frac{1}{16}{\lambda_1}^{ab}{\lambda_2}^{cd}(\gamma_{cd}\gamma_{ab} - \gamma_{ab}\gamma_{cd})\psi_\mu
\end{aligned} \tag{3.81}$$

ここで、ガンマ行列について

$$\gamma_{cd}\gamma_{ab} - \gamma_{ab}\gamma_{cd} = 2\eta_{bc}\gamma_{da} + 2\eta_{ad}\gamma_{cb} - 2\eta_{ac}\gamma_{db} - 2\eta_{bd}\gamma_{ca} \tag{3.82}$$

が成立するので、

$$\begin{aligned}
&[\delta_L(\lambda_1), \delta_L(\lambda_2)]\psi_\mu \\
&= \frac{1}{16}(2{\lambda_2}^{db}{\lambda_{1b}}^a\gamma_{da} + 2{\lambda_2}^{ca}{\lambda_{1a}}^b\gamma_{cb} - 2{\lambda_1}^{ba}{\lambda_{2a}}^d\gamma_{bd} - 2{\lambda_1}^{ab}{\lambda_{2b}}^c\gamma_{ac})\psi_\mu \\
&= \frac{1}{4}\left\{(\lambda_2\lambda_1)^{ab}\gamma_{ab} - (\lambda_1\lambda_2)^{ab}\gamma_{ab}\right\}\psi_\mu = -\frac{1}{4}[\lambda_1, \lambda_2]^{ab}\gamma_{ab}\psi_\mu \\
&= \delta_L([\lambda_1, \lambda_2])\psi_\mu
\end{aligned} \tag{3.83}$$

と変形できる。したがって、$[\delta_L(\lambda_1), \delta_L(\lambda_2)] = \delta_L([\lambda_1, \lambda_2])$ が成立。

○ $[\delta_G(\xi), \delta_L(\lambda)] = \delta_L(-\xi\cdot\partial\lambda)$ の証明

$$\begin{aligned}
&[\delta_G(\xi), \delta_L(\lambda)]{e_\mu}^a \\
&= \delta_G(\xi)(-{\lambda^a}_b{e_\mu}^b) - \delta_L(\lambda)(\xi^\nu\partial_\nu{e_\mu}^a + \partial_\mu\xi^\nu{e_\nu}^a) \\
&= -{\lambda^a}_b(\xi^\nu\partial_\nu{e_\mu}^b + \partial_\mu\xi^\nu{e_\nu}^b) - \xi^\nu\partial_\nu(-{\lambda^a}_b{e_\mu}^b) - \partial_\mu\xi^\nu(-{\lambda^a}_b{e_\nu}^b) \\
&= -{\lambda^a}_b\xi^\nu\partial_\nu{e_\mu}^b + \xi^\nu\partial_\nu{\lambda^a}_b{e_\mu}^b + \xi^\nu{\lambda^a}_b\partial_\nu{e_\mu}^b \\
&= -{(-\xi\cdot\partial\lambda)^a}_b{e_\mu}^b = \delta_L(-\xi\cdot\partial\lambda){e_\mu}^a
\end{aligned} \tag{3.84}$$

$$\begin{aligned}
&[\delta_G(\xi), \delta_L(\lambda)]\psi_\mu \\
&= \delta_G(\xi)\left(-\frac{1}{4}\lambda^{ab}\gamma_{ab}\psi_\mu\right) - \delta_L(\lambda)(\xi^\nu\partial_\nu\psi_\mu + \partial_\mu\xi^\nu\psi_\nu) \\
&= -\frac{1}{4}\lambda^{ab}\gamma_{ab}(\xi^\nu\partial_\nu\psi_\mu + \partial_\mu\xi^\nu\psi_\nu) - \xi^\nu\partial_\nu\left(-\frac{1}{4}\lambda^{ab}\gamma_{ab}\psi_\mu\right) - \partial_\mu\xi^\nu\left(-\frac{1}{4}\lambda^{ab}\gamma_{ab}\psi_\mu\right) \\
&= \frac{1}{4}\xi^\nu\partial_\nu\lambda^{ab}\gamma_{ab}\psi_\mu = -\frac{1}{4}(-\xi\cdot\partial\lambda)^{ab}\gamma_{ab}\psi_\mu = \delta_L(-\xi\cdot\partial\lambda)\psi_\mu
\end{aligned} \tag{3.85}$$

したがって、$[\delta_G(\xi), \delta_L(\lambda)] = \delta_L(-\xi\cdot\partial\lambda)$ が成立。

○ $[\delta_G(\xi), \delta_Q(\epsilon)] = \delta_Q(-\xi\cdot\partial\epsilon)$ の証明

$$\begin{aligned}
&[\delta_G(\xi), \delta_Q(\epsilon)]{e_\mu}^a \\
&= \delta_G(\xi)\frac{1}{4}\bar{\epsilon}\gamma^a\psi_\mu - \delta_Q(\epsilon)(\xi^\nu\partial_\nu{e_\mu}^a + \partial_\mu\xi^\nu{e_\nu}^a) \\
&= \frac{1}{4}\bar{\epsilon}\gamma^a(\xi^\nu\partial_\nu\psi_\mu + \partial_\mu\xi^\nu\psi_\nu) - \xi^\nu\partial_\nu\left(\frac{1}{4}\bar{\epsilon}\gamma^a\psi_\mu\right) - \partial_\mu\xi^\nu\left(\frac{1}{4}\bar{\epsilon}\gamma^a\psi_\nu\right) \\
&= -\frac{1}{4}\xi^\nu\partial_\nu\bar{\epsilon}\gamma^a\psi_\mu = \frac{1}{4}(-\xi\cdot\partial\bar{\epsilon})\gamma^a\psi_\mu = \delta_Q(-\xi\cdot\partial\epsilon){e_\mu}^a
\end{aligned} \tag{3.86}$$

$$
\begin{aligned}
&[\delta_G(\xi), \delta_Q(\epsilon)]\psi_\mu \\
&= \delta_G(\xi)\left(\hat{D}_\mu\epsilon + \frac{1}{2}m\gamma_\mu\epsilon\right) - \delta_Q(\epsilon)(\xi^\nu\partial_\nu\psi_\mu + \partial_\mu\xi^\nu\psi_\mu) \\
&= \frac{1}{4}(\xi^\nu\partial_\nu\hat{\omega}_{\mu ab} + \partial_\mu\xi^\nu\hat{\omega}_{\mu ab}) + \frac{1}{2}(\xi^\nu\partial_\nu e_\mu{}^a + \partial_\mu\xi^\nu e_\nu{}^a)\gamma_a\epsilon \\
&\quad - \xi^\nu\partial_\nu\left(\hat{D}_\mu\epsilon + \frac{1}{2}m\gamma_\mu\epsilon\right) - \partial_\mu\xi^\nu\left(\hat{D}_\nu\epsilon + \frac{1}{2}m\gamma_\nu\epsilon\right) \\
&= -\xi^\nu\partial_\nu\partial_\mu\epsilon - \partial_\mu\xi^\nu\partial_\nu\epsilon - \frac{1}{4}\xi^\nu\hat{\omega}_{\mu ab}\gamma^{ab}\partial_\nu\epsilon - \frac{1}{2}m\xi^\nu\gamma_\mu\partial_\nu\epsilon \\
&= \partial_\mu(-\xi^\nu\partial_\nu\epsilon) + \frac{1}{4}\hat{\omega}_{\mu ab}\gamma^{ab}(-\xi^\nu\partial_\nu\epsilon) + \frac{1}{2}m\gamma_\mu(-\xi^\nu\partial_\nu\epsilon) \\
&= \hat{D}_\mu(-\xi\cdot\partial\epsilon) + \frac{1}{2}m\gamma_\mu(-\xi\cdot\partial\epsilon) = \delta_Q(-\xi\cdot\partial\epsilon)\psi_\mu
\end{aligned}
\tag{3.87}
$$

(3.87)2 番目の等号では、$\hat{\omega}_{\mu ab}$ が一般座標変換に対しては共変ベクトルとして変換することを用いている。したがって、$[\delta_G(\xi), \delta_Q(\epsilon)] = \delta_Q(-\xi\cdot\partial\epsilon)$ が成立。

○ $[\delta_L(\lambda), \delta_Q(\epsilon)] = \delta_Q(\frac{1}{4}\lambda^{ab}\gamma_{ab}\epsilon)$ の証明

$$
\begin{aligned}
[\delta_L(\lambda), \delta_Q(\epsilon)]e_\mu{}^a &= \delta_L(\lambda)\frac{1}{4}\bar{\epsilon}\gamma^a\psi_\mu - \delta_Q(\epsilon)(-\lambda^a{}_b e_\mu{}^b) \\
&= -\frac{1}{16}\lambda^{bc}\bar{\epsilon}\gamma^a\gamma_{bc}\psi_\mu + \frac{1}{4}\lambda^a{}_b\bar{\epsilon}\gamma^b\psi_\mu
\end{aligned}
\tag{3.88}
$$

ここでガンマ行列について、以下のように変形させる。

$$
\gamma^a\gamma_{bc} = \gamma^a{}_{bc} + \delta^a_b\gamma_c - \delta^a_c\gamma_b = \gamma_{bc}{}^a + \delta^a_b\gamma_c - \delta^a_c\gamma_b = \gamma_{bc}\gamma^a + 2\delta^a_b\gamma_c - 2\delta^a_c\gamma_b
\tag{3.89}
$$

これを (2.88) に代入すると、

$$
\begin{aligned}
[\delta_L(\lambda), \delta_Q(\epsilon)]e_\mu{}^a &= -\frac{1}{16}\lambda^{bc}\bar{\epsilon}\gamma_{bc}\gamma^a\psi_\mu - \frac{1}{8}\lambda^a{}_c\bar{\epsilon}\gamma^c\psi_\mu - \frac{1}{8}\lambda^a{}_b\bar{\epsilon}\gamma^b\psi_\mu + \frac{1}{4}\lambda^a{}_b\bar{\epsilon}\gamma^b\psi_\mu \\
&= -\frac{1}{16}\lambda^{bc}\bar{\epsilon}\gamma_{bc}\gamma^a\psi_\mu
\end{aligned}
\tag{3.90}
$$

が得られる。またここで、

$$
\lambda^{bc}\overline{\gamma_{bc}\epsilon} = \lambda^{bc}(\gamma_{bc}\epsilon)^\dagger i\gamma^0 = \lambda^{bc}\epsilon^\dagger\gamma_{bc}{}^\dagger i\gamma^0 = -\lambda^{bc}\epsilon^\dagger i\gamma^0\gamma_{bc} = -\lambda^{bc}\bar{\epsilon}\gamma_{bc}
\tag{3.91}
$$

であるから、

$$
[\delta_L(\lambda), \delta_Q(\epsilon)]e_\mu{}^a = \frac{1}{16}\lambda^{bc}\overline{\gamma_{bc}\epsilon}\gamma^a\psi_\mu = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\lambda^{bc}\overline{\gamma_{bc}\epsilon}\right)\gamma^a\psi_\mu = \delta_Q\left(\frac{1}{4}\lambda^{bc}\gamma_{bc}\epsilon\right)e_\mu{}^a
\tag{3.92}
$$

