

重力波の理論波形

13RP032 福永 真士

はじめに

重力波とは、1916年にアインシュタインによって予言された光速で伝わる時空間の歪みである。非常に小さい現象であるため観測が難しく、2015年9月14日にレーザー干渉計重力波天文台 LIGO によって世界で初めて重力波が観測されることになった。重力波はその性質から波源自体の情報や重力の性質を理解する手掛かりになると考えられている。そこで、今回の論文で重力波の理論を紹介し、重力波の理論波形を導いて考察することを目的とした。

ところで、重力波は結びつきが非常に弱いので物質と出会っても物質をほとんど変形させず、そのまま通過してしまう。また、結びつきが弱いということは発生する効率も低いということであり、重力波の測定が難しいことを意味している。このような重力波特有の性質を理論的に、そして段階的に見ていくため、本論文では三部構成に分割して重力波を議論していくことにした。まず第一章では一般相対性理論を必要な部分だけ簡単にまとめた。そこでは重力を表す方程式であるアインシュタイン方程式を導出するところまで説明した。第二章では一般相対性理論で扱った数学や記号を用いて最も単純な重力波の模型である、線形重力波を議論した。理論が線形であるということは時空間の計量が背景計量と計量摂動に分解することができるという論理に基づいて議論を展開した。そして重力波振幅を求めるることはアインシュタイン方程式を解くことに帰着するということを言及し、それを背景計量がミンコフスキーメトリクスである場合において解いて重力波振幅の表式を導出した。また、重力波の性質を理解するために簡単な具体例を提示した後、重力波の光度や偏極を議論した。最後に第三章では実用性を兼ねて、背景計量がミンコフスキーメトリクスではない実際の重力波を議論する場合にどんな手法を取るのかを紹介し考察した。

この論文では記法を次のように採る：

単位系

$$c = G = 1, \quad [\text{kg}] = [\text{m}] = [\text{s}] \quad (1)$$

スカラー

$$\phi \quad (2)$$

ベクトル (反変ベクトル)

$$A^\mu \quad (3)$$

一次形式 (共変ベクトル)

$$A_\mu \quad (4)$$

(k,l) テンソル

$$A^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_l} \quad (5)$$

計量 (metric)

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} = \delta_\sigma^\mu \quad (7)$$

線素

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (8)$$

ミンコフスキー計量 (平坦計量)

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

ヌルベクトル l^μ

$$l_\mu l^\mu = 0 \quad (10)$$

反対称記号

$$A_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu}) \quad (11)$$

対称記号

$$B_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(B_{\mu\nu} + B_{\nu\mu}) \quad (12)$$

Contents

1 一般相対性理論	6
1.1 共変微分	6
1.2 クリストッフェル記号	8
1.3 測地線の方程式	9
1.4 リーマンテンソル	10
1.5 曲がった時空間の物理	14
1.6 ニュートン極限	15
1.7 アインシュタイン方程式	16
2 線形重力波	20
2.1 線形アインシュタイン方程式	20
2.1.1 ゲージ変換	21
2.2 重力波の生成	22
2.2.1 質量の等しい二つの星の連星からの重力波（円軌道）	26
2.2.2 質量が異なる二つの星の連星からの重力波（円軌道）	28
2.2.3 質量が異なる二つの星の連星からの重力波（楕円軌道）	29
2.3 四重極公式	31
2.4 トランスバース・トレースレスゲージ (TT ゲージ)	33
2.5 TT ゲージの意味	35
3 重力波の解析	39
3.1 連星軌道 (Inspiral) フェイズ	40
3.1.1 PN 近似の下での場の方程式	40
3.1.2 PN 漸近場	46
3.1.3 点粒子の系に対する PN 近似	49
3.1.4 Einstein-Infeld-Hoffmann 方程式	50
3.2 合体 (merging) フェイズ	52
3.3 リングダウン (ring down) フェイズ	52
3.3.1 Schwarzschild ブラックホールの線形摂動	52
3.3.2 Odd パリティ摂動 : Regge-Wheeler 方程式	54
3.3.3 Even パリティ摂動 : Zerilli 方程式	55
3.3.4 Kerr ブラックホールの線形摂動	57
3.3.5 アインシュタイン方程式のテトラッド表現	57
3.3.6 Newman-Penrose formalism	59
3.3.7 Teukolsky 方程式	59
まとめ	61

CONTENTS	5
A 楕円運動の計算	62
B PN 近似の計算	65
C Schwarzschild 解の導出	68
D Kerr 解の導出	75
謝辞	90
参考文献	91

Chapter 1

一般相対性理論

一般相対性理論は重力を記述することを目的とした理論であり、曲がっている時空間の幾何学である。そこでは重力は時空間の曲率と結びつくと考えられている。そして一般相対性理論は次の等価原理に基づく：

局所的な観測によって重力場を検出することは不可能である。それゆえに時空間中の小さな領域では、物理法則は特殊相対論のそれにまとめられる。

これを利用して、次のように考える。座標不变な形式—テンソル形式で方程式を書くことが出来れば、平らな時空間（ミンコフスキ空空間）の慣性座標系で確かな物理法則は曲がった時空間でも正しいままである。これを特にミニマルカップリング原理という。

1.1 共変微分

慣性座標系の平坦な空間では偏微分演算子 ∂_μ は (k,l) テンソルを $(k,l+1)$ テンソルまで写像する。それは独立変数に線形的に作用し、そのテンソル積はライプニッツ則に従う。しかし、偏微分によって与えられる写像は元の座標系に依存してしまう。それゆえに、曲がった空間で座標系に依存しないような微分演算を考える場合は、偏微分演算子の関数であるが座標とは独立であるような演算子を考えなくてはならない。その演算子のことを共変微分演算子 ∇_μ という。より一般的には、テンソルが平行移動したときテンソルの変化率を定量化する演算を共変微分という。平行移動はある経路に沿ってベクトルを動かしながら、その過程の初めから終わりまでそれを一定に保つという概念である。

これと結び付けて三次元球面において共変微分の概念を直観的に説明することができる。Figure1.1を見よ。まずある赤道上のベクトルを考え、それがある経度の線に沿うように向いているとする。このベクトルを経度の線に沿って北極まで平行移動させる。次に、球の中心に原点を取り、角度 θ でベクトルを赤道に沿って平行移動し、そして先程と同じようにそのベクトルを北極まで経度の線に沿って動かす。Figure1.1で示したように、二つのベクトルは、二つの経路に沿って平行移動し、互いに異なる値を持って同じ目的地に到着することがわかる。従って、共変微分は”ベクトルを一定に保つこと”の概念の曲がった空間への一般化に伴って生じるのである。

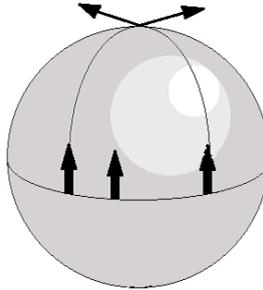


Figure 1.1: 球面上のベクトルの平行移動

それゆえに共変微分も独立変数に線形的に作用し、ライプニッツ則に従うとする。そして一般化として考えられることは、まず偏微分を取り、そこに結果を共変にする補正を加えるということである。そこで、具体的にベクトル V^ν の共変微分に対するこの意味を考えよう。これは単純に、ある方向 μ に対し、共変微分 ∇_μ が偏微分 ∂_μ と $n \times n$ 行列 $(\Gamma_\mu)^\rho_\sigma$ によって指定された補正を加えたものにより与えられるということを意味している。この括弧を落とし、適当な行列 $\Gamma_{\mu\sigma}^\rho$ (これを接続係数という) で書くとすると

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu V^\lambda \quad (1.1)$$

を得る。もしこれがベクトルの共変微分に対する表式であるなら、左辺が $(1,1)$ テンソルであることから右辺も $(1,1)$ テンソルであるという要請が生じる。これより接続係数 $\Gamma_{\mu\lambda}^\nu$ の変換の性質を決めることができる。その要請より変換則が

$$\nabla_{\mu'} V^{\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \nabla_\mu V^\nu \quad (1.2)$$

であってほしいということである。これと

$$\nabla_{\mu'} V^{\nu'} = \partial_{\mu'} V^{\nu'} + \Gamma_{\mu'\lambda'}^\nu V^{\lambda'} \quad (1.3)$$

を比較し、この方程式が任意のベクトル V^λ に対して正しくなければならないということから

$$\Gamma_{\mu'\lambda'}^{\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^\nu - \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}} \frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} \quad (1.4)$$

となるとわかる。従って二項目の存在により、接続係数はテンソルではない。しかし係数がテンソルであることを要求していないのでこれは数学的に全く問題はない。全体としてテンソルのように変換すれば良いのである。さて、ベクトルに対する共変微分の表式が得られたので、次に一次形式についての共変微分を考える。一般に

$$\nabla_\mu \omega_\nu = \partial_\mu \omega_\nu + \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda \omega_\lambda \quad (1.5)$$

のよう書くことができる。ここで $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda$ は各 μ に対する新しい行列の組である。テンソルとして $\nabla_\mu \omega_\nu$ が変換しなくてはならないので、これを実現するために次

の二つの性質を導入する。

- ・縮約する順序が交換できる : $\nabla_\mu(T^\lambda{}_{\lambda\rho}) = (\nabla T)_\mu{}^\lambda{}_{\lambda\rho}$
- ・スカラーの共変微分はスカラーの偏微分になる : $\nabla_\mu\phi = \partial_\mu\phi$

一つ目の性質はクロネッカーのデルタ（恒等写像）が共変的に定数である ($\nabla_\mu\delta_\sigma^\lambda = 0$) という主張と等しい。一つ目の性質と共に変微分もライプニツツ則に従っていたことに注目して、ある一次形式 ω_μ とベクトル V^μ の積 $\omega_\lambda V^\lambda$ により定義されたスカラーの共変微分を取ることができ、

$$\begin{aligned}\nabla_\mu(\omega_\lambda V^\lambda) &= (\nabla_\mu\omega_\lambda)V^\lambda + \omega_\lambda(\nabla_\mu V^\lambda) \\ &= (\partial_\mu\omega_\lambda)V^\lambda + \tilde{\Gamma}_{\mu\lambda}^\sigma\omega_\sigma V^\lambda + \omega_\lambda(\partial_\mu V^\lambda) + \omega_\lambda\Gamma_{\mu\rho}^\lambda V^\rho\end{aligned}\quad (1.6)$$

を得る。しかし、 $\omega_\lambda V^\lambda$ はスカラーだから、二つ目の性質より偏微分によっても与えられなければならない：

$$\begin{aligned}\nabla_\mu(\omega_\lambda V^\lambda) &= \partial_\mu(\omega_\lambda V^\lambda) \\ &= (\partial_\mu\omega_\lambda)V^\lambda + \omega_\lambda(\partial_\mu V^\lambda)\end{aligned}\quad (1.7)$$

これは接続係数を持つ項どうしが打ち消し合うことを示している。ゆえに、和を取っている添え字（ダミー添え字）を整理して

$$0 = \tilde{\Gamma}_{\mu\lambda}^\sigma\omega_\sigma V^\lambda + \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma\omega_\sigma V^\lambda\quad (1.8)$$

でなければならず、 ω_σ と V^λ がともに任意なので

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\lambda}^\sigma = -\Gamma_{\mu\lambda}^\sigma\quad (1.9)$$

となる。従って一次形式の共変微分は

$$\nabla_\mu\omega_\nu = \partial_\mu\omega_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda\omega_\lambda\quad (1.10)$$

である。この結果より任意のランクのテンソルの共変微分についても書き下すことができる：

$$\begin{aligned}\nabla_\sigma T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} &= \partial_\sigma T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} \\ &+ \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu_1} T^{\lambda\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu_2} T^{\mu_1\lambda\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} \\ &- \Gamma_{\sigma\nu_1}^{\lambda} T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\lambda\nu_2\cdots\nu_l} - \Gamma_{\sigma\nu_2}^{\lambda} T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\lambda\cdots\nu_l}\end{aligned}\quad (1.11)$$

これが共変微分に対する一般表式である。

1.2 クリストッフェル記号

一般相対性理論の幾何学を構成するため、接続係数を時空間の計量 $g_{\mu\nu}$ に関して表すことを考えよう。次の二つの性質を新たに導入する：

- ・torsion-free : $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda$
- ・metric compatibility: $\nabla_\mu g^{\mu\nu} = 0$

二つ目の性質により、共変微分と指数の上げ下げが交換する。従ってベクトル V^ν に対して

$$g_{\mu\lambda}\nabla_\rho V^\lambda = \nabla_\rho(g_{\mu\lambda}V^\lambda) = \nabla_\rho V_\mu \quad (1.12)$$

が成り立つ。

さて、二つ目の性質を用いて次の三つの方程式を作ることができる：

$$\begin{aligned} \nabla_\rho g_{\mu\nu} &= \partial_\rho g_{\mu\nu} - \Gamma_{\rho\mu}^\lambda g_{\lambda\nu} - \Gamma_{\rho\nu}^\lambda g_{\mu\lambda} = 0 \\ \nabla_\mu g_{\nu\rho} &= \partial_\mu g_{\nu\rho} - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda g_{\lambda\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^\lambda g_{\nu\lambda} = 0 \\ \nabla_\nu g_{\rho\mu} &= \partial_\nu g_{\rho\mu} - \Gamma_{\nu\rho}^\lambda g_{\lambda\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda g_{\rho\lambda} = 0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

第一式から第二式、第三式を引き、一つ目の性質を使うと

$$\partial_\rho g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\rho} - \partial_\nu g_{\rho\mu} + 2\Gamma_{\mu\nu}^\lambda g_{\lambda\rho} = 0 \quad (1.14)$$

これに $g^{\sigma\rho}$ を掛けることにより、接続係数に対して解くことが出来て

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \quad (1.15)$$

を得る。上の二つの性質を課すことで一意的に接続係数の形を決めることができた。このように計量から導かれた接続係数をクリストッフェル記号（あるいはクリストッフェル接続）という。

1.3 測地線の方程式

測地線の方程式を導く準備として、平行移動の概念を曲がった空間におけるテンソルに応用する。曲線 $x^\mu(\lambda)$ を仮定し、平坦な空間でこの曲線に沿ったテンソル $T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l}$ の矛盾しない要請は単に成分が定数であることである：

$$\frac{d}{d\lambda}T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} = \frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial x^\mu}T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} = 0$$

曲がった空間においてこのテンソル的な性質をつくるために、この方程式の偏微分を共変微分によって置き換える。そこで次の方向微分を定義する：

$$\frac{D}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda}\nabla_\mu \quad (1.16)$$

これは写像であり、 (k,l) テンソルから (k,l) テンソルまでの経路に沿ってのみ定義される。それから経路 $x^\mu(\lambda)$ に沿ったテンソル T の共変微分が消えるという要請になるようにその T の平行移動を定義する：

$$\left(\frac{D}{d\lambda}T\right)^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} \equiv \frac{dx^\sigma}{d\lambda}\nabla_\sigma T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} = 0 \quad (1.17)$$

この方程式を平行移動方程式という。ベクトルに対するこの方程式は

$$\frac{d}{d\lambda}V^\mu + \Gamma_{\sigma\rho}^\mu \frac{dx^\sigma}{d\lambda}V^\rho = 0 \quad (1.18)$$

という形式をとる。平行移動方程式は初期値問題で決まる一階微分方程式として見ることができる。そのため、経路に沿ったある点でのテンソルを仮定し、式 (1.17)

を解くような、経路に沿った別の点までのテンソルへの一意的な連続性がある。さらに上の表式から平行移動の概念は明らかに接続に依存しているとわかる。ところで計量に対しては

$$\frac{D}{d\lambda} g_{\mu\nu} = \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \nabla_\sigma g_{\mu\nu} = 0 \quad (1.19)$$

となる。これはベクトルの内積が平行移動に対して保存することを示している。具体的に書くと、ベクトル V^μ と W^ν の内積が曲線 $x^\sigma(\lambda)$ に沿って平行移動したとすると

$$\frac{D}{d\lambda} (g_{\mu\nu} V^\mu W^\nu) = g_{\mu\nu} \left(\frac{D}{d\lambda} V^\mu \right) W^\nu + g_{\mu\nu} V^\mu \left(\frac{D}{d\lambda} W^\nu \right) = 0 \quad (1.20)$$

となって、これは metric-compatible 接続に関する平行移動がベクトルのノルムや直交性などを保存することを表している。

さて、測地線の話に戻ろう。測地線は曲がった空間におけるユークリッド空間の直線の概念の一般化である。ふつう直線はある二点間の最短距離である。さらに直線は良い定義を持っている；直線はそれ自身の接ベクトル（曲線や曲面に接するようなベクトル）が平行移動した距離である（そうでなければ最短距離にならない）。従って、経路 $x^\mu(\lambda)$ に対する接ベクトルは $\frac{dx^\mu}{d\lambda}$ であるから、これが平行移動する状況は

$$\frac{D}{d\lambda} \frac{dx^\mu}{d\lambda} = 0 \quad (1.21)$$

あるいは

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0 \quad (1.22)$$

これが測地線の方程式である。平坦な空間に対する表式もすぐに得られて、クリストッフェル記号はその定義 (1.15) から $\Gamma_{\rho\sigma}^\mu = 0$ となって測地線の方程式は $\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} = 0$ となる。これは確かに直線に対する方程式となっている。

1.4 リーマンテンソル

1.1 節で共変微分に対してライプニッツ則が成立することを要請したが、共変微分の順序の交換に関する要請は何もしていなかった。共変微分はこの点でも微分とは異なるのである。その振る舞いがどのようになるのかを見るため、次の計算を行う：

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\rho = \nabla_\mu \nabla_\nu V^\rho - \nabla_\nu \nabla_\mu V^\rho \quad (1.23)$$

偏微分の順序は交換すること、クリストッフェル記号は下付き添え字に関して交換すること (torsion-free) に注意して

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \nabla_\nu V^\rho - \nabla_\nu \nabla_\mu V^\rho &= \partial_\mu (\nabla_\nu V^\rho) - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \nabla_\lambda V^\rho + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \nabla_\nu V^\sigma \\ &\quad - \partial_\nu (\nabla_\mu V^\rho) + \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \nabla_\lambda V^\rho - \Gamma_{\nu\sigma}^\rho \nabla_\mu V^\sigma \\ &= \partial_\mu \partial_\nu V^\rho + (\partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho) V^\sigma + \Gamma_{\nu\sigma}^\rho \partial_\mu V^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \partial_\nu V^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma V^\lambda \\ &\quad - \partial_\nu \partial_\mu V^\rho - (\partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho) V^\sigma - \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \partial_\nu V^\sigma - \Gamma_{\nu\sigma}^\rho \partial_\mu V^\sigma - \Gamma_{\nu\sigma}^\rho \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma V^\lambda \\ &= (\partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda) V^\sigma \end{aligned}$$

ここで左辺はテンソルであるから、右辺もテンソルでなくてはならない。任意の V^ρ について成り立つから、商の定理より () 内はテンソルである。そこで結果を

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\rho = R^\rho_{\sigma\mu\nu} V^\sigma \quad (1.24)$$

とおこう。この $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$ をリーマンテンソルという。すなわち

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} \quad (1.25)$$

である。また、この表式から明らかにリーマンテンソルの後ろ二つの添え字について反対称であるとわかる：

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = -R^\rho_{\sigma\nu\mu} \quad (1.26)$$

次にリーマンテンソルの性質を見ていく。4つの指数を持つリーマンテンソルは n 次元空間で n^4 個の独立な成分を持つ。しかし反対称性 (1.26) により後ろ二つの添え字は独立な値を $\frac{n(n-1)}{2}$ 個だけを持つ。従って全体として $n^2 \times \frac{n(n-1)}{2}$ 個の独立な成分を持つ。しかし他にも対称性が存在する。独立な成分についてさらなる議論を進めるために、添え字がすべて下付きのリーマンテンソルを考える：

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = g_{\rho\lambda} R^\lambda_{\sigma\mu\nu} \quad (1.27)$$

ここで議論を簡単にするために局所慣性座標系を選ぶ。局所慣性座標系にあるテンソルをハット付きで表す； $A_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ と書く。この系を簡単に説明すると、曲がった空間中である点 p のまわりで局所的に慣性系が取れるという場合を表している。すなわち、計量がミンコフスキイ計量で書くことができ、その一階微分が 0 に等しいということである（二階微分は変曲率を表すから 0 である必要はない）：

$$g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}(p) = \eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \quad , \quad \partial_{\hat{\sigma}} g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}(p) = 0 \quad (1.28)$$

$$(\text{ただし、} \partial_{\hat{\rho}} \partial_{\hat{\sigma}} g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}(p) \neq 0)$$

この系を選ぶことで不都合が生じることはない。なぜならテンソル形式で書かれている限り、座標変換により任意の系に移ることができるからである。

リーマンテンソルの議論に戻ろう。点 p で確立した局所慣性座標 $x^{\hat{\mu}}$ にあるリーマンテンソルの成分を考える。従って、クリストッフェル記号自身は消えるが、その導関数は消えない。それゆえに

$$\begin{aligned} R_{\hat{\rho}\hat{\sigma}\hat{\mu}\hat{\nu}}(p) &= g_{\hat{\rho}\hat{\lambda}} (\partial_{\hat{\mu}} \Gamma^{\hat{\lambda}}_{\hat{\nu}\hat{\sigma}} - \partial_{\hat{\nu}} \Gamma^{\hat{\lambda}}_{\hat{\mu}\hat{\sigma}}) \\ &= g_{\hat{\rho}\hat{\lambda}} \partial_{\hat{\mu}} \left\{ \frac{1}{2} g^{\hat{\lambda}\hat{\tau}} (\partial_{\hat{\nu}} g_{\hat{\sigma}\hat{\tau}} + \partial_{\hat{\sigma}} g_{\hat{\tau}\hat{\nu}} - \partial_{\hat{\tau}} g_{\hat{\nu}\hat{\sigma}}) \right\} \\ &\quad - g_{\hat{\rho}\hat{\lambda}} \partial_{\hat{\nu}} \left\{ \frac{1}{2} g^{\hat{\lambda}\hat{\tau}} (\partial_{\hat{\mu}} g_{\hat{\sigma}\hat{\tau}} + \partial_{\hat{\sigma}} g_{\hat{\tau}\hat{\mu}} - \partial_{\hat{\tau}} g_{\hat{\mu}\hat{\sigma}}) \right\} \\ &= \frac{1}{2} (\partial_{\hat{\mu}} \partial_{\hat{\sigma}} g_{\hat{\rho}\hat{\nu}} - \partial_{\hat{\mu}} \partial_{\hat{\rho}} g_{\hat{\nu}\hat{\sigma}} - \partial_{\hat{\nu}} \partial_{\hat{\sigma}} g_{\hat{\rho}\hat{\mu}} + \partial_{\hat{\nu}} \partial_{\hat{\rho}} g_{\hat{\mu}\hat{\sigma}}) \end{aligned} \quad (1.29)$$

となる。最初の行で $\Gamma^{\hat{\tau}}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}(p) = 0$ を用いた。その後、 $\partial_{\hat{\mu}} g^{\hat{\lambda}\hat{\tau}} = 0$ を用い、最後に微分の交換性を用いた。この表式から $R_{\rho\sigma\mu\nu}$ の性質を見ることができる：

前二つの添え字について反対称

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu} \quad (1.30)$$

後二つの添え字について反対称 (既に (1.26) で示してある)

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\rho\sigma\nu\mu} \quad (1.31)$$

前二つの添え字の組と後二つの添え字の組の交換の下で不变

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma} \quad (1.32)$$

ここでテンソルの座標不变性からハットは除いてある。さらに、後三つの添え字のサイクリックな置換を足し合わせるとそれらは消えるとわかる：

$$\begin{aligned} R_{\rho\sigma\mu\nu} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\partial_\sigma g_{\rho\nu} - \partial_\mu\partial_\rho g_{\nu\sigma} - \partial_\nu\partial_\sigma g_{\rho\mu} + \partial_\nu\partial_\rho g_{\mu\sigma}) \\ R_{\rho\mu\nu\sigma} &= \frac{1}{2}(\partial_\nu\partial_\mu g_{\rho\sigma} - \partial_\nu\partial_\rho g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\sigma\partial_\rho g_{\nu\mu}) \\ R_{\rho\nu\sigma\mu} &= \frac{1}{2}(\partial_\sigma\partial_\nu g_{\rho\sigma} - \partial_\sigma\partial_\rho g_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu g_{\rho\sigma} + \partial_\mu\partial_\rho g_{\nu\sigma}) \\ \therefore R_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\rho\nu\sigma\mu} &= 0 \end{aligned} \quad (1.33)$$

