

令和 2 年度卒業論文
ウンラー効果によるホーキング輻射の導出

埼玉大学理学部物理学科素粒子論研究室
久保飛翔

2021 年 3 月 31 日

目次

1	Introduction	2
2	曲った時空上でのスカラー場	3
2.1	曲がった時空上でのスカラー場の量子化	3
2.2	スカラー場の展開	3
2.3	一般の解の基底とボゴリューボフ変換	4
2.4	それぞれの基底における真空、および数演算子	5
2.5	真空の不一致と粒子の泡立ち	6
3	ウンルー効果	8
3.1	加速度運動	8
3.2	リンドラー座標系	9
3.3	リンドラー座標と加速度運動	11
3.4	リンドラー座標系でのキリングベクトル	12
3.5	x が負の領域でのリンドラー座標	13
3.6	ミンコフスキー座標とリンドラー座標での場の量子化	14
3.7	ウンルー効果の導出	17
4	ホーキング輻射	18
5	補遺	20
5.1	シュワルツシルト解	20
5.2	亀座標系	20
5.3	エディントン・フィンケルステイン座標系とブラックホール	22
6	まとめ	24

1 Introduction

ホーキングによって「ブラックホールの事象の地表面からある温度のプランク分布が見える」というホーキング輻射の存在が明らかになった。

本論文ではこれをウンルー効果によって導出した。ウンルー効果とは一般相対性理論と場の量子論を組み合わせることによって導き出される効果で、「ミンコフスキー時空の慣性系に対して加速度運動している観測者は、慣性系の真空にある温度のプランク分布を見出す」というものである。

まず準備として2章で曲がった時空上でのスカラー場の量子化を行い、3章でウンルー効果を導出した。4章でこのウンルー効果をシュワルツシルト計量ブラックホールの事象の地平面に直接応用することでホーキング輻射を導出した。

本論文では $c = \hbar = k_B = 1$ の単位系を用い、またミンコフスキー計量は $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ とした。

2 曲った時空上でのスカラー場

2.1 曲がった時空上でのスカラー場の量子化

曲がった時空におけるスカラー場のラグランジアンは次のように書かれる。

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) \quad (2.1)$$

共役運動量は

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_0 \phi)} = \sqrt{-g} \nabla_0 \phi \quad (2.2)$$

となり、正準交換関係として、次の同時刻交換関係を課す。

$$\begin{aligned} [\phi(t, \mathbf{x}), \phi(t, \mathbf{x}')] &= 0 \\ [\pi(t, \mathbf{x}), \pi(t, \mathbf{x}')] &= 0 \\ [\phi(t, \mathbf{x}), \pi(t, \mathbf{x}')] &= \frac{i}{\sqrt{-g}} \delta^{(n-1)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \end{aligned} \quad (2.3)$$

スカラー場の運動方程式は、

$$\square \phi - m^2 \phi = 0 \quad (\square = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu) \quad (2.4)$$

となる。この方程式の解の内積も適切に定義することができ、特に問題はない。

ここまでは、時空が平坦な状況とほとんど変わりはない。

2.2 スカラー場の展開

時空が曲がっている状況である今回も、平坦な場合と同様に、場の方程式 (2.4) の一般解がどのように書けるかを考える。

時空が平坦な場合であれば、場の方程式 (2.4) の一般解は、

$$\phi(x) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_k}} \left\{ a(\mathbf{k}) e^{-i(E_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + a^\dagger(\mathbf{k}) e^{+i(E_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right\} \quad (2.5)$$

と書けた。(ただし $E_k = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$) しかし、時空が曲がっている状況ではこのように一般解を書くことはできない。これは、そもそも平面波 $e^{-i(E_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}$ は時空が曲がっている状況では、一般に場の方程式 (2.4) の解にならないことからすぐに分かる。 $\square = \nabla_\mu \nabla^\mu = g_{\mu\nu} \nabla^\mu \nabla^\nu$ における $g_{\mu\nu}$ が一般に対角ではなく、そのため式 (2.4) は時間 t と空間 x の偏微分が混じり合う偏微分方程式になっている。このような偏微分方程式では、一般に変数分離解 $e^{-i(E_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}$ はもたない。

では、「 $g_{\mu\nu}$ が対角な時空」が変数分離解をもつ条件かというそれは異なる。変数分離解をもつ条件は「静的時空」である。これは次と等価である。

$$\partial_0 g_{\mu\nu} = 0, \quad g_{0i} = 0 \quad (2.6)$$

(ここで i, j は空間成分を表す添え字である。) このとき、実際に変数分離解をもつことを確認してみると、次のようになる。式 (2.6) の下で $\square\phi(x)$ は

$$\square\phi(x) = \left[g^{00}\partial_0^2 + \frac{1}{2}g^{00}g^{ij}(\partial_i g_{00})\partial_j + g^{ij}\partial_i\partial_j - g^{ij}\Gamma_{ij}^k\partial_k \right] \phi(x) \quad (2.7)$$

となる。したがって、場の方程式 (2.4) は

$$\partial_0^2\phi(x) = -(g^{00})^{-1} \left[g^{ij}\partial_i\partial_j + \frac{1}{2}g^{00}g^{ij}(\partial_i g_{00})\partial_j - g^{ij}\Gamma_{ij}^k\partial_k - m^2 \right] \phi(x) \quad (2.8)$$

となる。よって、左辺は時間微分のみ、右辺は空間微分と空間の関数のみで書けているので変数分離解をもつことになる。それを $f_\omega(t, \mathbf{x})$ とすれば、振動数を $\omega(>0)$ 、残りの空間部分を $\bar{f}_\omega(\mathbf{x})$ として

$$f_\omega(t, \mathbf{x}) = e^{-i\omega t} \bar{f}_\omega(\mathbf{x}) \quad (2.9)$$

のように書ける。これは正の振動数モード

$$\partial_t f_\omega(t, \mathbf{x}) = -i\omega f_\omega(t, \mathbf{x}), \quad \omega > 0 \quad (2.10)$$

であり、同様に負の振動数の共役モード

$$\partial_t f_\omega^*(t, \mathbf{x}) = +i\omega f_\omega^*(t, \mathbf{x}), \quad \omega > 0 \quad (2.11)$$

も解として存在し、モード (f_ω, f_ω^*) は、平坦な時空でのスカラー場の量子化の時と同様に、この状況での場の方程式の解の基底を形成することになる。このモード (f_ω, f_ω^*) で ϕ を展開した時の展開係数が生成消滅演算子となる。正の振動数モード f_ω の係数を消滅演算子、負の振動数モード f_ω^* の係数を生成演算子とする。

2.3 一般の解の基底とボゴリューボフ変換

静的時空であるとき、解は平坦な状況と同様に時間に関して変数分離解をもち、それが場の方程式の解の基底となることを見た。しかし、一般の時空ではそのようにできない。

そこで、とりあえず一般の時空でも場の方程式の解の基底は存在することを仮定する。つまり、

$$\begin{aligned} (f_i, f_j) &= \delta_{ij} \\ (f_i^*, f_j^*) &= -\delta_{ij} \end{aligned} \quad (2.12)$$

なる $f_i(x^\mu)$ を用いて

$$\phi = \sum_i \left(\hat{a}_i f_i + \hat{a}_i^\dagger f_i^* \right) \quad (2.13)$$

と書けることにする。ここで、平坦な時空の場合でそうであったように、この f_i, f_i^* の係数を生成消滅演算子 $\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger$ とする。しかし、解の基底は f_i, f_i^* である必要もないことに注意する。そこで別の基底 $g_i(x^\mu)$ を用いて

$$\phi = \sum_i \left(\hat{b}_i g_i + \hat{b}_i^\dagger g_i^* \right) \quad (2.14)$$

と展開 (expand) することも考える。当然、基底ゆえ

$$\begin{aligned} (g_i, g_j) &= \delta_{ij} \\ (g_i^*, g_j^*) &= -\delta_{ij} \end{aligned} \quad (2.15)$$