が成立する。続いて ψ_μ についても同様に計算する。

$$
\begin{aligned}
&[\delta_L(\lambda),\delta_Q(\epsilon)]\psi_\mu \\
&= \delta_L(\lambda)\left(\hat{D}_\mu\epsilon + \frac{1}{2}m\gamma_\mu\epsilon\right) - \delta_Q(\epsilon)\left(-\frac{1}{4}\lambda^{ab}\gamma_{ab}\psi_\mu\right) \\
&= \frac{1}{4}\hat{D}_\mu\lambda^{ab}\gamma_{ab}\epsilon - \frac{1}{2}m\lambda^a{}_b e_\mu{}^b\gamma_a\epsilon + \frac{1}{4}\lambda^{ab}\gamma_{ab}\left(\hat{D}_\mu\epsilon + \frac{1}{2}m\gamma_\mu\epsilon\right) \\
&= \hat{D}_\mu\left(\frac{1}{4}\lambda^{ab}\gamma_{ab}\epsilon\right) - \frac{1}{2}m\lambda^a{}_b e_\mu{}^b\gamma_a\epsilon + \frac{1}{8}m\lambda^{ab}e_\mu{}^c\gamma_{ab}\gamma_c\epsilon
\end{aligned}
\tag{3.93}
$$

スピン接続について 2 行目では (2.21) を用いた。ここでも、またガンマ行列について、

$$
e_\mu{}^c\gamma_{ab}\gamma_c = \gamma_{ab\mu} + e_{\mu b}\gamma_a - e_{\mu a}\gamma_b = \gamma_{\mu ab} + e_{\mu b}\gamma_a - e_{\mu a}\gamma_b = \gamma_\mu\gamma_{ab} + 2e_{\mu b}\gamma_a - 2e_{\mu a}\gamma_b \tag{3.94}
$$

と変形できるから、(3.93) へ代入すると、

$$
\begin{aligned}
&[\delta_L(\lambda),\delta_Q(\epsilon)]\psi_\mu \\
&= \hat{D}_\mu\left(\frac{1}{4}\lambda^{ab}\gamma_{ab}\epsilon\right) + \frac{1}{8}m\lambda^{ab}\gamma_\mu\gamma_{ab}\epsilon - \frac{1}{2}m\lambda^a{}_b e_\mu{}^b\gamma_a\epsilon + \frac{1}{4}m\lambda^a{}_b e_\mu{}^b\gamma_a\epsilon - \frac{1}{4}m\lambda_a{}^b e_\mu{}^a\gamma_b\epsilon \\
&= \hat{D}_\mu\left(\frac{1}{4}\lambda^{ab}\gamma_{ab}\epsilon\right) + \frac{1}{2}m\gamma_\mu\left(\frac{1}{4}\lambda^{ab}\gamma_{ab}\epsilon\right) = \delta_Q\left(\frac{1}{4}\lambda^{ab}\gamma_{ab}\epsilon\right)\psi_\mu
\end{aligned}
\tag{3.95}
$$

と求まる。したがって、$[\delta_L(\lambda),\delta_Q(\epsilon)] = \delta_Q(\frac{1}{4}\lambda^{ab}\gamma_{ab}\epsilon)$ が成立。

○ $[\delta_Q(\epsilon_1),\delta_Q(\epsilon_2)] = \delta_G(\xi) + \delta_L(\lambda) + \delta_Q(\epsilon)$ の証明

$$
\begin{aligned}
[\delta_Q(\epsilon_1),\delta_Q(\epsilon_2)]e_\mu{}^a &= \frac{1}{4}\bar{\epsilon}_2\gamma^a\left(\hat{D}_\mu\epsilon_1 + \frac{1}{2}m\gamma_\mu\epsilon_1\right) - (1\leftrightarrow 2) \\
&= \frac{1}{4}\bar{\epsilon}_2\gamma^a\hat{D}_\mu\epsilon_1 - \frac{1}{4}\bar{\epsilon}_1\gamma^a\hat{D}_\mu\epsilon_2 + \frac{1}{8}m(\bar{\epsilon}_2\gamma^a\gamma_\mu\epsilon_1 - \bar{\epsilon}_1\gamma^a\gamma_\mu\epsilon_2) \\
&= \frac{1}{4}\hat{D}_\mu(\bar{\epsilon}_2\gamma^a\epsilon_1) + \frac{1}{4}m\bar{\epsilon}_2\gamma^a{}_\mu\epsilon_1
\end{aligned}
\tag{3.96}
$$

2 番目から 3 番目の等号へは、双一次形式の対称性 (3.22) を用いた。ここで (3.11) で定義したパラメータ $\xi^\nu = \frac{1}{4}\bar{\epsilon}_2\gamma^\nu\epsilon_1$ を導入し、(3.5) の関係式を用いると、以下のように求まる。

$$
\begin{aligned}
&[\delta_Q(\epsilon_1),\delta_Q(\epsilon_2)]e_\mu{}^a \\
&= \hat{D}_\mu(\xi^\nu e_\nu{}^a) + \frac{1}{4}m\bar{\epsilon}_2\gamma^a{}_\mu\epsilon_1 \\
&= \partial_\mu\xi^\nu e_\nu{}^a + \xi^\nu\hat{D}_\nu e_\mu{}^a + \xi^\nu(\hat{D}_\mu e_\nu{}^a - \hat{D}_\nu e_\mu{}^a) + \frac{1}{4}m\bar{\epsilon}_2\gamma^a{}_\mu\epsilon_1 \\
&= \partial_\mu\xi^\nu e_\nu{}^a + \xi^\nu\partial_\nu e_\mu{}^a + \xi^\nu\hat{\omega}_\nu{}^a{}_b e_\mu{}^b - \frac{1}{4}\xi^\nu\bar{\psi}_\nu\gamma^a\psi_\mu + \frac{1}{4}me_\mu{}^b\bar{\epsilon}_2\gamma^a{}_b\epsilon_1 \\
&= \delta_G(\xi)e_\mu{}^a + \delta_Q(\underbrace{-\xi\cdot\psi}_{=\epsilon})e_\mu{}^a - \underbrace{\left(-\xi^\nu\hat{\omega}_\nu{}^a{}_b - \frac{1}{4}m\bar{\epsilon}_2\gamma^a{}_b\epsilon_1\right)e_\mu{}^b}_{=\delta_L(\lambda)e_\mu{}^a} \\
&= [\delta_G(\xi) + \delta_L(\lambda) + \delta_Q(\epsilon)]e_\mu{}^a
\end{aligned}
\tag{3.97}
$$

ここでの変換のパラメータは (3.11)、(3.77) で定義されたものである。

続いて ψ_μ について計算を行う。

$$
\begin{aligned}
[\delta_Q(\epsilon_1), \delta_Q(\epsilon_2)]\psi_\mu &= \delta_Q(\epsilon_1)\left(\hat{D}_\mu\epsilon_2 + \frac{1}{2}m\gamma_\mu\epsilon_2\right) - (1 \leftrightarrow 2) \\
&= \frac{1}{4}\delta_Q(\epsilon_1)\hat{\omega}_\mu{}^{ab}\gamma_{ab}\epsilon_2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{1}{4}\bar{\epsilon}_1\gamma^a\psi_\mu\right)\gamma_a\epsilon_2 - (1 \leftrightarrow 2)
\end{aligned}
\tag{3.98}
$$

ここで $\delta_Q(\epsilon_1)\hat{\omega}_\mu{}^{ab}$ について考えると、これは付録 B で求めた $m=0$ の部分 $\delta_Q(\epsilon_1)\hat{\omega}_\mu{}^{ab}|_{m=0}$ と (3.17) の ψ_μ の局所超変換による m の寄与とに分けられる。よって、(3.4) と (3.17) から、具体的には

$$
\begin{aligned}
\delta_Q(\epsilon_1)\hat{\omega}_\mu{}^{ab} &= \delta_Q(\epsilon_1)\hat{\omega}_\mu{}^{ab}|_{m=0} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}m(\bar{\psi}_a\gamma_\mu\gamma_b\epsilon_1 - \bar{\epsilon}_1\gamma_a\gamma_\mu\psi_b \\
&\quad + \bar{\psi}_\mu\gamma_a\gamma_b\epsilon_1 - \bar{\epsilon}_1\gamma_\mu\gamma_a\psi_b - \bar{\psi}_\mu\gamma_b\gamma_a\epsilon_1 + \bar{\epsilon}_1\gamma_\mu\gamma_b\psi_a) \\
&= \delta_Q(\epsilon_1)\hat{\omega}_\mu{}^{ab}|_{m=0} + \frac{1}{16}m[\bar{\psi}_a(\gamma_{\mu b} + e_{\mu b})\epsilon_1 - \bar{\epsilon}_1(\gamma_{a\mu} + e_{\mu a})\psi_b \\
&\quad + \bar{\psi}_\mu(\gamma_{ab} + \eta_{ab})\epsilon_1 - \bar{\epsilon}_1(\gamma_{\mu a} + e_{\mu a})\psi_b - \bar{\psi}_\mu(\gamma_{ba} + \eta_{ab})\epsilon_1 + \bar{\epsilon}_1(\gamma_{\mu b} + e_{\mu b})\psi_a] \\
&= \delta_Q(\epsilon_1)\hat{\omega}_\mu{}^{ab}|_{m=0} + \frac{1}{16}m(-2\bar{\epsilon}_1\gamma_{ab}\psi_\mu + 2e_{\mu b}\bar{\epsilon}_1\psi_a - 2e_{\mu a}\bar{\epsilon}_1\psi_b) \\
&= \delta_Q(\epsilon_1)\hat{\omega}_\mu{}^{ab}|_{m=0} - \frac{1}{8}m(\bar{\epsilon}_1\gamma_{ab}\psi_\mu + e_{\mu a}\bar{\epsilon}_1\psi_b - e_{\mu b}\bar{\epsilon}_1\psi_a)
\end{aligned}
\tag{3.99}
$$

と書けるので、(3.98) は

$$
\begin{aligned}
[\delta_Q(\epsilon_1), \delta_Q(\epsilon_2)]\psi_\mu = &\frac{1}{4}\delta_Q(\epsilon_1)\hat{\omega}_\mu{}^{ab}\gamma_{ab}\psi_\mu|_{m=0} \\
&- \frac{1}{32}m\gamma^{ab}\epsilon_2(\bar{\epsilon}_1\gamma_{ab}\psi_\mu - 2e_{\mu b}\bar{\epsilon}_1\psi_a) + \frac{1}{8}m\gamma_a\epsilon_2\bar{\epsilon}_1\gamma^a\psi_\mu - (1 \leftrightarrow 2)
\end{aligned}
\tag{3.100}
$$