(1.31) より、(1.33) が後三つの添え字の反対称部分の消去と等しいことがわかる：

$$R_{\rho[\sigma\mu\nu]} = 0 \quad (1.34)$$

リーマンテンソルの独立な成分の議論を再開する。 $R_{\rho\sigma\mu\nu}$ が前二つ、後二つで反対称、そしてそれらの二つの組の交換で対称であるということは、対称行列 $R_{[\rho\sigma][\mu\nu]}$ としてリーマンテンソルを考えることを意味する。これは、全体として $m \times m$ 対称行列で $\rho\sigma$ と $\mu\nu$ の組に対して $n \times n$ の反対称行列であることを表している。 $m \times m$ 対称行列は $\frac{m(m+1)}{2}$ 個の独立な成分を持つに対し、 $n \times n$ 反対称行列は $\frac{n(n-1)}{2}$ 個の独立な成分を持つ。それゆえに

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m(m+1) &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}n(n-1)\right]\left[\frac{1}{2}n(n-1)+1\right] \\ &= \frac{1}{8}(n^4 - 2n^3 + 3n^2 - 2n) \end{aligned} \quad (1.35)$$

の独立な成分を持つ。さらに (1.55) の帰結としてリーマンテンソルの反対称部分全体が消えるという事実を扱わなくてはならない：

$$R_{[\rho\sigma\mu\nu]} = 0 \quad (1.36)$$

$$\left(\because R_{[\rho\sigma\mu\nu]} = \frac{2}{4!}[(R_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\rho\nu\sigma\mu}) - (R_{\rho\nu\mu\sigma} + R_{\rho\mu\sigma\nu} + R_{\rho\sigma\nu\mu})] = \frac{1}{12}R_{\rho[\sigma\mu\nu]} \right)$$

四つの添え字を持つ全体で反対称なテンソルは $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$ 個の項を持ち、それゆえにこの分だけ独立な成分の数が減る：

$$\frac{1}{8}(n^4 - 2n^3 + 3n^2 - 2n) - \frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3) = \frac{1}{2}n^2(n^2 - 1) \quad (1.37)$$

これがリーマンテンソルの独立な成分の数である。これより今考えている4次元ではリーマンテンソルは20個の独立な成分を持つとわかる。

リーマンテンソルの代数的な対称性に加えて、異なる点での相対値に制限を加える微分恒等式が従う。リーマンテンソルの共変微分を局所慣性座標系で評価すると

$$\begin{aligned} \nabla_{\hat{\lambda}} R_{\hat{\rho}\hat{\sigma}\hat{\mu}\hat{\nu}} &= \partial_{\hat{\lambda}} R_{\hat{\rho}\hat{\sigma}\hat{\mu}\hat{\nu}} \\ &= \frac{1}{2} \partial_{\hat{\lambda}} (\partial_{\hat{\mu}} \partial_{\hat{\sigma}} g_{\hat{\rho}\hat{\nu}} - \partial_{\hat{\mu}} \partial_{\hat{\rho}} g_{\hat{\nu}\hat{\sigma}} - \partial_{\hat{\nu}} \partial_{\hat{\sigma}} g_{\hat{\rho}\hat{\mu}} + \partial_{\hat{\nu}} \partial_{\hat{\rho}} g_{\hat{\mu}\hat{\sigma}}) \end{aligned} \quad (1.38)$$

となる。そして前三つの添え字のサイクリックな置換の和を考えると

$$\begin{aligned} \nabla_{\hat{\lambda}} R_{\hat{\rho}\hat{\sigma}\hat{\mu}\hat{\nu}} + \nabla_{\hat{\rho}} R_{\hat{\sigma}\hat{\lambda}\hat{\mu}\hat{\nu}} + \nabla_{\hat{\sigma}} R_{\hat{\lambda}\hat{\rho}\hat{\mu}\hat{\nu}} \\ = \frac{1}{2} (\partial_{\hat{\lambda}} \partial_{\hat{\mu}} \partial_{\hat{\sigma}} g_{\hat{\rho}\hat{\nu}} - \partial_{\hat{\lambda}} \partial_{\hat{\mu}} \partial_{\hat{\rho}} g_{\hat{\nu}\hat{\sigma}} - \partial_{\hat{\lambda}} \partial_{\hat{\nu}} \partial_{\hat{\sigma}} g_{\hat{\rho}\hat{\mu}} + \partial_{\hat{\lambda}} \partial_{\hat{\nu}} \partial_{\hat{\rho}} g_{\hat{\mu}\hat{\sigma}} + \text{cyclic term}) \\ = 0 \end{aligned} \quad (1.39)$$

テンソル方程式であるから任意の座標系でこの方程式は成り立つ。従って

$$\nabla_{\lambda} R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_{\rho} R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_{\sigma} R_{\lambda\rho\mu\nu} = 0 \quad (1.40)$$

これを特にビアンキの恒等式という。

ここで、リーマンテンソルの二つの添え字について縮約してみる。反対称部分について縮約すれば結果は0になるが、そうでない添え字について縮約をすれば符号の違いを除いて結果は同じになる。このテンソルをリッチテンソルという：

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu} \quad (1.41)$$

リッチテンソルはリーマンテンソルの対称性から

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu} \quad (1.42)$$

という対称性を持つ。さらにリッチテンソルのトレースをとるとリッチスカラー(曲率)が得られる：

$$R = R^{\mu}_{\mu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (1.43)$$

これらを用いた形式を得るため、ビアンキの恒等式に対して縮約の操作を二回行うと

$$\begin{aligned} 0 &= g^{\nu\sigma} g^{\mu\lambda} (\nabla_{\lambda} R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_{\rho} R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_{\sigma} R_{\lambda\rho\mu\nu}) \\ &= \nabla^{\mu} R_{\rho\mu} - \nabla_{\rho} R + \nabla^{\nu} R_{\rho\nu} \end{aligned} \quad (1.44)$$

あるいは、ダミー添え字を整理して

$$\nabla^{\mu} R_{\rho\mu} = \frac{1}{2} \nabla_{\rho} R \quad (1.45)$$

metric compatibility のおかげで共変微分の添え字を上げられる。そこでAIN シュタインテンソルを定義できる：

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \quad (1.46)$$

4次元では、AIN シュタインテンソルはリッチテンソルのトレースが負になったものとして考えることができる ($G_\mu^\mu = -R$)。2重縮約したビアンキの恒等式は

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0 \quad (1.47)$$

と等しい。後でわかるように、リッチテンソルと計量の対称性のおかげで対称なこのテンソルは一般相対性理論で非常に重要な立ち位置にいる。

1.5 曲がった時空間の物理

以上の議論を用いて一般相対性理論により表される重力の物理を調べる準備をする。議題は二つである；重力場がどのように物質に影響を与えるのか、そして物質がどのように重力場を決めるのかである。ニュートンの重力理論では、それら二つの議題は重力ポテンシャル Φ 中の物質の加速度に対する表式

$$\mathbf{a} = -\nabla\Phi \quad (1.48)$$

そして物質の密度 ρ とニュートンの重力定数 $G = 1$ を用いたポテンシャルにおけるポアソン方程式

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho \quad (1.49)$$

から成る。議論の見通しを良くするため、しばらく定数 G を顕に書いておく。一般相対性理論で類推される主張は、どのように時空の曲率が重力として明示されて物質に働くのか、またどのようにエネルギーと運動量が曲率を生成して時空に影響を与えるのかである。等価原理を思い出そう。局所的な領域における重力の検出不可能性と局所慣性座標系を見つけることの類似性に加え、重力が普遍的にすべての物質に影響を与えることから重力が曲率と密接に結びついていると考えられる。またこれに関連してミニマルカップリング原理は単純にミンコフスキーメトリック $\eta_{\mu\nu}$ をもっと一般の計量 $g_{\mu\nu}$ に置き換えること、偏微分 ∂_μ を共変微分 ∇_μ に置き換えることに相当することになる。これを簡単な例で説明しよう。自由落下粒子の運動を考える。平坦な空間では、そのような粒子は直線上に動く。するとパラメータ化された経路 $x^\mu(\lambda)$ の方程式は

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} = 0 \quad (1.50)$$

である。一般座標ではこれはテンソル方程式ではない。一階微分はよく定義されたベクトルの成分であるけれども、二階微分はそうではない。実際、極座標 (r, φ) では円上で運動する自由粒子を除いてこの方程式は正しくない ($\frac{dr}{d\lambda}, \frac{d\varphi}{d\lambda}$ 等の混ざり合う項が存在する)。チェーンルールを用いて

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} = \frac{d}{d\lambda} \frac{dx^\mu}{d\lambda} = \frac{dx^\nu}{d\lambda} \partial_\nu \frac{dx^\mu}{d\lambda} \quad (1.51)$$

と書ける。これを曲がった空間に一般化する、すなわち偏微分を共変微分に置き換えると

$$\frac{dx^\nu}{d\lambda} \partial_\nu \frac{dx^\mu}{d\lambda} \rightarrow \frac{dx^\nu}{d\lambda} \nabla_\nu \frac{dx^\mu}{d\lambda} = \frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \quad (1.52)$$

従って、ニュートンの理論における方程式の適切な一般化は測地線の方程式

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0 \quad (1.53)$$

であるとわかる。それゆえに、一般相対性理論では自由粒子は測地線に沿って動く；1.3節との関連を見て取れる。

1.6 ニュートン極限

前の節では平坦時空間から曲がった時空間へ方程式を一般化する方法を見つけた。そこでこの節では方程式が重力をどう記述しているのかを見るために、ニュートンの重力理論の描像と一致する場合を見る。それはニュートン極限と呼ばれ、次の三つの要請から成る：

- ・光の速度に対して粒子はゆっくりと動く
- ・平坦時空の摂動として考えられるくらい重力場が弱い
- ・場は時間的に不変である（静止している）

パラメータとして固有時 τ をとり、測地線の方程式に対してこの極限を適用する。一つ目の要請は

$$\frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dt}{d\tau} \quad (1.54)$$

ということである。だから測地線の方程式は

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0 \quad (1.55)$$

となる。場は静止している ($\partial_0 g_{\mu\nu} = 0$) から、クリストッフェル記号 Γ_{00}^μ で残るものは

$$\Gamma_{00}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} (\partial_0 g_{\lambda 0} + \partial_0 g_{0\lambda} - \partial_\lambda g_{00}) = -\frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \partial_\lambda g_{00} \quad (1.56)$$

となる。最後に重力場が弱いということは、計量をミンコフスキ形式と小さな摂動の和に分解できるということである：

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (1.57)$$

h は一次のオーダーまで採る。計量の定義から $g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} = \delta_\sigma^\mu$ を用いて上付き添え字を持つ計量の分解を見つけることができて

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \chi^{\mu\nu} \quad \text{と仮定する。但し } |\chi^{\mu\nu}| \ll 1$$

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} &= g^{\mu\nu} (\eta_{\nu\sigma} + h_{\nu\sigma}) \\ &= (\eta^{\mu\nu} + \chi^{\mu\nu})(\eta_{\nu\sigma} + h_{\nu\sigma}) \\ &= \delta_\sigma^\mu + \eta_{\nu\sigma} (h^{\mu\sigma} + \chi^{\mu\sigma}) + 0 = \delta_\sigma^\mu \\ \therefore \chi^{\mu\nu} &= -h^{\mu\nu} \end{aligned}$$

従って

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \quad (1.58)$$

ここで $h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}h_{\rho\sigma}$ である。接続は高いオーダーにのみ寄与するから、ミンコフスキーメトリックを h の明らかなオーダーのものに対して添え字を上げ下げするために使うことができる。 $h_{\mu\nu}$ を、ミンコフスキースペースを伝搬し、他の場と作用する対称 $(0,2)$ テンソル場として考えても良い。以上のすべてを適用してやると

$$\Gamma_{00}^\mu = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\lambda}\partial_\lambda h_{00} \quad (1.59)$$

測地線の方程式 (1.55) は、それゆえに

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\lambda}\partial_\lambda h_{00} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \quad (1.60)$$

$\partial_0 h_{00} = 0$ を使うと、この $\mu = 0$ 成分はちょうど

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} = 0 \quad (1.61)$$

となって $\frac{dt}{d\tau}$ が定数であるとわかる。(1.60) の空間成分を決めるため、 $\eta^{\mu\nu}$ の空間成分が 3×3 恒等行列だったことを思い出すと、

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \partial_i h_{00} \quad (1.62)$$

を得る。これをニュートンの重力理論における方程式 (1.48) と比較すると

$$h_{00} = -2\Phi \quad (1.63)$$

あるいは言い換えると

$$g_{00} = -(1 + 2\Phi) \quad (1.64)$$

となる。それゆえに、時空間の曲率はニュートン極限で重力を記述するのに十分であるとわかる。

1.7 アインシュタイン方程式

次にニュートンポテンシャルに対するポアソン方程式

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho \quad (1.65)$$

に取って代わる方程式を見つけよう。左辺は重力ポテンシャルに二階微分が作用したものとなっており、一方右辺は質量分布の測定量となっている。この方程式を一般相対性理論に適応させる。質量密度の一般化テンソルは、エネルギー・運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ と考えられる。その一方で重力ポテンシャルは (1.64) のおかげで計量テンソル $g_{\mu\nu}$ によって置き換えられると考えられる。すなわち、

$$[\nabla^2 g]_{\mu\nu} \propto T_{\mu\nu} \quad (1.66)$$

という関係があると考えられる。まず考えられることとしてミニマルカップリング原理から偏微分 (ラプラスアン) $\nabla^2 = \delta^{ij}\partial_i\partial_j$ を共変微分 (ダランベルシアン) $\square =$

$\nabla^\mu \nabla_\mu$ に置き換えることである。しかし [] 内の計量は metric compatibility により自動的に 0 になってしまふ。幸運なことに計量の二階微分（と一階微分）ならそれは自明ではない。この項を含むテンソルで有力なもの一つはリーマンテンソル $R_{\sigma\mu\nu}^\rho$ である。クリストッフェル記号は計量の一階微分を含んでいる。それゆえにリーマンテンソルは計量の一階微分と二階微分の項をどちらも持っている。ただしリーマンテンソルでは右辺と添え字の数が合わないから、縮約してリッチテンソルを用いる。よって、重力場の方程式は

$$R_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (1.67)$$

と考えられる。 κ は定数である。しかし、エネルギー・運動量保存則

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0 \quad (1.68)$$

より (1.67) は

$$\nabla^\mu R_{\mu\nu} = 0 \quad (1.69)$$

となり、これは任意の幾何学で正しくない；ビアンキの恒等式

$$\nabla^\mu R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \nabla_\nu R \quad (1.70)$$

と $R = \kappa g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = \kappa T$ より

$$\nabla_\mu T = 0 \quad (1.71)$$

となる。スカラーの共変微分は偏微分になるから、(1.71) は時空間に対して T が不变であることを示す。 $T = 0$ で真空、 $T \neq 0$ で物質を表すから、この結果は受け入れがたい。そこでもう一つの可能性としてリッチテンソルから構成されるアインシュタインテンソル

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \quad (1.72)$$

を評価しよう。これは常に

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$$

が成り立つから、計量に対する場の方程式を

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (1.73)$$

と考えることができる。確かにこの方程式は、右辺は対称で保存される $(0,2)$ テンソルのエネルギー・運動量密度の共変な表式であるし、左辺は計量とその一階微分と二階微分で構成される対称で保存される $(0,2)$ テンソルとなっている。後はこの方程式がニュートン極限で重力ポテンシャルに対するポアソン方程式を満たすかを確かめればよい。これを見るため、(1.73) の両辺の縮約をとると

$$R = -\kappa T \quad (1.74)$$

これを用いると (1.73) は書き直すことができて

$$R_{\mu\nu} = \kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right) \quad (1.75)$$

を得る。次に弱い場で、時間に独立で、ゆっくりと粒子が動く極限にあるニュートンの重力を期待できる完全流体源のエネルギー・運動量

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) U_\mu U_\nu + p g_{\mu\nu} \quad (1.76)$$

を考える。ここで U^μ は 4 元速度、 ρ は静止系のエネルギー密度、 p は静止系の圧力である。ニュートン極限では圧力は無視できる；大雑把な説明をすると、物体の圧力は光速度に近い速度で伝搬する粒子の衝突によって生まれるため、それを除くニュートン極限では無視できるということである。よって実際に考えるエネルギー・運動量テンソルは

$$T_{\mu\nu} = \rho U_\mu U_\nu \quad (1.77)$$

今考えている流体は、地球や太陽のようなある質量を持つ物体であるから、流体の静止系

$$U^\mu = (U^0, 0, 0, 0) \quad (1.78)$$

での動きで極限を見ることができる。時間成分は規格化条件 $g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = -1$ を満たす。弱い場の極限では (1.57) と (1.58) より

$$\begin{aligned} g_{00} &= -1 + h_{00} \\ g^{00} &= -1 - h^{00} \end{aligned} \quad (1.79)$$

それから $h_{\mu\nu}$ の一次のオーダーでは

$$U^0 = 1 + \frac{1}{2} h_{00} \quad (1.80)$$

を得る。この表式は規格化条件を満たすように採れば得られる。ただしこの表式を (1.77) に代入するときは気を付けねばならない；エネルギー密度 ρ は十分小さいと考えている (ρ が 0 に採れるときは空間は平坦である) ので、今の近似の水準では単に $U^0 = 1$ と採ることになり、同じように $U_0 = -1$ として考えられる。従って

$$T_{00} = \rho \quad (1.81)$$

であり、他の成分は (1.78) より全て消えている。つまりニュートン極限ではエネルギー $\rho = T_{00}$ が $T_{\mu\nu}$ の他の成分よりも大きいということを意味しているから、(1.75) の $\mu = 0, \nu = 0$ 成分に注目して考えよう。トレースをとると

$$T = g^{00} T_{00} = -T_{00} = -\rho \quad (1.82)$$

を得る。これを重力場の方程式 (1.75) の 00 成分に挿入すると

$$R_{00} = \kappa \left(T_{00} - \frac{1}{2} T g_{00} \right) = \frac{1}{2} \kappa \rho \quad (1.83)$$

が得られる。さらにこの方程式を計量について書き下そう。必要な計算は $R_{00} = R^\lambda_{0\lambda 0}$ であるが、 $R^0_{000} = 0$ であるから、 R^i_{0i0} のみを考えればよい。すると

$$R^i_{0j0} = \partial_j \Gamma^i_{00} - \partial_0 \Gamma^i_{j0} + \Gamma^i_{j\lambda} \Gamma^{\lambda}_{00} - \Gamma^i_{0\lambda} \Gamma^{\lambda}_{j0} \quad (1.84)$$

であるが、第二項は場が静止しているから消え、第三項、第四項は $(\Gamma)^2$ の表式であるから摂動の 2 次の項を持つことになりこれらも消える。以上より

$$\begin{aligned} R_{00} &= R^i_{0i0} \\ &= \partial_i \left[\frac{1}{2} g^{i\lambda} (\partial_0 g_{\lambda 0} + \partial_0 g_{0\lambda} - \partial_\lambda g_{00}) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \delta^{ij} \partial_i \partial_j h_{00} \\ &= -\frac{1}{2} \nabla^2 h_{00} \end{aligned} \quad (1.85)$$

となる。 (1.83) と比較するとニュートン極限では

$$\nabla^2 h_{00} = -\kappa\rho \quad (1.86)$$

となるとわかる。この極限で $h_{00} = -2\Phi$ となるから、ポアソン方程式 (1.65) を得るには $\kappa = 8\pi G$ と採ればいい。従ってニュートン極限に一致するアインシュタイン方程式は

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (1.87)$$

である。このトレースを取ると $R = -8\pi GT$ とわかり、これを代入すると別の表式

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu} \right) \quad (1.88)$$

を得る。この利点は真空のアインシュタイン方程式を考えたとき、すなわち $T_{\mu\nu} = 0$ としたとき右辺が消えて

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (1.89)$$

と単純に書くことができるということである。

Chapter 2

線形重力波

この章では重力波の理論として最も簡単な線形重力波を議論する。前にも述べたが重力波は光の速度で伝搬する空間の歪みであり、非常に小さい現象と考えられている。これを一般相対性理論で記述するにはどうしたらいいのだろうか。そこで今までやってきたことを振り返ってみよう。まず前の章では一般相対性理論を簡略的に説明した。そして最後の節とその前の節で計量がミンコフスキーメトリックと小さな摂動に分解して書かれると仮定し議論を進めてきた。ここに注目し、この章でもその仮定を踏襲して、計量が線形的に分解され、ミンコフスキーメトリックと小さな摂動の和になるとして議論を進める。すなわち、時空間はバックグラウンドとして平坦な空間が存在し、そこに摂動が加わっているという描像を想像するということである。この描像の重力波を線形重力波と言い、重力波の性質を見たり、解析をしたりすることに大いに役立つ。

2.1 線形AINシュタイン方程式

我々の仮定では、計量は

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (2.1)$$

と書ける。 (2.1) を真空のAINシュタイン方程式 $R_{\mu\nu} = 0$ に代入し、 $h_{\mu\nu}$ のままで展開することで線形AINシュタイン方程式を得ることができる。つまり、この展開の一次の項を $\delta R_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu}(h_{\mu\nu})$ と置けば、

$$\delta R_{\mu\nu} = 0 \quad (2.2)$$

が真空の線形AINシュタイン方程式である。 $\delta R_{\mu\nu}$ が $h_{\mu\nu}$ でどのように書き下すことができるのかを見るために、リッチテンソル

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \Gamma^\tau_{\lambda\tau} - \Gamma^\lambda_{\mu\tau} \Gamma^\tau_{\nu\lambda} \quad (2.3)$$

とクリストッフェル記号

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \quad (2.4)$$

を用いる。 $\eta_{\mu\nu}$ のすべての成分が定数であることから最低次または0次で摂動 $h_{\mu\nu}$ は無視でき、それゆえにクリストッフェル記号は0、曲率も0となる。クリストッフェル記号の一次の摂動は

$$\delta \Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \eta^{\sigma\rho} (\partial_\mu h_{\nu\rho} + \partial_\nu h_{\rho\mu} - \partial_\rho h_{\mu\nu}) \quad (2.5)$$

同様に、リッチテンソルの一次の摂動は

$$\delta R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda \quad (2.6)$$

となる。(2.5) を (2.6) に代入することで、AINシュタイン方程式は

$$\begin{aligned} \delta R_{\mu\nu} &= \partial_\lambda \left[\frac{1}{2} \eta^{\lambda\rho} (\partial_\mu h_{\nu\rho} + \partial_\nu h_{\mu\rho} - \partial_\rho h_{\mu\nu}) \right] - \partial_\nu \left[\frac{1}{2} \eta^{\lambda\rho} (\partial_\mu h_{\lambda\rho} + \partial_\lambda h_{\mu\rho} - \partial_\rho h_{\mu\lambda}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[-\square h_{\mu\nu} + \partial_\mu \left(\partial_\lambda h_\nu^\lambda - \frac{1}{2} \partial_\nu h_\lambda^\lambda \right) + \partial_\nu \left(\partial_\lambda h_\mu^\lambda - \frac{1}{2} \partial_\mu h_\lambda^\lambda \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} [-\square h_{\mu\nu} + \partial_\mu V_\nu + \partial_\nu V_\mu] = 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

となる。ここで \square は平坦空間におけるダランベルシアン $\square = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$ であり、ベクトル V_μ は

$$V_\mu \equiv \partial_\lambda h_\mu^\lambda - \frac{1}{2} \partial_\mu h_\lambda^\lambda \quad (2.8)$$

とおいた。また線形の範囲で摂動の添え字はミンコフスキーメトリックで上げ下げすることができる：

$$h_\mu^\lambda = \eta^{\lambda\nu} h_{\nu\mu} \quad (2.9)$$

2.1.1 ゲージ変換

今のところ $h_{\mu\nu}$ は未知の摂動であると仮定している。しかし、この仮定では座標を一意的に決めることはできない。そこでその自由度を使って、 $\eta_{\mu\nu}$ を変えず $h_{\mu\nu}$ の形を変えるが、(2.1) の形を変えない変換を施そう。これを見るために

$$x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x) \quad (2.10)$$

なる座標の変換を考える。ここで、 $\xi^\mu(x)$ は4つの任意の関数であり、その微分は摂動計量 $h_{\mu\nu}$ と同じくらい小さい。計量は座標変換の下で一般的に

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}(x) \quad (2.11)$$

で変換する。(2.10) から $x^\mu = x'^\mu - \xi^\mu(x^\nu) = x'^\mu - \xi^\mu(x'^\nu)$ であり、この最後の等式は ξ^μ の一次まで正しい。実際、一次では x'^μ に x^μ を代入することができる。例えば

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} = \delta_\nu^\mu - \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu} \quad (2.12)$$

とできる。(2.11) から新しい計量を

$$g'_{\mu\nu}(x') = \eta'_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu}(x') = \eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu}(x') \quad (2.13)$$

と置くと、結果は

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu}(x') &= \eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu}(x') \\ &= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} (\eta_{\rho\sigma} + h_{\rho\sigma}) \\ &= \left(\delta_\mu^\rho - \frac{\partial \xi^\rho}{\partial x^\mu} \right) \left(\delta_\nu^\sigma - \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\nu} \right) (\eta_{\rho\sigma} + h_{\rho\sigma}) \\ &= \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} - \partial_\nu \xi_\mu - \partial_\mu \xi_\nu \end{aligned} \quad (2.14)$$