が成り立ち、 g_i, g_i^* の係数を生成消滅演算子 $\hat{b}_i, \hat{b}_i^\dagger$ とする。別の基底で展開すれば、その展開係数も一般に異なるので、

$$\hat{b}_i \neq \hat{a}_i, \quad \hat{b}_i^\dagger \neq \hat{a}_i^\dagger \quad (2.16)$$

である。このように色々な基底で展開することになる。

そこで、ある基底から別の基底への変換を考えたい。次のような基底から基底への変換することを考える。

$$g_i = \sum_j (\alpha_{ij} f_j + \beta_{ij} f_j^*) \quad (2.17)$$

$$f_i = \sum_j (\alpha_{ji}^* g_j - \beta_{ji} g_j^*) \quad (2.18)$$

この基底の変換をボゴリューボフ変換という。また、この変換係数 α_{ij}, β_{ij} をボゴリューボフ係数という。 g_i も基底と言えどそれ自身も場の方程式の解なのだから基底 f_i, f_i^* で展開できる。それが式 (2.17) である。式 (2.18) も同様であるが、 (g_i, f_j) が g_i を展開しても f_i を展開しても等しくならなければならないことから展開係数がこのようになる。また、モードの規格直交性より

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= (g_i, f_j) \\ \beta_{ij} &= -(g_i, f_j^*) \end{aligned} \quad (2.19)$$

となり、また、規格直交条件として

$$\begin{aligned} \sum_j (\alpha_{ik} \alpha_{jk}^* - \beta_{ik} \beta_{jk}^*) &= \delta_{ij} \\ \sum_j (\alpha_{ik} \beta_{jk} - \beta_{ik} \alpha_{jk}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

を満たす。さらに、モード間の変換を説明するだけでなく、生成消滅演算子間の変換もボゴリューボフ係数で次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \hat{a}_i &= \sum_j (\alpha_{ji} \hat{b}_j + \beta_{ji}^* \hat{b}_j^\dagger) \\ \hat{b}_i &= \sum_j (\alpha_{ij}^* \hat{a}_j - \beta_{ij} \hat{a}_j^\dagger) \end{aligned} \quad (2.21)$$

2.4 それぞれの基底における真空、および数演算子

Field Operator ϕ が

$$\phi = \sum_i (\hat{a}_i f_i + \hat{a}_i^\dagger f_i^*) \quad (2.22)$$

のように展開されていることから、平坦な時空でのスカラー場の量子化と同様に、生成消滅演算子 $\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger$ は

$$\begin{aligned} [\hat{a}_i, \hat{a}_j] &= 0 \\ [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger] &= 0 \\ [\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] &= \delta_{ij} \end{aligned} \quad (2.23)$$

を満たすとし、そして消滅演算子 \hat{a}_i によって真空状態 $|0_f\rangle$ が

$$\hat{a}_i |0_f\rangle = 0 \quad \text{for all } i \quad (2.24)$$

として定義されることとなる。また、時空が平坦な場合と同様に、ヒルベルト空間の基底はこの真空より

$$|n_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_i!}} \left(\hat{a}_i^\dagger\right)^{n_i} |0_f\rangle \quad (2.25)$$

と作られることになる。そして数演算子は

$$\hat{n}_{fi} = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \quad (2.26)$$

と生成消滅演算子 $\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger$ を用いて定義される。

一方で、 ϕ は別の基底 g_i を用いて

$$\phi = \sum_i \left(\hat{b}_i g_i + \hat{b}_i^\dagger g_i^* \right) \quad (2.27)$$

とも展開されたので、この生成消滅演算子 $\hat{b}_i, \hat{b}_i^\dagger$ で上記と全く同じことができる。生成消滅演算子 $\hat{b}_i, \hat{b}_i^\dagger$ は

$$\begin{aligned} [\hat{b}_i, \hat{b}_j] &= 0 \\ [\hat{b}_i^\dagger, \hat{b}_j^\dagger] &= 0 \\ [\hat{b}_i, \hat{b}_j^\dagger] &= \delta_{ij} \end{aligned} \quad (2.28)$$

を満たすとし、そして消滅演算子 \hat{b}_i によって真空状態 $|0_g\rangle$ が

$$\hat{b}_i |0_g\rangle = 0 \quad \text{for all } i \quad (2.29)$$

として定義されることとなる。ヒルベルト空間の基底もこの真空 $|0_g\rangle$ と生成演算子 \hat{b}_i^\dagger によって作られる。数演算子も

$$\hat{n}_{gi} = \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i \quad (2.30)$$

と生成消滅演算子 $\hat{b}_i, \hat{b}_i^\dagger$ を用いて定義される。

以上のようにして、それぞれの基底 f_i, g_i ごとにその展開係数として生成消滅演算子が定義されるために、それぞれの基底 f_i, g_i ごとに真空 $|0_i\rangle, |0_g\rangle$ および数演算子 $\hat{n}_{fi}, \hat{n}_{gi}$ が定義されることになる。

2.5 真空の不一致と粒子の泡立ち

まず、真空 $|0_i\rangle, |0_g\rangle$ は必ずしも一致しないことが次のように簡単に分かる。すなわち $\hat{a}_i |0_f\rangle = 0$ のとき、 $\hat{b}_i |0_f\rangle$ が 0 になるのか確かめてみると、 \hat{b}_i を \hat{a}_i とボゴリューボフ係数で表した式 (2.21) より

$$\begin{aligned} \hat{b}_i |0_f\rangle &= \sum_j \left(\alpha_{ij}^* \hat{a}_j - \beta_{ij}^* \hat{a}_j^\dagger \right) |0_f\rangle \\ &= \sum_j \left(0 - \beta_{ij}^* \hat{a}_j^\dagger \right) |0_f\rangle \\ &= - \sum_j \beta_{ij}^* \hat{a}_j^\dagger |0_f\rangle \neq 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

ボゴリューボフ変換が生成消滅演算子を混ぜるような変換の形になっているため、ある基底での消滅演算子が違う基底での生成消滅演算子を含む形で表され、結果としてそこが一般に 0 でなくなってしまう。

まず、このようにして真空は ϕ をどの基底で展開したかによって本質的に異なる。当然、どの基底での真空かを表すラベル（たとえば $|0_f\rangle$ であれば f ）は省略することはできない。さらに、真空が一致しないことから分かるように、違う基底を用いている観測者はお互いの真空に粒子を見いだしてしまう。たとえば真空 $|0_f\rangle$ における基底 g での粒子数期待値を計算すると、

$$\begin{aligned}
\langle 0_f | \hat{n}_{gi} | 0_f \rangle &= \langle 0_f | b_i^\dagger b_i | 0_f \rangle \\
&= \left\langle 0_f \left| \sum_{jk} \left(\alpha_{ij} \hat{a}_j^\dagger - \beta_{ij} \hat{a}_j \right) \left(\alpha_{ik}^* \hat{a}_k - \beta_{ik}^* \hat{a}_k^\dagger \right) \right| 0_f \right\rangle \\
&= \sum_{jk} (-\beta_{ij}) (-\beta_{ik}^*) \langle 0_f | \hat{a}_j \hat{a}_k^\dagger | 0_f \rangle + 0 + 0 + 0 \\
&= \sum_{jk} \beta_{ij} \beta_{ik}^* \langle 0_f | \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_j + \delta_{jk} \right) | 0_f \rangle \\
&= \sum_{jk} \beta_{ij} \beta_{ik}^* \delta_{jk} \langle 0_f | 0_f \rangle \\
&= \sum_j \beta_{ij} \beta_{ij}^* \\
&= \sum_j |\beta_{ij}|^2 \quad (\neq 0)
\end{aligned} \tag{2.32}$$

このようにして、別の基底の真空に粒子を見いだしてしまうことになる。これは平坦な時空における「真空」および「粒子」という概念がそのままの形で一般相対論と合わせることができないことを強く示唆している。