と表せた。さらに 2 行目のそれぞれの項に対し Fierz 恒等式 (3.22) を用いて変形する。

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{32}m\gamma^{ab}\epsilon_2\bar{\epsilon}_1\gamma_{ab}\psi_\mu - (1 \leftrightarrow 2) \\
&= -\frac{1}{32}m\left(-\frac{1}{4}\right)\left[\bar{\epsilon}_1\gamma^c\epsilon_2\underbrace{\gamma^{ab}\gamma_c\gamma_{ab}}_{=0\ \because\ (3.68)}\psi_\mu - \frac{1}{2}\bar{\epsilon}_1\gamma^{cd}\epsilon_2\underbrace{\gamma^{ab}\gamma_{cd}\gamma_{ab}}_{=4\gamma_{cd}\ \because\ (3.68)}\psi_\mu\right]\times 2 \\
&= \frac{1}{32}m\bar{\epsilon}_2\gamma^{cd}\epsilon_1\gamma_{cd}\psi_\mu
\end{aligned}
\tag{3.101}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{16}m\gamma^{ab}\epsilon_2 e_{\mu b}\bar{\epsilon}_1\psi_a - (1 \leftrightarrow 2) \\
&= \frac{1}{16}m\left(-\frac{1}{4}\right)\left[\bar{\epsilon}_1\gamma^c\epsilon_2\gamma^a{}_\mu\gamma_c\psi_a - \frac{1}{2}\bar{\epsilon}_1\gamma^{cd}\epsilon_2\gamma^a{}_\mu\gamma_{cd}\psi_a\right]\times 2 \\
&= \frac{1}{32}m\left[\bar{\epsilon}_2\gamma^c\epsilon_1\gamma^a{}_\mu\gamma_c\psi_a - \frac{1}{2}\bar{\epsilon}_2\gamma^{cd}\epsilon_1\gamma^a{}_\mu\gamma_{cd}\psi_a\right]
\end{aligned}
\tag{3.102}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{8}m\gamma_a\epsilon_2\bar{\epsilon}_1\gamma^a\psi_\mu-(1\leftrightarrow 2)\\
&=\frac{1}{8}m\left(-\frac{1}{4}\right)\left[\bar{\epsilon}_1\gamma^c\epsilon_2\underbrace{\gamma_a\gamma_c\gamma^a}_{=-2\gamma_c\ \because\ (3.63)}\psi_\mu-\frac{1}{2}\bar{\epsilon}_1\gamma^{cd}\epsilon_2\underbrace{\gamma_a\gamma_{cd}\gamma^a}_{=0\ \because\ (3.63)}\psi_\mu\right]\times 2\\
&=-\frac{1}{8}m\bar{\epsilon}_2\gamma^c\epsilon_1\gamma_c\psi_\mu
\end{aligned}
\tag{3.103}
$$

よって、$[\delta_Q(\epsilon_1),\delta_Q(\epsilon_2)]\psi_\mu$ における m の寄与のみ取り出すと、(3.11) の ξ^c を用いて、

$$
\begin{aligned}
&[\delta_Q(\epsilon_1),\delta_Q(\epsilon_2)]\psi_\mu\ (m\text{ の項})\\
&=\frac{1}{8}m\xi^c(\gamma^a{}_\mu\gamma_c\psi_a-4\gamma_c\psi_\mu)+\frac{1}{32}m\bar{\epsilon}_2\gamma^{cd}\epsilon_1\left(\gamma_{cd}\psi_\mu-\frac{1}{2}\gamma^a{}_\mu\gamma_{cd}\psi_a\right)\\
&=\frac{1}{8}m\xi^c[(\gamma^a{}_{\mu c}+e_{\mu c}\gamma^a-\delta^a_c\gamma_\mu)\psi_a-4\gamma_c\psi_\mu]\\
&\quad+\frac{1}{32}m\bar{\epsilon}_2\gamma^{cd}\epsilon_1\left[\gamma_{cd}\psi_\mu-\frac{1}{2}(\gamma^a{}_{\mu cd}+2e_{\mu c}\gamma^a{}_d-2\delta^a_c\gamma_{\mu d}+2e_{\mu c}\delta^a_d)\psi_a\right]\\
&=\frac{1}{8}m\xi^c(\gamma^a{}_{\mu c}\psi_a+e_{\mu c}\gamma^a\psi_a-\gamma_\mu\psi_c-4\gamma_c\psi_\mu)\\
&\quad+\frac{1}{32}m\bar{\epsilon}_2\gamma^{cd}\epsilon_1\left(\gamma_{cd}\psi_\mu-\frac{1}{2}\gamma^a{}_{\mu cd}\psi_a-e_{\mu c}\gamma^a{}_d\psi_a+\gamma_{\mu d}\psi_c-e_{\mu c}\psi_d\right)
\end{aligned}
\tag{3.104}
$$

と表せる。

ここでまた、付録 B との類推から、この代数もオン・シェルでのみ閉じる代数であると考え、Rarita-Schwinger 方程式を用いて表すことを考える。この場合 (3.16) のラグランジアンから、場の方程式は

$$
\mathcal{R}^\mu=0,\qquad \mathcal{R}^\mu\equiv 2\gamma^{\mu\nu\rho}\hat{D}_\nu\psi_\rho-2m\gamma^{\mu\nu}\psi_\nu \tag{3.105}
$$

である。$m=0$ では、この交換関係は (B.30) 式と一致するので、m がある場合でも、同じ形に書けると予想し、(B.30) の R^μ の代わりに $\mathcal{R}^\mu$ を代入し、質量項の部分から出てくる m の寄与と、(3.104) の寄与を比べてみる。よって (B.30) から、

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{16}\xi^\nu(\gamma_\nu\mathcal{R}_\mu-2\gamma_{\nu\mu\rho}\mathcal{R}^\rho)\ (m\text{ の項})\\
&=-\frac{1}{16}\xi^\nu[\gamma_\nu(-2m)\gamma_{\mu\rho}\psi^\rho-2\gamma_{\nu\mu\rho}(-2m)\gamma^{\rho\sigma}\psi_\sigma]\\
&=\frac{1}{8}m\xi^\nu[(\gamma_{\nu\mu\rho}+g_{\mu\nu}\gamma_\rho-g_{\nu\rho}\gamma_\mu)\psi^\rho-2\gamma_{\nu\mu\rho}(\gamma^\rho\gamma^\sigma-g^{\rho\sigma})\psi_\sigma]\\
&=\frac{1}{8}m\xi^\nu(\gamma_{\nu\mu\rho}\psi^\rho+g_{\mu\nu}\gamma_\rho\psi^\rho-\gamma_\mu\psi_\nu-4\gamma_{\nu\mu}\gamma_\sigma\psi^\sigma+2\gamma_{\nu\mu}{}^\sigma\psi_\sigma)\\
&=\frac{1}{8}m\xi^\nu(3\gamma_{\nu\mu\rho}\psi^\rho+g_{\mu\nu}\gamma_\rho\psi^\rho-\gamma_\mu\psi_\nu-4(\gamma_{\nu\mu\sigma}+g_{\mu\sigma}\gamma_\nu-g_{\nu\sigma}\gamma_\mu)\psi^\sigma)\\
&=\frac{1}{8}m\xi^\nu(-\gamma_{\nu\mu\rho}\psi^\rho+g_{\mu\nu}\gamma_\rho\psi^\rho-4\gamma_\nu\psi_\mu+3\gamma_\mu\psi_\nu)
\end{aligned}
\tag{3.106}
$$

と求まる。同様にして

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{128}\bar{\epsilon}_2\gamma^{\rho\sigma}\epsilon_1(2\gamma_{\rho\sigma\mu\nu}\mathcal{R}^\nu-\gamma_{\rho\sigma}\mathcal{R}_\mu-4g_{\mu\rho}\mathcal{R}_\sigma)\ (m\ \text{の項})\\
&=\frac{1}{128}\bar{\epsilon}_2\gamma^{\rho\sigma}\epsilon_1[2\gamma_{\rho\sigma\mu\nu}(-2m)\gamma^{\nu\tau}\psi_\tau-\gamma_{\rho\sigma}(-2m)\gamma_{\mu\nu}\psi^\nu-4g_{\mu\rho}(-2m)\gamma_{\sigma\tau}\psi^\tau]\\
&=-\frac{1}{64}\bar{\epsilon}_2\gamma^{\rho\sigma}\epsilon_1[2\gamma_{\rho\sigma\mu\nu}(\gamma^\nu\gamma^\tau-g^{\nu\tau})\psi_\tau\\
&\qquad\qquad-(\gamma_{\rho\sigma\mu\nu}+2g_{\sigma\mu}\gamma_{\rho\nu}-2g_{\sigma\nu}\gamma_{\rho\mu}+2g_{\sigma\mu}g_{\rho\nu})\psi^\nu-4g_{\mu\rho}\gamma_{\sigma\tau}\psi^\tau]\\
&=-\frac{1}{64}\bar{\epsilon}_2\gamma^{\rho\sigma}\epsilon_1(2\gamma_{\rho\sigma\mu}\gamma_\tau\psi^\tau-3\gamma_{\rho\sigma\mu\nu}\psi^\nu-2g_{\sigma\mu}\gamma_{\rho\nu}\psi^\nu+2\gamma_{\rho\mu}\psi_\sigma-2g_{\sigma\mu}\psi_\rho-4g_{\mu\rho}\gamma_{\sigma\nu}\psi^\nu]\\
&=-\frac{1}{64}\bar{\epsilon}_2\gamma^{\rho\sigma}\epsilon_1[2(\gamma_{\rho\sigma\mu\tau}+g_{\mu\tau}\gamma_{\rho\sigma}-2g_{\sigma\tau}\gamma_{\rho\mu})\psi^\tau-3\gamma_{\rho\sigma\mu\nu}\psi^\nu+2\gamma_{\rho\mu}\psi_\sigma-2g_{\sigma\mu}\psi_\rho-2g_{\mu\rho}\gamma_{\sigma\nu}\psi^\nu]\\
&=-\frac{1}{64}\bar{\epsilon}_2\gamma^{\rho\sigma}\epsilon_1(-\gamma_{\rho\sigma\mu\nu}\psi^\nu+2\gamma_{\rho\sigma}\psi_\mu-2\gamma_{\rho\mu}\psi_\sigma-2g_{\sigma\mu}\psi_\rho-2g_{\mu\rho}\gamma_{\sigma\nu}\psi^\nu)
\end{aligned}
\tag{3.107}
$$

と書ける。今までの結果をまとめると、

$$
\begin{aligned}
&[\delta_Q(\epsilon_1),\delta_Q(\epsilon_2)]\psi_\mu\ (m\ \text{の項})\\
&=\frac{1}{8}m\xi^c(\underbrace{\gamma^a{}_{\mu c}\psi_a}_{ⓐ}\underbrace{+e_{\mu c}\gamma^a\psi_a}_{ⓑ}-\gamma_\mu\psi_c\underbrace{-4\gamma_c\psi_\mu}_{ⓒ})\\
&\quad+\frac{1}{32}m\bar{\epsilon}_2\gamma^{cd}\epsilon_1\left(\gamma_{cd}\psi_\mu\underbrace{-\frac{1}{2}\gamma^a{}_{\mu cd}\psi_a}_{ⓓ}\underbrace{-e_{\mu c}\gamma^a{}_d\psi_a}_{ⓔ}\underbrace{+\gamma_{\mu d}\psi_c}_{ⓕ}\underbrace{-e_{\mu c}\psi_d}_{ⓖ}\right)
\end{aligned}
\tag{3.108}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{16}\xi^\nu(\gamma_\nu\mathcal{R}_\mu-2\gamma_{\nu\mu\rho}\mathcal{R}^\rho)+\frac{1}{128}\bar{\epsilon}_2\gamma^{\rho\sigma}\epsilon_1(2\gamma_{\rho\sigma\mu\nu}\mathcal{R}^\nu-\gamma_{\rho\sigma}\mathcal{R}_\mu-4g_{\mu\rho}\mathcal{R}_\sigma)\ (m\ \text{の項})\\
&=\frac{1}{8}m\xi^\nu(\underbrace{-\gamma_{\nu\mu\rho}\psi^\rho}_{ⓐ}\underbrace{+g_{\mu\nu}\gamma_\rho\psi^\rho}_{ⓑ}\underbrace{-4\gamma_\nu\psi_\mu}_{ⓒ}+3\gamma_\mu\psi_\nu)\\
&\quad-\frac{1}{64}\bar{\epsilon}_2\gamma^{\rho\sigma}\epsilon_1(\underbrace{-\gamma_{\rho\sigma\mu\nu}\psi^\nu}_{ⓓ}+2\gamma_{\rho\sigma}\psi_\mu\underbrace{-2\gamma_{\rho\mu}\psi_\sigma}_{ⓕ}\underbrace{-2g_{\sigma\mu}\psi_\rho}_{ⓖ}\underbrace{-2g_{\mu\rho}\gamma_{\sigma\nu}\psi^\nu}_{ⓔ})
\end{aligned}
\tag{3.109}
$$