となって、新しい摂動計量は

$$h'_{\mu\nu}(x') = h_{\mu\nu} - \partial_\nu \xi_\mu - \partial_\mu \xi_\nu \quad (2.15)$$

で与えられる。この変換を摂動計量に対するゲージ変換という。 $\xi^\mu(x)$ は 4 つの任意の関数なので、その任意性を使って変換後の $h_{\mu\nu}(x)$ の形を簡単にすることができる。特に 4 つの条件

$$V'_\mu = 0 \quad (2.16)$$

が満たされ、(2.7) が $\delta R'_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\square h'_{\mu\nu} = 0$ となるように $\xi^\mu(x)$ の任意性を決める（ゲージ固定）。摂動 $h_{\mu\nu}$ について解いていないので (2.16) が満たされていると仮定して良い。従ってプライムを外してアインシュタイン方程式 $\delta R_{\mu\nu} = 0$ が波動方程式

$$\square h_{\mu\nu}(x) = 0 \quad (2.17)$$

になり、ゲージ条件

$$V_\mu \equiv \partial_\lambda h_\mu^\lambda - \frac{1}{2} \partial_\mu h_\lambda^\lambda = 0 \quad (2.18)$$

を伴う。電磁気学で Maxwell 方程式に対して波動方程式を得るために課した条件（ローレンツ条件）に対応させて、この条件をローレンツ条件と呼ぶ。

2.2 重力波の生成

前の節では計量摂動に対する波動方程式が得られた。すなわち、摂動は波として伝搬するとわかった。これは欲しい重力波の描像そのものであり、仮定がより強固なものとなったとわかる。この節でその具体例をいくつか紹介し、重力波の性質を見ていくことにする。そこでまずトレース反転摂動

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h \eta_{\mu\nu} \quad (2.19)$$

を定義する。確かに $\bar{h} = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = -h$ となっている。これを考えた方がいくらか都合が良い。ゲージ変換

$$h_{\mu\nu} \longrightarrow h_{\mu\nu} - \partial_\nu \xi^\mu - \partial_\mu \xi^\nu \quad (2.20)$$

の下で、トレース反転摂動の変換は

$$\bar{h}_{\mu\nu} \longrightarrow (h_{\mu\nu} - \partial_\nu \xi^\mu - \partial_\mu \xi^\nu) - \frac{1}{2} h' \eta_{\mu\nu}$$

ここで、

$$h' = \eta^{\mu\nu} h'_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} (h_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu) = h - 2\partial_\mu \xi^\mu$$

であるから、

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\mu\nu} &\longrightarrow \left(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h \eta_{\mu\nu} \right) - \partial_\nu \xi^\mu - \partial_\mu \xi^\nu + \partial_\lambda \xi^\lambda \eta_{\mu\nu} \\ &= \bar{h}_{\mu\nu} - 2\partial_{(\mu} \xi_{\nu)} + \partial_\lambda \xi^\lambda \eta_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.21)$$

と変換する。ゲージパラメータ ξ_μ が

$$\square \xi_\mu = \partial_\lambda \bar{h}_\mu^\lambda \quad (2.22)$$

を満たすように選ぶ。すなわちゲージ変換した先が

$$\partial_\mu \bar{h}'^\mu_\nu = \partial_\mu \bar{h}^\mu_\nu - \square \xi_\nu = 0$$

となることを示す。従ってプライムを外して、得られる方程式は

$$\partial_\mu \bar{h}^\mu_\nu = 0 \quad (2.23)$$

である。これは直交条件であり波が横波であることを示す。しかしトレース反転でない元の摂動はこのゲージで横波ではなく

$$\partial_\mu h^\mu_\nu = \partial_\mu \bar{h}^\mu_\nu + \frac{1}{2} \partial_\mu h \eta^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \partial_\nu h \quad (2.24)$$

となる。このトレース反転摂動の定義をAINシュタインソル

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\sigma \partial_\nu h^\sigma_\mu + \partial_\sigma \partial_\mu h^\sigma_\nu - \partial_\mu \partial_\nu h - \square h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \partial_\sigma h^{\rho\sigma} + \eta_{\mu\nu} \square h)$$

に代入し、ローレンツ条件を用いると

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \square \left(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h \eta_{\mu\nu} \right) = -\frac{1}{2} \square \bar{h}_{\mu\nu} \quad (2.25)$$

を得る。(1.73) より、このゲージにおける線形AINシュタイン方程式は

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi G T_{\mu\nu} \quad (2.26)$$

となる。このような方程式の解はグリーン関数を使って得ることができる；ダランベルシアン \square におけるグリーン関数 $G(x^\sigma - y^\sigma)$ は、デルタ関数が波源の波動方程式の解になる：

$$\square_x G(x^\sigma - y^\sigma) = \delta^4(x^\sigma - y^\sigma) \quad (2.27)$$

ここで \square_x は座標 x^σ に関するダランベルシアンを示している。そうすると、一般解として $(x^0 > y^0)$

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x^\sigma) = -16\pi G \int G(x^\sigma - y^\sigma) T_{\mu\nu}(y^\sigma) d^4y \quad (2.28)$$

が得られる。これを遅延解と呼ぶ。また遅延グリーン関数の一般解は、

$$G(x^\sigma - y^\sigma) = -\frac{1}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \delta [|\mathbf{x} - \mathbf{y}| - (x^0 - y^0)] \theta(x^0 - y^0) \quad (2.29)$$

で与えられている。ここで $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$, $\mathbf{y} = (y^1, y^2, y^3)$ であり

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = [\delta_{ij} (x^i - y^i)(x^j - y^j)]^{\frac{1}{2}}$$

$$\theta(x^0 - y^0) = \begin{cases} 1 & x^0 > y^0 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

である。これを (2.28) に代入すると

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\mu\nu} &= 4G \int \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \delta [|\mathbf{x} - \mathbf{y}| - (x^0 - y^0)] \theta(x^0 - y^0) T_{\mu\nu}(y^\sigma) d^4y \\ &= 4G \int \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} T_{\mu\nu}(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \mathbf{y}) d^3y \end{aligned} \quad (2.30)$$

ここで、 $t = x^0$ 。遅延時間は

$$t_r = t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \quad (2.31)$$

で定義される。これらの関係を Figure 2.1 に示した。

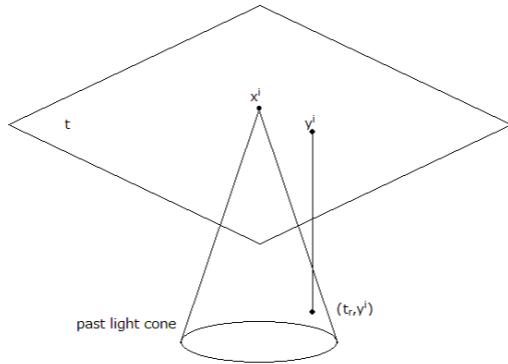


Figure 2.1: 過去の点 (時刻 t_r , 座標 y^i) と時刻 t 平面上の座標 x^i と座標 y^i の関係

そこで、簡単に遠く離れた孤立した波源により生じる重力放射の場合を考える。フーリエ変換とその逆変換

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega e^{-i\omega t} \tilde{h}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{x}) \quad (2.32)$$

$$\tilde{h}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt e^{i\omega t} \bar{h}_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) \quad (2.33)$$

を用いて一般解を導出する。フーリエ逆変換に (2.30) の結果を代入すると

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{x}) &= \frac{4G}{\sqrt{2\pi}} \int dt d^3y e^{i\omega t} \frac{T_{\mu\nu}(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \\ &= \frac{4G}{\sqrt{2\pi}} \int dt_r d^3y e^{i\omega t_r} e^{i\omega |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \frac{T_{\mu\nu}(t_r, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \\ &= 4G \int d^3y e^{i\omega |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \frac{\tilde{T}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \end{aligned} \quad (2.34)$$

ここで、エネルギー・運動量テンソルのフーリエ逆変換

$$\tilde{T}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{y}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt_r e^{i\omega t_r} T_{\mu\nu}(t_r, \mathbf{y}) \quad (2.35)$$

を用いた。波源が孤立して遠く離れたところにあり、そしてゆっくり動いているという近似を行う (Figure 2.2)。

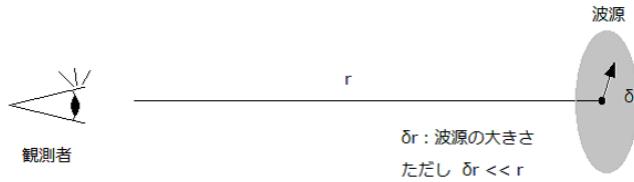


Figure 2.2: 観測者と波源

ゆっくり動いていることから、殆どの放射の振動数は小さい（長波長）: $\delta r \ll \omega^{-1}$ この近似の下で

$$\frac{e^{i\omega|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}$$

項は

$$\frac{e^{i\omega r}}{r}$$

と置き換えて積分の外に出すことができる。よって

$$\tilde{\tilde{h}}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{x}) = 4G \frac{e^{i\omega r}}{r} \int d^3y \tilde{T}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{y}) \quad (2.36)$$

を得る。摂動の表式が得られたが、我々が課したローレンツ条件により、この成分全てを計算する必要はないわかる；フーリエ空間におけるローレンツ条件 $\partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = 0$ は

$$\partial_\mu \tilde{\tilde{h}}^{\mu\nu} = i\omega \tilde{\tilde{h}}^{0\nu}$$

$$\begin{aligned} \therefore \tilde{\tilde{h}}^{0\nu} &= -\frac{i}{\omega} \partial_i \tilde{\tilde{h}}^{i\nu} \\ \left(\because \partial_0 \tilde{\tilde{h}}^{0\nu}(\omega, \mathbf{x}) = 0 \right) \end{aligned} \quad (2.37)$$

に置き換わるから、 $\tilde{\tilde{h}}_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{x})$ の空間成分のみを考えればよい。 $\nu = j$ とおく。
(2.36) を部分積分すると

$$\int d^3y \tilde{T}^{ij}(\omega, \mathbf{y}) = \int d^3y \partial_k (y^i \tilde{T}^{kj}) - \int d^3y y^i (\partial_k \tilde{T}^{kj}) \quad (2.38)$$

最初の項は波源が孤立していることから表面積分により落ちる。一方で、第二項は $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ のフーリエ変換により \tilde{T}^{0j} と関係して

$$\partial_k \tilde{T}^{k\mu} = i\omega \tilde{T}^{0\mu} \quad (2.39)$$

となるから、

$$\begin{aligned}
 \int d^3y \tilde{T}^{ij}(\omega, \mathbf{y}) &= -i\omega \int d^3y y^i \tilde{T}^{0j} \\
 &= \frac{i\omega}{2} \int d^3y y^i y^j \partial_t \tilde{T}^{0l} \\
 &= -\frac{\omega^2}{2} \int d^3y y^i y^j \tilde{T}^{00}
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

を得る。ここで最初の行でエネルギー・運動量テンソルの対称性を用いて i, j の対称な項で分解した後、部分積分をして表面項を落とした。ここで、波源のエネルギー密度の四重極モーメントを定義する：

$$I_{ij}(t) = \int d^3y y^i y^j T^{00}(t, \mathbf{y}) \tag{2.41}$$

四重極モーメントのフーリエ変換について、解の形式は

$$\tilde{h}_{ij}(\omega, \mathbf{x}) = -2G\omega^2 \frac{e^{i\omega t}}{r} \tilde{I}_{ij}(\omega) \tag{2.42}$$

$$\tilde{I}_{ij}(\omega) = \int d^3y y^i y^j \tilde{T}^{00}(\omega, \mathbf{y}) \tag{2.43}$$

となる。これを t に戻すことでトレース反転摂動に対する四重極モーメントを用いた表式が得られる：

$$\bar{h}_{ij}(t, \mathbf{x}) = -\frac{2G}{\sqrt{2\pi}r} \int d\omega \omega^2 e^{-i\omega t + i\omega r} \tilde{I}_{ij}(\omega) = \frac{2G}{r} \frac{d^2 I_{ij}}{dt^2}(t_r) \tag{2.44}$$

これが、重力波の振幅である。ここで $t_r = t - r$ であり、フーリエ変換

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega e^{-i\omega(t-r)} \tilde{I}_{ij}(\omega) = I_{ij}(t-r) = I_{ij}(t_r) \tag{2.45}$$

を用いた。従って、孤立した非相対論的な物体により生成される重力波は、波源を横切る観測者の過去の光円錐でのある点で、エネルギー密度の四重極モーメントの時間の二階微分に比例するとわかる。

2.2.1 質量の等しい二つの星の連星からの重力波（円軌道）

さて、得られた重力波の振幅の表式を具体例を用いて解析しよう。この論文の単位系で (2.44) は

$$\bar{h}_{ij}(t, \mathbf{x}) = \frac{2}{r} \frac{d^2 I_{ij}}{dt^2}(t_r) \tag{2.46}$$

である。まず、質量が等しく M の二つの星が $x^1 - x^2$ 平面でそれらの重心から距離 R 離れたところで速度 \mathbf{v} で円軌道にある場合を考える。(Figure 2.3)

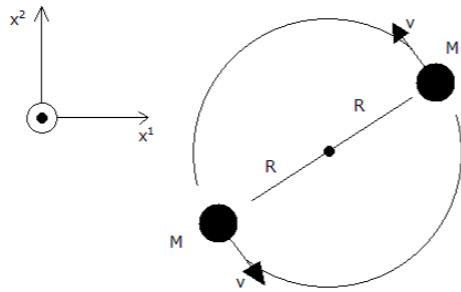


Figure 2.3: 連星の軌道

ニュートン近似ができるように、軌道はケプラーのものであるとして議論する。円軌道は重力と遠心力のつり合いにより特徴づけられる：

$$\frac{M^2}{(2R)^2} = \frac{Mv^2}{R} \quad (2.47)$$

これより

$$v = \left(\frac{M}{4R} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.48)$$

ひとつの星の軌道の周期 (hour) は

$$P = \frac{2\pi R}{v} \quad (2.49)$$

ゆえに、軌道の角振動数は

$$\Omega = \frac{2\pi}{P} = \frac{v}{R} = \left(\frac{M}{4R^3} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.50)$$

となる。星を a, b でラベル付けしよう。すると Ω について、星 a の明確な経路で書き下せる。

$$x_a^1 = R \cos \Omega t \quad , \quad x_a^2 = R \sin \Omega t \quad (2.51)$$

またエネルギー密度は

$$T^{00}(t, \mathbf{x}) = M \delta(x^3) [\delta(x^1 - R \cos \Omega t) \delta(x^2 - R \sin \Omega t) + \delta(x^1 + R \cos \Omega t) \delta(x^2 + R \sin \Omega t)] \quad (2.52)$$

となる。これより (2.41) から、四重極モーメントが得られ、各成分を書き表すと

$$I_{11} = \int d^3y y^1 y^1 T^{00}(t, \mathbf{y}) = 2MR^2 \cos^2 \Omega t = MR^2(1 + \cos 2\Omega t) \quad (2.53)$$

$$I_{22} = MR^2(1 - \cos 2\Omega t) \quad (2.54)$$

$$I_{12} = I_{21} = MR^2 \sin 2\Omega t \quad (2.55)$$

$$I_{i3} = 0 \quad (2.56)$$

従って、(2.46) より計量摂動の成分が得られる：

$$\bar{h}_{ij}(t, \mathbf{x}) = \frac{8M}{r} \Omega^2 R^2 \begin{pmatrix} -\cos 2\Omega t_r & -\sin 2\Omega t_r & 0 \\ -\sin 2\Omega t_r & \cos 2\Omega t_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

これがこの場合での重力波の振幅である。この係数を簡単に評価してみる。少し書き換えると

$$\begin{aligned} \frac{M\Omega^2 R^2}{r} &= \frac{M}{r} \left(\frac{MP^2}{16\pi^2} \right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\pi}{P} \right)^2 \\ &\sim 10^{-21} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{\frac{5}{3}} \left(\frac{1h}{P} \right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{100\text{pc}}{r} \right) \end{aligned} \quad (2.58)$$

となる。ここで h は 1 時間当たりの時刻 (hour) を表し、 M_\odot は太陽質量を表す。[pc] は長さの単位で、おおよそ $3.0 \times 10^{16} \text{m}$ である。さらに具体例として地球で最も明るい連星重力波源のひとつである ιBoo について考えてみる。連星 ιBoo は $1M_\odot$ の星と $0.5M_\odot$ の星から成り、軌道周期 $P = 6.5\text{hour}$ で周り合っている。それゆえに、観測される歪みは $\bar{h}^{ij} \sim 10^{-21}$ とわかる。これは非常に小さな値であると言え、重力波を検出するのがいかに困難かを象徴している。

2.2.2 質量が異なる二つの星の連星からの重力波（円軌道）

前の節では、質量が等しい場合を考えた。少し一般化して質量が異なる二つの星の連星を考える。質量中心系 O を採り、質量 m_1 の星（星 a ）と質量 m_2 の星（星 b ）の間隔を $2R$ とする。(Figure2.4)

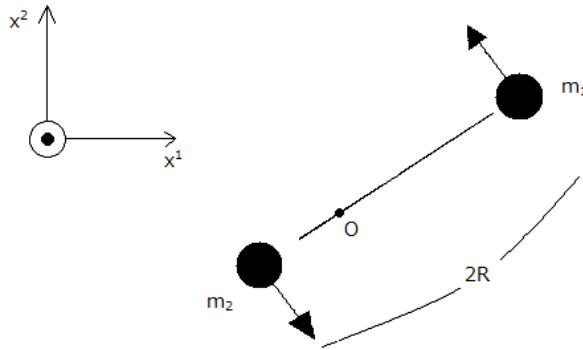


Figure 2.4: 連星の軌道 質量が異なる場合

すると原点 O と星 a までの距離は $\frac{m_2}{m_1+m_2}2R$ であり、原点 O と星 b までの距離は $\frac{m_1}{m_1+m_2}2R$ である。これよりエネルギー密度は

$$T^{00}(t, \mathbf{x}) = \delta(x^3) \left[m_2 \delta(x^1 - \frac{m_1}{m_1+m_2}2R \cos \Omega t) \delta(x^2 - \frac{m_1}{m_1+m_2}2R \sin \Omega t) \right. \\ \left. + m_1 \delta(x^1 + \frac{m_2}{m_1+m_2}2R \cos \Omega t) \delta(x^2 + \frac{m_2}{m_1+m_2}2R \sin \Omega t) \right] \quad (2.59)$$

と書き変わるとわかる。次に四重極モーメントの計算に移るが、例えば 11 成分を計算すると

$$I_{11} = \left[m_1 \left(\frac{m_2}{m_1+m_2} \right)^2 + m_2 \left(\frac{m_1}{m_1+m_2} \right)^2 \right] 4R^2 \cos^2 \Omega t \\ = 2\mu R^2 (1 + \cos 2\Omega t) \quad (2.60)$$

となって、同様に計算すると他の成分も前の節で得られた結果を $M \rightarrow 2\mu$ としたものに等しいとわかる。ここで換算質量 $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ を用いた。従って、最終的に得られる重力波振幅は

$$\bar{h}_{ij}(t, \mathbf{x}) = \frac{16\mu}{r} \Omega^2 R^2 \begin{pmatrix} -\cos 2\Omega t_r & -\sin 2\Omega t_r & 0 \\ -\sin 2\Omega t_r & \cos 2\Omega t_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

である。

2.2.3 質量が異なる二つの星の連星からの重力波 (橙円軌道)

最後により一般的な連星の軌道である橙円軌道の場合における重力波の表式を求める。同じように質量中心系を探り Figure 2.5 のように座標系を描く。先程と異なるのは角度の時間依存性と星間距離の時間依存性である。

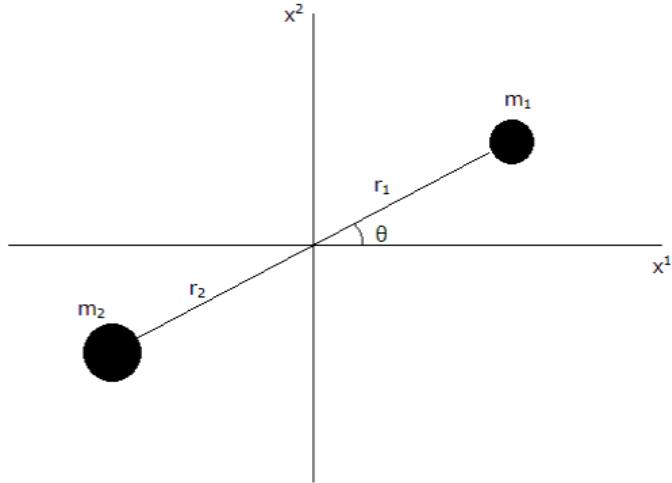


Figure 2.5: 連星の軌道 楕円軌道で連星が運動する場合

半長軸を a 、離心率を e とし、これらを全エネルギー $E(E < 0)$ と角運動量 L に関して表すと

$$a = -\frac{m_1 m_2}{2E} \quad (2.62)$$

$$e^2 = 1 + \frac{2EL^2(m_1 + m_2)}{m_1^3 m_2^3} \quad (2.63)$$

二つの星の間の距離は

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} \quad (2.64)$$

であり、各星の座標は

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} r \\ r_2 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} r \end{aligned} \quad (2.65)$$

と表される。議論の混乱を防ぐため、以下 $(x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$ と置く。四重極モーメントは前の節と同じように計算すれば求まり、

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r^2 \cos \theta \\ I_{yy} &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r^2 \sin \theta \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$I_{xy} = I_{yx} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r^2 \sin \theta \cos \theta$$

となる。角運動量は $L = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r^2 \dot{\theta}$ (ここで $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$, 以下 “.” は時間微分を表す) だから、半長軸と離心率を用いて

$$\dot{\theta} = \frac{1}{r^2} [(m_1 + m_2) a (1 - e^2)]^{\frac{1}{2}} \quad (2.67)$$

となり、これと (A.3) から

$$\dot{r} = e \sin \theta \left(\frac{m_1 + m_2}{a(1 - e^2)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.68)$$

が従う。今までと同様に四重極モーメントを微分し、重力波の振幅を求める。結果は次のようになる：

$$\dot{I}_{xx} = -\frac{2m_1 m_2}{[(m_1 + m_2)a(1 - e^2)]^{\frac{1}{2}}} r \sin \theta \cos \theta \quad (2.69)$$

$$\ddot{I}_{xx} = -\frac{2m_1 m_2}{a(1 - e^2)} (\cos 2\theta + e \cos^3 \theta) \quad (2.70)$$

$$\dot{I}_{yy} = \frac{2m_1 m_2}{[(m_1 + m_2)a(1 - e^2)]^{\frac{1}{2}}} r (\sin \theta \cos \theta + e \sin \theta) \quad (2.71)$$

$$\ddot{I}_{yy} = \frac{2m_1 m_2}{a(1 - e^2)} (\cos 2\theta + e \cos \theta + e \cos^3 \theta + e^2) \quad (2.72)$$

$$\dot{I}_{xy} = \frac{m_1 m_2}{[(m_1 + m_2)a(1 - e^2)]^{\frac{1}{2}}} r (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta + e \cos \theta) \quad (2.73)$$

$$\ddot{I}_{xy} = -\frac{2m_1 m_2}{a(1 - e^2)} (\sin 2\theta + e \sin \theta + e \sin \theta \cos^2 \theta) \quad (2.74)$$

以上より、重力波振幅は、波源から観測者までの距離を r' とおくと

$$\begin{aligned} \bar{h}_{ij}(t, \mathbf{x}) &= \frac{2}{r'} \ddot{I}_{ij}(t_r) \\ &= \frac{4m_1 m_2}{a(1 - e^2)r'} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta - e \cos^3 \theta & -\sin 2\theta - e \sin \theta - e \sin \theta \cos^2 \theta & 0 \\ -\sin 2\theta - e \sin \theta - e \sin \theta \cos^2 \theta & \cos 2\theta + e \cos \theta + e \cos^3 \theta + e^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.75)$$

と求まる。ただし $\theta = \theta(t_r)$ に注意する。また離心率が $e = 0$ のときこの軌道は円軌道になるが、この結果に $e = 0$ を代入すると確かに円軌道の結果 (2.61) に一致するとわかる。 $(a = r = 2R, \theta = \Omega t$ に注意し、 $1 = \frac{8R^3\Omega^2}{m_1 + m_2}$ を挿入すればよい。)

以上 3 つの例について重力波振幅の表式を書き下したが、これらのモデルでは重力放射を永遠に続けるエネルギーを持った連星となってしまう。このような近似で十分な連星もあるが、実際には連星は放射によりエネルギーが減少し、それらは螺旋軌道を描く。