以上をまとめると、「一般の時空では観測者の間で共有する自然な基底が存在せず、それゆえ一般に真空が異なり、また観測する粒子数も異なるものとなる。」と言える。

3 ウンルー効果

3.1 加速度運動

ここで2次元ミンコフスキー時空上の等加速度運動を考える。

2次元ミンコフスキー時空ゆえ計量は

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 \quad (3.1)$$

である。

等加速度運動は次のように記述できる。

$$t(\tau) = \frac{1}{\alpha} \sinh(\alpha\tau) \quad (3.2)$$

$$x(\tau) = \frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha\tau)$$

ここで、 τ は固有時であり、 α は一定な加速度である。このように記述できることは次のようにしてわかる。

4元加速度 a^μ の成分は軌道の式 (3.2) よりそれぞれ

$$a^t = \frac{d^2 t(\tau)}{d\tau^2} = \alpha \sinh(\alpha\tau) \quad (3.3)$$

$$a^x = \frac{d^2 x(\tau)}{d\tau^2} = \alpha \cosh(\alpha\tau) \quad (3.4)$$

であり、その大きさは

$$\sqrt{a_\mu a^\mu} = \sqrt{-\alpha^2 \sinh^2(\alpha\tau) + \alpha^2 \cosh^2(\alpha\tau)} = \alpha \quad (3.5)$$

となるためである。軌道の式 (3.2) より

$$x^2(\tau) = t^2(\tau) + \frac{1}{\alpha^2} \quad (3.6)$$

が成り立つ。これは図1のような双曲線軌道である。ただし式 (3.3) より $\tau = \pm\infty$ で $t = \pm\infty$ 、式 (3.4) より $x > 0$ であることに注意する。図から明らかなように $x > |t|$ である。

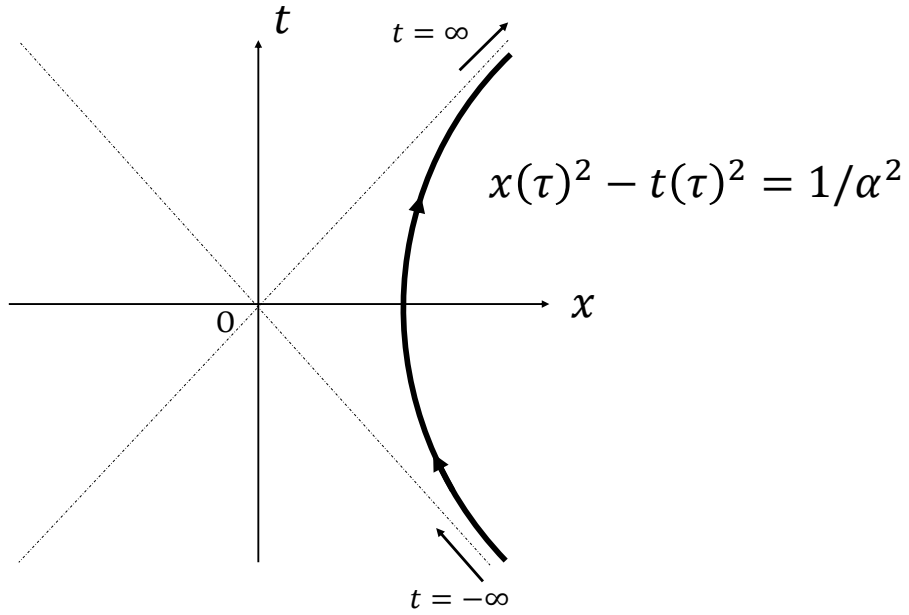


図1 加速度運動の軌道（双曲線軌道）

3.2 リンドラー座標系

ここで、新たに次の座標系を導入する。

$$t = \frac{1}{a} e^{a\xi} \sinh(a\eta) \quad (3.7)$$

$$x = \frac{1}{a} e^{a\xi} \cosh(a\eta) \quad (3.8)$$

ただし $x > |t| \Leftrightarrow -t < x < t$ である。この座標系をリンドラー座標系という。この座標系は次節 3.3 で示すように、等加速度運動を記述するのに適した座標系である。

式 (3.7)/式 (3.8) より

$$t/x = \tanh a\eta \quad (3.9)$$

であり、 $-t < x < t$ より $-\infty < \eta < +\infty$ が成り立つ。また、(式 3.8)² - (式 3.7)² より

$$a^2(x^2 - t^2) = e^{2a\xi} \quad (3.10)$$

であり、 $-t < x < t$ より $-\infty < \xi < +\infty$ となる。合わせてリンドラー座標の定義域は

$$-\infty < \eta, \xi < +\infty \quad (3.11)$$

となる。

次にリンドラー座標系での計量を求める。定義式

$$t = \frac{1}{a} e^{a\xi} \sinh(a\eta) \quad (3.12)$$

$$x = \frac{1}{a} e^{a\xi} \cosh(a\eta) \quad (3.13)$$

より、

$$dt = \frac{\partial t}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial t}{\partial \xi} d\xi = e^{a\xi} \cosh a\eta d\eta + e^{a\xi} \sinh a\eta d\xi = e^{a\xi} (\cosh a\eta d\eta + \sinh a\eta d\xi) \quad (3.14)$$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi = e^{a\xi} \sinh a\eta d\eta + e^{a\xi} \cosh a\eta d\xi = e^{a\xi} (\sinh a\eta d\eta + \cosh a\eta d\xi)$$

であるから、

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dt^2 + dx^2 \\ &= e^{2a\xi} \left(-(\cosh a\eta d\eta + \sinh a\eta d\xi)^2 + (\sinh a\eta d\eta + \cosh a\eta d\xi)^2 \right) \\ &= e^{2a\xi} \left(-(\cosh^2 a\eta - \sinh^2 a\eta) d\eta^2 + (\cosh^2 a\eta - \sinh^2 a\eta) d\xi^2 \right) \\ &= e^{2a\xi} (-d\eta^2 + d\xi^2) \end{aligned} \quad (3.15)$$

となる。

また、リンドラー座標系は次の図 2 の領域の点のみを表せる。点の指定の仕方は次の通りである。 ξ を指定すると、式 (3.10) より、ある一つの双曲線上の点を指定することができるのがわかる。この段階では極座標系で r を固定したとき、原点から距離 r の点すべてを指定しているのと同じように、双曲線上の点すべてを指定している。そこで η を指定すると式 (3.9) よりある傾き $\tan \eta$ の直線との交点としてその双曲線上から一点指定することになる。図 2 における矢印はそれぞれ η, ξ が大きくなる向きを表している。その直線は η が等しい点の集合であり、矢印の向きに行けば行くほど ξ が大きくなっていく。双曲線は ξ が等しい点の集合であり、矢印の向きに行けば行くほど η が大きくなっていく。

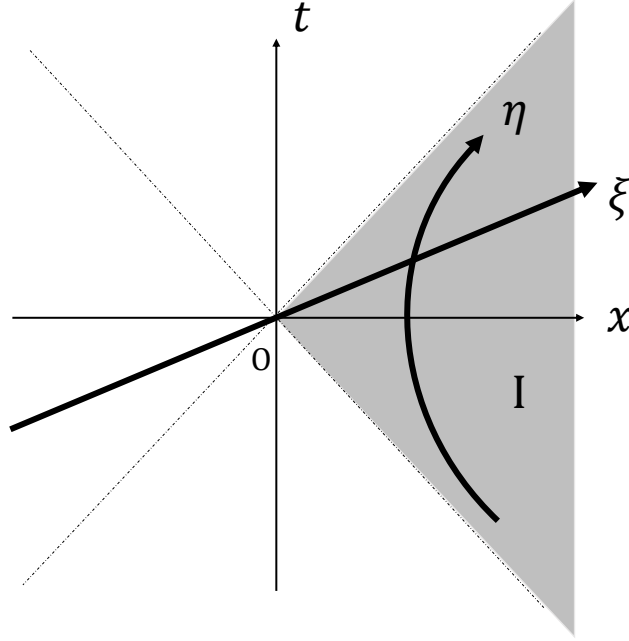


図2 リンドラー座標系

3.3 リンドラー座標と加速度運動

3.1 の加速度運動をこのリンドラー座標系を用いて記述することを考える。

式 (3.9)、(3.10)、すなわち

$$t/x = \tanh a\eta, \quad x^2 - t^2 = \frac{e^{2a\xi}}{a^2} = \left(\frac{e^{a\xi}}{a}\right)^2 \quad (3.16)$$