となるから、$[\delta_Q(\epsilon_1),\delta_Q(\epsilon_2)]\psi_\mu$ における m の ⓐ〜ⓖ の寄与は (B.30) の R^μ を $\mathcal{R}^\mu$ に置き換えると、$\mathcal{R}^\mu$ に吸収されることが分かる。残りの部分も、係数を合わせることで $\mathcal{R}^\mu$ に含ませることができ、そのとき余る項を示すと

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}m\xi^\nu\gamma_\mu\psi_\nu+\frac{1}{16}m\bar{\epsilon}_2\gamma^{ab}\epsilon_1\gamma_{ab}\psi_\mu\\
&=\underbrace{\frac{1}{2}m\gamma_\mu(-\xi\cdot\psi)}_{\delta_Q(\epsilon)\psi_\mu\text{に吸収}}\underbrace{-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}\bar{\epsilon}_2\gamma^{ab}\epsilon_1\right)\gamma_{ab}\psi_\mu}_{\delta_L(\lambda)\psi_\mu\text{に吸収}}
\end{aligned}
\tag{3.110}
$$

であり、第 1 項は (3.17) の m の付加項として、第 2 項は (3.77) の変更された λ_{ab} へ局所変換に含めることができる。

したがって、最終的な表式としては (B.30) と同じになり、

$$
\begin{aligned}
[\delta_Q(\epsilon_1),\delta_Q(\epsilon_2)]\psi_\mu = [\delta_G(\xi)+\delta_L(\lambda)+\delta_Q(\epsilon)]\psi_\mu &- \frac{1}{16}\xi^\nu(\gamma_\nu\mathcal{R}_\mu + 2\gamma_{\mu\nu\rho}\mathcal{R}^\rho) \\
&+ \frac{1}{128}\bar{\epsilon_2}\gamma^{\rho\sigma}\epsilon_1(2\gamma_{\rho\sigma\mu\nu}\mathcal{R}^\nu - \gamma_{\rho\sigma}\mathcal{R}_\mu - 4g_{\mu\rho}\mathcal{R}_\sigma)
\end{aligned}
\tag{3.111}
$$

である。ただし場の方程式は $\mathcal{R}^\mu = 0$ である。こちらの代数もオン・シェルでのみ閉じるものになる。

したがって、$[\delta_Q(\epsilon_1),\delta_Q(\epsilon_2)] = \delta_G(\xi)+\delta_L(\lambda)+\delta_Q(\epsilon)$ が成立。

上の議論から、宇宙項を導入しても、3 つの局所変換に対して不変かつ代数が閉じるような理論が構成されていることが確かめられた。ただ Poincaré 超重力理論の場合と異なるのは、質量項の導入により、大域的カイラル $U(1)$ 対称性が失われたことである。これは (3.15) の計算から分かるように、(3.16) の質量項の双一次形式に含まれるガンマ行列は $\gamma^{\mu\nu}$ であり、$\gamma^{\mu\nu}\gamma_5 = \gamma_5\gamma^{\mu\nu}$ であるため $\delta\bar{\psi}_\mu$ と $\delta\psi_\mu$ の寄与が相殺しなくなるためである。

3.2.3 反 de Sitter 時空解

さて、ラグランジアン (3.16) から導かれる場の方程式を考えると、

$$
R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + 3m^2 g_{\mu\nu} = \frac{1}{2}T_{\mu\nu} \qquad \gamma^{\mu\nu\rho}\hat{D}_\nu\psi_\rho - m\gamma^{\mu\nu}\psi_\nu = 0 \tag{3.112}
$$

となる。ここでフェルミオン部分をまとめて $T_{\mu\nu}$ と表している。Rarita-Schwinger 場に対する方程式は $\psi_\mu = 0$ を解に持つ。このとき重力場の方程式としては、(2.7) で $D = 4$ としたものに等しく

$$
R_{\mu\nu} = -3m^2 g_{\mu\nu} \tag{3.113}
$$

と求まる。Minkowski 時空 $e_\mu = \delta^a_\mu$ は、$R_{\mu\nu} = 0$ となってしまうので、この方程式の解ではない。この方程式の解のうち、Minkowski 時空と同じように高い対称性を持つ解は、反 de Sitter 時空 (anti de Sitter spacetime, AdS 時空)*4である。反 de Sitter 時空における Riemann テンソルは、(3.113) の表式に付録 (C.11) を対応させると、$m = a$ であるので、(C.5) から、

$$
R_{\mu\nu\rho\sigma} = -m^2(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}) \tag{3.114}
$$

のように計量を用いて表すことができる。この理論のように、反 de Sitter 時空を場の方程式の解としてもつ超重力理論を AdS 超重力理論とよぶ。

反 de Sitter 時空はアイソメトリとして高い対称性を持つ。Minkowski 時空が 1.3 節で議論した Poincaré 対称性をもつように、反 de Sitter 時空は付録 (C.2) の双局面の定義から、$D = 4$ においては、$SO(2,3)$ 対称性をもっていることがわかる。これは、3 次元空間中に埋め込まれた半径 a の 2 次元球面は中心を原点にとると $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ と表され、対称性として球対称、すなわち $SO(3)$ 対称性をもっていることと似ている。また Poincaré 群の生成子の個数は、並進 4 個と Lorentz 変換 6 個の合わせて 10 個である。$SO(2,3)$ も同様 10 個の生成子をもっている。一般に、D 次元空間 (時空) が持ちうる対称性の生成子の最大の個数は、$\frac{1}{2}D(D+1)$ である。それは、D 次元空間中における D 個の並進対称性、2 つの軸により張られる平面内での ${}_D\mathrm{C}_2 = \frac{1}{2}D(D-1)$ 個の回転対称性からなり、

*4 反 de Sitter 時空の定義は、付録 C を参照

$$\underbrace{D}_{\text{並進対称性}} + \underbrace{\frac{1}{2}D(D-1)}_{\text{回転対称性}} = \frac{1}{2}D(D+1) \tag{3.115}$$

として求まる。このような、対称性の生成子として最大の数を持っている空間を極大対称空間とよぶ。Minkowski 時空と反 de Sitter 時空は、極大対称空間である。極大対称空間の特徴は、(3.114) のように Riemann テンソルが計量を用いて表されることである。これは、極大対称空間においては、その時空内の任意の点は特別な点でない、すなわち任意の点からまわりを眺めても、全て同じように見える、(時間を含めた) 一様等方性が成立するため、世界添字 4 つを持つ Riemann テンソルは、一般座標変換に対して不変な量から構成されている必要がある。それには $g_{\mu\nu}$、δ^μ_ν、$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ などが存在するが、そのうち Riemann テンソルの対称性

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\nu\mu\rho\sigma} = -R_{\mu\nu\sigma\rho} = R_{\rho\sigma\mu\nu} \qquad R_{\mu[\nu\rho\sigma]} = 0 \tag{3.116}$$

を満たすのは、

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} \propto g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho} \tag{3.117}$$

であるからである。

また、反 de Sitter 時空解は、大域的超対称性を持っている。2.1 節でも議論したように、場の方程式の解が超対称性を持つためには、その解に対して超変換 (3.17) の右辺がゼロになる必要がある。$\psi_\mu = 0$ の場合は ${e_\mu}^a$ の超変換は自動的にゼロとなる。ψ_μ の超変換がゼロになることから、

$$\left(D_\mu + \frac{1}{2}m\gamma_\mu\right)\epsilon = 0 \tag{3.118}$$

$\psi_\mu = 0$ ゆえ $\hat{D}_\mu = D_\mu$ である。これは、超変換のパラメータ ϵ に対する微分方程式であり、その解は Killing スピノールと呼ばれる。Killing スピノールが存在すれば、解は超対称性を持っている。(3.118) は $\mu = 0,1,2,3$ の 4 つの方程式からなり、これらが矛盾なく解を持つためには、積分可能条件

$$\begin{aligned} 0 &= \left[D_\mu + \frac{1}{2}m\gamma_\mu, D_\nu + \frac{1}{2}m\gamma_\nu\right]\epsilon \\ &= [D_\mu, D_\nu]\epsilon + \frac{1}{2}m(D_\mu\gamma_\nu)\epsilon - \frac{1}{2}m(D_\nu\gamma_\mu)\epsilon + \frac{1}{4}m^2[\gamma_\mu,\gamma_\nu]\epsilon \\ &= \frac{1}{4}({R_{\mu\nu}}^{ab} + 2m^2{e_\mu}^a{e_\nu}^b)\gamma_{ab}\epsilon \end{aligned} \tag{3.119}$$

が成り立つことが必要である。2 番目の等号では、(3.47)、(2.28)、$[\gamma_\mu,\gamma_\nu] = 2\gamma_{\mu\nu} = 2{e_\mu}^a{e_\nu}^b\gamma_{ab}$ を用いた。反 de Sitter 時空の場合は、最後の式に (3.114) を代入するとゼロとなるので、確かに積分可能条件が成立している。このように、反 de Sitter 時空解は、ある定まった関数の下で解を不変に保つという意味で、大域的な超対称性ををもつことが確かめられた。

4　結論

重力場とフェルミオン場の結合の定式化に多脚場を導入することによって、平らな時空のフェルミオン場の理論を曲がった時空へと拡張することができた。また超 Poincaré 代数には、質量ゼロの超多重項の 1 つとしてヘリシティ 2 とヘリシティ 3/2 の超重力多重項が含まれることが分かった。そしてその事実をもって、局所超変換・一般座標変換不変性を持つ理論のゲージ場としてボソン場の重力場とフェルミオン場の Rarita-Schwinger 場を導入して、Poincaré 超重力理論を構成できるようになることをみた。

Poincaré 超重力理論は背景場として Minkowski 時空を解として持ち、定数スピノルによる超変換では、その解の形は不変に保たれることをみた。また Poincaré 超重力理論のラグランジアンに宇宙項を加えることで、背景場の解として AdS 時空を持つような理論を構成できることを確かめた。それに伴い超変換の形は変更を受けたが、ラグランジアンに Rarita-Schwinger 場の質量項を加えることで、そのラグランジアンから構成される作用は、種々の局所変換に対し不変に保たれ、局所変換の交換関係がオン・シェルで閉じた代数をなすことが具体的に確かめられた。この AdS 時空の場合でも、超変換に対し方程式の解の形を不変に保つ変換は存在し、大域的超対称性を持つことが分かった。