2.3 四重極公式

重力波は放射系からエネルギーを運び去る。この性質を見るために、今まで扱ってきた弱場長波長近似で重力波として失う全エネルギー損失率の式を得よう。この式のことを四重極公式という。まず表式 $\bar{h}_{ij}(t, \mathbf{x}) = \frac{2}{r} \ddot{I}_{ij}(t_r)$ は波源のエネルギー密度の四重極モーメントテンソル I_{ij} の二階微分として波源から遙か遠く離れた重力波の振幅を与えており、エネルギーfluxが波の振幅の 2 次である

から、重力波の光度 L (全放射エネルギー発生率) は I_{ij} とその時間微分の 2 次の形をしているはずである。次元解析により

$$L = \frac{(\text{エネルギー})}{(\text{時間})}$$

であるから、この論文の単位系では L は無次元量である。 I_{ij} はその定義により、(距離)²×(エネルギー) の次元を持つので、この単位系で無次元量になるには時間について三階微分したものでなくてはならないとわかる。さらに L は空間回転の下でスカラーのように振舞うから、 \ddot{I}_{ij} の 2 次のスカラー結合でなくてはならない。可能性は

$$\ddot{I}_{ij} \ddot{I}^{ij} \quad \text{あるいは} \quad (\ddot{I}^k)^2$$

である。球対称な系では放射が出ないことより前者の場合が当てはまる。ここで

$$Q^{ij} = I^{ij} - \frac{1}{3} \delta^{ij} I^k_k \quad (2.76)$$

を定義する。これを既約四重極モーメントという。係数 $\frac{1}{5}$ を掛けて、四重極公式は

$$L = \frac{1}{5} \left\langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}^{ij} \right\rangle \quad (2.77)$$

となる。ここで $\langle \rangle$ は一周期にわたって時間平均をとることを表す。これは重力波のエネルギー放射のエネルギーを一波長内に局在化できないことに起因する。エネルギー放射との関係は

$$L = - \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle \quad (2.78)$$

である。因みに $c \neq 1, G \neq 1$ の単位系で四重極公式は

$$L = \frac{1}{5} \frac{G}{c^5} \left\langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}^{ij} \right\rangle \quad (2.79)$$

によって与えられる。この四重極公式を、連星系によって重力波で放出されるエネルギー発生率を求めるに適応する。まずは質量の等しい二つの連星の場合を考える。 I_{ij} は (2.41) によって与えられているから、時間平均で係数 $\frac{1}{2}$ が出てくることに注意すると

$$L = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} M^2 R^4 (64\Omega \times 4) = \frac{128}{5} M^2 R^4 \Omega^6 \quad (2.80)$$

また $R = \left(\frac{MP^2}{16\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}}$ を用いると、

$$L = 1.85 \times 10^3 \left(\frac{M}{P} \right)^{\frac{10}{3}} \quad (2.81)$$

となる。さらに G や c を入れて書けば $(M \rightarrow \frac{GM}{c^4}, t \rightarrow ct, P \rightarrow cP)$

$$L = \frac{128}{5} 4^{\frac{1}{3}} \frac{c^5}{G} \left(\frac{\pi GM}{c^3 P} \right)^{\frac{10}{3}} \quad (2.82)$$

となって、単位 $\text{erg} = 10^{-7} \text{J}$ を使って書くと

$$L = 1.9 \times 10^{33} \left(\frac{M}{M_\odot} \frac{1\text{h}}{P} \right)^{\frac{10}{3}} \frac{\text{erg}}{\text{s}} \quad (2.83)$$

と書き表すことができる。ここで今までと同様に h は 1 時間当たりの時刻 (hour) を表し、 M_{\odot} は太陽質量を表す。ところで、電磁波における太陽光度は $3.9 \times 10^{33} \text{ erg/s}$ である。従って、典型的な星の質量を持つ短い周期の連星は重力波において暗いというわけではなく、重力が物質と弱く結合していることが重力波の発見を困難にしているのである。

他の二つの例についても全エネルギー損失率を求めてみよう。まず質量が異なる二つの星の連星が円軌道上にある場合においては、 $M \rightarrow 2\mu$ に置き換えればよいので、

$$L = 1.9 \times 10^{33} \left(\frac{2\mu}{M_{\odot}} \frac{1\text{h}}{P} \right)^{\frac{10}{3}} \frac{\text{erg}}{\text{s}} \quad (2.84)$$

ただし、 $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ である。楕円軌道上にある場合は少し計算が必要である。まず必要なものとして

$$I = I_{xx} + I_{yy} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r^2 \quad (2.85)$$

であり、これと他の成分の三階微分を計算すると

$$\ddot{I}_{xx} = \frac{2m_1 m_2}{a(1-e^2)} \dot{\theta} (2 \sin 2\theta + 3e \sin \theta) \quad (2.86)$$

$$\ddot{I}_{yy} = -\frac{2m_1 m_2}{a(1-e^2)} \dot{\theta} (2 \sin 2\theta + e \sin \theta + 3e \cos^2 \theta \sin \theta) \quad (2.87)$$

$$\ddot{I}_{xy} = -\frac{2m_1 m_2}{a(1-e^2)} \dot{\theta} (2 \cos \theta - e \cos \theta + 3e \cos^3 \theta) \quad (2.88)$$

$$\ddot{I} = \ddot{I}_{xx} + \ddot{I}_{yy} = -\frac{2m_1 m_2}{a(1-e^2)} \dot{\theta} e \sin \theta \quad (2.89)$$

と求まる。これらより、エネルギー放射は

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= -\frac{1}{5} \left(\ddot{I}_{ij} \ddot{I}_{ij} - \frac{1}{3} \ddot{I}^2 \right) \\ &= -\frac{8}{15} \frac{m_1^2 m_2^2}{a^2 (1-e^2)^2} \dot{\theta}^2 [12(1+e \cos \theta)^2 + e^2 \sin^2 \theta] \end{aligned} \quad (2.90)$$

であり、回転周期についての平均をとると、 $\int_0^T dT \rightarrow \int_0^{2\pi} d\theta$ で置き換えることができるから、重力波の光度は

$$L = -\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = \frac{32}{5} \frac{m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{a^5 (1-e^2)^{\frac{7}{2}}} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right) \quad (2.91)$$

と求まる。ただし、 e^4 項までとることにし、 2π で割っていることに注意する。

2.4 トランスバース・トレースレスゲージ (TT ゲージ)

重力波の性質を見る際に便利なゲージ変換がいくつかある。その中で代表的なトランスバース・トレースレスゲージを紹介する。まず、線形インシュタイン方程式

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (2.92)$$

の最も単純な解は

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \text{Re}[A_{\mu\nu} \exp(ik_\alpha x^\alpha)] \quad (2.93)$$

の形の平面波解である。ここで \mathbf{A} は振幅テンソルであり、 \mathbf{k} はヌル 4 元ベクトル ($k_\alpha k^\alpha = 0$) である。このような平面波は、振動数 $\omega = k^0 = (k_j k^j)^{\frac{1}{2}}$ で空間の方向 $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)/k^0$ に向かって伝わる。 \mathbf{A} は対称性により 10 個の独立な成分を持つ。そして一般相対性理論での力学的な自由度は二つのみである。この根拠は二つある。

根拠 1

\mathbf{A} と \mathbf{k} は平面波を記述するなら任意に取ることはできない。その結果として得られる二つの量の間の直交条件は \mathbf{A} の 10 個の成分のうち 4 つを束縛する。

根拠 2

大局的なローレンツゲージ ($\partial_\alpha \bar{h}^{\mu\alpha} = 0$) を選んでも、線形化された理論の座標系を完全に固定できない。実際、任意のゲージ変換に対して説明がつかない曖昧さが残っている。すなわち、大局的なゲージを選んでも無限小の座標変換が束縛されない。

根拠 2 の良い評価は、小さく任意の変位 4 元ベクトル ξ^α に関する無限小変換

$$x'^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha \quad (2.94)$$

を考えることであった。2.1.1 節のゲージ変換と 2.2 節の重力波の生成の最初の議論を見よ。この場合のゲージ条件は結局

$$\square \xi^\alpha = \partial_\lambda \bar{h}^{\lambda\alpha} = 0 \quad (2.95)$$

を満たすということであった。すなわち、変位ベクトルは波源がない波動方程式の解となっている。結果として平面波ベクトルは成分

$$\xi^\alpha \equiv -iC^\alpha \exp(ik_\beta x^\beta) \quad (2.96)$$

を持つものを生成する。ここで、 C^α は 4 つの任意の定数である。ゲージ変換はさらに \mathbf{A} の任意の 4 つの成分を変える。それゆえに、 $A_{\mu\nu}$ は $10 - 4 - 4 = 2$ 個のみの線形的に独立な成分を持つ。これは一般相対性理論の自由度の数に一致する。そこで、次の条件として振幅テンソルの成分を束縛するとしばしば便利である。

(a) 直交条件： \mathbf{A} と \mathbf{k} が直交するように選んだなら、振幅テンソルの 4 つの成分は条件として指定される。

$$A_{\mu\nu} k^\nu = 0 \quad (2.97)$$

(b) 大局ローレンツ系：特殊相対論のように、大局ローレンツ系を 4 元速度 \mathbf{u} の観測者に関係して定義することができる。この場合では、振幅テンソルの 3 つの成分は、4 元速度 \mathbf{u} が \mathbf{A} と直交するように選んだ後で条件として指定できる。

$$A_{\mu\nu} u^\nu = 0 \quad (2.98)$$

(c) 無限小ローレンツ変換：振幅テンソルの最後の独立な成分は無限小変位ベクトル $\xi^\mu = iC^\mu \exp(ik_\beta x^\beta)$ を選んだ後で評価できる。

$$A_\mu^\mu = 0 \quad (2.99)$$

これらの新しい束縛条件 (a)-(c) を静止系、すなわち $u^\alpha = (1, 0, 0, 0)$ の場合で考えよう。この系では、波数ベクトル k^μ の成分が直接現れてこないように振幅テンソルに対する条件として書くことができる。

$$(a) \quad A_{\mu\nu}k^\nu = 0 \Leftrightarrow \partial_j h_{ij} = 0 \quad (2.100)$$

すなわち、 $h_{\mu\nu}$ の空間成分は発散なしである。

$$(b) \quad A_{\mu\nu}u^\nu = 0 \Leftrightarrow h_{\mu 0} = 0 \quad (2.101)$$

すなわち、 $h_{\mu\nu}$ の空間成分のみが 0 でない。

$$(c) \quad A_\mu^\mu = 0 \Leftrightarrow h = h_j^j = 0 \quad (2.102)$$

すなわち、 $h_{\mu\nu}$ の空間成分はトレースが 0 である。

条件 (a),(b),(c) を満たすゲージをトランスバース・トレースレス (TT) ゲージと呼ぶ。これらは重力波の解析に対する標準的なゲージである。一度大局ローレンツ系が $u^\alpha = \delta_0^\alpha$ を選んだなら、(2.101),(2.102) を満たすゲージを見つけることは常に可能であるとわかる。

2.5 TT ゲージの意味

このゲージでの 0 でないリーマンテンソルは

$$R_{j0k0} = R_{0j0k} = -R_{j00k} = -R_{0jk0} \quad (2.103)$$

であるから、この成分を計算すると

$$R_{j0k0} = -\frac{1}{2}\partial_0^2 h_{jk}^{TT} \quad (2.104)$$

と求まる。ここで h^{TT} は TT ゲージ下における重力波振幅を表す。TT ゲージを使うことにより、時間周期の振る舞いが $h_{jk}^{TT} \propto \exp(i\omega t)$ で伝わっている重力波を時空の局所的な振動に結びつけることができる。すなわち、

$$\partial_0^2 h_{jk}^{TT} \sim -\omega^2 \exp(i\omega t) \sim R_{j0k0} \quad , \quad R_{j0k0} = \frac{1}{2}\omega^2 h_{jk}^{TT} \quad (2.105)$$

重力波の伝搬の効果をよりよく評価するため、測地線に沿った運動上の隣接する粒子 A と B の間隔を考え、入射重力波の存在でこの間隔がどのように変化するかを考える (Figure2.6)。粒子 A の世界線の線素が次の形になるように粒子 A 近傍の座標系 x^α を導入する (つまり粒子 A と基準系がともに動くとする) :

$$ds^2 = -d\tau^2 + \delta_{ij} dx^i dx^j + O(|x^j|^2) dx^\alpha dx^\beta \quad (2.106)$$

重力波の到達は二つの粒子の測地線運動に摂動を与え、測地線の方程式に出ない寄与を生む。接四元ベクトル $u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}$ を持つ二つの測地線の軌道の間の間隔四元ベクトル V^α における変化は、測地線の方程式で表される :

$$u^\gamma u^\beta \nabla_\beta \nabla_\gamma V^\alpha = -R_{\beta\gamma\delta}^\alpha u^\beta V^\gamma u^\delta \quad (2.107)$$

これは経路 x^β と x^γ に沿ってベクトル V^α を平行移動した結果として生じる。ただし、二次以上の項は無視している。あるいは

$$u^\gamma u^\beta \left(\frac{D^2 V^\alpha}{D\tau^2} \right) \equiv u^\gamma u^\beta \left(\frac{d^2 V^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dV^\beta}{d\tau} \frac{dV^\gamma}{d\tau} \right) = -R_{\beta\gamma\delta}^\alpha u^\beta V^\gamma u^\delta \quad (2.108)$$

二つの粒子の位置における間隔三元ベクトルの成分を $n_B^j \equiv x_B^j - x_A^j = x_B^j$ とすると、(2.108) は

$$\frac{D^2 x_B^j}{D\tau^2} = -R_{0k0}^j x_B^k \quad (2.109)$$

と書ける。ここで粒子 A のまわりではその定義より接続係数は $0 (\Gamma_{\alpha\beta}^j = 0)$ 、すなわち (2.109) は普通の全微分で書くことができる。この TT ゲージでは、座標系 x^α と粒子 A はともに動くので固有時と座標時が計量摂動の一次のオーダーで一致することから、

$$\frac{d^2 x_B^j}{dt^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 h_{jk}^{TT}}{\partial t^2} \right) x_B^k \quad (2.110)$$

となり、そして解は

$$x_B^j(t) = x_B^k(0) \left[\delta_{jk} + \frac{1}{2} h_{jk}^{TT}(t) \right] \quad (2.111)$$

である。(2.111) は、基準系と粒子 A がともに動いていて、粒子 B が h_{jk}^{TT} に比例する振幅で振動していることを示している。横波であるから進行方向と振動方向は異なり、 $\vec{h} \parallel \vec{k}$ のとき $h_{jk}^{TT} x_B^j(0) \propto h_{jk}^{TT} k_B^j(0) = 0$ に注意しなくてはならない。

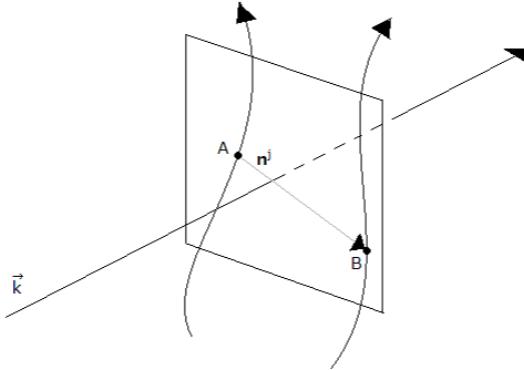


Figure 2.6: 方向 \vec{k} に向かって伝搬する重力波の相互作用により粒子 A と B の間隔に変化が生じる。

具体的に、 z 方向正の向きの二次元重力波の伝搬を考える。この場合では、

$$h_{xx}^{TT} = -h_{yy}^{TT} = \text{Re}[A_+ \exp\{-i\omega(t-z)\}] \quad (2.112)$$

$$h_{xy}^{TT} = h_{yx}^{TT} = \text{Re}[A_\times \exp\{-i\omega(t-z)\}] \quad (2.113)$$

と表される。ここで A_+ と A_\times は偏極の二つの独立なモードを示す。そうすると古典電磁気学のように重力波を二つの線形偏極平面波と二つの円偏極平面波に分解できる。前者の場合で、 z 方向に重力波が伝搬しているとき、偏極テンソル $+$ と \times は

$$\mathbf{e}_+ \equiv \vec{e}_x \otimes \vec{e}_x - \vec{e}_y \otimes \vec{e}_y \quad (2.114)$$

$$\mathbf{e}_\times \equiv \vec{e}_x \otimes \vec{e}_x + \vec{e}_y \otimes \vec{e}_y \quad (2.115)$$

で定義される。上を $+$ (プラス) 偏極モード、下を \times (クロス) 偏極モードと呼ぶこともある (Figure 2.7)。これら二つの線形偏極モードは $\frac{\pi}{4}$ で次に移る。

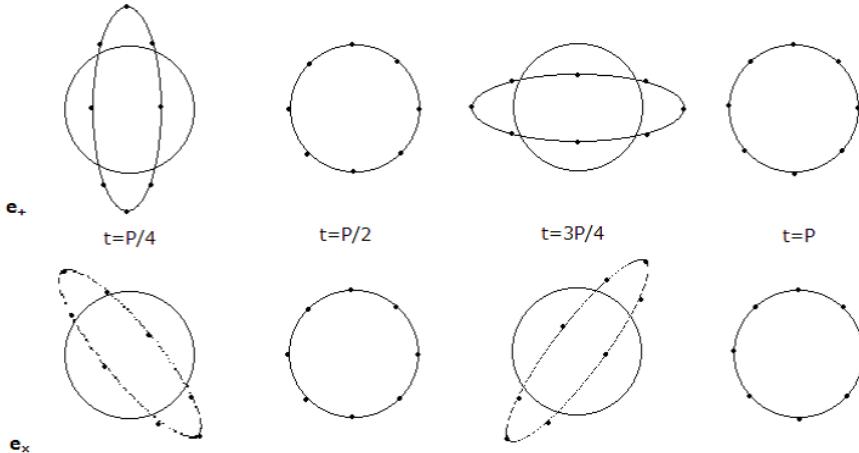


Figure 2.7: $+$ 偏極と \times 偏極。黒点は自由落下粒子であり、重力波の到達による変化を示している。黒点が付いていない円は重力波が到達していなかった場合にあったであろう位置を表している。

同様に、円偏極の二つの状態を記述する二つのテンソルを定義できる。
時計回りの円偏極 \mathbf{e}_R

$$\mathbf{e}_R \equiv \frac{\mathbf{e}_+ + i\mathbf{e}_\times}{\sqrt{2}} \quad (2.116)$$

反時計回りの円偏極 \mathbf{e}_L

$$\mathbf{e}_L \equiv \frac{\mathbf{e}_+ - i\mathbf{e}_\times}{\sqrt{2}} \quad (2.117)$$

で示される (Figure 2.8)。上を R(時計回り) 偏極、下を L(反時計回り) 偏極と呼ぶこともある。

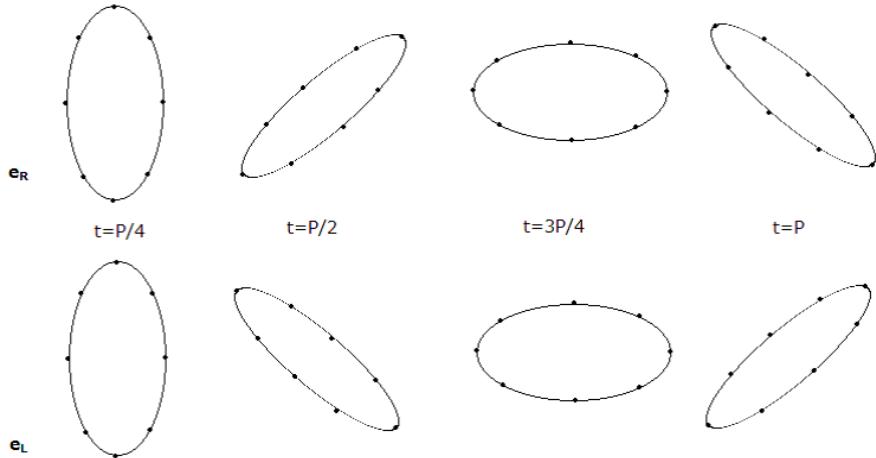


Figure 2.8: R 偏極と L 偏極

このように、TT ゲージを探ることによって重力波を偏極の基底で分解することができた。それゆえに、一般の重力波はこれらのモードの重ね合わせによって表されているとわかり、そしてこの事実は重力波の解析に役立つ。

Chapter 3

重力波の解析

前の章で重力波の最も単純な理論を展開した。しかし、実際の観測ではこの近似だけでは当然うまくいかない。我々は連星を組んだ星は螺旋軌道を描いて次第に近づいていき、最後には衝突して一つの星（ブラックホール）になるとを考えている。これらの過程を全てアインシュタイン方程式によって解くことができるが、アインシュタイン方程式が非常に入り組んで単純に解くことはできない。そこで用いられるのが数値相対論で、アインシュタイン方程式を数値的に解く方法である。しかしながら、すべての段階を一度で記述することに関する難しさは残ったままなので、一連の流れを三つに分けて考えることにする（Figure 3.1）。一つ目は連星軌道（inspiral）フェイズと呼ばれ、螺旋運動をしている場合の重力波振幅である。二つ目は合体（merging）フェイズと呼ばれ、二つの星が合体している場合の重力波振幅である。そして三つ目はリングダウン（ring down）フェイズと呼ばれ、合体して生成された星の揺らぎによる準固有振動（減衰する固有振動）が発生し、それによる重力波振幅が観測される。

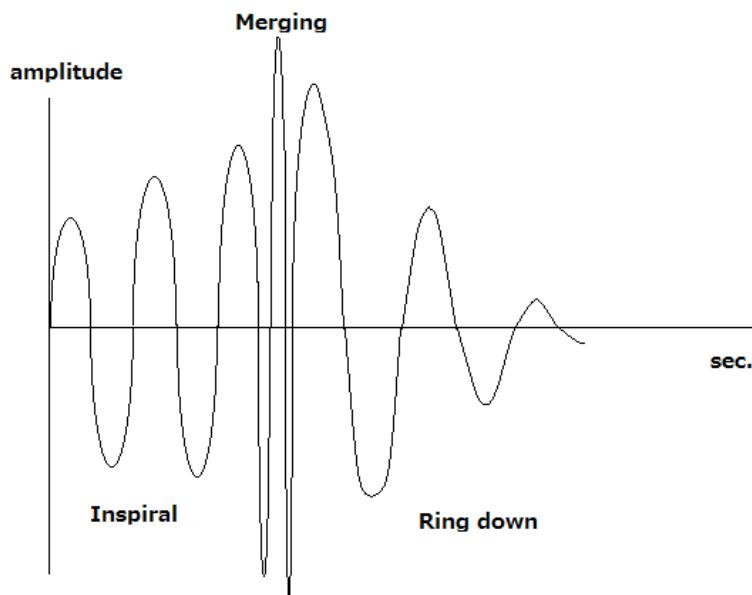


Figure 3.1: 重力波振幅観測の例

この章ではこれらをどのように評価していくのかを紹介することが目的である。まず手短に実験原理を説明しよう。測定方法として確立しているのはレーザー干渉計による実験である。マイケルソンモーレーの干渉計を思い浮かべるとわかりやすい。L字型の光が通る経路を持ち、重力波の到来によりその光路がわずかに変化する。そうすると干渉縞に変化が生じ、その結果として重力波を測定することができる。次に解析の議論に入る前に簡単に理論波形の必要性を説明する。そもそも観測データは重力波の信号とノイズが重ね合わさったものになる。重力波信号は非常に小さいことがわかっていて、それゆえにどのようにしてノイズを取り除くのかが重要になってくる。そこで扱われる手法として Matched filtering というものがある。これは観測された重力波形を予め計算して置いたいくつもの理論波形と比較し、最も合うものを選ぶという手法である。もう少し詳しく言うと、観測データと理論波形の相関を取り、それが大きいか小さいかでノイズと重力波波形を判断していくということである。相関が大きければそれは重力波の波形そのものであり、小さければノイズであると言ったふうである。それゆえに、理論波形をより正確に計算できていなければ効率よく判別することはできない、あるいはこの手法は成り立たないと言える。従って、この手法が主である限り、理論波形を計算することは非常に重要である。

3.1 連星軌道 (Inspiral) フェイズ

このフェイズでは Post-Newton 近似 (以下、PN 近似) と呼ばれる近似を用いてインシュタイン方程式を解くことによって重力波振幅を得ることができる。これは $(\frac{v}{c})^2$ で展開する近似であり、特にオーダー $(\frac{v}{c})^5$ で重力波の減衰効果が顕著に現れてくることから PN2.5 近似といってその項を評価する。当然評価する項のオーダーが大きくなればなるほど、インシュタイン方程式は解析的に解くことは難しくなり、数値的な手法を取らざるを得なくなる。そこで、ここでは簡単に PN 近似の最も低い次数の場合を評価し重力波振幅の表式を得ることを目的とする。もっと精度を良くした近似法として Post-Minkowskian Approximation があるが、この評価の仕方は文献*を参考にしてほしい。