と加速度運動の軌道の式 (3.2) を式 (3.16) のように書いた式

$$t/x = \tanh \alpha\eta, \quad x^2 - t^2 = \frac{1}{\alpha^2} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 \quad (3.17)$$

を比べれば

$$\begin{aligned} \eta(\tau) &= \frac{\alpha}{a}\tau \\ \xi(\tau) &= \frac{1}{a} \ln\left(\frac{a}{\alpha}\right) = (\tau \text{ によらない定数}) \end{aligned} \quad (3.18)$$

と表せることが分かる。これより等加速度という拘束条件を $\xi = \text{一定}$ という簡単な形に書けることが分かる。

今、固有時 τ の関数として時空点 $t(\tau)$ と $x(\tau)$ を指定していた。リンドラー座標を用いることで、 t, x という二つのパラメタを介することなく、一つのパラメタ $\eta(\tau)$ で時空点を指定できるようになった。前節 3.2 で、図 2 のように η, ξ で時空点を指定するのを見た。そこでは $\xi = \text{一定}$ の点の一つの双曲線上の点を表し、そして直線の傾きは η に依存し、 $\eta = -\infty$ から $\eta = +\infty$ に変化するにつれて傾きが -1 から $+1$ へと変化する、つまり領域を下から上へと掃いていくことを確認した。 $\xi = \text{一定}$ の点の、ある η の時の時空点はその直線との

交点で指定された。今 $\xi = \text{一定}$ ゆえ双曲線が一つ指定されている。 $\eta = (\tau \text{ の関数})$ ゆえ、ある固有時 τ での時空点はその τ に対応する傾きの直線と双曲線の交点で指定されることとなる。つまり、リンドラー座標系での等加速度運動は、その加速度で決まるある双曲線上の固有時をパラメタとする点として記述できるということである。ここでパラメタ a を $a = \alpha$ と選べば、加速度運動を表すリンドラー座標は

$$\eta = \tau, \quad \xi = 0 \quad (3.19)$$

となる。 η 座標がそのまま固有時に対応する。以後このパラメタ a でのリンドラー座標系で加速度運動を議論する。

3.4 リンドラー座標系でのキリングベクトル

リンドラー座標系の計量は式 (3.15)、つまり

$$ds^2 = e^{2a\xi} (-d\eta^2 + d\xi^2) \quad (3.20)$$

で与えられた。よって計量はどの成分も η 依存性を持たないので、 ∂_η はキリングベクトルである。今、 η は時間座標であるので、これは timelike な生成子となることが考えられる。

これをミンコフスキー座標で表すと

$$\begin{aligned} \partial_\eta &= \frac{\partial t}{\partial \eta} \partial_t + \frac{\partial x}{\partial \eta} \partial_x \\ &= e^{a\xi} (\cosh(a\eta) \partial_t + \sinh(a\eta) \partial_x) \\ &= a (x \partial_t + t \partial_x) \end{aligned} \quad (3.21)$$

これはミンコフスキー座標での x 方向のブーストのキリングベクトルである。 ∂_η はミンコフスキー座標で $\partial_\eta = (ax, at)$ であるのでこの大きさの2乗は $a^2(-x^2 + t^2)$ である。したがって timelike である条件はこれが負であることなので $t^2 < x^2$ である。これを図示すると図3の領域 I および領域 IV のようになる。

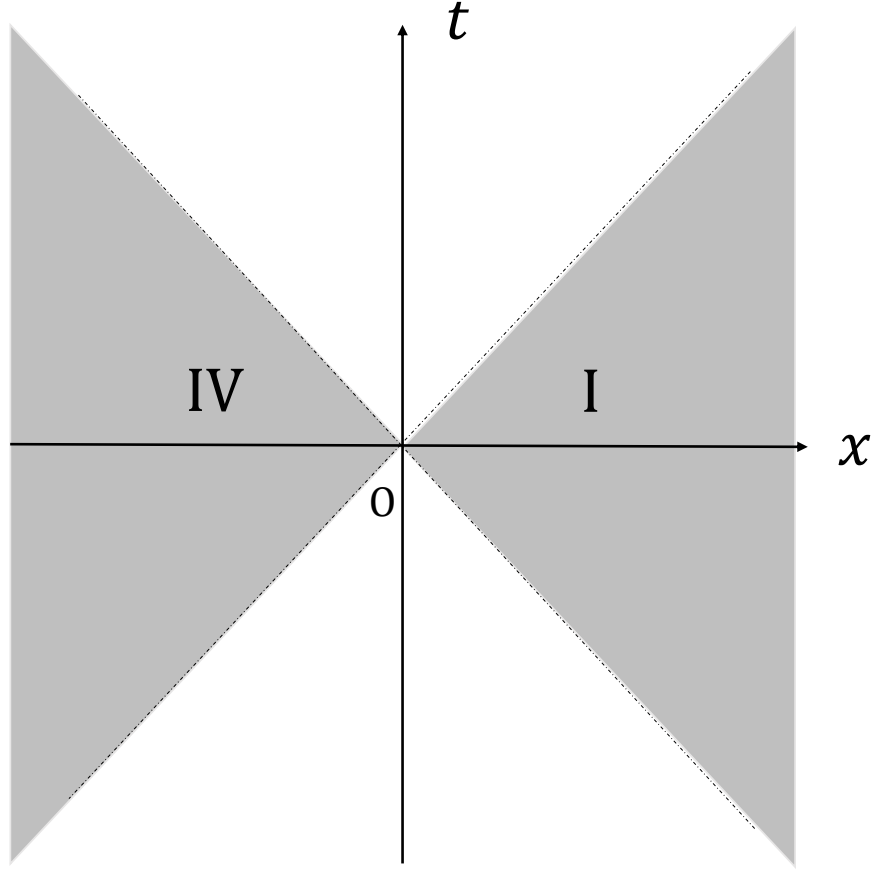


図3 キリングベクトルが timelike な領域

3.5 x が負の領域でのリンドラー座標

ここで $-\infty < x < \infty$ で場 ϕ を量子化することを考える。 ∂_η が timelike な領域である I および IV 内で量子化を行えばよい。

ここまででは領域 I の時空点のみを考えていた。ここでまた別に領域 IV の時空点を考えなければならない。領域 IV 上の時空点もまたリンドラー座標で与えることを考える。式 (3.7)、(3.8) のリンドラー座標は $x > |t|$ の時空点を指定できたことを考えると、領域 IV ($x < |t|$) の時空点を表すには次のようにマイナス符号を付ければよい。

$$t = -\frac{1}{a}e^{a\xi} \sinh(a\eta), \quad x = -\frac{1}{a}e^{a\xi} \cosh(a\eta) \quad (x < |t|) \quad (3.22)$$

このとき先ほどのリンドラー座標とはマイナス倍だけ違うので式 (3.14) のように計算する dt, dx もマイナス倍だけ異なり、結果としてその 2 乗から得られる ds^2 の式は変わらないことになる。つまり計量は領域 I と同じく式 (3.15)、つまり

$$ds^2 = e^{2a\xi} (-d\eta^2 + d\xi^2) \quad (3.23)$$

で与えられることになる。

しかし、式 (3.21) の計算から分かるように、キリングベクトルはマイナス倍の影響を受け $\partial_\eta = (-ax, -at)$ となる。この点が領域 I との違いとなる。つまり、図 4 に示すように η 方向 (未来方向) が領域 I とは逆方向になっている。