付録 A　Einstein 方程式の導出

重力場 $g_{\mu\nu}$ についてののラグランジアンは (2.1) で与えられる。($16\pi G = 1$ とする。)

$$\mathcal{L}_E = \sqrt{-g}(R - 2\Lambda) \tag{付録 A.1}$$

このときの作用 S_E は、空間の次元を D 次元とすると

$$S_E = \int d^D x \sqrt{-g}(R - 2\Lambda) \tag{付録 A.2}$$

と表せる。これを $g^{\mu\nu}$ について変分を取ることを考えると、以下を得る。

$$\delta S_E = \int d^D x \{\sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \delta\sqrt{-g}(R - 2\Lambda) + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}\} \tag{付録 A.3}$$

ここで (A.3) 括弧内第 2 項について、$\delta\sqrt{-g}$ は、以下のように変形できる。

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}(-g)^{-\frac{1}{2}}\delta g \tag{付録 A.4}$$

さらに δg は計量の余因子行列 $\tilde{g}^{\mu\nu}$ を用いて、

$$\begin{aligned} \delta g &= \det(g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}) - \det(g_{\mu\nu}) \\ &= \tilde{g}^{\mu\nu}(g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}) - \tilde{g}^{\mu\nu}(g_{\mu\nu}) = \tilde{g}^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{付録 A.5}$$

と表せ、さらに $g_{\mu\nu}$ の逆行列 $g^{\mu\nu}$ について、

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{g}\tilde{g}^{\nu\mu} = \frac{1}{g}\tilde{g}^{\mu\nu} \text{ よって } \tilde{g}^{\mu\nu} = g g^{\mu\nu} \tag{付録 A.6}$$

が求まるので、

$$\begin{aligned} &0 = \delta(\delta^{\mu}_{\mu}) = \delta(g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}) = \delta g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \\ &\Rightarrow g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \end{aligned} \tag{付録 A.7}$$

と (A.5)、(A.6) を用いると、(A.4) 式は、

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g} g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{付録 A.8}$$

と変形できる。

続いて (A.3) 括弧内第 3 項の変分について考える。$R_{\mu\nu}$ をあらわに書くと、

$$R_{\mu\nu} = \partial_\rho \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\rho} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\rho\sigma} - \Gamma^\sigma_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\nu\sigma} \tag{付録 A.9}$$

と表される。$R_{\mu\nu}$ は Christoffel 記号を通じて $g_{\mu\nu}$ に依存している。この両辺で変分を取ると、

$$
\begin{aligned}
\delta R_{\mu\nu} &= \partial_\rho \delta\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \partial_\nu \delta\Gamma^\rho_{\mu\rho} + \delta\Gamma^\sigma_{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\rho\sigma} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\delta\Gamma^\rho_{\rho\sigma} - \delta\Gamma^\sigma_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \Gamma^\sigma_{\mu\rho}\delta\Gamma^\rho_{\nu\sigma} \\
&= \left\{\partial_\rho \delta\Gamma^\rho_{\mu\nu} + \Gamma^\rho_{\rho\sigma}\delta\Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\nu\sigma}\delta\Gamma^\sigma_{\mu\rho} - \Gamma^\sigma_{\rho\mu}\delta\Gamma^\rho_{\sigma\nu}\right\} \\
&\quad - \left\{\partial_\nu \delta\Gamma^\rho_{\mu\rho} + \Gamma^\sigma_{\mu\rho}\delta\Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \Gamma^\sigma_{\nu\mu}\delta\Gamma^\rho_{\sigma\rho} - \Gamma^\sigma_{\nu\rho}\delta\Gamma^\rho_{\mu\sigma}\right\} \\
&= D_\rho(\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu}) - D_\nu(\delta\Gamma^\rho_{\mu\rho})
\end{aligned}
\tag{付録 A.10}
$$

となり、$\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ がテンソルとしてふるまっているかのような項が現れる。$\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ の座標変換に対する変換式を書くと、x' 系の添え字にはプライム ($'$) を付けるとして、

$$
\Gamma^{\lambda'}_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda}\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\mu}\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\nu'}}
\tag{付録 A.11}
$$

であるので、$\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ はテンソルではない。しかしこの式に計量について変分をとった式を書くと、以下のようになる。

$$
\delta\Gamma^{\lambda'}_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda}\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \delta\cancelto{0}{\left\{\frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\mu}\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\nu'}}\right\}}
\tag{付録 A.12}
$$

右辺第 2 項は δ が計量についての変分であるのでゼロとなる。したがって $\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ は 3 階のテンソルとしてふるまうことが分かる。したがって (A.10) の両辺に $g^{\mu\nu}$ を作用させると、

$$
\begin{aligned}
g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= D_\rho(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu}) - D_\nu(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\rho_{\mu\rho}) \\
&= D_\rho(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu} - g^{\mu\rho}\delta\Gamma^\sigma_{\mu\sigma}) \\
&= D_\rho A^\rho \\
A^\rho &\equiv g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu} - g^{\mu\rho}\delta\Gamma^\sigma_{\mu\sigma}
\end{aligned}
\tag{付録 A.13}
$$

と反変ベクトルの共変微分で表せることが分かる。1 行目の等号では計量条件 (2.3) を用いた。ここで後のために (2.4) で $\lambda = \nu$ とした式を以下のように変形させる。

$$
\begin{aligned}
\Gamma^\nu_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}g^{\nu\rho}(\partial_\mu g_{\nu\rho} - \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \\
&= \frac{1}{2g}\partial_\mu g + \cancel{\frac{1}{2g}g^{\nu\rho}g_{\mu\rho}\partial_\nu g} - \cancel{\frac{1}{2g}g^{\nu\rho}g_{\mu\nu}\partial_\rho g} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{-g}\partial_\mu(-g) = \frac{1}{2}\partial_\mu(\ln(-g)) = \partial_\mu(\ln\sqrt{-g})
\end{aligned}
\tag{付録 A.14}
$$

ここで等号 1 行目から 2 行目では (A.5)、(A.6) から導かれる式 $\partial_\lambda g = g g^{\mu\nu}\partial_\lambda g_{\mu\nu},\ \to\ \partial_\lambda g_{\mu\nu} = (1/g)g_{\mu\nu}\partial_\lambda g$ を用いた。したがって (A.13) は、

$$
\begin{aligned}
D_\rho A^\rho &= \partial_\rho A^\rho + \Gamma^\rho_{\sigma\rho} = \partial_\rho A^\rho + \partial_\rho(\ln\sqrt{-g})A^\rho = \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}\partial_\rho A^\rho + \sqrt{-g}\partial_\rho(\ln\sqrt{-g})A^\rho) \\
&= \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}\partial_\rho A^\rho + \partial_\rho(\sqrt{-g})A^\rho) = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\rho(\sqrt{-g}A^\rho)
\end{aligned}
\tag{付録 A.15}
$$

と変形される。(A.3) より、右辺の第 3 項は全微分項になることがわかり、ガウスの定理を適用できる。

$$\int d^Dx\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \int d^Dx\partial_\rho(\sqrt{-g}A^\rho) = \int(\sqrt{-g}A^\rho)dS_\rho \to 0 \tag{付録 A.16}$$

ここで無限遠での面積分は $\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0$ より 0 となる。したがって $R_{\mu\nu}$ の変分は方程式には寄与しないことが分かる。

今までの結果をまとめると、(A.3) は、

$$\delta S_E = \int d^Dx\sqrt{-g}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu})\delta g^{\mu\nu} \tag{付録 A.17}$$

と表せる。物質のラグランジアンについても同様に行う。物質のラグランジアン $\mathcal{L}_m$ に対する作用 S_m は、

$$S_m = \int d^Dx\sqrt{-g}\mathcal{L}_m \tag{付録 A.18}$$

で与えられ、これに対して計量について変分を取ると、以下のように変形できる。

$$\delta S_m = \int d^Dx\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m) = -\frac{1}{2}\int d^Dx\sqrt{-g}\underbrace{\left(\frac{-2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}}\right)}_{\equiv T_{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\int d^Dx\sqrt{-g}T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{付録 A.19}$$

したがって全ラグランジアン $\mathcal{L} = \mathcal{L}_E + \mathcal{L}_m$ に対し変分原理を適用すると、Einstein 方程式 (2.6) が得られる。

また、(2.6) で真空の場合は、(2.6) で $T_{\mu\nu} = 0$ として両辺に $g^{\mu\nu}$ を作用させると、

$$R - \frac{D}{2}R + D\Lambda = 0 \ \Rightarrow R = \frac{2D}{D-2}\Lambda \tag{付録 A.20}$$

と変形できるので、この R を元の方程式に代入すると、(2.7) を得る。

付録 B　Rarita-Schwinger 場 ψ_μ に対する局所超変換の交換関係 ($m = 0$)

付録 B では、AdS 超重力理論における Rarita-Schwinger 場 ψ_μ に対する局所超変換の交換関係の証明の下準備として、先に Poincaré 超重力理論 ($m = 0$) の場合について示しておく。

(3.9) から、Rarita-Schwinger 場 ψ_μ に対しては、

$$
\begin{aligned}
[\delta_Q(\epsilon_1), \delta_Q(\epsilon_2)]\psi_\mu &= \delta_Q(\epsilon_1)\left(\partial_\mu + \frac{1}{4}\hat{\omega}_{\mu ab}\gamma^{ab}\right)\epsilon_2 - (1 \leftrightarrow 2) \\
&= \frac{1}{4}\delta_Q(\epsilon_1)\hat{\omega}_{\mu ab}\gamma^{ab}\epsilon_2 - (1 \leftrightarrow 2)
\end{aligned}
\tag{付録 B.1}
$$

のように、スピン接続 $\hat{\omega}_{\mu ab}$ の超変換に帰着する。そこで $\delta_Q(\epsilon_1)\hat{\omega}_{\mu ab}$ について考える。(3.5) の式は、具体的に多脚場の共変微分を書き下すと、

$$
\frac{1}{4}\bar{\psi}_\mu\gamma^a\psi_\nu = \partial_\mu e_\nu{}^a + \hat{\omega}_\mu{}^a{}_b e_\nu{}^b - (\mu \leftrightarrow \nu)
\tag{付録 B.2}
$$

と表せる。この両辺を超変換すると、

$$
\delta_Q(\epsilon_1)(\text{左辺}) = \frac{1}{4}\hat{D}_\mu\bar{\epsilon_1}\gamma^a\psi_\nu + \frac{1}{4}\bar{\psi}_\mu\gamma^a\hat{D}_\nu\epsilon_1
\tag{付録 B.3}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta_Q(\epsilon_1)(\text{右辺}) &= \partial_\mu\delta_Q(\epsilon_1)e_\nu{}^a + \hat{\omega}_\mu{}^a{}_b\delta_Q(\epsilon_1)e_\nu{}^b + \delta_Q(\epsilon_1)\hat{\omega}_\mu{}^a{}_b e_\nu{}^b - (\mu \leftrightarrow \nu) \\
&= \hat{D}_\mu\delta_Q(\epsilon_1)e_\nu{}^a - \hat{D}_\nu\delta_Q(\epsilon_1)e_\mu{}^a + \delta_Q(\epsilon_1)\hat{\omega}_\mu{}^a{}_b e_\nu{}^b - \delta_Q(\epsilon_1)\hat{\omega}_\nu{}^a{}_b e_\mu{}^b \\
&= \hat{D}_\mu\left(\frac{1}{4}\bar{\epsilon_1}\gamma^a\psi_\nu\right) - \hat{D}_\nu\left(\frac{1}{4}\bar{\epsilon_1}\gamma^a\psi_\mu\right) + \delta_Q(\epsilon_1)\hat{\omega}_\mu{}^a{}_b e_\nu{}^b - \delta_Q(\epsilon_1)\hat{\omega}_\nu{}^a{}_b e_\mu{}^b
\end{aligned}
\tag{付録 B.4}
$$