3.1.1 PN 近似の下での場の方程式

この近似で小さなパラメータ ε は

$$\varepsilon \sim \frac{\bar{v}}{c} \sim \left(\frac{G\bar{M}}{c^2\bar{r}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(= \left(\frac{\bar{M}}{\bar{r}} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (3.1)$$

である。ここで、 $\bar{M}, \bar{r}, \bar{v}$ は物体の質量、物体までの距離、物体の速度の標準的な値である。なお、二つ目の関係はビリアル定理から従っている。計量は ε で次のように展開される：

$$g_{00} = -1 + g_{00}^{(2)} + g_{00}^{(4)} + g_{00}^{(6)} + \dots \quad (3.2)$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} + g_{ij}^{(2)} + g_{ij}^{(4)} + \dots \quad (3.3)$$

$$g_{0i} = g_{0i}^{(3)} + g_{0i}^{(5)} + \dots \quad (3.4)$$

またニュートン極限との対応で、

$$g_{00}^{(2)} = -2\Phi, \quad g_{ij}^{(2)} = -2\Phi\delta_{ij} \quad (3.5)$$

となる。ここで、 $g_{\mu\nu}^{(n)}$ はオーダー ε^n の $g_{\mu\nu}$ 項を示す。(3.4) が奇数項のみを含むのは g_{0i} が時間反転 $t \rightarrow -t$ の下で符号を変えなくてはならないからである。これらの展開はアインシュタイン方程式と矛盾しないことを示すことによって正当化される。そこで、 g_{00} を $O(\varepsilon^4)$ まで、 g_{0i} を $O(\varepsilon^3)$ 、 g_{ij} を $O(\varepsilon^2)$ まで見ることにする。 $g^{\mu\lambda}g_{\lambda\nu} = \delta_\nu^\mu$ から、

$$g^{00} = -1 + g^{00(2)} + g^{00(4)} + g^{00(6)} + \dots \quad (3.6)$$

$$g^{ij} = \delta^{ij} + g^{ij(2)} + g^{ij(4)} + \dots \quad (3.7)$$

$$g^{0i} = g^{0i(3)} + g^{0i(5)} + \dots \quad (3.8)$$

これらより、

$$g^{i0(3)} = g_{i0}^{(3)}, \quad g^{00(2)} = -g_{00}^{(2)}, \quad g^{ij(2)} = -g_{ij}^{(2)} \quad (3.9)$$

などが成立するとわかる。次にクリストッフェル記号

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \frac{1}{2}g^{\mu\rho}\partial_\lambda g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\lambda} - \partial_\rho g_{\nu\lambda} \quad (3.10)$$

を計算する。空間と時間微分をオーダー

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \sim \frac{1}{\bar{r}}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \sim \frac{\bar{v}}{\bar{r}} \sim \frac{\varepsilon}{\bar{r}} \quad (3.11)$$

とみなす。 $g_{\mu\nu}$ と $g^{\mu\nu}$ における展開を入れれば

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu(2)} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu(4)} + \dots \quad for \quad \Gamma_{00}^i, \Gamma_{jk}^i, \Gamma_{0i}^0 \quad (3.12)$$

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu(3)} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu(5)} + \dots \quad for \quad \Gamma_{0j}^i, \Gamma_{00}^0, \Gamma_{ij}^0 \quad (3.13)$$

となる。ここで $\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu(n)}$ はオーダー $\frac{\varepsilon}{\bar{r}}$ の $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ 項を表す。これは測地線の方程式より

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\Gamma_{00}^i - 2\Gamma_{0j}^i \frac{dx^j}{dt} - \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} + \left[\Gamma_{00}^0 + 2\Gamma_{0j}^0 \frac{dx^j}{dt} + \Gamma_{jk}^0 \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} \right] \frac{dx^i}{dt} \quad (3.14)$$

と展開されるから、 ε のオーダーが左辺と同じように組まれなくてはならないという要請によって決まる。これらの表現で必要なものを挙げると

$$\Gamma_{00}^{i(2)} = -\frac{1}{2}\partial_i g_{00}^{(2)} \quad (3.15)$$

$$\Gamma_{00}^{i(4)} = -\frac{1}{2}\partial_i g_{00}^{(4)} + \partial_0 g_{0i}^{(3)} - \frac{1}{2}g^{ij(2)}\partial_j g_{00} \quad (3.16)$$

$$\Gamma_{0j}^{i(3)} = \frac{1}{2}\left[\partial_j g_{i0}^{(3)} + \partial_0 g_{ij}^{(2)} - \partial_i g_{0j}^{(3)}\right] \quad (3.17)$$

$$\Gamma_{jk}^{i(2)} = \frac{1}{2}\left[\partial_k g_{ij}^{(2)} + \partial_j g_{ik}^{(2)} - \partial_i g_{jk}^{(2)}\right] \quad (3.18)$$

$$\Gamma_{00}^{0(3)} = -\frac{1}{2}\partial_0 g_{00}^{(2)} \quad (3.19)$$

$$\Gamma_{0i}^{0(2)} = -\frac{1}{2}\partial_i g_{00}^{(2)} \quad (3.20)$$

となる。以下簡単のため、微分を”、”で表すことにする。 $(\partial_k g_{ij} \rightarrow g_{ij,k})$ これらを用いてリッチテンソルを計算する。クリストッフェル記号の展開の延長で、リッチテンソルの展開は

$$R_{00} = R_{00}^{(2)} + R_{00}^{(4)} + \dots \quad (3.21)$$

$$R_{0i} = R_{0i}^{(3)} + R_{0i}^{(5)} + \dots \quad (3.22)$$

$$R_{ij} = R_{ij}^{(2)} + R_{ij}^{(4)} + \dots \quad (3.23)$$

と考えられる。ここで $R_{\mu\nu}^{(n)}$ はオーダー $\frac{\varepsilon^n}{r^2}$ の $R_{\mu\nu}$ 項を示す。クリストッフェル記号を用いると、

$$R_{00}^{(2)} = -\Gamma_{00,i}^i {}^{(2)} \quad (3.24)$$

$$R_{00}^{(4)} = -\Gamma_{00,i}^i {}^{(4)} + \Gamma_{0i,0}^i {}^{(3)} + \Gamma_{0i}^0 {}^{(2)} \Gamma_{00}^i {}^{(2)} - \Gamma_{00}^i {}^{(2)} \Gamma_{ij}^j {}^{(2)} \quad (3.25)$$

$$R_{0i}^{(3)} = \Gamma_{0i,0}^0 {}^{(2)} + \Gamma_{0i,j}^j {}^{(3)} - \Gamma_{00,i}^0 {}^{(3)} - \Gamma_{0j,i}^j {}^{(3)} \quad (3.26)$$

$$R_{ij}^{(2)} = \Gamma_{ij,k}^k {}^{(2)} - \Gamma_{i0,j}^0 {}^{(2)} - \Gamma_{ik,j}^k {}^{(2)} \quad (3.27)$$

これに (3.15)~(3.20) を代入すれば

$$R_{00}^{(2)} = \frac{1}{2} \nabla^2 g_{00}^{(2)} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} R_{00}^{(4)} = & \frac{1}{2} \nabla^2 g_{00}^{(4)} - g_{0i,0i}^{(3)} + \frac{1}{2} g_{ii,00}^{(2)} + \frac{1}{2} g^{ij} {}^{(2)} g_{00,ij} \\ & - \frac{1}{2} g_{ij,i} {}^{(2)} g_{00,j} + \frac{1}{4} g_{00,i} {}^{(2)} g_{00,i} + \frac{1}{4} g_{00,i} {}^{(2)} g_{jj,i} \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$R_{0i}^{(3)} = \frac{1}{2} g_{jj,0i}^{(2)} - \frac{1}{2} g_{j0,ij}^{(3)} - \frac{1}{2} g_{ij,0j}^{(2)} + \frac{1}{2} \nabla^2 g_{0i}^{(3)} \quad (3.30)$$

$$R_{ij}^{(2)} = -\frac{1}{2} g_{00,ij}^{(2)} + \frac{1}{2} g_{kk,ij}^{(2)} - \frac{1}{2} g_{ik,kj}^{(2)} - \frac{1}{2} g_{kj,ki}^{(2)} + \frac{1}{2} \nabla^2 g_{ij}^{(2)} \quad (3.31)$$

を得る。次にゲージ条件を課す。 x^μ が調和座標条件

$$g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0 \quad (3.32)$$

を満たすとする(結局、ローレンツ条件と同等であるとわかる)。そうすると条件式としてクリストッフェル記号の展開から

$$0 = \frac{1}{2} g_{00,0}^{(2)} - g_{0i,i}^{(3)} + \frac{1}{2} g_{ii,0}^{(2)} \quad (3.33)$$

$$0 = \frac{1}{2} g_{00,i}^{(2)} + g_{ij,j}^{(2)} - \frac{1}{2} g_{jj,i}^{(2)} \quad (3.34)$$

となるとわかる。同様にリッチテンソルの展開から

$$0 = \frac{1}{2}g_{ii,00}^{(2)} - g_{i0,i0}^{(3)} + \frac{1}{2}g_{00,00} \quad (3.35)$$

$$0 = g_{ii,0j}^{(2)} - g_{i0,i0}^{(3)} - g_{ij,i0}^{(2)} \quad (3.36)$$

と求まる。また、(3.34) を x^k について微分を取り、その結果を添え字 i と k を交換したものと足し合わせると

$$g_{00,ik}^{(2)} + g_{ij,jk}^{(2)} + g_{kj,ji}^{(2)} - g_{jj,ik}^{(2)} = 0 \quad (3.37)$$

を得る。これより $R_{ij}^{(2)}$ は

$$R_{ij}^{(2)} = \frac{1}{2}\nabla^2 g_{ij}^{(2)} \quad (3.38)$$

と表される。同様に $R_{00}^{(4)}$ もまとめることが可能

$$R_{00}^{(4)} = \frac{1}{2}\nabla^2 g_{00}^{(4)} - \frac{1}{2}g_{00,00}^{(2)} - \frac{1}{2}g_{ij}^{(2)}g_{00,ij} + \frac{1}{2}\left(g_{00,ii}^{(2)}\right)^2 \quad (3.39)$$

ここに (3.5) を代入すれば

$$R_{00}^{(4)} = \frac{1}{2}\nabla^2 g_{00}^{(4)} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - 2\Phi\nabla^2\Phi + 2(\nabla\Phi)^2 \quad (3.40)$$

が得られる。さらに $R_{0i}^{(3)}$ についても

$$R_{0i}^{(3)} = \frac{1}{2}\nabla^2 g_{0i}^{(3)} \quad (3.41)$$

が成り立つとわかる。議論をさらに進める。エネルギー・運動量テンソルについては

$$T^{00} = T^{00(0)} + T^{00(2)} + \dots \quad (3.42)$$

$$T^{i0} = T^{i0(1)} + T^{i0(3)} + \dots \quad (3.43)$$

$$T^{ij} = T^{ij(2)} + T^{ij(4)} + \dots \quad (3.44)$$

$$(3.45)$$

と展開できる。ここで $T^{\mu\nu(n)}$ はオーダー $\frac{\varepsilon^n \bar{M}}{r^3}$ の $T^{\mu\nu}$ 項である。場の方程式において必要なのは

$$S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T_{\lambda}^{\lambda} \quad (3.46)$$

今までと同様に計量の展開から、エネルギー密度 T^{00} のオーダーに注意して、

$$S_{00} = S_{00}^{(0)} + S_{00}^{(2)} + \dots \quad (3.47)$$

$$S_{i0} = S_{i0}^{(1)} + S_{i0}^{(3)} + \dots \quad (3.48)$$

$$S_{ij} = S_{ij}^{(0)} + S_{ij}^{(2)} + \dots \quad (3.49)$$

となって、これらをエネルギー・運動量テンソルで展開を表すと

$$S_{00}^{(0)} = \frac{1}{2} T^{00(0)} \quad (3.50)$$

$$S_{00}^{(2)} = \frac{1}{2} [T^{00(2)} + 2g^{00(2)}T^{000} + T^{ii(2)}] \quad (3.51)$$

$$S_{0i}^{(1)} = -T^{0i(1)} \quad (3.52)$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \delta_{ij} T^{00(0)} \quad (3.53)$$

となる。ここで $R_{\mu\nu}$ と $S_{\mu\nu}$ の関係は

$$R_{\mu\nu} = -8\pi S_{\mu\nu} \quad (3.54)$$

であるから、

$$\nabla^2 g_{00}^{(2)} = -8\pi T^{00(0)} \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 g_{00}^{(4)} &= g_{00,00}^{(2)} + g_{ij}^{(2)} g_{00,ij}^{(2)} - g_{00,i}^{(2)} g_{00,i}^{(2)} \\ &\quad - 8\pi [T^{00(2)} + 2g^{00(2)}T^{00(0)} + T^{ii(2)}] \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\nabla^2 g_{0i}^{(3)} = 16\pi T^{0i(1)} \quad (3.57)$$

$$\nabla^2 g_{ij}^{(2)} = -8\pi \delta_{ij} T^{00(0)} \quad (3.58)$$

となる。二次の方程式 (3.55) と (3.58) は (3.5) を満たし、

$$\Phi = - \int d^3 x' \frac{T^{00(0)}(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (3.59)$$

であるとわかる。四次の方程式は前の結果 (3.40) を用いて

$$\nabla^2 g_{00}^{(4)} = -8\pi [T^{00(2)} + 4\Phi T^{00(0)} + T^{ii(2)}] + 4\Phi \nabla^3 \Phi - 4(\nabla \Phi)^2 - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad (3.60)$$

と書ける。ここで、 $\nabla^2 \Phi = 4\pi T^{00(0)}$ と、さらにライプニッツ則から

$$(\nabla \Phi)^2 = \frac{1}{2} \nabla^2 \Phi^2 - \Phi \nabla^2 \Phi \quad (3.61)$$

が成り立つから、これらを用いて (3.60) を書き直すと

$$\nabla^2 (g_{00}^{(4)} + 2\Phi^2) = -8\pi (T^{00(2)} + T^{ii(2)}) - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad (3.62)$$

と求まる。そこでポテンシャル Ψ を

$$g_{00}^{(4)} = -2\Phi^2 - 2\Psi \quad (3.63)$$

で定義すると Ψ は方程式

$$\nabla^2 \Psi = 4\pi \left(T^{00(2)} + T^{ii(2)} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad (3.64)$$

を満たす。 $g_{00}^{(4)}$ は無限遠で消えなくてはならないから、解は

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = - \int \frac{d^3 x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \left[\frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{x}', t)}{\partial t^2} + T^{00(2)}(\mathbf{x}', t) + T^{ii(2)}(\mathbf{x}', t) \right] \quad (3.65)$$

である。また。新しくポテンシャル

$$g_{i0}^{(3)} \equiv \zeta_i \quad (3.66)$$

を定義すると三次の式の表式 (3.57) より

$$\zeta_i(\mathbf{x}, t) = -4 \int d^3 x' \frac{T^{i0(1)}(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (3.67)$$

$$\nabla^2 \zeta_i = 16\pi T^{i0(1)} \quad (3.68)$$

そして調和座標条件 (3.32) から、 Φ と ζ_i は

$$4 \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{\zeta} = 0 \quad (3.69)$$

という関係を満たす。以上より Φ, ζ_i, Ψ を使ってクリストッフェル記号を書き表すことができる：

$$\Gamma_{00}^{i(2)} = \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \quad (3.70)$$

$$\Gamma_{00}^{i(4)} = \frac{\partial}{\partial x^i} (2\Phi^2 + \Psi) + \frac{\partial \zeta_i}{\partial t} \quad (3.71)$$

$$\Gamma_{0j}^{i(3)} = -\delta_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \zeta_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \zeta_j}{\partial x^i} \right) \quad (3.72)$$

$$\Gamma_{jk}^{i(2)} = -\delta_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial x^k} - \delta_{ik} \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} + \delta_{jk} \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \quad (3.73)$$

$$\Gamma_{00}^{0(3)} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (3.74)$$

$$\Gamma_{0i}^{0(2)} = \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \quad (3.75)$$

また、 $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ は調和座標条件を満たす (“ $_{;\nu}$ ” は共変微分 ∇_ν を表す)。これを見るため、このエネルギー・運動量保存則の式を少し書き換えて

$$T^{\mu\nu}_{,\nu} = -\Gamma_{\nu\lambda}^\mu T^{\lambda\nu} - \Gamma_{\nu\lambda}^\nu T^{\mu\lambda} \quad (3.76)$$

この式について、すべての Γ は少なくともオーダー $\frac{\varepsilon^2}{r}$ であるから、最低次で

$$\frac{\partial T^{00(0)}}{\partial t} + \frac{\partial T^{i0(1)}}{\partial x^i} = 0 \quad (3.77)$$

これは (3.68) と組み合わせると

$$\nabla^2 \left(\nabla \cdot \vec{\zeta} + 4 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = 0 \quad (3.78)$$

を示唆する。 Φ と ζ_i は無限遠で消えるから、(3.68) に調和座標条件を課したときに与える結果と同じである。すなわち $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ は調和座標条件を確かに満たしている。

本題へ戻ろう。外部 PN 場 (Φ, ζ_i, Ψ) にある粒子に対して、運動方程式は

$$\delta \int \frac{d\tau}{dt} dt = 0 \quad (3.79)$$

から従う。 $v^i = \frac{dx^i}{dt}$ だから

$$\left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2 = 1 - \mathbf{v}^2 - g_{00}^{(2)} - g_{00}^{(4)} - 2g_{0i}^{(3)}v^i - 2g_{ij}^{(2)}v^i v^j \quad (3.80)$$

上の結果を用いて場の変数について書き表すと

$$\left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2 = 1 + (2\Phi - \mathbf{v}^2) + 2(\Phi^2 + \Psi - \vec{\zeta} \cdot \mathbf{v} + \Phi \mathbf{v}^2) \quad (3.81)$$

前の括弧は二次、後ろの括弧は四次の項を含んでいる。 $\sqrt{1+x}$ の幕展開から、四次のオーダーまでとると

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 + \Phi - \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 - \frac{1}{8}(2\Phi - \mathbf{v}^2)^2 + \Phi^2 + \Psi - \vec{\zeta} \cdot \mathbf{v} + \Phi \mathbf{v}^2 \quad (3.82)$$

あるいは

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 - L \quad (3.83)$$

ここで

$$L = -\Phi + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 - \frac{1}{2}\Phi^2 - \frac{3}{2}\Phi \mathbf{v}^2 + \frac{1}{8}(\mathbf{v}^2)^2 - \Psi - \vec{\zeta} \cdot \mathbf{v} \quad (3.84)$$

である。運動方程式が $\delta \int \frac{d\tau}{dt} dt = 0$ から従うので、 L を一粒子のラグランジアンとみなすことができる。従ってオイラー方程式より

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla(\Phi + 2\Phi^2 + \Psi) - \frac{\partial \vec{\zeta}}{\partial t} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \vec{\zeta}) + 3\mathbf{v} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + 4\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \nabla)\Phi - \mathbf{v}^2 \nabla \Phi \quad (3.85)$$

と運動方程式が求まる。

3.1.2 PN 漸近場

例として、任意の有限なエネルギーと運動量の分布から遠く離れた重力場を計算する。 $T^{\mu\nu}(\mathbf{x}, t)$ を $r > R$ で 0 とする。ここで、 $r \equiv |\mathbf{x}|$ 。それから、 $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{-1}$ を $\frac{r}{R}$ の逆幕で展開すると

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{-1} \longrightarrow \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'}{r^3} + \dots \quad (3.86)$$

すると、

$$\Phi \longrightarrow -\frac{M^{(0)}}{r} - \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{D}^{(0)}}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \quad (3.87)$$

$$\zeta_i \longrightarrow -\frac{4P_i^{(1)}}{r} - \frac{2x^j J_{ji}^{(1)}}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \quad (3.88)$$

$$\Psi \longrightarrow -\frac{M^{(2)}}{r} - \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{D}^{(2)}}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \quad (3.89)$$

と書くことができる。ここで、

$$M^{(0)} \equiv \int d^3x T^{00(0)} \quad (3.90)$$

$$\mathbf{D}^{(0)} \equiv \int d^3x \mathbf{x} T^{00(0)} \quad (3.91)$$

$$P_i^{(1)} \equiv \int d^3x T^{i0(1)} \quad (3.92)$$

$$J_{ij}^{(1)} \equiv 2 \int d^3x x^i T^{j0(1)} \quad (3.93)$$

$$M^{(2)} \equiv \int d^3x \left(T^{00(2)} + T^{ii(2)} \right) \quad (3.94)$$

$$\mathbf{D}^{(2)} \equiv \int d^3x \mathbf{x} \left(T^{00(2)} + T^{ii(2)} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right) \quad (3.95)$$

である。なお $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$ 項は $M^{(2)}$ には寄与しない。なぜなら、これは (3.69) より $-\frac{1}{4} \nabla \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial t}$ に等しく、積分で消えてしまうからである。

場 Ψ は g_{00} の展開の中でのみ物理的効果を持つ：

$$g_{00} = -1 - 2\Phi - 2\Psi - 2\Phi^2 + O(\varepsilon^6) \quad (3.96)$$

明らかに Φ を Ψ だけ変位させた形 ($\Phi + \Psi$) で書くことができる。近似的有効な範囲で

$$g_{00} = -1 - 2(\Phi + \Psi) - 2(\Phi + \Psi)^2 + O(\varepsilon^6) \quad (3.97)$$

となる。 Φ と Ψ の幕展開より、物理的に意味がある場 $\Phi + \Psi$ は

$$\Phi + \Psi \longrightarrow -\frac{M}{r} - \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{D}}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \quad (3.98)$$

である。ここで

$$M \equiv M^{(0)} + M^{(2)} , \quad \mathbf{D} \equiv \mathbf{D}^{(0)} + \mathbf{D}^{(2)} \quad (3.99)$$

とおいた。量 \mathbf{D} は物理的に重要な効果を表さないが、ちょうど場の変位となっている：

$$\Phi + \Psi \longrightarrow -\frac{M}{|\mathbf{x} - \frac{\mathbf{D}}{M}|} + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \quad (3.100)$$

エネルギーの中心に座標系の原点を取り直すことで \mathbf{D} 項を避けることができる。これで Φ と Ψ についての漸近場の表式を得ることができた。

次に ζ_i について考えよう。まずエネルギーと運動量の保存則を用いて $T^{\mu\nu}$ のモーメントの有用な性質をいくつか導出できる。(3.77) から、

$$\frac{dM^{(0)}}{dt} = 0 \quad (3.101)$$

$$\frac{d\mathbf{D}^{(0)}}{dt} = \mathbf{P}^{(1)} \quad (3.102)$$

となるとわかる。エネルギー・運動量テンソルが時間に依存しないなら、(3.77) は

$$\frac{\partial T^{i0(1)}}{\partial x^i} = 0 \quad (3.103)$$

そしてそれゆえに、部分積分によって

$$0 = \int d^3x x^i \frac{\partial}{\partial x^j} T^{j0(1)} = -P^{i(1)} \quad (3.104)$$

$$0 = 2 \int d^3x x^i x^j \frac{\partial}{\partial x^k} T^{k0(1)} = -J_{ij}^{(1)} - J_{ji}^{(1)} \quad (3.105)$$

を得る。静止系において $\mathbf{P}^{(1)}$ は消えるが、 $J_{ij}^{(1)}$ が反対称であることは明らかではない。このとき、

$$J_{ij}^{(1)} = \varepsilon_{ijk} J_k^{(1)} \quad (3.106)$$

と書ける。 $J_k^{(1)}$ は角運動量ベクトル

$$J_k^{(1)} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} J_{ij}^{(1)} = \int d^3x \varepsilon_{ijk} x^i T^{j0(1)} \quad (3.107)$$

(3.104) と (3.107) を使って ζ_i の展開を書き直せば

$$\zeta_i \longrightarrow \frac{2}{r^3} (\mathbf{x} \times \mathbf{J}) + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \quad (3.108)$$

となる。以上で PN 近似の下での漸近場を求めることができた。

最後に物質が球の場合を考え、 $T^{\mu\nu}(\mathbf{x}, t)$ が \mathbf{x} にのみ依存するとする。因子 $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{-1}$ は $r > r'$ において角度平均によって

$$\frac{1}{4\pi} \int \frac{d\Omega}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{[r^2 + 2rr' \cos \theta + r'^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{r} \quad (3.109)$$

となる。よって球体場の外側の至る所で

$$\Phi = -\frac{M^{(0)}}{r} \quad (3.110)$$

$$\vec{\zeta} = -\frac{4\mathbf{P}^{(1)}}{r} \quad (3.111)$$

$$\Psi = -\frac{M^{(2)}}{r} \quad (3.112)$$

と書くことができる。また、球が静止しているなら、 $\mathbf{P}^{(1)}$ は消える。この場合、今までの結果から

$$g_{00} \simeq -1 + \frac{2M}{r} - \frac{2M^2}{r^2} \quad (3.113)$$

$$g_{i0} \simeq 0 \quad (3.114)$$

$$g_{ij} \simeq \delta_{ij} + 2\delta_{ij} \frac{M}{r} \quad (3.115)$$

これは Schwarzschild 解を実現する。(Appendix)