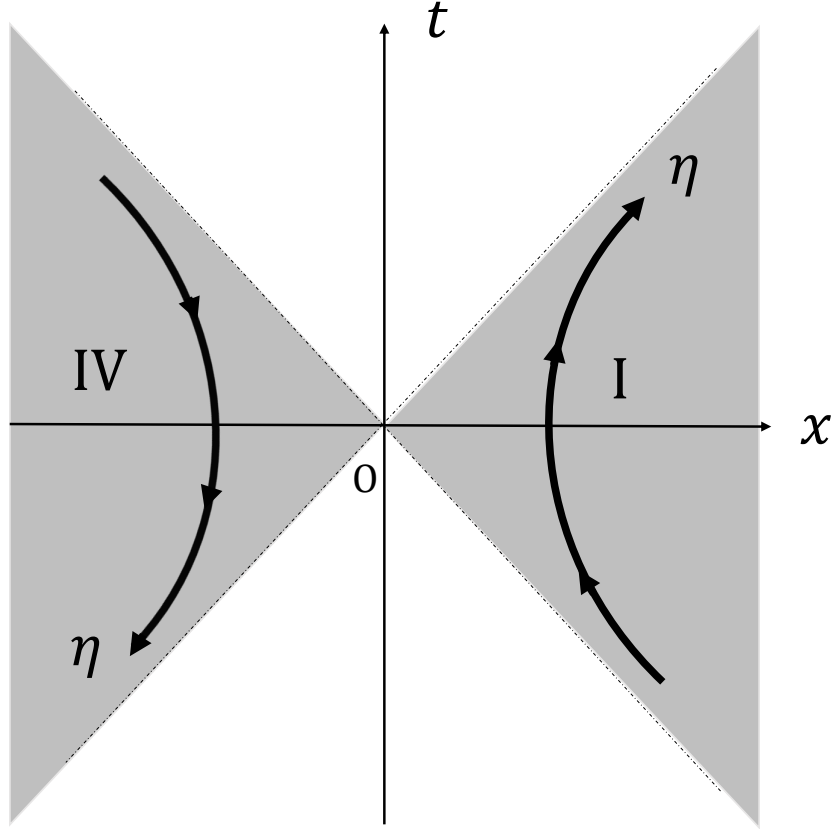


図 4 リンドラー座標の η 方向

3.6 ミンコフスキー座標とリンドラー座標での場の量子化

ここでは簡単のため、直線 $t = 0$ 、質量 $m = 0$ で量子化することを考える。

このときスカラー場の運動方程式は、今ミンコフスキー時空上ということを考えると、式 (2.4) より

$$\square\phi = 0 \quad (\square = g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu) \quad (3.24)$$

となる。ミンコフスキー座標を選ぶのか、リンドラー座標を選ぶのかで計量 $g^{\mu\nu}$ が異なる。しかし、式 (3.1)、式 (3.15) よりどちらの座標も計量の成分に時間成分 (t または η) が入っていなかった。そのため静的な時空の条件式 (2.6)、つまり $\partial_0 g_{\mu\nu} = 0$ 、 $g_{0i} = 0$ を満たし、2.2 節の議論より、正負の振動数モード (f_ω, f_ω^*) が存在し、これによって ϕ を展開できる。正の振動数モード f_ω の係数を消滅演算子、負の振動数モード f_ω^* の係数を生成演算子とする。今、 $g^{\mu\nu}$ がミンコフスキー座標、リンドラー座標のどちらの場合であっても式 (3.24) は時間座標と空間座標の偏微分が分離した偏微分方程式になっており、時間空間の変数分離解である平面波解

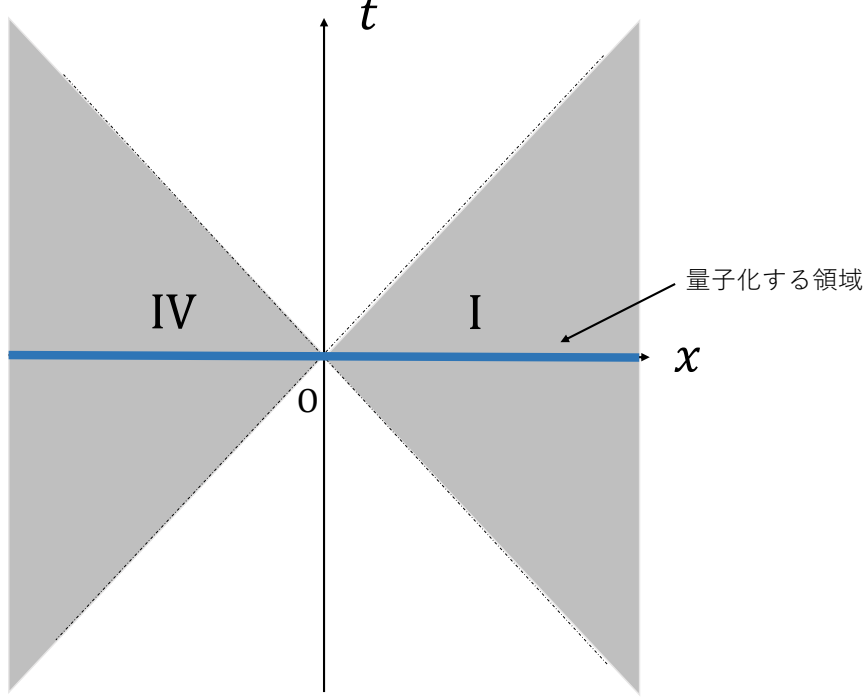


図 5 量子化する領域

をもつ。具体的に、ミンコフスキー座標では式 (2.5)、つまり

$$\phi(x) = \int \frac{dk}{\sqrt{(2\pi)2\omega}} \left\{ \hat{a}(k)e^{-i(\omega t - kx)} + \hat{a}^\dagger(k)e^{+i(\omega t - kx)} \right\} \quad (3.25)$$

のように、また、リンドラー座標では

$$\phi(x) = \int \frac{dk}{\sqrt{(2\pi)2\omega}} \left\{ \hat{b}^{(1)}(k)e^{-i(\omega\eta - k\xi)} + \hat{b}^{(1)\dagger}(k)e^{+i(\omega\eta - k\xi)} \right\} \quad (x > |t|) \quad (3.26)$$

$$\phi(x) = \int \frac{dk}{\sqrt{(2\pi)2\omega}} \left\{ \hat{b}^{(2)}(k)e^{-i(\omega(-\eta) - k\xi)} + \hat{b}^{(2)\dagger}(k)e^{+i(\omega(-\eta) - k\xi)} \right\} \quad (x < |t|) \quad (3.27)$$

とできる。(ただし $\omega = \sqrt{k^2 + m^2}$) ここで気を付けるべきは $x > |t|$ では timelike なキリングベクトルが ∂_η であり $+\eta$ 方向が時間の正方向となっているために式 (3.26) のように ϕ が展開され、 $x < |t|$ では timelike なキリングベクトルが $\partial_{(-\eta)} = -\partial_\eta$ であり $-\eta$ 方向が時間の正方向となっているために式 (3.27) のように ϕ が展開されていることである。このような状況を考えて

$$g_k^{(1)} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega\eta + ik\xi} & \text{I} \\ 0 & \text{IV} \end{cases} \quad (3.28)$$

$$g_k^{(2)} = \begin{cases} 0 & \text{I} \\ \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{+i\omega\eta + ik\xi} & \text{IV} \end{cases} \quad (3.29)$$

と $g_k^{(1)}, g_k^{(2)}$ を定義すれば、

$$\begin{aligned}\partial_\eta g_k^{(1)} &= -i\omega g_k^{(1)} \\ \partial_{(-\eta)} g_k^{(2)} &= -i\omega g_k^{(2)}, \quad \omega > 0\end{aligned}\tag{3.30}$$

を満たす基底での、 $-\infty < x < \infty$ 全体で定義された x を引数とする ϕ の展開式

$$\phi(x) = \int dk \left(\hat{b}_k^{(1)} g_k^{(1)} + \hat{b}_k^{(1)\dagger} g_k^{(1)*} + \hat{b}_k^{(2)} g_k^{(2)} + \hat{b}_k^{(2)\dagger} g_k^{(2)*} \right)\tag{3.31}$$