と変形でき、双一次形式の対称性 (3.22) から、両辺で $\hat{D}\bar{\epsilon}$ の項は相殺される。ここで $\tilde{\omega}_{\mu a\nu} \equiv \delta_Q(\epsilon_1)\hat{\omega}_{\mu ab}e_\nu{}^b = -\tilde{\omega}_{\mu\nu a}$、$\psi_{\mu\nu} \equiv \hat{D}_\mu\psi_\nu - \hat{D}_\nu\psi_\mu$ と定義すると、(B.3)、(B.4) から、

$$
\tilde{\omega}_{\mu a\nu} - \tilde{\omega}_{\nu a\mu} = -\frac{1}{4}\bar{\epsilon_1}\gamma_a\psi_{\mu\nu}
\tag{付録 B.5}
$$

と表され、また添字をサイクリックに回した式

$$
\tilde{\omega}_{a\nu\mu} - \tilde{\omega}_{\mu\nu a} = -\frac{1}{4}\bar{\epsilon_1}\gamma_\nu\psi_{a\mu}
\tag{付録 B.6}
$$

$$
\tilde{\omega}_{\nu\mu a} - \tilde{\omega}_{a\mu\nu} = -\frac{1}{4}\bar{\epsilon_1}\gamma_\mu\psi_{\nu a}
\tag{付録 B.7}
$$

を用意し、(B.5) + (B.6) − (B.7) 式を計算すると、

$$
2\tilde{\omega}_{\mu a\nu} = -\frac{1}{4}(\bar{\epsilon_1}\gamma_a\psi_{\mu\nu} + \bar{\epsilon_1}\gamma_\nu\psi_{a\mu} - \bar{\epsilon_1}\gamma_\mu\psi_{\nu a})
\tag{付録 B.8}
$$

であるから、$\delta_Q(\epsilon_1)\hat{\omega}_{\mu ab}$ は、

$$\begin{aligned}\delta_Q(\epsilon_1)\hat{\omega}_{\mu ab} &= e_b{}^{\nu}\tilde{\omega}_{\mu a\nu} = -\frac{1}{8}(\bar{\epsilon_1}\gamma_a\psi_{\mu b} + \bar{\epsilon_1}\gamma_b\psi_{a\mu} - \bar{\epsilon_1}\gamma_\mu\psi_{ba}) \\ &= -\frac{1}{8}(\bar{\epsilon_1}\gamma_\mu\psi_{ab} - \bar{\epsilon_1}\gamma_a\psi_{b\mu} + \bar{\epsilon_1}\gamma_b\psi_{a\mu})\end{aligned} \tag{付録 B.9}$$

と求まった。したがってこれを (B.1) に代入すればよい。

$$[\delta_Q(\epsilon_1), \delta_Q(\epsilon_2)]\psi_\mu = \frac{1}{4}\gamma^{ab}\epsilon_2\left(-\frac{1}{8}\right)(\bar{\epsilon_1}\gamma_\mu\psi_{ab} - \bar{\epsilon_1}\gamma_a\psi_{b\mu} + \bar{\epsilon_1}\gamma_b\psi_{a\mu}) - (1 \leftrightarrow 2) \tag{付録 B.10}$$

右辺に対し Fierz 恒等式 (3.21) を用いると、$(1 \leftrightarrow 2)$ の反対称化により、双一次形式の対称性 (3.22) を用いることができ、その結果は、

$$\begin{aligned}[\delta_Q(\epsilon_1), \delta_Q(\epsilon_2)]\psi_\mu = -\frac{1}{32}\left(-\frac{1}{4}\right)&\Big[\bar{\epsilon_1}\gamma^c\epsilon_2\gamma^{ab}\gamma_c(\gamma_\mu\psi_{ab} - \gamma_a\psi_{b\mu} + \gamma_b\psi_{a\mu}) \\ &-\frac{1}{2}\bar{\epsilon_1}\gamma^{cd}\epsilon_2\gamma^{ab}\gamma_{cd}(\gamma_\mu\psi_{ab} - \gamma_a\psi_{b\mu} + \gamma_b\psi_{a\mu})\Big] \underbrace{\times 2}_{\text{反対称化による因子}}\end{aligned} \tag{付録 B.11}$$

となる。$\bar{\epsilon_1}\gamma^c\epsilon_2$ の項からまず計算する。ここでガンマ行列について、

$$\begin{aligned}\gamma^{ab}\gamma_c\gamma_\mu &= (\gamma^{ab}{}_c + \delta^b_c\gamma^a - \delta^a_c\gamma^b)\gamma_\mu \\ &= \gamma^{ab}{}_{c\mu} + e_{\mu c}\gamma^{ab} - 2e_\mu{}^b\gamma^a{}_c + 2\delta^b_c\gamma^a{}_\mu + 2\delta^b_c e_\mu{}^a \\ \gamma^{ab}\gamma_c\gamma_a &= (\gamma^{ab}{}_c + \delta^b_c\gamma^a - \delta^a_c\gamma^b)\gamma_a = 2\gamma^b{}_c + 4\delta^b_c - \delta^a_c\gamma^b{}_a - \delta^b_c \\ &= \gamma^b{}_c + 3\delta^b_c\end{aligned} \tag{付録 B.12}$$

と変形できる。ここで $\gamma^{ab}\gamma_c\gamma_\mu$ の変形において添字 a, b については ψ_{ab} で和がとられているため、a, b について反対称部分は 2 倍され (例: $\delta^b_c\gamma^a - \delta^a_c\gamma^b = 2\delta^b_c\gamma^a$)、対称部分は消えることを用いている。この後の計算でもこのような添字に対しては同様に扱うこととする。したがって $\bar{\epsilon_1}\gamma^c\epsilon_2$ の項は、

$$\begin{aligned}&(\bar{\epsilon_1}\gamma^c\epsilon_2\text{の項}) \\ &= -\frac{1}{64}\bar{\epsilon_2}\gamma^c\epsilon_1\left[(\gamma^{ab}{}_{c\mu} + e_{\mu c}\gamma^{ab} - 2e_\mu{}^b\gamma^a{}_c + 2\delta^b_c\gamma^a{}_\mu + 2\delta^b_c e_\mu{}^a)\psi_{ab} - 2(\gamma^b{}_c + 3\delta^b_c)\psi_{b\mu}\right] \\ &= -\frac{1}{64}\bar{\epsilon_2}\gamma^c\epsilon_1\left[\gamma_{c\mu}{}^{ab}\psi_{ab} + e_{\mu c}\gamma^{ab}\psi_{ab} - 4\gamma^a{}_c\psi_{a\mu} + 2\gamma^a{}_\mu\psi_{ac} + 8\psi_{\mu c}\right]\end{aligned} \tag{付録 B.13}$$

と表される。ここまで項が煩雑になると、この代数は場の方程式を使わず (オフ・シェル) には閉じそうにない。よって、ラグランジアン (3.1) に対し ψ_μ について変分して得られる場の方程式を $R^\nu \equiv \gamma^{\nu\rho\sigma}\psi_{\rho\sigma} = 0$ と表し、この代数がオン・シェルで閉じるかどうか確かめる (オン・シェルの場合 $R^\nu = 0$)。そのためには、スピノル ψ_{ab} の項を R^ν を用いて表さなければならない。そこでスピノルの双一次形式を思い出すと、任意の 4×4 の行列はガンマ行列の反対称積を基底に展開できるのであった。よって ψ_{ab} の項を R^ν の線形結合で表すため、R^ν にガンマ行列の反対称積を掛けた以下の量を計算する。このとき、μ 以外は全て縮約されているため、反対称積の浮いている添字は反対称化された添字で和がとられているとしても一般性を失わない。したがってそれらの添字に対しては前述のように扱う。

$$\gamma_\nu R^\nu = \gamma_\nu \gamma^{\nu\rho\sigma}\psi_{\rho\sigma} = 2\gamma^{\rho\sigma}\psi_{\rho\sigma} \tag{付録 B.14}$$

$$\gamma^\mu R^\nu = (\gamma^{\mu\nu\rho\sigma} + g^{\mu\nu}\gamma^{\rho\sigma} + 2g^{\mu\sigma}\gamma^{\nu\rho})\psi_{\rho\sigma} \tag{付録 B.15}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{\mu\nu}R^\nu &= (\gamma_\mu\gamma_\nu - g_{\mu\nu})R^\nu = 2\gamma_\mu\gamma^{\rho\sigma}\psi_{\rho\sigma} - R_\mu = 2({\gamma_\mu}^{\rho\sigma} + 2\delta^\rho_\mu\gamma^\sigma)\psi_{\rho\sigma} - R_\mu \\ &= 4\gamma^\sigma\psi_{\mu\sigma} + R_\mu\end{aligned} \tag{付録 B.16}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{\alpha\beta\nu}R^\nu &= \gamma_{\alpha\beta\nu}(\gamma^\nu\gamma^{\rho\sigma} - 2g^{\nu\rho}\gamma^\sigma)\psi_{\rho\sigma} \\ &= \left[(\gamma_{\alpha\beta}\gamma_\nu - 2g_{\beta\nu}\gamma_\alpha)\gamma^\nu\gamma^{\rho\sigma} - 2(\gamma_{\alpha\beta}\gamma_\nu - 2g_{\beta\nu}\gamma_\alpha)g^{\nu\rho}\gamma^\sigma\right]\psi_{\rho\sigma} \\ &= (4\gamma_{\alpha\beta}\gamma^{\rho\sigma} - 2\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma^{\rho\sigma} - 2\gamma_{\alpha\beta}\gamma^\rho\gamma^\sigma + 4\delta^\rho_\beta\gamma_\alpha\gamma^\sigma)\psi_{\rho\sigma} \\ &= -4\psi_{\alpha\beta} + 4{\gamma_\alpha}^\sigma\psi_{\beta\sigma}\end{aligned} \tag{付録 B.17}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{\alpha\beta\gamma\nu}R^\nu &= (\gamma_\alpha\gamma_{\beta\gamma\nu} - g_{\alpha\nu}\gamma_{\beta\gamma})R^\nu \\ &= \gamma_\alpha \underbrace{(-4\psi_{\beta\gamma} + 4{\gamma_\beta}^\sigma\psi_{\gamma\sigma})}_{\text{(B.17)}} - \gamma_{\beta\gamma}{\gamma_\alpha}^{\rho\sigma}\psi_{\rho\sigma} \\ &= -4\gamma_\alpha\psi_{\beta\gamma} + 4({\gamma_{\alpha\beta}}^\sigma - \delta^\sigma_\alpha\gamma_\beta)\gamma_{\gamma\sigma} - \gamma_{\beta\gamma}(\gamma_\alpha\gamma^{\rho\sigma} + 2\delta^\sigma_\alpha\gamma^\rho)\psi_{\rho\sigma} \\ &= -4\gamma_\alpha\psi_{\beta\gamma} + 4{\gamma_{\alpha\beta}}^\sigma\gamma_{\gamma\sigma} - 4\gamma_\beta\gamma_{\gamma\alpha} - \frac{1}{2}\gamma_{\beta\gamma\alpha}\underbrace{\gamma_\nu R^\nu}_{\text{(B.14)}} - 2({\gamma_{\beta\gamma}}^\rho + 2\delta^\rho_\gamma\gamma_\beta)\psi_{\rho\alpha} \\ &= -12\gamma_\alpha\psi_{\beta\gamma} + 6{\gamma_{\alpha\beta}}^\sigma\gamma_{\gamma\sigma} - \frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta\gamma}\gamma_\nu R^\nu\end{aligned} \tag{付録 B.18}$$