3.1.3 点粒子の系に対する PN 近似

特殊相対性理論で点粒子の系のエネルギー・運動量テンソルは

$$T^{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) = \sum_a m_a \int d\tau_a \frac{dx_a^\mu}{d\tau_a} \frac{dx_a^\nu}{d\tau_a} \delta^4(x - x_a(\tau_a)) \quad (3.116)$$

で与えられる。これを一般相対性理論に拡張しよう。 $\sqrt{-g}d^4x$ ($g = \det g_{\mu\nu}$) はローレンツ不変な量であるから、 $\delta^4(x - y)/\sqrt{-g}$ も不変であるということを導く。従って、点粒子の系における一般相対性理論的なエネルギー・運動量テンソルは

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_a m_a \int d\tau_a \frac{dx_a^\mu}{d\tau_a} \frac{dx_a^\nu}{d\tau_a} \delta^4(x - x_a(\tau_a)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_a m_a \frac{dx_a^\mu}{d\tau_a} \frac{dx_a^\nu}{d\tau_a} \left(\frac{d\tau_a}{dt} \right)^{-1} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a(t)) \end{aligned} \quad (3.117)$$

また PN 展開として

$$-g = 1 + g^{(2)} + g^{(4)} + \dots \quad (3.118)$$

となると考えられる。さらにこの近似の下では

$$g^{(2)} = -g_{00}^{(2)} + g_{ii}^{(2)} = -4\Phi \quad (3.119)$$

となる。これを (3.117) に代入し、 $\frac{d\tau}{dt} = 1 - L$ を使うと

$$T^{00(0)} = \sum_a m_a \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a) \quad (3.120)$$

$$T^{00(2)} = \sum_a m_a \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}_a^2 + \Phi \right) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a) \quad (3.121)$$

$$T^{i0(1)} = \sum_a m_a v_a^i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a) \quad (3.122)$$

$$T^{ij(2)} = \sum_a m_a v_a^i v_a^j \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a) \quad (3.123)$$

と求まる。エネルギー・運動量保存則の最低次の式 (3.77) と次の次数の式

$$\frac{\partial T^{i0(0)}}{\partial t} + \frac{\partial T^{ij(2)}}{\partial x^j} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} T^{00(0)} \quad (3.124)$$

を用いれば、各粒子はニュートンの運動方程式に従うとわかる：

$$\frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = -\nabla\Phi(\mathbf{x}_a) \quad (3.125)$$

これから明らかな解として

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = -\sum_a \frac{m_a}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_a|} \quad (3.126)$$

が得られる。また Ψ については

$$\nabla^2\Psi = 4\pi \sum_a m_a \left(\Phi'_a + \frac{3}{2}\mathbf{v}_a^2 \right) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a) + \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} \quad (3.127)$$

と求まる。ただし、 \mathbf{x}_a で決まらないニュートンポテンシャル

$$\Phi'_a \equiv -\sum_{b \neq a} \frac{m_b}{|\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_a|} \quad (3.128)$$

を用いて置き換えた。これは質量のくりこみとして解釈される。よって

$$\Psi = -\sum_a \frac{m_a \Phi'_a}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_a|} - \frac{3}{2} \sum_a \frac{m_a \mathbf{v}_a^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_a|} - \frac{1}{2} \sum_a \frac{m_a \mathbf{v}_a \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_a|} + \frac{1}{2} \sum_a \frac{\mathbf{v}_a \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_a) \mathbf{v} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_a)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_a|^3} \quad (3.129)$$

と書くことができる。 ζ_i については

$$\zeta_i = -4 \sum_a \frac{m_a v_a^i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_a|} \quad (3.130)$$

が得られる。以上より重力波振幅の成分 ($g_{00}^{(2)}$ など) を PN 近似を通して得ることができた。これらをある物理量の下で解き、 $\bar{h}_{\mu\nu}$ の各成分を計算すれば、重力波振幅の表式が得られるとわかる。

3.1.4 Einstein-Infeld-Hoffmann 方程式

エネルギー・運動量テンソルの各成分を求めるための議論を続ける。他の粒子の場の中にある粒子のラグランジアン L_a は (3.155) より

$$\begin{aligned} L_a = & \frac{1}{2}\mathbf{v}_a^2 + \frac{1}{8}\mathbf{v}_a^4 + \sum_{b \neq a} \frac{m_b}{r_{ab}} - \frac{1}{2} \sum_{b,c \neq a} \frac{m_b m_c}{r_{ab} r_{ac}} - \sum_{b \neq a} \sum_{c \neq a,b} \frac{m_b m_c}{r_{ab} r_{bc}} \\ & + \frac{3}{2}\mathbf{v}_a^2 \sum_{b \neq a} \frac{m_b \mathbf{v}_b^2}{r_{ab}} - \frac{1}{2} \sum_{b \neq a} \frac{m_b}{r_{ab}} [7\mathbf{v}_a \cdot \mathbf{v}_b + (\mathbf{v}_a \cdot \mathbf{n}_{ab})(\mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_{ab})] \end{aligned} \quad (3.131)$$

である。ここで

$$r_{ab} \equiv |\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b|, \quad \mathbf{n}_{ab} \equiv \frac{\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b}{r_{ab}} \quad (3.132)$$

とおいた。N 体系の全ラグランジアン L は $\lim_{m_a \rightarrow 0} \frac{L}{m_a} = L_a$ という性質を持つ、 $(m_a, \mathbf{x}_a, \mathbf{v}_a; a = 1, 2, \dots, N)$ の対称的な表式でなくてはならない。この条件は、極限 $m_a \rightarrow 0$ で粒子 a は他の粒子が作る場の測地線に沿って動くということと同

等である。よって、全ラグランジアンの表式は和の取り方に注意して次のようにあらわされる：

$$\begin{aligned}
 L = & \sum_a \frac{1}{2} m_a \mathbf{v}_a^2 + \sum_a \frac{1}{8} m_a \mathbf{v}_a^4 + \frac{1}{2} \sum_{a,b(a \neq b)} \frac{m_a m_b}{r_{ab}} + \frac{3}{2} \sum_a m_a \mathbf{v}_a^2 \sum_{b \neq a} \frac{m_b}{r_{ab}} \\
 & - \sum_{a,b(a \neq b)} \frac{m_a m_b}{4r_{ab}} [7\mathbf{v}_a \cdot \mathbf{v}_b + (\mathbf{v}_a \cdot \mathbf{n}_{ab})(\mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_{ab})] - \frac{1}{2} \sum_a \sum_{b \neq a} \sum_{c \neq a} \frac{m_a m_b m_c}{r_{ab} r_{ac}}
 \end{aligned} \tag{3.133}$$

これをオイラー方程式で解いたものが Einstein-Infeld-Hoffmann(EIH) 方程式と呼ばれる。結果は

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{v}}_a = & - \sum_{b \neq a} m_b \frac{\mathbf{x}_{ab}}{r_{ab}} \left[1 - 4 \sum_{c \neq a} \frac{m_c}{r_{ac}} + \sum_{c \neq a, b} m_c \left(-\frac{1}{r_{bc}} + \frac{\mathbf{x}_{ab} \cdot \mathbf{x}_{bc}}{2r_{bc}^3} \right) - 5 \frac{m_a}{r_{ab}} \right. \\
 & \left. + \mathbf{v}_a^2 - 4\mathbf{v}_a \cdot \mathbf{v}_b + 2\mathbf{v}_b^2 - \frac{3}{2} \left(\frac{\mathbf{v}_a \cdot \mathbf{x}_{ab}}{r_{ab}} \right)^2 \right] \\
 & - \frac{7}{2} \sum_{b \neq a} \frac{m_b}{r_{ab}} \sum_{c \neq a, b} \frac{m_c \mathbf{x}_{bc}}{r_{bc}^3} + \sum_{b \neq a} m_b \frac{\mathbf{x}_{ab}}{r_{ab}^3} \cdot (4\mathbf{v}_a - 3\mathbf{v}_b)(\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b)
 \end{aligned} \tag{3.134}$$

となる。ここで $\mathbf{x}_{ab} \equiv \mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b$ である。

具体的に $a = 1, 2$ として PN 近似で 2 体問題を扱う。 $r \equiv r_{12}$, $\mathbf{n} \equiv \mathbf{n}_{12}$ とおくと、ラグランジアンは

$$\begin{aligned}
 L = & \frac{m_1}{2} \mathbf{v}_1^2 + \frac{m_2}{2} \mathbf{v}_2^2 + \frac{m_1 m_2}{r} + \frac{1}{8} (m_1 \mathbf{v}_1^4 + m_2 \mathbf{v}_2^4) \\
 & + \frac{m_1 m_2}{2r} [3(\mathbf{v}_1^2 + \mathbf{v}_2^2) - 7\mathbf{v}_a \cdot \mathbf{v}_b - (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n})(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n})] - \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{r^2}
 \end{aligned} \tag{3.135}$$

EIH 方程式は、質量中心系

$$\mathbf{X} = \frac{m_1^* \mathbf{x}_1 + m_2^* \mathbf{x}_2}{m_1^* + m_2^*} \tag{3.136}$$

ただし、

$$m_a^* \equiv m_a + \frac{1}{2} m_a \mathbf{v}_a^2 - \frac{1}{2} \frac{m_{ab}}{r_{ab}} \quad , \quad a \neq b \tag{3.137}$$

において加速度がないこと；

$$\frac{d^2 \mathbf{X}}{dt^2} = 0 \tag{3.138}$$

を示す。もし $\mathbf{X} = 0$ を選んだなら

$$\mathbf{x}_1 = \left[\frac{m_2}{m} + \frac{\mu \delta m}{2m^2} \left(\mathbf{v}^2 - \frac{m}{r} \right) \right] \mathbf{x} \tag{3.139}$$

$$\mathbf{x}_2 = \left[-\frac{m_1}{m} + \frac{\mu \delta m}{2m^2} \left(\mathbf{v}^2 - \frac{m}{r} \right) \right] \mathbf{x} \tag{3.140}$$

となる。ここで

$$\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_a - \mathbf{x}_2 , \quad \mathbf{v} \equiv \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 , \quad m \equiv m_1 + m_2 \quad (3.141)$$

$$\delta m \equiv m_1 - m_2 , \quad \mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m} \quad (3.142)$$

である。これらを用いてラグランジアンを書き直す。結果を μ で割ったものを改めてラグランジアンとしておくと

$$L = \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \frac{m}{r} + \frac{1}{8} \left(1 - \frac{3\mu}{m} \right) \mathbf{v}^4 + \frac{m}{2r} \left[3\mathbf{v}^2 + \frac{\mu}{m} \mathbf{v}^2 + \frac{\mu}{m} \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}}{r} \right)^2 \right] - \frac{m^2}{2r^2} \quad (3.143)$$

となり、よってオイラー方程式から

$$\dot{\mathbf{v}} = -\frac{m}{r^3} \mathbf{x} \left[1 - \frac{m}{r} \left(4 + \frac{2\mu}{m} \right) + \left(1 + \frac{3\mu}{m} \right) \mathbf{v}^2 - \frac{3\mu}{2m} \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}}{r} \right)^2 \right] + \frac{m}{r^3} \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}) \left(4 - \frac{2\mu}{m} \right) \quad (3.144)$$

と運動方程式が求まる。これより速度が求まるので、エネルギー・運動量テンソルの各成分が計算できるようになった。従ってこれらの計算を通して重力波振幅の表式を得ることができる。

3.2 合体 (merging) フェイズ

ここでは数値相対論を扱う。

3.3 リングダウン (ring down) フェイズ

今までと同様に、計量は背景計量に計量摂動が加わった形を持つような線形の理論を展開する。このフェイズではブラックホール計量が背景計量であると考え、そこからの歪みが重力波であると捉える。今まで扱ってきた線形重力波の下では背景計量はシンコフスキー計量であった。そのため、そこに摂動を加えたときのAINSHUTAIN方程式の形は摂動だけに対する単純な方程式となっていたが、この場合では、背景計量が時空間に依存する計量となっているから、AINSHUTAIN方程式は複雑な形のままである。それゆえに、平面波を求めてきたようにローレンツゲージを選んだとしても簡単に解くことはできない。そこで複雑なAINSHUTAIN方程式を解くためにローレンツゲージとは別の適切なゲージ変換を施し、単純な形へと変形することを考える。その後、施したゲージの下での方程式を導出し、その方程式を解いて重力波振幅を求めるべく方程式を紹介することにした。

3.3.1 Schwarzschild ブラックホールの線形摂動

Schwarzschild ブラックホールにおける計量は線素

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (3.145)$$

によって与えられる。このときの計量を Schwarzschild 計量 $g_{\mu\nu}^S$ と置いておこう。線形理論の摂動 $h_{\mu\nu}$ を加えるということは考える計量 $g_{\mu\nu}$ が

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^S + h_{\mu\nu} \quad (3.146)$$

であるということを示す。もちろん、 $h_{\mu\nu}$ は $g_{\mu\nu}^S$ に対して十分小さい。すなわち

$$\frac{|h_{\mu\nu}|}{|g_{\mu\nu}^S|} \ll 1 \quad (3.147)$$

ということである。線形重力波における背景計量 $\eta_{\mu\nu}$ が $g_{\mu\nu}$ に置き換わったという事実以外は同じである。つまり、Schwarzschild 計量によって添え字の上げ下げができる、摂動は一次のオーダーまでとる。また Schwarzschild 解を考えているので、球対称なブラックホールとなっているから、 $h_{\mu\nu}$ も角度依存性を持って書かれるはずである。すなわち、 $h_{\mu\nu}(t, r, \theta, \phi)$ と表される。また静的なブラックホールでもあるという性質から、Schwarzschild 計量には時間と空間が混合する部分は時間反転不变性により恒等的に 0 になるが、計量摂動は時間的なゆらぎであるはずなので混合項は一般的に 0 ではないことに注意する。

このテンソルを評価するために、まず空間座標にのみ依存するスカラー関数の場合を考えよう。それは球面調和関数によって展開できた：

$$f(r, \theta, \phi) = \sum_{l,m} a_{lm}(r) Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (3.148)$$

同様に考えてベクトルの場合、ベクトル球面調和関数によって展開できる：

$$V^\alpha(r, \theta, \phi) = \sum_{l,m} a_{lm}(r) [Y_{lm}^B(\theta, \phi)]^\alpha + \sum_{l,m} b_{lm}(r) [Y_{lm}^E(\theta, \phi)]^\alpha \quad (3.149)$$

ここで、 Y_{lm}^B と Y_{lm}^E は磁気型(軸性ベクトル型)と電気型(極性ベクトル型)を意味する。ゆえにランク 2 の対称テンソルにおいても同じ形の級数展開で書くことができると考えられ、それはテンソル球面調和関数

$$T_{\mu\nu}(t, r, \theta, \phi) = \sum_{l,m} a_{lm}(t, r) [A_{lm}^{ax}(\theta, \phi)]_{\mu\nu} + \sum_{l,m} b_{lm}(t, r) [B_{lm}^{pol}(\theta, \phi)]_{\mu\nu} \quad (3.150)$$

である。ここで注意することはパリティ変換の下で各項は異なるふるまいをするということである。P をパリティ演算子とする。これはランク 2 対称テンソル $F_{\mu\nu}$ に対して、

$$P([F_{lm}(\theta, \phi)]_{\mu\nu}) \rightarrow [\tilde{F}_{lm}(\pi - \theta, \pi + \phi)]_{\mu\nu} \quad (3.151)$$

という変換を施す。従って、これによりテンソル球面調和関数はパリティ変換の下でのふるまいによって分類することができる。まず、odd あるいは axial(軸性)について

$$P(F_{\mu\nu}) = (-1)^{l+1} F_{\mu\nu} \quad (3.152)$$

となる。次に、even あるいは polar(極性)について

$$P(F_{\mu\nu}) = (-1)^l F_{\mu\nu} \quad (3.153)$$

となる。それゆえに、計量摂動は odd パリティか even パリティかで分類されるとわかる。

これらを導入して議論する前に、”3+1” 分解と呼ばれる、時空間を $t = const.$

でパラメータ化した、空間超曲面を考えると時空間の混合部分が見やすくなり便利である。簡単に説明すると時空間を時間と空間に分けて、空間を張る超曲面 Σ が時間の関数で表される ($\Sigma = \Sigma(t)$) ように書き表すということである。これにより、断続的な時間変化によって超曲面の物理量がどのように移り変わるかを見ることができる。この分解では線素は

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\alpha^2 dt^2 + \gamma_{ij}(dx^i + \beta^i dt)(dx^j + \beta^j dt) \\ &= -(\alpha^2 - \beta^j \beta_j)dt^2 + 2\beta_i dx^i dt + \gamma_{ij} dx^i dx^j \end{aligned} \quad (3.154)$$

となる。ここで α は lapse 関数 (時間間隔の取り方を表す関数) と呼ばれ、 β^i は遷移ベクトルの成分である。それから、この表式に当てはめるように計量摂動は純時間部分 (h_{00})、純空間部分 (h_{ij})、そして時空間混合部分 (h_{0i}) で表すことができる：

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} h_{00} & h_{0i} \\ h_{i0} & h_{ij} \end{pmatrix} \quad (3.155)$$

以下では、 h_{00}, h_{0i}, h_{ij} の展開を用いて議論する。

3.3.2 Odd パリティ 摂動 : Regge-Wheeler 方程式

計量摂動の Odd パリティ部分を考える。(3.155) の成分となるように未知関数 $h_0(t, r), h_1(t, r), h_2(t, r)$ を使って

$$h_{00} = 0 \quad (3.156)$$

$$h_{0i} = h_0(t, r) \left[0, -\frac{1}{\sin \theta} \sum_{l,m} \partial_\phi Y_{lm}, \sin \theta \sum_{l,m} \partial_\theta Y_{lm} \right] \quad (3.157)$$

$$h_{ij} = h_1(t, r) (\hat{e}_1)_{ij} + h_2(t, r) (\hat{e}_2)_{ij} \quad (3.158)$$

と書くことができる。ここでテンソル球面調和関数 $(\hat{e}_{1,2})_{ij} = \sum_{l,m} [(\hat{e}_{1,2})_{ij}]_{lm}$ であり、以後指数 lm を落とし、和を取っていることにする。これらを明らかな行列表式で書くと次のようになる：

$$(\hat{e}_1)_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sin \theta} \partial_\phi Y_{lm} & \sin \theta \partial_\theta Y_{lm} \\ -\frac{1}{\sin \theta} \partial_\phi Y_{lm} & 0 & 0 \\ \sin \theta \partial_\theta Y_{lm} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.159)$$

$$(\hat{e}_2)_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin \theta} (\partial_{\theta\phi}^2 - \cot \theta \partial_\phi) Y_{lm} & \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \partial_\phi^2 - \cos \theta \partial_\theta - \sin \theta \partial_\theta^2 \right] Y_{lm} \\ 0 & \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \partial_\phi^2 - \cos \theta \partial_\theta - \sin \theta \partial_\theta^2 \right] Y_{lm} & - \left[\sin \theta \partial_{\theta\phi}^2 - \cos \theta \partial_\phi \right] Y_{lm} \end{pmatrix} \quad (3.160)$$

である。ここで $\partial_{\theta\phi}^2 = \partial_\theta \partial_\phi$ である。これらの計量摂動を持つAINシュタイン方程式は、適当なゲージ条件を選んで単純化することができる。この場合では

$$h_2(t, r) = 0 \quad (3.161)$$

を選ぶ。このゲージでは Odd パリティ計量摂動は

$$h_{\mu\nu}^{ax} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & h_0 \\ 0 & 0 & 0 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_0 & h_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sin \theta \partial_\theta P_l(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (3.162)$$

と表せる。このゲージを Regge-Wheeler ゲージという。ここで $P_l(\cos \theta)$ は次数 l のルジャンドル多項式である。最終的な結果は m に依らないと考えられるので、 $m = 0$ とおく。結果として (3.162) におけるAINシュタイン方程式は次の方程式たちを導く：

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial r^2} + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{6M}{r^3} \right] Q = 0 \quad (3.163)$$

$$\frac{\partial h_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r_*} (r_* Q) \quad (3.164)$$

ここで

$$Q \equiv \frac{h_1}{r} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \quad (3.165)$$

$$r_* \equiv r + 2M \ln \left(\frac{r}{2M} - 1 \right) \quad (3.166)$$

である。 r_* はゆっくり動くという意味で亀座標と呼ばれる。なぜならそのふるまいが $r \rightarrow \infty$ において $r_* \rightarrow r$ であり、 $r \rightarrow 2M$ において $r_* \rightarrow \infty$ となるからである。亀座標は特にブラックホール付近の摂動の伝搬を考察するのに用いる。Regge-Wheeler 方程式 (3.163) の便利なところは、散乱ポテンシャル障壁 $V(r)$ の波動方程式と考えられるところである。ここで

$$V(r) \equiv \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[\frac{l(l+1)}{r^2} + p \right] , \quad p \equiv -\frac{6M}{r^3} \quad (3.167)$$

である。ポテンシャル (3.167) は Regge-Wheeler ポテンシャルと呼ばれ、Schwarzschild の座標系において散乱イベントが起きる境界の外側で $r \sim 3.3M$ の極大値を持つ。散乱ポテンシャルを持つ波動方程式であるから、Schwarzschild ブラックホールの時空間にある摂動の伝搬は波として伝わるとわかる。他に興味深いこととして有効ポテンシャルは、スカラーの場合 $p = \frac{2M}{r^3}$ となり、ベクトルの場合 $p = 0$ となるという事実がある。

3.3.3 Even パリティ摂動 : Zerilli 方程式

Odd パリティのときと同じように数学的なアプローチによって計量摂動を導く。未知関数を $h_0(t, r), h_1(t, r), H_0(t, r), H_1(t, r), H_2(t, r), K(t, r), G(t, r)$ を使うと次のように摂動を書くことができる：

$$h_{00} = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{\frac{1}{2}} H_0(t, r) Y_{lm} \quad (3.168)$$

$$h_{0i} = [H_1 Y_{lm}, h_0 \partial_\theta Y_{lm}, h_0 \partial_\phi Y_{lm}] \quad (3.169)$$

$$h_{ij} = h_1 \left(\hat{f}_1 \right)_{ij} + \frac{H_2}{1 - 2M/r} \left(\hat{f}_2 \right)_{ij} + r^2 K \left(\hat{f}_3 \right)_{ij} + r^2 G \left(\hat{f}_4 \right)_{ij} \quad (3.170)$$

ここでテンソル球面調和関数 $(\hat{f}_{1-4})_{ij}$ は表式

$$(\hat{f}_1)_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \partial_\theta Y_{lm} & \partial_\phi Y_{lm} \\ \partial_\theta Y_{lm} & 0 & 0 \\ \partial_\phi Y_{lm} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.171)$$

$$(\hat{f}_2)_{ij} = \begin{pmatrix} Y_{lm} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.172)$$

$$(\hat{f}_3)_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_{lm} & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2 \theta Y_{lm} \end{pmatrix} \quad (3.173)$$

$$(\hat{f}_4)_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_\phi^2 Y_{lm} & (\partial_{\theta\phi}^2 - \cot \theta \partial_\phi) Y_{lm} \\ 0 & (\partial_{\theta\phi}^2 - \cot \theta \partial_\phi) Y_{lm} & (\partial_\phi^2 - \sin \theta \cos \theta \partial_\theta) Y_{lm} \end{pmatrix} \quad (3.174)$$

を持つ。そこでゲージを

$$G = h_0 = h_1 = 0 \quad (3.175)$$

と選ぶ。そうすると Even パリティ計量摂動は次の形で書くことができる：

$$h_{\mu\nu}^{pol} = \begin{pmatrix} H_0 (1 - \frac{2M}{r}) & H_1 & 0 & 0 \\ H_1 & H_2 (1 - \frac{2M}{r})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta K \end{pmatrix} P_l(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (3.176)$$

この計量におけるAINシュタイン方程式は次のようになる：

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 Z}{\partial r_*^2} + \tilde{V} Z = 0 \quad (3.177)$$

これは Zerilli 方程式と呼ばれる。Zerilli 関数 Z はこのゲージで

$$Z = \frac{4re^{-4\lambda} k_2 + l(l+1)rk_1}{l(l+1) - 2 + 6M/r} \quad (3.178)$$

となる。ここで、 $e^{-\lambda} \equiv 1 - \frac{2M}{r}$ また k_1, k_2, k_3, k_4 は G, h_1, K, H_2 と次のような関係を持っている：

$$G = k_3 \quad (3.179)$$

$$h_1 = k_4 \quad (3.180)$$

$$K = k_1 - \frac{e^{-2\lambda}}{r} \left[r^2 \frac{\partial k_3}{\partial r} - 2k_4 \right] \quad (3.181)$$

$$H_2 = 2e^{-2\lambda} k_2 + r \frac{\partial k_1}{\partial r} + \left(1 + r \frac{\partial \lambda}{\partial r} \right) k_1 - e^{-\lambda} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 e^{-\lambda} \frac{\partial k_3}{\partial r} - 2e^{-\lambda} k_4 \right] \quad (3.182)$$