を書くことができる。ここで 2.4 での議論と同様に、どの基底で、つまりどの座標で ϕ を展開したかにより、真空や数演算子が異なることになる。ミンコフスキー座標で量子化したときの真空を $|0_M\rangle$ 、リンドラー座標で量子化した時の真空を $|0_R\rangle$ と書くことにすると、それは

$$\hat{a}_k |0_M\rangle = 0\tag{3.32}$$

$$\hat{b}_k^{(1)} |0_R\rangle = \hat{b}_k^{(2)} |0_R\rangle = 0\tag{3.33}$$

を満たすものとして定義される。そして、2.5 で示したように一般にこれらの真空は一致しないことになる。さらにここで

$$h_k^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2 \sinh\left(\frac{\pi\omega}{a}\right)}} \left(e^{\pi\omega/2a} g_k^{(1)} + e^{-\pi\omega/2a} g_{-k}^{(2)*} \right)\tag{3.34}$$

$$h_k^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2 \sinh\left(\frac{\pi\omega}{a}\right)}} \left(e^{\pi\omega/2a} g_k^{(2)} + e^{-\pi\omega/2a} g_{-k}^{(1)*} \right)\tag{3.35}$$

を考える。すると

$$\begin{aligned}\left(h_{k_1}^{(1)}, h_{k_2}^{(1)} \right) &= \frac{1}{2\sqrt{\sinh\left(\frac{\pi\omega_1}{a}\right) \sinh\left(\frac{\pi\omega_2}{a}\right)}} \left[e^{\pi(\omega_1+\omega_2)/2a} \left(g_{k_1}^{(1)}, g_{k_2}^{(1)} \right) + e^{-\pi(\omega_1+\omega_2)/2a} \left(g_{-k_1}^{(2)*}, g_{-k_2}^{(2)*} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\sinh\left(\frac{\pi\omega_1}{a}\right) \sinh\left(\frac{\pi\omega_2}{a}\right)}} \left[e^{\pi(\omega_1+\omega_2)/2a} \delta(k_1 - k_2) + e^{-\pi(\omega_1+\omega_2)/2a} \delta(-k_1 + k_2) \right] \\ &= \frac{e^{\pi\omega_1/a} - e^{-\pi\omega_1/a}}{2 \sinh\left(\frac{\pi\omega_1}{a}\right)} \delta(k_1 - k_2) \\ &= \delta(k_1 - k_2)\end{aligned}\tag{3.36}$$

など満たしており、基底となりうる。この基底によって

$$\phi = \int dk \left(\hat{c}_k^{(1)} h_k^{(1)} + \hat{c}_k^{(1)\dagger} h_k^{(1)*} + \hat{c}_k^{(2)} h_k^{(2)} + \hat{c}_k^{(2)\dagger} h_k^{(2)*} \right)\tag{3.37}$$

と展開できる。

3.7 ウンルー効果の導出

ここで \hat{b}_k と \hat{c}_k との間には

$$\begin{aligned}\hat{b}_k^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2 \sinh\left(\frac{\pi\omega}{a}\right)}} \left(e^{\pi\omega/2a} \hat{c}_k^{(1)} + e^{-\pi\omega/2a} \hat{c}_{-k}^{(2)\dagger} \right) \\ \hat{b}_k^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{2 \sinh\left(\frac{\pi\omega}{a}\right)}} \left(e^{\pi\omega/2a} \hat{c}_k^{(2)} + e^{-\pi\omega/2a} \hat{c}_{-k}^{(1)\dagger} \right)\end{aligned}\tag{3.38}$$

という関係がある。また、 (t, x) 複素平面上で虚軸の正の部分にブランチカットを入れることにより、モード $h_k^{(1,2)}$ は、正の振動数のミンコフスキーモード f_k で表現できることがわかり、真空がミンコフスキー座標での量子化のものと一致する、すなわち

$$\hat{c}_k^{(1)} |0_M\rangle = \hat{c}_k^{(2)} |0_M\rangle = 0\tag{3.39}$$

である。よってリンドラー座標での数演算子の、ミンコフスキー座標での真空期待値を計算すると、

$$\begin{aligned}\langle 0_M | \hat{n}_R^{(1)}(k) | 0_M \rangle &= \langle 0_M | \hat{b}_k^{(1)\dagger} \hat{b}_k^{(1)} | 0_M \rangle \\ &= \frac{1}{2 \sinh\left(\frac{\pi\omega}{a}\right)} \langle 0_M | e^{-\pi\omega/a} \hat{c}_{-k}^{(1)} \hat{c}_{-k}^{(1)\dagger} | 0_M \rangle \\ &= \frac{e^{-\pi\omega/a}}{2 \sinh\left(\frac{\pi\omega}{a}\right)} \delta(0) \\ &= \frac{1}{e^{2\pi\omega/a} - 1} \delta(0)\end{aligned}\tag{3.40}$$

となる。これは加速度 a に比例した温度

$$T = \frac{a}{2\pi}\tag{3.41}$$

のプランク分布である。よって、等加速度運動している観測者をリンドラー座標で記述すれば、その観測者はミンコフスキー真空にプランク分布を見出すこととなることが示された。これをウンルー効果という。

4 ホーキング輻射

ここでは様々あるホーキング輻射の導出のうち、ウンラー効果を用いたホーキング輻射の導出を示す。
シュワルツシルト計量を用いてシュワルツシルト時空上を自由落下する粒子の加速度を計算すると

$$\alpha = \frac{GM}{r^{3/2}\sqrt{r-2GM}} \quad (4.1)$$

となる。よって事象の地平面 $r = 2GM$ に非常に近い観測者 ($r - 2GM \ll 2GM$) の場合、曲率の影響を無視することができる。すなわち事象の地平面近傍では平坦な時空にみなすことができる。

ここで、事象の地平面近傍に仮想的に2人の観測者 A と B を考える。A はブラックホールの重力によって自由落下していくとし、B は空間に静止しているとする。そして、A は真空状態をもつとする。(図6 参照)すると自由落下する A の局所慣性系をとることができ、その慣性系で考えると、B は加速度運動しているように見える。この時、ウンラー効果により、加速度運動している B は慣性系の真空中に温度

$$T = \frac{a}{2\pi} \quad (4.2)$$

のプランク分布を見出すこととなる。(図7 参照) このプランク分布を赤方偏移したものを遠く離れた我々はみることとなる。(図8 参照) これはホーキング輻射と呼ばれ、それが導出できたことになる。