これらを用いて、(B.13) を書き直していく。まず、(B.15) から (B.13) 括弧内第 1 項について

$$\gamma_{c\mu}{}^{ab}\psi_{ab} = \gamma_c R_\mu - e_{\mu c}\gamma^{\rho\sigma}\psi_{\rho\sigma} - 2{e_c}^\sigma{\gamma_\mu}^\rho\psi_{\rho\sigma} \tag{付録 B.19}$$

である。さらに (3.11) で定義したパラメータ ξ^c を用いると、

$$\begin{aligned}&(\bar{\epsilon_1}\gamma^c\epsilon_2\text{の項}) \\ &= -\frac{1}{16}\xi^c[\gamma_c R_\mu - 2{e_c}^\sigma{\gamma_\mu}^\rho\psi_{\rho\sigma} - 4{\gamma^a}_c\psi_{a\mu} + 2{\gamma^a}_\mu\psi_{ac} + 8\psi_{\mu c}] \\ &= -\frac{1}{16}\xi^c[\gamma_c R_\mu - 4{\gamma^a}_c\psi_{a\mu} + 4{\gamma^a}_\mu\psi_{ac} + 8\psi_{\mu c}]\end{aligned} \tag{付録 B.20}$$

と表せる。また (B.20) 括弧内第 2、3 項について、(B.17) から、

$$-4{\gamma^a}_c\psi_{a\mu} + 4{\gamma^a}_\mu\psi_{ac} = -4{\gamma_c}^a\psi_{\mu a} + 4{\gamma_\mu}^a\psi_{ca} = 2(\gamma_{\mu c\nu}R^\nu + 4\psi_{\mu c}) \tag{付録 B.21}$$

であるから、

$$
\begin{aligned}
&(\bar{\epsilon_1}\gamma^c\epsilon_2\text{の項}) \\
&= -\frac{1}{16}\xi^c[\gamma_c R_\mu + 2\gamma_{\mu c\nu}R^\nu + 16\psi_{\mu c}] = \xi^\nu\psi_{\nu\mu} - \frac{1}{16}\xi^\nu\gamma_\nu R_\mu + \frac{1}{8}\xi^\rho\gamma_{\rho\mu\nu}R^\nu \\
&= \xi^\nu(\hat{D}_\nu\psi_\mu - \hat{D}_\mu\psi_\nu) - \frac{1}{16}\xi^\nu\gamma_\nu R_\mu + \frac{1}{8}\xi^\rho\gamma_{\rho\mu\nu}R^\nu \\
&= \xi^\nu\partial_\nu\psi_\mu + \frac{1}{4}\xi^\nu\hat{\omega}_\nu{}^{ab}\gamma_{ab}\psi_\mu - \hat{D}_\mu(\xi^\nu\psi_\nu) + \partial_\mu\xi^\nu\psi_\nu - \frac{1}{16}\xi^\nu\gamma_\nu R_\mu + \frac{1}{8}\xi^\rho\gamma_{\rho\mu\nu}R^\nu \\
&= \xi^\nu\partial_\nu\psi_\mu + \partial_\mu\xi^\nu\psi_\nu - \frac{1}{4}\underbrace{(-\xi\cdot\hat{\omega})^{ab}}_{=\lambda^{ab}}\gamma_{ab}\psi_\mu + \hat{D}_\mu\underbrace{(-\xi\cdot\psi)}_{=\epsilon} - \frac{1}{16}\xi^\nu\gamma_\nu R_\mu + \frac{1}{8}\xi^\rho\gamma_{\rho\mu\nu}R^\nu \\
&= [\delta_G(\xi) + \delta_L(\lambda) + \delta_Q(\epsilon)]\psi_\mu - \frac{1}{16}\xi^\nu\gamma_\nu R_\mu + \frac{1}{8}\xi^\rho\gamma_{\rho\mu\nu}R^\nu
\end{aligned}
\tag{付録 B.22}
$$

と ψ_μ の局所変換と R^ν の線形結合で表すことができた。

$\bar{\epsilon_1}\gamma^{cd}\epsilon_2$の項 も同様に計算を行う。

$$
(\bar{\epsilon_1}\gamma^{cd}\epsilon_2\text{の項}) = \frac{1}{128}\bar{\epsilon_2}\gamma^{cd}\epsilon_1\gamma^{ab}\gamma_{cd}(\gamma_\mu\psi_{ab} - 2\gamma_a\psi_{b\mu}) \tag{付録 B.23}
$$

ここでまたガンマ行列を変形させる。

$$
\begin{aligned}
&\gamma^{ab}\gamma_{cd}\gamma_\mu + \gamma_{cd}\gamma^{ab}\gamma_\mu = 2\gamma^{ab}{}_{cd}\gamma_\mu - 4\delta^a_c\delta^b_d\gamma_\mu \text{ から} \\
&\gamma^{ab}\gamma_{cd}\gamma_\mu = -\gamma_{cd}\gamma^{ab}\gamma_\mu - 2\gamma_\mu\gamma^{ab}{}_{cd} - 4\delta^a_c\delta^b_d\gamma_\mu \\
&\qquad\qquad = \gamma_{cd}\gamma_\mu\gamma^{ab} - 2\gamma_{cd}\gamma_\mu{}^{ab} - 2\gamma_\mu\gamma^{ab}{}_{cd} - 4\delta^a_c\delta^b_d\gamma_\mu \\
&\gamma^{ab}\gamma_{cd}\gamma_a = (-\gamma^b\gamma^a + \eta^{ab})\gamma_{cd}\gamma_a = -\gamma^b\underbrace{\gamma^a\gamma_{cd}\gamma_a}_{=0\ \because\ (3.63)} + \gamma_{cd}\gamma^b = \gamma_{cd}\gamma^b
\end{aligned}
\tag{付録 B.24}
$$

したがって、

$$
(\bar{\epsilon_1}\gamma^{cd}\epsilon_2\text{の項}) = \frac{1}{128}\bar{\epsilon_2}\gamma^{cd}\epsilon_1[\gamma_{cd}\gamma_\mu\underbrace{\gamma^{ab}\psi_{ab}}_{=\frac{1}{2}\gamma^\nu R_\nu} - 2\gamma_{cd}\underbrace{\gamma_\mu{}^{ab}\psi_{ab}}_{=R_\mu} - 2\gamma_\mu\gamma^{ab}{}_{cd}\psi_{ab} - 4\gamma_\mu\psi_{cd} - 2\gamma_{cd}\gamma^b\psi_{b\mu}] \tag{付録 B.25}
$$

と表せる。ここでまた括弧内第 3 項は (B.15) より、

$$
\gamma^{ab}{}_{cd}\psi_{ab} = \gamma_c R_d - 2\delta^b_c\gamma_d{}^a\psi_{ab} \tag{付録 B.26}
$$

であるから、これを代入して

$$
\begin{aligned}
(\bar{\epsilon_1}\gamma^{cd}\epsilon_2\text{の項}) = \frac{1}{128}\bar{\epsilon_2}\gamma^{cd}\epsilon_1 \Big[&\frac{1}{2}\gamma_{cd}\gamma_\mu\gamma^\nu R_\nu - 2\gamma_{cd}R_\mu - 2\gamma_\mu\gamma_c R_d \\
&\underline{-2\gamma_{cd}\gamma^\nu\psi_{\nu\mu} + 4\gamma_\mu\gamma_d{}^a\psi_{ac} - 4\gamma_\mu\psi_{cd}}\Big]
\end{aligned}
\tag{付録 B.27}
$$

を得る。ここで下線部について、(B.16) を用いると、

$$
\begin{aligned}
\text{下線部} &= -2\gamma_{cd}\gamma^{\nu}\psi_{\nu\mu} + 4\gamma_{\mu}(\gamma_d\gamma^a - \delta^a_d)\psi_{ac} - 4\gamma_{\mu}\psi_{cd} \\
&= -2\gamma_{cd}\gamma^{\nu}\psi_{\nu\mu} + 4\gamma_{\mu}\gamma_d\gamma^a\psi_{ac} \\
&= \frac{1}{2}\gamma_{cd}(\gamma_{\mu\nu}R^{\nu} - R_{\mu}) - \gamma_{\mu}\gamma_d(\gamma_{c\nu}R^{\nu} - R_c) \\
&= -\frac{1}{2}\gamma_{cd}(\gamma_{\nu}\gamma_{\mu} - g_{\mu\nu})R^{\nu} - \frac{1}{2}\gamma_{cd}R_{\mu} + \gamma_{\mu}\gamma_d(\gamma_{\nu}\gamma_c - e_{\nu c})R^{\nu} + \gamma_{\mu}\gamma_d R_c \\
&= -\frac{1}{2}\gamma_{cd}\gamma_{\nu}\gamma_{\mu}R^{\nu} + \gamma_{\mu}\gamma_d\gamma_{\nu}\gamma_c R^{\nu}
\end{aligned}
\tag{付録 B.28}
$$