またポテンシャル障壁は

$$\tilde{V} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[\frac{2q(q+1)r^3 + 6q^2Mr^2 + 18qM^2r + 18M^3}{r^3(qr+3M)^2} \right] \quad (3.183)$$

である。ただし $q = \frac{(l-1)(l+2)}{2}$ である。

まとめる (3.163) と (3.177) はそれぞれの場合における波動方程式となっており、計量摂動は減衰する振動解として与えられるとわかった。

3.3.4 Kerr ブラックホールの線形摂動

背景計量が Kerr ブラックホールの計量である場合を考える。Schwarzschild の場合と同様にアインシュタイン方程式は複雑なままであり、適切なゲージ変換によって方程式を簡略化して解くしかない。この方程式を導くため、まずアインシュタイン方程式を簡略化する方法としてテトラッドを導入する。やることは基底をテトラッドで書き換えたアインシュタイン方程式を導くということである。

3.3.5 アインシュタイン方程式のテトラッド表現

4 つの線形独立な基底四元ベクトル $e_{(a)}^\mu (a = 0, 1, 2, 3)$ の組を導入する。これが一定の対称行列 η_{ab} を用いて

$$e_{(a)}^\mu e_{(b)\mu} = \eta_{ab} \quad (3.184)$$

を満たすものとする。これをテトラッドと呼ぶ。 $e_{(a)}^\mu$ の 4 つの組とともにそれらに相反であるベクトルの 4 つの組 $e_{(a)}^\mu$ を導入する。それは

$$e_\mu^{(a)} e_{(b)}^\mu = \delta_b^a \quad (3.185)$$

で定義され、 $e_\mu^{(a)}$ は $b \neq a$ のとき $e_{(b)}^\mu$ と直交する。 (3.185) に $e_{(a)}^\nu$ を掛けると $(e_{(a)}^\nu e_\mu^{(a)}) e_{(b)}^\mu = e_{(b)}^\nu$ が得られるから

$$e_\mu^{(a)} e_{(a)}^\nu = \delta_\mu^\nu \quad (3.186)$$

も自動的に満たされるとわかる。次に等式 $e_{(a)}^\mu e_{(c)\mu} = \eta_{ac}$ の両辺に η^{bc} を掛けると

$$e_{(a)}^\mu (\eta^{bc} e_{(c)\mu}) = \delta_a^b \quad (3.187)$$

となる。 (3.185) と比べると

$$e_\mu^{(b)} = \eta^{bc} e_{(c)\mu} \quad , \quad e_{(b)\mu} = \eta_{bc} e_\mu^{(c)} \quad (3.188)$$

であるとわかる。それゆえに基底ベクトルの添え字の上げ下げは行列 η^{bc} によって行なわれるとわかる。

これらによって計量テンソルを表そう。四元ベクトルの共変成分と反変成分との間の関係の定義から、 $e_\mu^{(a)} = g_{\mu\sigma} e^{(a)\sigma}$ とわかり、この式に $e_{(a)\nu}$ を掛け、 (3.186) と (3.188) を用いると

$$g_{\mu\nu} = e_{(a)\mu} e_\nu^{(a)} = \eta_{ab} e_\mu^{(a)} e_\nu^{(b)} \quad (3.189)$$

となる。計量テンソル (3.189) の下で、線素は

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{ab} e_\mu^{(a)} dx^\mu e_\nu^{(b)} dx^\nu \quad (3.190)$$

となる。注意すべきことは、必ずしも η はミンコフスキーメトリックである必要はないということである。

次に四元ベクトル A^μ のテトラッド成分は基本ベクトルへ、その射影によって定義される：

$$A_{(a)} = e_{(a)}^\mu A_\mu, \quad A^{(a)} = e_\mu^{(a)} A^\mu = \eta^{ab} A_{(b)} \quad (3.191)$$

また逆に

$$A_\mu = e_\mu^{(a)} A_{(a)}, \quad A^\mu = e_{(a)}^\mu A^{(a)} \quad (3.192)$$

となる。テンソルに対しても同様に書けると考えられる。

簡単のため、” a の方向に沿う”微分演算を定義する：

$$\phi_{,a} = e_{(a)}^\mu \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \quad (3.193)$$

また、ある量

$$\gamma_{abc} = e_{(a)\mu;\nu} e_{(b)}^\mu e_{(c)}^\nu \quad (3.194)$$

(” $;\nu$ ”は共変微分) とその一次結合

$$\lambda_{abc} = \gamma_{abc} - \gamma_{acb} = (e_{(a)\mu;\nu} - r_{(a)\nu;\mu}) e_{(b)}^\mu e_{(c)}^\nu \quad (3.195)$$

を導入する。ここで

$$\nabla_\nu A_\mu - \nabla_\mu A_\nu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \quad (3.196)$$

を使った。逆に γ_{abc} を λ_{abc} で表すと

$$\gamma_{abc} = \frac{1}{2} (\lambda_{abc} + \lambda_{bca} - \lambda_{cab}) \quad (3.197)$$

これらの量は次の対称性をもつ：

$$\gamma_{abc} = -\gamma_{bac}, \quad \lambda_{abc} = -\lambda_{acb} \quad (3.198)$$

これらを用いて、リッチテンソルのテトラッド成分を決める。そのために、定義

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\rho = R_{\sigma\mu\nu}^\rho V^\sigma \quad (3.199)$$

を基底ベクトルの共変微分に適用することから始める：

$$e_{(a)\rho;\mu;\nu} - e_{(a)\rho;\nu;\mu} e_{(b)}^\rho e_{(c)}^\mu e_{(d)}^\nu \quad (3.200)$$

あるいは

$$R_{abcd} = (e_{(a)\rho;\mu;\nu} - e_{(a)\rho;\nu;\mu}) e_{(b)}^\rho e_{(c)}^\mu e_{(d)}^\nu \quad (3.201)$$

この量は γ_{abc} で表せる：

$$e_{(a)\mu;\nu} = \gamma_{abc} e_\mu^{(b)} e_\nu^{(c)} \quad (3.202)$$

となることより、スカラー量の共変微分がその単なる微分と一致することに注意して

$$e_{(a)\mu;\nu;\sigma} = \gamma_{abc,\sigma} e_\mu^{(b)} e_\nu^{(c)} + \gamma_{abc} \gamma_{df}^b e_\mu^{(d)} e_\sigma^{(f)} + \gamma_{abc} e_\mu^{(b)} \gamma_{df}^c e_\nu^{(d)} e_\sigma^{(f)} \quad (3.203)$$

となる。よってリーマンテンソルは

$$R_{abcd} = \gamma_{abc,d} - \gamma_{abd,c} + \gamma_{abf}(\gamma_{cd}^f - \gamma_{dc}^f)\gamma_{afc}\gamma_{bd}^f - \gamma_{af}\gamma_{bc}^f \quad (3.204)$$

を得る。ただし $\gamma_{bc}^a = \eta^{ad}\gamma_{dbc}$ である。このテンソルを a, c について縮約すればリッヂテンソルが得られる。これを λ_{abc} で表せば

$$\begin{aligned} R_{ab} = & -\frac{1}{2} \left(\lambda_{ab,c}^c + \lambda_{ba,c}^c + \lambda_{ca,b}^c + \lambda_{cb,a}^c + \lambda_{cd}^c \lambda_{cda} \right. \\ & \left. + \lambda_b^{cd} \lambda_{dca} - \frac{1}{2} \lambda_b^{cd} \lambda_{acd} + \lambda_{cd}^c \lambda_{ab}^d + \lambda_{cd}^c \lambda_{ba}^d \right) \end{aligned} \quad (3.205)$$

と求まる。

以上により、AINSHUTAIN方程式をテトラッド表現で書き表すことができた。

3.3.6 Newman-Penrose formalism

先ほど導入したテトラッドを用いて、基底をヌルベクトルに選ぶ。これを実行するため、基底となるヌルベクトルを $l^\mu, n^\mu, m^\mu, \bar{m}^\mu$ と選び、 l^μ, n^μ は実ベクトル、 m^μ は複素ベクトル、 \bar{m}^μ は m^μ の複素共役とする。この4つの組を複素ヌルテトラッドという。これらの関係として

$$l_\mu l^\mu = n_\mu n^\mu = m_\mu m^\mu = \bar{m}_\mu \bar{m}^\mu = 0 \quad (3.206)$$

$$l_\mu m^\mu = l_\mu \bar{m}^\mu = n_\mu m^\mu = n_\mu \bar{m}^\mu = 0 \quad (3.207)$$

$$l_\mu n^\mu = 1, \quad m_\mu \bar{m}^\mu = -1 \quad (3.208)$$

を要求する。テトラッドのベクトルを

$$e_1^\mu = l^\mu, \quad e_2^\mu = n^\mu, \quad e_3^\mu = m^\mu, \quad e_4^\mu = \bar{m}^\mu \quad (3.209)$$

とすれば、上の関係より対称行列 η は

$$\eta_{ab} = \eta^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.210)$$

となる。また

$$e_1^\mu = e^{\mu 2} = l^\mu, \quad e_2^\mu = e^{\mu 1} = n^\mu \quad (3.211)$$

$$e_3^\mu = -e^{\mu 4} = m^\mu, \quad e_4^\mu = -e^{\mu 3} = \bar{m}^\mu \quad (3.212)$$

という関係が成り立つ。以上の形式化を Newman-Penrose formalism という。

3.3.7 Teukolsky 方程式

前の節とその前の節でテトラッドを用いたAINSHUTAIN方程式の簡略化の方法を説明してきた。これらを用いて方程式を書き下す。Kerr ブラックホールの計量は

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma} \right) dt^2 + \frac{4Mar \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \sin^2 \theta \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2 r \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) d\phi^2 \quad (3.213)$$

で表される。ここで

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad , \quad \Delta = r^2 - 2Mr + a^2 \quad (3.214)$$

である。また M はブラックホールの質量である。ここでテトラッドを

$$l^\mu = \left(\frac{r^2 + a^2}{\Delta}, 1, 0, \frac{a}{\Delta} \right) \quad , \quad n^\mu = \left(\frac{r^2 + a^2}{2\Sigma}, 0, \frac{a}{2\Delta} \right)$$

$$m^\mu = \left(\frac{ia \sin \theta}{\sqrt{2}(r + ia \cos \theta)}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}(r + ia \cos \theta)}, \frac{i}{\sqrt{2} \sin \theta (r + ia \cos \theta)} \right) \quad (3.215)$$

とすれば、Newman-Penrose formalism によりインシュタイン方程式は次の方程式に書き換えることができる：

$$\left(\frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2 \sin^2 \theta \right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + \frac{4Mar}{\Delta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial \phi} + \left(\frac{a^2}{\Delta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2}$$

$$- \Delta^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + 4 \left(\frac{M(r^2 - a^2)}{\Delta} - r - ia \cos \theta \right) \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right)$$

$$+ 4 \left(\frac{a(r - M)}{\Delta} + \frac{i \cos \theta}{\sin^2 \theta} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} + (4 \cot^2 \theta + 2) \Psi = 0 \quad (3.216)$$

この方程式を Teukolsky 方程式という。ここで Ψ は

$$C_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\rho\sigma\mu\nu} - \frac{2}{n-2} (g_{\rho[\mu} R_{\nu]\sigma} - g_{\rho[\mu} R_{\nu]\rho}) + \frac{2}{(n-1)(n-2)} g_{\rho[\mu} g_{\nu]\sigma} R \quad (3.217)$$

と書き表される、リーマンテンソルの対称性の性質を保持し、さらに共形変換で不变であるテンソル；ワイルテンソルを用いて作ったワイルスカラーと呼ばれる量である。少し詳しく言うと Newman-Penrose formalism によってテトラッドとワイルテンソルは組み合わされてワイルスカラーが構成される。この表式を見ればわかるようにこのワイルテンソルの中に計量摂動の情報が含まれていて、この方程式を解けば重力波振幅の表式が得られるとわかる。

まとめ

線形重力波では重力波の偏極や重力波による全エネルギー損失率などの重力波の性質を見てきた。それらは第三章で扱った Inspiral フェイズにおいても評価できる量である。なぜなら、重力波放射の過程は非常に長く、線形重力波の近似の下でも十分な場合として考えられるからである。しかしながら、重力波の理論波形をより正確に求めるには線形近似を行わず厳密な方程式を解くしかない。それには数値的な手法が必ず必要になる。そこで扱うのが 3 章で議論した数値相対論である。本論文では、フェイズを 3 つに分けて解析しそれぞれの場合で線形だが異なる近似方法を使ってきたが、この論理に則るならば、すべて数値相対論で扱うべきである。なお、本論文で導出した 3 つの方程式、Regge-Wheeler 方程式、Zerilli 方程式、Teukolsky 方程式を数値的に解いても十分よい解析ができるだろう。なぜなら、Ring down フェイズで扱うブラックホールが線形近似できる範囲では摂動は十分小さい（そもそも重力波は小さい）のでこの方程式に従うと容易に考えられるからである。線形的な近似を扱ってきたのは重力波は物質との結びつきが非常に弱いことからであり、それ以上の評価が必要でないくらい小さかつたからである。未だ検出が難しい重力波がこれから如何にして観測されていくのか期待するところは多い。

Appendix A

橍円運動の計算

半長軸を a 、離心率を e とし、これらを全エネルギー $E(E < 0)$ と角運動量 L に
関して表すと

$$a = -\frac{m_1 m_2}{2E} \quad (\text{A.1})$$

$$e^2 = 1 + \frac{2EL^2(m_1 + m_2)}{m_1^3 m_2^3} \quad (\text{A.2})$$

二つの星の間の距離は

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} \quad (\text{A.3})$$

であり、各星の座標は

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} r \\ r_2 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} r \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

と表される。議論の混乱を防ぐため、以下 $(x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$ と置く。四重極
モーメントは前の節と同じように計算すれば求まり、

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r^2 \cos \theta \\ I_{yy} &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r^2 \sin \theta \\ I_{xy} = I_{yx} &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r^2 \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

となる。角運動量は $L = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r^2 \dot{\theta}$ (ここで $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$, 以下 “ \cdot ” は時間微分を表す)
だから、半長軸と離心率を用いて

$$\dot{\theta} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \frac{L}{r^2} = \frac{1}{r^2} \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \left[\frac{m_1^3 m_2^3 (e - 1)}{2E(m_1 + m_2)} \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{r^2} [(m_1 + m_2) a (1 - e^2)]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.6})$$

となり、これと (A.3) から

$$\begin{aligned}
 \dot{r} &= \frac{a(1-e^2)}{(1+e \cos \theta)^2} e \sin \theta \dot{\theta} \\
 &= \frac{a(1-e^2)}{(1+e \cos \theta)^2} e \sin \theta \left\{ \frac{1+e \cos \theta}{a(1-e^2)} \right\}^2 [(m_1+m_2)a(1-e^2)]^{\frac{1}{2}} \\
 &= e \sin \theta \left(\frac{m_1+m_2}{a(1-e^2)} \right)^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

が従う。四重極モーメントを微分し、振幅と四重極公式を求める。 $(\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2})$

$$\begin{aligned}
 \dot{I}_{xx} &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} [2r \dot{r} \cos^2 \theta - 2r^2 \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta] \\
 &= 2\mu r \left[e \sin \theta \left(\frac{m_1+m_2}{a(1-e^2)} \right)^{\frac{1}{2}} \cos^2 \theta - \frac{1}{r} \{ (m_1+m_2)a(1-e^2) \}^{\frac{1}{2}} \sin \theta \cos \theta \right] \\
 &= 2\mu r \sin \theta \cos \theta \left[e \left(\frac{m_1+m_2}{a(1-e^2)} \right)^{\frac{1}{2}} \cos \theta - \frac{1+e \cos \theta}{a(1-e^2)} \{ (m_1+m_2)a(1-e^2) \}^{\frac{1}{2}} \right] \\
 &= 2r \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \sin \theta \cos \theta \left[- \left\{ \frac{m_1+m_2}{a(1-e^2)} \right\}^{\frac{1}{2}} \right] \\
 &= -\frac{2m_1 m_2}{[(m_1+m_2)a(1-e^2)]^{\frac{1}{2}}} r \sin \theta \cos \theta
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

$$\begin{aligned}
 \ddot{I}_{xx} &= -\frac{2m_1 m_2}{[(m_1+m_2)a(1-e^2)]^{\frac{1}{2}}} (\dot{r} \sin \theta \cos \theta + r \dot{\theta} \cos^2 \theta - r \dot{\theta} \sin^2 \theta) \\
 &= -\frac{2m_1 m_2}{[(m_1+m_2)a(1-e^2)]^{\frac{1}{2}}} \left[e \left\{ \frac{m_1+m_2}{a(1-e^2)} \right\}^{\frac{1}{2}} \sin^2 \theta \cos \theta \right. \\
 &\quad \left. + (1+e \cos \theta) \left\{ \frac{m_1+m_2}{a(1-e^2)} \right\}^{\frac{1}{2}} \cos^2 \theta - (1+e \cos \theta) \left\{ \frac{m_1+m_2}{a(1-e^2)} \right\}^{\frac{1}{2}} \sin^2 \theta \right] \\
 &= -\frac{2m_1 m_2}{[(m_1+m_2)a(1-e^2)]^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{m_1+m_2}{a(1-e^2)} \right)^{\frac{1}{2}} \times \\
 &\quad [e \sin^2 \theta \cos \theta + \cos^2 \theta + e \cos^3 \theta - \sin^2 \theta - e \sin^2 \theta \cos \theta] \\
 &= -\frac{2m_1 m_2}{a(1-e^2)} \{ \cos 2\theta + e \cos^3 \theta \}
 \end{aligned} \tag{A.9}$$

$$\ddot{I}_{xx} = \frac{2m_1 m_2}{a(1-e^2)} \dot{\theta} (2 \sin 2\theta + 3e \sin \theta) \tag{A.10}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{I}_{yy} &= \mu (2r \dot{r} \sin^2 \theta + 2r^2 \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta) \\
 &= 2\mu r \left[e \left(\frac{m_1+m_2}{a(1-e^2)} \right)^{\frac{1}{2}} \sin^3 \theta + (1+e \cos \theta) \left(\frac{m_1+m_2}{a(1-e^2)} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \theta \cos \theta \right] \\
 &= \frac{2m_1 m_2}{[(m_1+m_2)a(1-e^2)]^{\frac{1}{2}}} r (\sin \theta \cos \theta + e \sin \theta)
 \end{aligned} \tag{A.11}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{I}_{yy} &= \frac{2m_1m_2}{[(m_1+m_2)a(1-e^2)]^{\frac{1}{2}}} \left\{ \dot{r} \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta + e \sin \theta \right) + r\dot{\theta}(\cos 2\theta + e \cos \theta) \right\} \\
&= \frac{2m_1m_2}{a(1-e^2)} (e \sin^2 \theta \cos \theta + e^2 \sin^2 \theta + \cos 2\theta + e \cos \theta + e \cos 2\theta \cos \theta + e^2 \cos^2 \theta) \\
&= \frac{2m_1m_2}{a(1-e^2)} (\cos 2\theta + e \cos \theta + e \cos^3 \theta + e^2)
\end{aligned} \tag{A.12}$$

$$\ddot{I}_{yy} = -\frac{2m_1m_2}{a(1-e^2)} \dot{\theta} (2 \sin 2\theta + e \sin \theta + 3e \cos^2 \theta \sin \theta) \tag{A.13}$$

$$\begin{aligned}
\dot{I}_{xy} &= \mu (2r\dot{r} \sin^2 \theta \cos \theta + r^2 \dot{\theta} \cos^2 \theta - r^2 \dot{\theta} \sin^2 \theta) \\
&= \frac{m_1m_2r}{[(m_1+m_2)a(1-e^2)]^{\frac{1}{2}}} [2e \sin^2 \theta \cos \theta + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + e \cos \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)] \\
&= \frac{m_1m_2r}{[(m_1+m_2)a(1-e^2)]^{\frac{1}{2}}} [\cos^2 \theta - \sin^2 \theta + e \sin^2 \theta \cos \theta + e \cos^3 \theta] \\
&= \frac{m_1m_2}{[(m_1+m_2)a(1-e^2)]^{\frac{1}{2}}} r (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta + e \cos \theta)
\end{aligned} \tag{A.14}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{I}_{xy} &= \frac{m_1m_2}{[(m_1+m_2)a(1-e^2)]^{\frac{1}{2}}} [\dot{r} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta + e \cos \theta) + r\dot{\theta} (-2 \sin 2\theta - e \sin \theta)] \\
&= \frac{m_1m_2}{a(1-e^2)} [e \sin \theta \cos 2\theta + e^2 \sin \theta \cos \theta - 2 \sin 2\theta - e \sin \theta - 2e \cos \theta \sin 2\theta - e^2 \cos \theta \sin \theta] \\
&= \frac{m_1m_2}{a(1-e^2)} [e \sin \theta \cos^2 \theta - e \sin^3 \theta - 2 \sin 2\theta - e \sin \theta - 4e \cos^2 \theta \sin \theta] \\
&= -\frac{2m_1m_2}{a(1-e^2)} (\sin 2\theta + e \sin \theta + e \sin \theta \cos^2 \theta)
\end{aligned} \tag{A.15}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{I}_{xy} &= -\frac{2m_1m_2}{a(1-e^2)} \dot{\theta} (2 \cos 2\theta + e \cos \theta + e \cos^3 \theta - 2e(1 - \cos^2 \theta) \cos \theta) \\
&= -\frac{2m_1m_2}{a(1-e^2)} \dot{\theta} (2 \cos \theta - e \cos \theta + 3e \cos^3 \theta)
\end{aligned} \tag{A.16}$$

Appendix B

PN近似の計算

$g^{\mu\lambda}g_{\lambda\nu} = \delta_\nu^\mu$ から、

$$g^{00} = -1 + g^{00(2)} + g^{00(4)} + g^{00(6)} + \dots \quad (\text{B.1})$$

$$g^{ij} = \delta^{ij} + g^{ij(2)} + g^{ij(4)} + \dots \quad (\text{B.2})$$

$$g^{0i} = g^{0i(3)} + g^{0i(5)} + \dots \quad (\text{B.3})$$

これらより、

$$\begin{aligned} g^{i\mu}g_{0\mu} &= g^{i0}g_{00} + g^{ij}g_{j0} \\ &= \left(g^{i0(3)} + g^{i0(5)} + \dots \right) \left(-1 + g_{00}^{(2)} + g_{00}^{(4)} + \dots \right) \\ &\quad + \left(\delta^{ij} + g^{ij(2)} + g^{ij(4)} + \dots \right) \left(g_{j0}^{(3)} + g_{j0}^{(5)} + \dots \right) \\ &= \left(-g^{i0(3)} + g_{i0}^{(3)} \right) + \left(-g^{i0(5)} + g_{i0}^{(5)} \right) + \dots \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

$$\therefore g^{i0(3)} = g_{i0}^{(3)} \quad \text{などが成立}$$

……これは測地線の方程式より

$$\begin{aligned} \frac{d^2x^i}{dt^2} &= \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^{-1} \frac{d}{d\tau} \left[\left(\frac{dt}{d\tau} \right)^{-1} \frac{dx^i}{d\tau} \right] \\ &= \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^{-2} \frac{d^2x^i}{d\tau^2} - \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^{-3} \frac{d^2t}{d\tau^2} \frac{dx^i}{d\tau} = -\Gamma_{\nu\lambda}^i \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dx^\lambda}{dt} + \Gamma_{\nu\lambda}^0 \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dx^\lambda}{dt} \frac{dx^i}{dt} \\ &= -\Gamma_{00}^i - 2\Gamma_{0j}^i \frac{dx^j}{dt} - \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} + \left[\Gamma_{00}^0 + 2\Gamma_{0j}^0 \frac{dx^j}{dt} + \Gamma_{jk}^0 \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} \right] \frac{dx^i}{dt} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