また、赤方偏移された温度を計算すると

$$T = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{4GM} \quad (4.3)$$

となる。これはホーキングが導出したホーキング温度と係数まで含めて一致する。

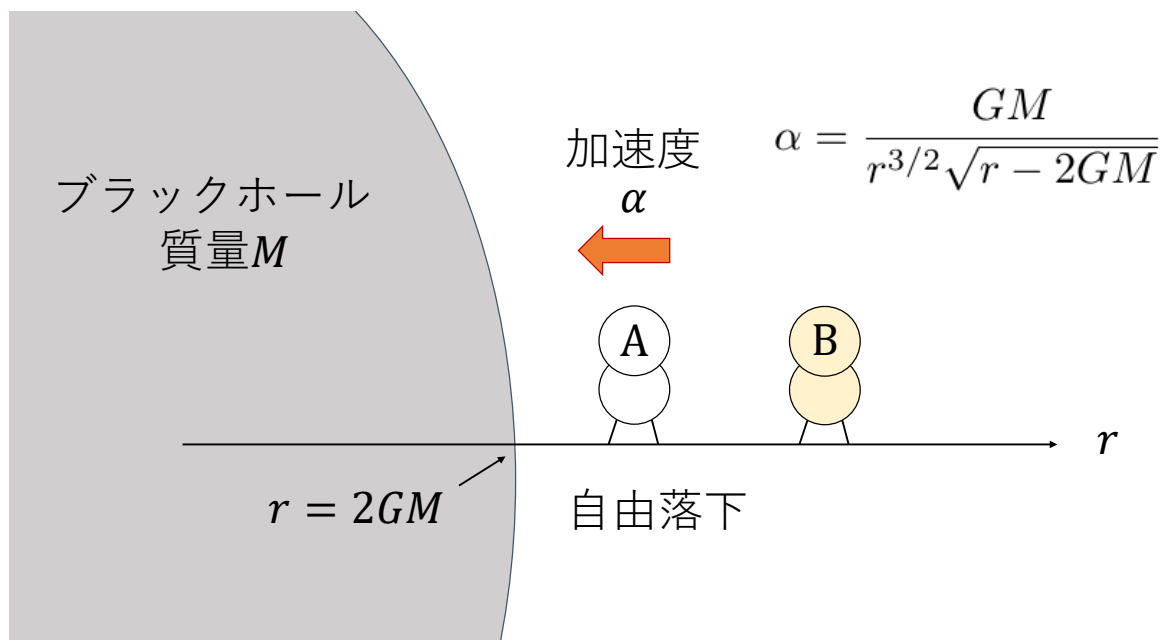


図6 ホーキング輻射の導出:仮定

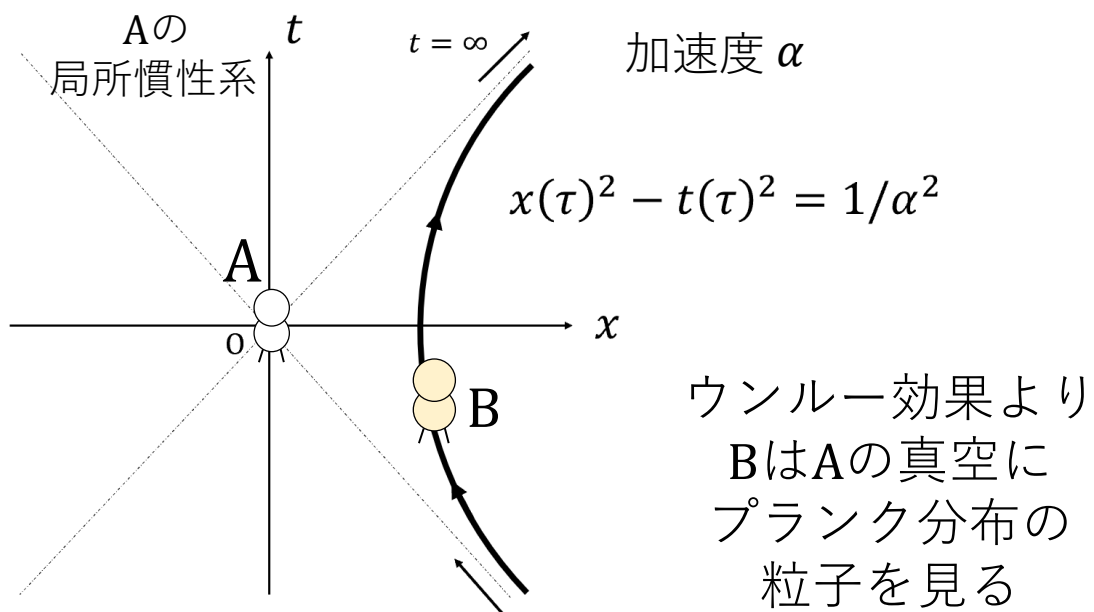


図7 ホーキング輻射の導出:Aの局所慣性系

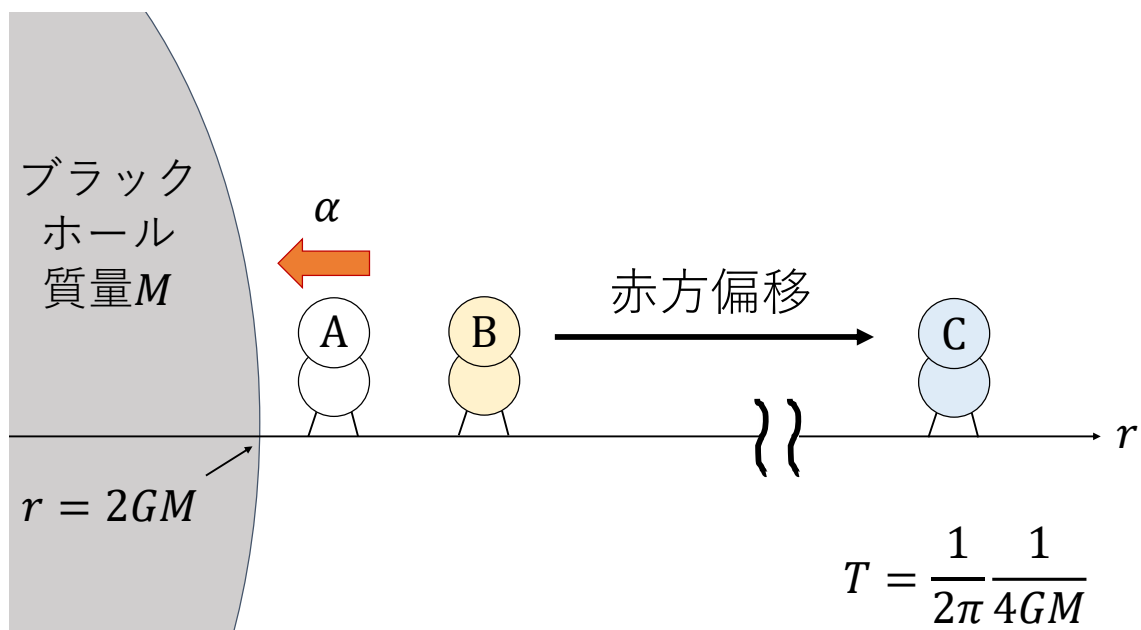


図8 ホーキング輻射の導出:赤方偏移

5 補遺

ここでは簡単にシュワルツシルトブラックホールの説明を行う。

5.1 シュワルツシルト解

球対称性のある真空解として

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (5.1)$$

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (5.2)$$

という計量が存在する。これをシュワルツシルト解という。この計量は明らかに $r = 2GM$ で g_{rr} 成分が、また $r = 0$ で g_{tt} 成分が発散している。つまりこの計量は $r = 0, r = 2GM$ に特異点を持つ。しかし $r = 2GM$ の方は実は座標の選び方によるものであり、以下に示すように、適切に座標変換することによって取り除くことができる。そのため見かけ上の特異点とよばれる。

5.2 亀座標系

シュワルツシルト解の見かけ上の特異点を取り除くための座標を探す。

シュワルツシルト解における動径ヌル測地線 ($d\theta = d\phi = 0, ds^2 = 0$) を考える。

$$\begin{aligned} 0 = ds^2 &= - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 \\ &= - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \left(dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-2} dr^2 \right) \\ &= - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \left(dt - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr \right) \left(dt + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr \right) \end{aligned} \quad (5.3)$$

ここで

$$dr^* = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr \quad (5.4)$$

と dr^* 定義すると、

$$0 = ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) (dt - dr^*)(dt + dr^*) \quad (5.5)$$

となる。よって動径ヌル測地線は

$$\frac{dt}{dr^*} = \pm 1 \quad (5.6)$$

$$t = \pm r^* + \text{const.} \quad (5.7)$$

を満たす。ミンコフスキー座標の r の代わりにこの r^* を用いた座標系 (t, r^*, θ, ϕ) を亀座標系という。この r^* と r との関係を求めるには式 (5.4)、すなわち

$$dr^* = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr = \frac{r}{r - 2GM} dr = \left(1 + \frac{2GM}{r - 2GM}\right) dr \quad (5.8)$$

を積分し、適当に積分定数をとれば良く、

$$r^* = r + 2GM \ln \left(\frac{r}{2GM} - 1 \right) \quad (5.9)$$

となる。したがって、亀座標系のメトリックはこの r を用いて

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dr^{*2} + r^2 d\Omega^2 \quad (5.10)$$

となる。式 (5.10) から分かるように、亀座標系を採用することによって、見かけ上の特異点 ($r = 2GM$) を取り除くことができた。式 (5.9) より、見かけ上の特異点は亀座標系では $r^* = -\infty$ に対応している。ここで亀座標系 (t, r^*) における光円錐を書いてみると、式 (5.6) から分かるように、次のような全ての時空点で円錐の斜面の傾きが等しい光円錐となる。