と R^{ν} を用いて表せるので、これを (B.27) に代入して

$$
\begin{aligned}
&(\bar{\epsilon_1}\gamma^{cd}\epsilon_2\text{の項}) \\
&= \frac{1}{128}\bar{\epsilon_2}\gamma^{cd}\epsilon_1\left[\frac{1}{2}\gamma_{cd}\gamma_{\mu}\gamma^{\nu}R_{\nu} - 2\gamma_{cd}R_{\mu} - 2\gamma_{\mu}\gamma_c R_d - \frac{1}{2}\gamma_{cd}\gamma_{\nu}\gamma_{\mu}R^{\nu} + \gamma_{\mu}\gamma_d\gamma_{\nu}\gamma_c R^{\nu}\right] \\
&= \frac{1}{128}\bar{\epsilon_2}\gamma^{cd}\epsilon_1\left[\frac{1}{2}\gamma_{cd}\gamma_{\mu}\gamma^{\nu}R_{\nu} - 2\gamma_{cd}R_{\mu} - 2\gamma_{\mu c}R_d - 2e_{\mu c}R_d\right. \\
&\qquad\qquad\left. -\frac{1}{2}\gamma_{cd}(-\gamma_{\mu}\gamma_{\nu} + 2g_{\mu\nu})R^{\nu} - \gamma_{\mu}\gamma_c\gamma_{\nu}\gamma_d R^{\nu}\right] \\
&= \frac{1}{128}\bar{\epsilon_2}\gamma^{cd}\epsilon_1\left[\gamma_{cd}\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}R^{\nu} - 3\gamma_{cd}R_{\mu} - 2\gamma_{\mu c}R_d - 2e_{\mu c}R_d - \gamma_{\mu}(-\gamma_{\nu}\gamma_c + 2e_{\nu c})\gamma_d R^{\nu}\right] \\
&= \frac{1}{128}\bar{\epsilon_2}\gamma^{cd}\epsilon_1[\gamma_{cd}\gamma_{\mu\nu}R^{\nu} - 2\gamma_{cd}R_{\mu} - 2\gamma_{\mu c}R_d - 2e_{\mu c}R_d + \gamma_{\mu}\gamma_{\nu}\gamma_{cd}R^{\nu} - 2\gamma_{\mu}\gamma_d R_c] \\
&= \frac{1}{128}\bar{\epsilon_2}\gamma^{cd}\epsilon_1[(\gamma_{cd\mu\nu}\cancel{-2e_{\nu d}\gamma_{c\mu}} + 2e_{\mu d}\gamma_{c\nu} - 2e_{\mu c}e_{\nu d})R^{\nu} \\
&\qquad\qquad - \gamma_{cd}R_{\mu}\cancel{-2\gamma_{\mu c}R_d} - 2e_{\mu c}R_d + \gamma_{\mu\nu}\gamma_{cd}R^{\nu} + 2\gamma_{\mu}\gamma_c R_d] \\
&= \frac{1}{128}\bar{\epsilon_2}\gamma^{cd}\epsilon_1[\gamma_{cd\mu\nu}R^{\nu}\underline{+2e_{\mu d}\gamma_{c\nu}R^{\nu}} - 4e_{\mu c}R_d - \gamma_{cd}R_{\mu} \\
&\qquad\qquad + (\gamma_{\mu\nu cd}\underline{+2e_{\mu d}\gamma_{\nu c}}\underline{-2e_{\nu d}\gamma_{\mu c}}\cancel{-2e_{\mu c}e_{\nu d}})R^{\nu}\underline{+2\gamma_{\mu c}R_d}\cancel{+2e_{\mu c}R_d}] \\
&= \frac{1}{128}\bar{\epsilon_2}\gamma^{cd}\epsilon_1[2\gamma_{cd\mu\nu}R^{\nu} - \gamma_{cd}R_{\mu} - 4e_{\mu c}R_d] \\
&= \frac{1}{128}\bar{\epsilon_2}\gamma^{\rho\sigma}\epsilon_1[2\gamma_{\rho\sigma\mu\nu}R^{\nu} - \gamma_{\rho\sigma}R_{\mu} - 4g_{\mu\rho}R_{\sigma}]
\end{aligned}
\tag{付録 B.29}
$$

が得られる。5,6 番目の等号では斜線部、下線部、波線部がそれぞれ打ち消しあう項である。よって (B.22) の結果と合わせて、

$$
\begin{aligned}
[\delta_Q(\epsilon_1), \delta_Q(\epsilon_2)]\psi_{\mu} = [\delta_G(\xi) + \delta_L(\lambda) + \delta_Q(\epsilon)]\psi_{\mu} - \frac{1}{16}\xi^{\nu}(\gamma_{\nu}R_{\mu} + 2\gamma_{\mu\nu\rho}R^{\rho}) \\
+ \frac{1}{128}\bar{\epsilon_2}\gamma^{\rho\sigma}\epsilon_1(2\gamma_{\rho\sigma\mu\nu}R^{\nu} - \gamma_{\rho\sigma}R_{\mu} - 4g_{\mu\rho}R_{\sigma})
\end{aligned}
\tag{付録 B.30}
$$

と最終的な形が求まる。したがってこの代数は、Rarita-Schwinger の場の方程式 $R^{\mu} = 0$ を用いたときのみ閉じた代数となり、(3.10) の交換関係に一致する。よってこれはオン・シェルでのみ閉じる代数といえる。

付録 C　反 de Sitter 時空

D 次元の反 De Sitter 時空は、計量

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{AB} dX^A dX^B \\ &= -(dX^0)^2 + \sum_{i=1}^{D-1} (dX^i)^2 - (dX^D)^2 \end{aligned} \quad \text{(付録 C.1)}$$

をもつ $D+1$ 次元空間内に埋め込まれた D 次元双曲面

$$(X^0)^2 - \sum_{i=1}^{D-1} (X^i)^2 + (X^D)^2 = \frac{1}{a^2} \quad \text{(付録 C.2)}$$

として定義される。ここで、X^A $(A = 0, 1, \cdots, D)$ は $D+1$ 次元時空の座標であり、a は長さの逆次元の定数である。a^{-1} は反 de Sitter 時空の半径と呼ばれる。(D.2) を満たすような X^A は、独立な D 個の座標 (t, ρ, θ^α) $(\alpha = 0, 1, \cdots, D-2)$ を用いて、

$$X^0 = \frac{\cos t}{a \cos \rho} \qquad X^i = \frac{1}{a} \tan \rho \hat{X}^i(\theta) \qquad X^D = \frac{\sin t}{a \cos \rho} \quad \text{(付録 C.3)}$$

と表すことができる。$\hat{X}^i$ は $\sum_{i=1}^{D-1} (\hat{X}^i)^2 = 1$ を満たす変数であり、$D-2$ 次元の単位球面 S^{D-2} の座標 θ^α を使って表されている。例として、$D = 4$ の場合を考えると、θ^α として通常の極座標 θ, ϕ を使い、$\hat{X}^1 = \sin\theta \cos\phi, \hat{X}^2 = \sin\theta \sin\phi, \hat{X}^3 = \cos\theta$ となる。また (C.3) の表式から、座標 t, ρ の動く範囲は、$0 \leq t \leq 2\pi, 0 \leq \rho < \frac{\pi}{2}$ である。$\rho = \frac{\pi}{2}$ は空間的無限遠を表す。またこのままでは t については周期的になってしまうため、普遍被覆空間 (universal covering space) を考え、$-\infty < t < \infty$ とする。よってこれは時間方向に無限個の反 de Sitter 時空をつなげてできる時空である。以下では、この被覆空間を反 de Sitter 空間とよぶこととする。

(C.3) を (C.1) へ代入することで、D 次元空間の計量 η_{AB} から誘導される双局面上の計量

$$ds^2 = \frac{1}{a^2 \cos^2 \rho} (-dt^2 + d\rho^2 + \sin^2 \rho h_{\alpha\beta}(\theta) d\theta^\alpha d\theta^\beta) \quad \text{(付録 C.4)}$$

が得られる。$h_{\alpha\beta}(\theta)$ は単位球面 S^{D-2} の計量である。よってこの (C.4) が、D 次元反 de Sitter 時空の計量となる。またこの表式をみると、括弧内に $D-1$ 次元の単位球面 S^{D-1} の計量 $d\rho^2 + \sin^2 \rho h_{\alpha\beta}(\theta) d\theta^\alpha d\theta^\beta$ が現れていることが分かる。しかし、座標 ρ の定義域は $0 \leq \rho < \frac{\pi}{2}$ であったので、$t =$ 一定 に対応するこの時空の空間的断面は、S^{D-1} の半球面の内部であることが分かる。半球面の場合、球対称性が失われるため、位相としては $\mathbb{R}^{D-1}$ に等しくなる。したがって、全体の時空としては $\mathbb{R}^D$ と同じ位相構造を持っている。

この計量から Riemann テンソルを求めてみると、計量 $g_{\mu\nu}$ を用いて、

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = -a^2 (g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}) \quad \text{(付録 C.5)}$$

と求まることがわかる。実際に具体的な成分 R_{0101} について確かめてみる。Riemann 曲率の形式 (2.2) から、

$$R_{01\ 1}^{\ \ 0} = \partial_0 \Gamma^0_{11} - \partial_1 \Gamma^0_{01} + \Gamma^0_{0\lambda} \Gamma^\lambda_{11} - \Gamma^0_{1\lambda} \Gamma^\lambda_{01} \quad \text{(付録 C.6)}$$

である。計量 (C.4) は対角成分のみもつことを用いて、(2.4) から必要な Christoffel 記号を求めると、

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{0\lambda} &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_0 g_{\lambda 0} + \partial_\lambda g_{00} - \partial_0 g_{0\lambda}) = \frac{1}{2}g^{00}\partial_\lambda g_{00} = \delta^1_\lambda \tan\rho \\
\Gamma^1_{11} &= -\frac{1}{2}g^{11}\partial_1 g_{11} = \tan\rho \\
\Gamma^0_{1\lambda} &= \frac{1}{2}g^{00}\partial_1 g_{\lambda 0} = \delta^0_\lambda \tan\rho
\end{aligned} \tag{付録 C.7}$$

が求まるので、これを (C.6) に代入すると、

$$R_{01}{}^0{}_1 = -\partial_1\Gamma^0_{01} + \Gamma^0_{01}\Gamma^1_{11} - \Gamma^0_{10}\Gamma^0_{01} = -\frac{1}{\cos^2\rho} + \tan^2\rho - \tan^2\rho = -\frac{1}{\cos^2\rho} \tag{付録 C.8}$$

となるので、

$$R_{0101} = g_{00}R_{01}{}^0{}_1 = \frac{1}{a^2\cos^4\rho} \tag{付録 C.9}$$

と表される。これは (C.5) に成分を代入した形

$$R_{0101} = -a^2(g_{00}g_{11} - g_{01}g_{10}) = -a^2 \cdot \frac{-1}{a^2\cos^2\rho} \cdot \frac{1}{a^2\cos^2\rho} = \frac{1}{a^2\cos^4\rho} \tag{付録 C.10}$$

に一致する。他の成分についても同様にして確かめることができる。

(C.5) から Ricci テンソルとスカラー曲率は、

$$R_{\mu\nu} = -(D-1)a^2 g_{\mu\nu} \qquad R = -D(D-1)a^2 \tag{付録 C.11}$$

と求まる。これは反 de Sitter 時空が、負の定曲率をもった空間であり、その曲率半径が a^{-1} であることを示す。また (C.5) の表式から、Riemann テンソルが計量のみで表されているため、反 de Sitter 時空は極大対称空間であることがわかる。

謝辞

本論文の執筆の際、論文の構成の確認や発表練習に付き添っていただき、また再三にわたり居室の方に質問に伺った私に丁寧にご指導いただいた谷井義彰先生、ならびに遅くまで発表スライドの推敲を手伝っていただきました佐藤丈先生に心より御礼申し上げます。またご相談、ご助言をしてくださった素粒子理論研究室の関係者の皆様に深く感謝申し上げます。

参考文献

[1] 谷井義彰，“超重力理論 超弦理論における役割”(サイエンス社, 2011).

[2] 藤井保憲，“超重力理論入門”(産業図書, 2006).

[3] S. Carroll, “Spacetime and Geometry : An Introduction to General Relativity” (Addison Wesley, 2004).

[4] D.Z. Freedman, P. van Nieuwenhuizen and S. Ferrara, *Phys. Rev.* **D13** (1976) 3214; S. Deser and B. Zumino, *Phys. Lett.* **B62** (1976) 335.

[5] P.K. Townsend, *Phys. Rev.* **D15** (1977) 2802.