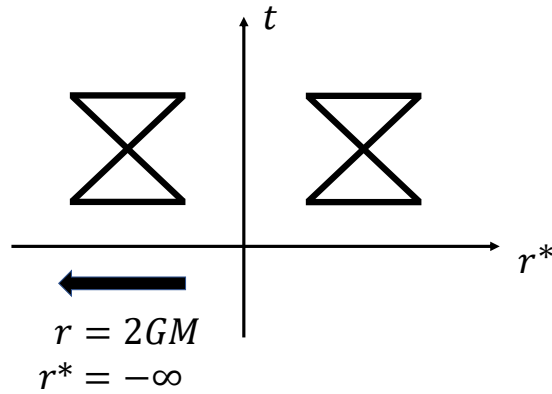


図9 亀座標系における光円錐

5.3 エディントン–フィンケルSTEIN座標系とブラックホール

次に、亀座標系を元にし、ヌル測地線を記述するのにさらに適した座標系を導入する。というのも、シュワルツシルト計量での見かけの特異点 $r = 2GM$ での振る舞いが見たいにも関わらず、メトリックが発散しないように導入した亀座標ではその点が $-\infty$ となってしまう見づらいのためである。

動径ヌル測地線は

$$0 = ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) (dt - dr^*)(dt + dr^*) \quad (5.11)$$

を満たした。ここで、

$$\begin{aligned} du &= dt - dr^* \\ dv &= dt + dr^* \end{aligned} \quad (5.12)$$

と定義すると、これは

$$0 = ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) du dv \quad (5.13)$$

と書ける。したがって動径ヌル測地線の方程式 $dt = \pm dr^*$ はこの u, v を用いて

$$du = 0 \quad \text{or} \quad dv = 0 \quad (5.14)$$

とさらに簡潔に書ける。 du, dv の定義式 (5.12) を積分すれば、

$$\begin{aligned} v &= t + r^* \\ u &= t - r^* \end{aligned} \quad (5.15)$$

と、 u, v と t, r^* との関係が得られる。積分系での動径ヌル測地線

$$u = \text{const.} \quad \text{or} \quad v = \text{const.} \quad (5.16)$$

は当然亀座標系でのそれである式 (5.7) に一致する。ただし式 (5.16) において、どちらが外向きのヌル測地線であるかは、定義 (5.12) あるいは (5.16) から

$$\begin{aligned} u = \text{const.} &: \text{外向き} \\ v = \text{const.} &: \text{内向き} \end{aligned} \quad (5.17)$$

であることに注意する。ここで、時間座標を v のみにするため、 u を消去することを考える。式 (5.12) の差をとって

$$du = dv - 2dr^* \quad (5.18)$$

よって

$$\begin{aligned} du dv &= (dv - 2dr^*) dv \\ &= dv^2 - 2dv dr^* \end{aligned} \quad (5.19)$$

これより du を消去し、式 (5.8) を用いると、式 (5.13) は

$$\begin{aligned} 0 = ds^2 &= -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dv^2 + 2dv \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dr^* \\ &= -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dv^2 + 2dv dr \end{aligned} \quad (5.20)$$

となる。 r^* ではなく r を用いて書けていることに注意する。 $dv = 0$ が内向きであったことを思い出せば、外向きは $dv \neq 0$ であり、それゆえ動径ヌル測地線は

$$\frac{dv}{dr} = \begin{cases} 0 & (\text{内向き}) \\ 2\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} & (\text{外向き}) \end{cases} \quad (5.21)$$

を満たす。こうしてヌル測地線を記述するのにさらに適した座標が得られた。

ここで、この座標系でヌル測地線の振る舞いについて考えてみる。 $r < 2GM$ で外向きの測地線の dv/dr が負であることから、 $dv > 0$ のとき $dr < 0$ となってしまうことが分かる。 v は時間座標であったので、これは $r < 2GM$ の領域では外向きに発せられた光でさえも、その領域から出ることができないということを意味する。

この座標系の光円錐を見るとこの状況がさらによく分かる。内向きの測地線の dv/dr は r によらず 0 であるのに対し、外向きの dv/dr が r の増加関数のため光円錐は r が小さくなるにつれてしぼんでいくことになる。十分大きな r から r を少しずつ小さくしていくと $r = 2GM$ でその傾きが垂直となる。よって $r = 2GM$ より r が小さくなってしまうと r が小さくなる向きにしか光円錐は向かなくなる。光はこの光円錐の面上に、質量を持つ物体は timelike な光円錐の内側のみに世界線をもつので、 $r < 2GM$ の領域に一度入ってしまうと二度と外には出られなくなってしまう。この $r < 2GM$ の領域をブラックホールといい、その表面を事象の地平面という。^{*1}

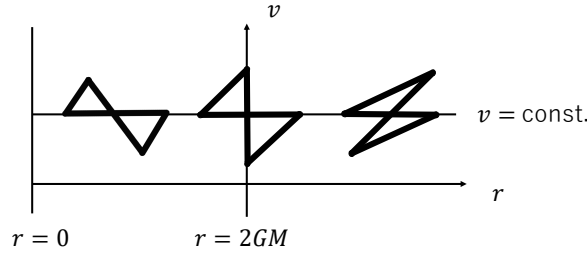


図 10 エディントンフィンケルステイン座標系における光円錐

(v, r, θ, ϕ) の座標系をエディントンフィンケルステイン座標系といい、そのメトリックは以上より

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dv^2 + (dvdr + drdv) + r^2 d\Omega^2 \quad (5.22)$$

となる。この座標系も亀座標系と同じく、シュワルツシルト座標系での見かけの特異点 $r = 2GM$ で正則であることに注意する。

^{*1} シュワルツシルト時空のみを考える上ではこのような定義で十分である。ニュートン力学では「脱出速度が光速となる天体」と定義されることもあるが、その定義はここでの定義と合致しない。ニュートン力学でのそのブラックホールの定義は「加速度を外から与えることなく抜け出せること」を意味するが、一般相対性理論でのこの定義は「加速度を外から与えたとしても抜け出せない」というより強い条件になっているためである。

6 まとめ

本論文ではウンルー効果によってホーキング輻射を導出した。

始めに曲がった時空中でのスカラー場の量子化の問題として、通常の場合の量子論とは異なり、一般の時空では観測者の間で共有する自然な基底が存在せず、それゆえ一般に真空が異なり、また観測する粒子数も異なるものとなることを見た。

次に、2次元ミンコフスキー時空中の等加速度運動を考え、ミンコフスキー時空の慣性系に対して加速度運動している観測者は、慣性系の真空にある温度のプランク分布を見出すというウンルー効果を導出した。

そしてウンルー効果をシュワルツシルト計量ブラックホールの事象の地平面に直接応用することでホーキング輻射を導出した。ホーキング温度と係数まで含めて一致する温度のプランク分布を導出することができた。

ホーキング輻射によってブラックホールはエネルギーを失いつづけることになる。これがブラックホールの蒸発とよばれる現象になる。これによりブラックホールエントロピーやホログラフィーなどといった様々な研究分野に関連することとなる。

これにより、本論文で導出したホーキング輻射は量子重力理論だけに留まらず、様々な最先端の研究領域において重要な現象であると言える。

謝辞

本研究を進めるにあたり、指導教員である谷井義彰教授には終始丁寧で細部にわたるご指導を頂きました。心より感謝申し上げます。

また、同じ素粒子論研究室の佐藤丈准教授、仁尾真紀子連携准教授には場の量子論の輪講等を通じ、熱心で手厚いご指導を頂きました。ここに心より感謝申し上げます。

そして、梁正樹氏を初め、素粒子理論研究室の方々には日々様々な面でお世話になりました。物理学の議論をして頂いたのはもちろんのこと、時には精神的に支えて頂いたこともありました。感謝の気持ちでいっぱいです。本当にありがとうございました。

参考文献

- [1] S.W. Hawing, Particle creation by black holes, Commun. Math. Phys. 43 (1975) 199.
- [2] S.M. Carroll, Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity(Addison Wesley, 2004).
- [3] W.G. Unruh, Notes on black-hole evaporation, Phys. Rev. D14 (1976) 870.
- [4] 坂本 真人, 場の量子論 –不変性と自由場を中心にして– (裳華房, 2014).