と展開されるから、 ε のオーダーが左辺と同じように組まれなくてはならないという要請によって決まる。これらの表現で必要なものを挙げると

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{00}^i &= \frac{1}{2}g^{i\rho}(g_{\rho 0,0} + g_{0\rho,0} - g_{00,\rho}) \\
 &= \frac{1}{2}g^{ij}(2g_{j0,0} - g_{00,j}) \\
 &= \frac{1}{2}(\delta^{ij} + g^{ij(2)})(2g_{0j,0}^{(3)} - g_{00,j}^{(2)} - g_{00,j}^{(4)}) \\
 &= g_{0i,0}^{(3)} - \frac{1}{2}g_{00,i}^{(2)} - \frac{1}{2}g_{00,i}^{(4)} - \frac{1}{2}g^{ij(2)}g_{00,j}^{(2)}
 \end{aligned} \tag{B.6}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \Gamma_{00}^{i(2)} &= -\frac{1}{2}g_{00,i}^{(2)} \\
 \Gamma_{00}^{i(4)} &= -\frac{1}{2}g_{00,i}^{(4)} + g_{0i,0}^{(3)} - \frac{1}{2}g^{ij(2)}g_{00,j}^{(2)}
 \end{aligned} \tag{B.7}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{0j}^i &= \frac{1}{2}g^{i\rho}(g_{\rho 0,j} + g_{j\rho,0} - g_{0j,\rho}) \\
 &= \frac{1}{2}(\delta^{ik} + g^{ik(2)})(g_{0k,j}^{(3)} + g_{jk,0}^{(2)} - g_{0j,k}^{(3)}) \\
 &= \frac{1}{2}g_{0i,j}^{(3)} + \frac{1}{2}g_{ij,0}^{(2)} - \frac{1}{2}g_{0j,i}^{(3)} + \cdots
 \end{aligned} \tag{B.8}$$

$$\therefore \Gamma_{0j}^{i(3)} = \frac{1}{2}g_{0i,j}^{(3)} + \frac{1}{2}g_{ij,0}^{(2)} - \frac{1}{2}g_{0j,i}^{(3)} \tag{B.9}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{jk}^i &= \frac{1}{2}g^{il}(g_{jl,k} + g_{lk,j} - g_{jk,l}) \\
 &= \frac{1}{2}(\delta^{il} + g^{il(2)})(g_{jl,k}^{(2)} + g_{lk,j}^{(2)} - g_{jk,l}^{(2)}) \\
 &= \frac{1}{2}g_{ji,k}^{(2)} + \frac{1}{2}g_{ik,j}^{(2)} - \frac{1}{2}g_{jk,i}^{(2)} + \cdots
 \end{aligned} \tag{B.10}$$

$$\therefore \Gamma_{jk}^{i(2)} = \frac{1}{2}g_{ij,k}^{(2)} + \frac{1}{2}g_{ik,j}^{(2)} - \frac{1}{2}g_{jk,i}^{(2)} \tag{B.11}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{00}^0 &= \frac{1}{2}g^{0\rho}(2g_{\rho 0,0} - g_{00,\rho}) \\
 &= \frac{1}{2}g^{00}g_{00,0} + \frac{1}{2}g^{0i}(2g_{i0,0} - g_{00,i}) \\
 &= \frac{1}{2}(-1 + g^{00(2)} + g^{00(4)})(g_{00,0}^{(2)} + g_{00,0}^{(4)}) + \cdots \\
 &= -\frac{1}{2}g_{00,0}^{(2)} + \cdots
 \end{aligned} \tag{B.12}$$

$$\therefore \Gamma_{00}^0 {}^{(3)} = -\frac{1}{2} g_{00,0} \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{0i}^0 &= \frac{1}{2} g^{0\rho} (g_{\rho i,0} + g_{0\rho,i} - g_{0i,\rho}) \\ &= \frac{1}{2} (-1 + g^{00} {}^{(2)} + g^{00} {}^{(4)}) (g_{0i,0} {}^{(3)} + g_{00,i} {}^{(2)} + g_{00,i} {}^{(4)} - g_{0i,0} {}^{(3)}) + \dots \\ &= -\frac{1}{2} g_{00,i} {}^{(2)} + \dots \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

$$\therefore \Gamma_{0i}^0 {}^{(2)} = -\frac{1}{2} g_{00,i} {}^{(2)} \quad (\text{B.15})$$

まとめると

$$\Gamma_{00}^i {}^{(2)} = -\frac{1}{2} \partial_i g_{00} {}^{(2)} \quad (\text{B.16})$$

$$\Gamma_{00}^i {}^{(4)} = -\frac{1}{2} \partial_i g_{00} {}^{(4)} + \partial_0 g_{0i} {}^{(3)} - \frac{1}{2} g^{ij} {}^{(2)} \partial_j g_{00} \quad (\text{B.17})$$

$$\Gamma_{0j}^i {}^{(3)} = \frac{1}{2} [\partial_j g_{i0} {}^{(3)} + \partial_0 g_{ij} {}^{(2)} - \partial_i g_{0j} {}^{(3)}] \quad (\text{B.18})$$

$$\Gamma_{jk}^i {}^{(2)} = \frac{1}{2} [\partial_k g_{ij} {}^{(2)} + \partial_j g_{ik} {}^{(2)} - \partial_i g_{jk} {}^{(2)}] \quad (\text{B.19})$$

$$\Gamma_{00}^0 {}^{(3)} = -\frac{1}{2} \partial_0 g_{00} {}^{(2)} \quad (\text{B.20})$$

$$\Gamma_{0i}^0 {}^{(2)} = -\frac{1}{2} \partial_i g_{00} {}^{(2)} \quad (\text{B.21})$$

Appendix C

Schwarzschild 解の導出

静止した球対称な物体がつくる静的で球対称な場である。ここでは Weyl の考案に従って変分法を用いて解く。空間座標の原点に静止している質量 M の球対称の孤立した物体の周りの重力場を求める。源の物体から十分離れたところ (漸近的に Lorentz 系) では、

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu} + O(r^{-1}) \quad (C.1)$$

となるものとする。ここで、

$$r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$$

また、 $x^0 = ct$ は (C.1) のために無限遠では特殊相対論的な、つまり観測という立場から見ても有意義な時間変数である。今、四次元不変距離 ds^2 を

$$ds^2 = -A(r)(dx^0)^2 + B(r) \sum_{k=1}^3 (dx^k)^2 + C(r)dx^0 \sum_{k=1}^3 x^k dx^k + D(r)(\sum_{k=1}^3 x^k dx^k)^2 \quad (C.2)$$

とおける。これは球対称という条件が満たす最も一般的な形である。ここで A, B は正の r だけの関数。しかし時間の反転に対しても不变とすれば、 $C = 0$ さらに $B = 1$ と置くことができる。これを以下で見ていく。

x^1, x^2, x^3 の代わりに球座標 (r, θ, ϕ) を使うと、上の $B(r)$ の項は

$$B(r)(dr)^2 + B(r)r^2 \{(d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\phi)^2\} \quad (C.3)$$

となる。いま

$$r' = r\sqrt{B(r)} \quad (C.4)$$

あるいは、これを逆に r について解いたものを

$$r = f(r') \quad (C.5)$$

とおけば

$$\begin{aligned} ds^2 &= -A\{f(r')\}(dx^0)^2 + (dr')^2 + (r')^2 \{(d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\phi)^2\} \\ &\quad + \frac{1}{(r')^2} \left[B\{f(r')\} \left\{ \frac{df(r')}{dr'} \right\}^2 - 1 + D\{f(r')\} \left\{ f \frac{df}{dr'} \right\}^2 \right] (r' dr')^2 \end{aligned} \quad (C.6)$$

$$\left[\begin{array}{l} \therefore (dr)^2 = \left(\frac{df(r')}{dr'} dr' \right)^2 \\ \left(\sum_{k=1}^3 x^k dx^k \right)^2 = (r dr)^2 = \left(f(r') \frac{df(r')}{dr'} dr' \right)^2 \end{array} \right]$$

ここで

$$x'^1 = r' \sin \theta \cos \phi, \quad x'^2 = r' \sin \theta \sin \phi, \quad x'^3 = r' \cos \theta \quad (\text{C.7})$$

とおけば

$$ds^2 = -A \{f(r')\} (dx^0)^2 + \sum_{k=1}^3 (dx^{k'})^2 + E(r') \left(\sum_{k=1}^3 x^{k'} dx^{k'} \right)^2 \quad (\text{C.8})$$

となる。 $E(r')$ は (C.6) の最後の項の $(r' dr')^2$ の前の係数である。それでこれから、球対称静的重力場の ds^2 として、改めて

$$ds^2 = -A(r) (dx^0)^2 + \sum_{k=1}^3 (dx^k)^2 + B(r) \left(\sum_{k=1}^3 x^k dx^k \right)^2 \quad (\text{C.9})$$

とおく。 A, B は r の正の未知関数である。(C.9) から、

$$\begin{cases} g_{ik} = \eta_{ik} + B x^i x^k \\ g_{00} = -A \\ g_{i0} = 0 \end{cases}$$

この逆を求めるとき、

$$\begin{cases} g^{ik} = \eta^{ik} - \frac{B}{1+r^2 B} x^i x^k \\ g_{00} = -\frac{1}{A} \\ g_{i0} = 0 \end{cases}$$

である。これを使うと

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} -A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+Bx^2 & Bxy & Bxz \\ 0 & Bxy & 1+By^2 & Byz \\ 0 & Bxz & Byz & 1+Bz^2 \end{pmatrix} \\ g &= \det(g_{\mu\nu}) = -A \begin{vmatrix} 1+Bx^2 & Bxy & Bxz \\ Bxy & 1+By^2 & Byz \\ Bxz & Byz & 1+Bz^2 \end{vmatrix} \\ &= -A \{(1+Bx^2)(1+By^2)(1+Bz^2) + B^3 x^2 y^2 z^2 + B^3 x^2 y^2 z^2 \\ &\quad - (1+Bx^2)B^2 y^2 z^2 - (1+By^2)B^2 x^2 z^2 - (1+Bz^2)x^2 y^2\} \\ &= -A(1+Br^2) \\ \therefore \sqrt{-g} &= \sqrt{A(1+r^2 B)} \equiv \Delta \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

となる。あるいは、 A, B の代わりに上で定義した Δ と

$$\psi \equiv \sqrt{1 + r^2 B} \quad (\text{C.11})$$

を独立の未知関数に採ることができる。さて、0 でない $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ は

$$\begin{aligned} \Gamma_{kl}^i &= \frac{1}{2} g^{i\lambda} (\partial_k g_{l\lambda} + \partial_l g_{\lambda k} - \partial_\lambda g_{kl}) \\ &= \frac{1}{2} g^{i\lambda} (\partial_k (B x^l x^\lambda) + \partial_l (B x^\lambda x^k) - \partial_\lambda (B x^k x^l)) \\ &= \frac{1}{2} g^{i\lambda} (B x^\lambda \delta_k^\lambda + B x^l \delta_k^l + B x^\lambda \delta_l^k \\ &\quad + B x^k \delta_\lambda^l - B x^l \delta_\lambda^k + (\partial_k B) x^l x^\lambda + (\partial_l B) x^\lambda x^k - (\partial_\lambda B) x^k x^l) \\ &= g^{i\lambda} \left(B x^\lambda \delta_l^k + \frac{1}{2} \frac{x^k x^l x^\lambda}{r} B' \right) \\ &= \left(\eta^{i\lambda} - \frac{B}{1 + r^2 B} x^i x^\lambda \right) \left(B x^\lambda \delta_l^k + \frac{1}{2} \frac{x^k x^l x^\lambda}{r} B' \right) \\ &= B x^i \delta_{kl} - \frac{B^2}{1 + r^2 B} r^2 x^i \delta_{kl} + \frac{1}{2} \frac{x^k x^l x^i}{r} B' - \frac{r^2 B}{2r(1 + r^2 B)} x^k x^l x^i B' \\ &= \frac{B}{1 + r^2 B} x^i \delta_{kl} + \frac{x^k x^l x^i}{2r(1 + r^2 B)} B' \\ &= \frac{x^i}{2r(1 + r^2 B)} (2rB \delta_{kl} + x^k x^l B') \end{aligned}$$

ここで $B' = \frac{dB}{dr}$ である。また

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^i &= \frac{1}{2} g^{i\lambda} (\partial_0 g_{\lambda 0} + \partial_0 g_{0\lambda} - \partial_\lambda g_{00}) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\eta^{i\lambda} - \frac{B}{1 + r^2 B} x^i x^\lambda \right) \partial_\lambda (-A(r)) \\ &= \frac{1}{2} \frac{x^i}{r} A' - \frac{1}{2} \frac{B}{1 + r^2 B} x^i x^\lambda \frac{x^\lambda}{r} A' \\ &= \frac{1}{2r(1 + r^2 B)} \{x^i (1 + r^2 B) A' - B x^i r^2 A'\} \\ &= \frac{A' x^i}{2r(1 + r^2 B)} \end{aligned}$$

ここで $A' = \frac{dA}{dr}$ である。

$$\begin{aligned} \Gamma_{0k}^0 &= \frac{1}{2} g^{0\lambda} (\partial_0 g_{k\lambda} + \partial_k g_{0\lambda} - \partial_\lambda g_{00}) \\ &= \frac{1}{2} g^{00} (\partial_0 g_{k0} + \partial_k g_{00} - \partial_0 g_{00}) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{A} (-\partial_k A) = \frac{A' x^k}{2rA} \end{aligned}$$

上の $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ から、

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\mu\nu}^\mu &= g_\lambda^\mu \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g_\lambda^\mu g^{\lambda\delta} (\partial_\mu g_{\nu\delta} + \partial_\nu g_{\mu\delta} - \partial_\delta g_{\mu\nu}) \\
 &= \frac{1}{2} g^{\mu\delta} (\partial_\mu g_{\nu\delta} + \partial_\nu g_{\mu\delta} - \partial_\delta g_{\mu\nu}) \\
 &= \frac{1}{2} g^{\mu\delta} \partial_\nu g_{\mu\delta} = \frac{1}{2} \frac{1}{g} \partial_\nu g \\
 &= (\sqrt{-g})^{-1} \partial_\nu (\sqrt{-g}) = \partial_\nu \ln \Delta
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \therefore & \partial_\nu \det(g_{\mu\delta}) = gg^{\mu\delta} \partial_\nu g_{\mu\delta} \\ & g^{-1} \partial_\nu g = 2(\sqrt{-g})^{-1} \partial_\nu (\sqrt{-g}) \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_{\mu k}^\mu = \partial_k \ln \Delta = \frac{x^k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \ln \Delta(r) = \frac{x^k}{r} \frac{\Delta'}{\Delta}$$

$$\Gamma_{\mu 0}^\mu = \partial_0 \ln \Delta(r) = 0$$

となる。そこで、 $g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\lambda\rho}^\lambda$ を計算するため、以下の計算を実行する：

$$\left(\begin{array}{l} \Gamma_{\mu k}^\mu = \Gamma_{0k}^0 + \Gamma_{ik}^i = \frac{A' x^k}{2Ar} + \frac{x^i}{2r(1+r^2B)} (2Br\delta_{ik} + x^i x^k B') \\ = x^k \left[\frac{A'}{2Ar} + \frac{2Br}{2r\psi^2} + \frac{r^2 B'}{2r\psi^2} \right] = \frac{x^k}{r} \frac{\Delta'}{\Delta} \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
 g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^i &= g^{00} \Gamma_{00}^i + g^{jk} \Gamma_{jk}^i \\
 &= -\frac{1}{A} \frac{A' x^i}{2r(1+r^2B)} + \left(\eta^{jk} - \frac{B}{1+r^2B} x^j x^k \right) \frac{x^i}{2r(1+r^2B)} (2Br\delta_{jk} + x^j x^k B') \\
 &= -\frac{A' x^i}{2r\Delta^2} + \frac{6Br x^i}{2r\psi^2} + \frac{r^2 B' x^i}{2r\psi^2} - \frac{2x^i B^2 r^3 + x^i r^4 B B'}{2r\psi^4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \psi' = \frac{d}{dr} \sqrt{1+r^2B} = \frac{2rB+r^2B'}{2\sqrt{1+r^2B}} = \frac{r(2B+rB')}{2\psi} \\ \Delta' = \frac{d}{dr} \sqrt{A(1+r^2B)} = \frac{A'(1+r^2B) + Ar(2B+rB')}{2\sqrt{A(1+r^2B)}} = \frac{A'\psi^2 + Ar(2B+rB')}{2\Delta} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{x^i}{r} \frac{A'}{2\Delta^2} + \frac{x^i}{r} \left(\frac{6Br}{2\psi^2} + \frac{r^2B'}{2\psi^2} \right) - \frac{x^i}{r} \left(\frac{2B^2r^3}{2\psi^4} + \frac{r^4BB'}{2\psi^4} \right) \\
&= -\frac{x^i}{r} \frac{1}{\Delta\psi^2} \left(\frac{A'\psi^2}{2\Delta} + \frac{(2rB+r^2B')A}{2\Delta} \right) + \frac{x^iA}{2r\Delta^2\psi^2} (2rB+r^2B') \\
&\quad + \frac{x^i}{r} \frac{\psi'}{\psi} + \frac{x^i}{r} \frac{2Br}{\psi^2} - \frac{x^i}{r} \frac{r^2B(2rB+r^2B')}{2\psi^4} \\
&= -\frac{x^i}{r} \frac{\Delta'}{\Delta\psi^2} + \frac{x^i}{r} \frac{A\psi'}{\Delta^2\psi} + \frac{x^i}{r} \frac{\psi'}{\psi} + \frac{x^i}{r} \frac{2Br}{\psi^2} - \frac{x^i}{r} \frac{r^2B\psi'}{\psi^3} \\
&= -\frac{x^i}{r} \frac{\Delta'}{\Delta\psi^2} + \frac{x^i}{r} \frac{\psi'}{\psi^3} + \frac{x^i}{r} \frac{\psi'}{\psi} + \frac{x^i}{r} \frac{2Br}{\psi^2} \frac{x^i}{r} \frac{\psi'}{\psi^3} - \frac{x^i}{r} \left(\frac{\psi'}{\psi^3} + \frac{r^2B\psi'}{\psi^3} \right) \\
&= -\frac{x^i}{r} \frac{\Delta'}{\Delta\psi^2} + \frac{x^i}{r} \frac{2\psi'}{\psi^3} + \frac{x^i}{r} \frac{2Br}{\psi^2} \\
&= \frac{x^i}{r} \frac{2\psi'}{\psi^3} - \frac{x^i}{r} \frac{\Delta'}{\Delta\psi^2} + \frac{x^i}{r} \frac{2r}{\psi^2} \left(\frac{\psi^2-1}{r^2} \right) \\
&= \frac{x^i}{r} \frac{2\psi'}{\psi^3} - \frac{x^i}{r} \frac{\Delta'}{\Delta\psi^2} + \frac{x^i}{r} \frac{2}{r} \left(1 - \frac{1}{\psi^2} \right)
\end{aligned}$$

以上より、

$$\begin{aligned}
g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\lambda\rho}^\lambda &= \left(\frac{2\psi'}{\psi^3} - \frac{\Delta'}{\Delta\psi^2} + \frac{2}{r} \left(1 - \frac{1}{\psi^2} \right) \right) \frac{x^k x^k}{r^2} \frac{\Delta'}{\Delta} \\
&= \frac{2\Delta' \psi'}{\Delta \psi^3} - \frac{(\Delta')^2}{\Delta^2 \psi^2} + \frac{2}{r} \left(1 - \frac{1}{\psi^2} \right) \frac{\Delta'}{\Delta}
\end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned}
g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \Gamma_{\nu\rho}^\sigma &= g^{ik} \Gamma_{i\sigma}^\rho \Gamma_{k\rho}^\sigma + g^{00} \Gamma_{0\sigma}^\rho \Gamma_{0\rho}^\sigma \\
&= g^{ik} \Gamma_{ij}^l \Gamma_{kl}^j + g^{00} \Gamma_{00}^m \Gamma_{0m}^0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\text{第一項}) &= g^{ik} \left[\left\{ \frac{1}{2r(1+r^2B)} \right\}^2 x^l (2Br\delta_{ij} + x^i x^j B') x^j (2Br\delta_{kl} + x^k x^l B') \right] \\
&= \frac{g^{ik}}{4r^2\psi^4} x^l x^j (4B^2 r^2 \delta_{ij} \delta_{kl} + 2Br^3 x^k x^l \delta_{ij} B' + 2Br x^i x^j \delta_{kl} B' + x^i x^j x^k x^l B'^2) \\
&= \frac{g^{ik}}{4r^2\psi^4} (4r^2 B^2 x^k x^i + 2Br^3 x^i x^k B' + 2Br^3 x^i x^k B' + r^4 x^i x^k B'^2) \\
&= \frac{1}{4r^2\psi^4} \left(\eta^{ik} - \frac{B}{1+r^2B} x^i x^k \right) 4r^2 \psi^4 (4r^2 B^2 x^k x^i + 4Br^3 x^i x^k B' + r^4 x^i x^k B'^2) \\
&= \frac{1}{4\psi^4} \left[4r^2 B^2 + 4Br^3 B' + r^4 B'^2 - \frac{B}{1+r^2B} \{ 4r^4 B^2 + 4r^5 BB' + r^6 B'^2 \} \right] \\
&= \frac{1}{4\psi^4} \frac{1}{1+r^2B} (4r^2 B^2 + 4Br^3 B' + r^4 B'^2) \\
&= \frac{1}{4\psi^4} \frac{1}{\psi^2} \{ 2rB(2rB+r^2B') + r^2 B'(2rB+r^2B') \} \\
&= \frac{1}{2\psi^5} (2rB\psi' + r^2 B'\psi') = \frac{\psi'^2}{\psi^4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(第二項)} &= g^{00} \frac{A' x^m}{2r(1+r^2B)} \frac{A' x^m}{2Ar} = -\frac{1}{4A^2} \frac{A'^2 r^2}{r^2(1+r^2B)} = -\frac{A'^2}{4\Delta^2 A} \\
 &\quad \left(A' = \frac{1}{\psi^2} \left(2\Delta\Delta' - \frac{2\Delta^2\psi'}{\psi} \right) \right)
 \end{aligned}$$

以上より

$$\begin{aligned}
 g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \Gamma_{\nu\rho}^\sigma &= \frac{\psi'^2}{\psi^4} - \frac{\psi^2}{4\Delta^4} \left(\frac{2\Delta\Delta'}{\psi^2} - \frac{2\Delta^2\psi'}{\psi^3} \right)^2 \\
 &= \frac{\psi'^2}{\psi^4} - \frac{\psi^2}{4\Delta^4} \left\{ \frac{4\Delta^2(\Delta')^2}{\psi^4} - \frac{8\Delta^3\Delta'\psi'}{\psi^5} + \frac{4\Delta^4(\psi')^2}{\psi^6} \right\} \\
 &= \frac{\psi'^2}{\psi^4} - \frac{(\Delta')^2}{\Delta^2\psi^2} + \frac{2\Delta'\psi'}{\Delta\psi^3} - \frac{\psi'^2}{\psi^4} \\
 &= \frac{2\Delta'\psi'}{\Delta\psi^3} - \frac{(\Delta')^2}{\Delta^2\psi^2}
 \end{aligned}$$

結局、重力場の作用積分 $I_G = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \mathbf{G} \cdot \mathbf{G} = \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \left(\Gamma_{\mu\rho}^\lambda \Gamma_{\nu\lambda}^\rho - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\rho}^\rho \right)$ は

$$\begin{aligned}
 I_G &= \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\Gamma_{\mu\sigma}^\rho \Gamma_{\nu\rho}^\sigma - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\lambda\rho}^\lambda) \\
 &= -\frac{1}{16\pi} \int dr d\theta d\phi dx^0 r^2 \sin\theta \frac{2}{r} \left(1 - \frac{1}{\psi^2} \right) \frac{d\Delta}{dr}
 \end{aligned}$$

つまり

$$I' = \int dr \left(1 - \frac{1}{\psi^2} \right) \frac{d\Delta}{dr} r \quad (\text{C.12})$$

の ψ および Δ に関するオイラー方程式を求めるべし。

ψ について

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dr} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\psi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\psi} &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2r}{\psi^3} \frac{d\Delta}{dr} = 0 \\
 \therefore \quad \frac{d\Delta}{dr} &= 0 \quad (\text{C.13})
 \end{aligned}$$

従って

$$\Delta = b = \text{一定} \quad (\text{C.14})$$

また、 Δ に関する変分からは

$$\frac{d}{dr} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\Delta)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\Delta} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dr} \left\{ r \left(1 - \frac{1}{\psi^2} \right) \right\} = 0$$

そこで、

$$r \left(1 - \frac{1}{\psi^2} \right) = a = \text{一定} \quad (\text{C.15})$$

a, b を使って $A(r), B(r)$ を求めると

$$A(r) = \frac{\Delta^2}{\psi^2} \quad , \quad B(r) = \frac{1}{r^2} (\psi^2 - 1) \quad (\text{C.16})$$

あるいは (C.15) より

$$A(r) = b^2 \left(1 - \frac{a}{r}\right) \quad , \quad B(r) = \frac{a}{r^2(r-a)} \quad (C.17)$$

ここで、境界条件 (C.1) のために、 $r \rightarrow \infty$ で $A \rightarrow 1$ となる。そのため $b = 1$ 。従って線素は

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{a}{r}\right) (dx^0)^2 + \sum_{k=1}^3 (dx^k)^2 + \frac{a}{r^2(r-a)} \left(\sum_{k=1}^3 x^k dx^k \right)^2 \quad (C.18)$$

となる。直交座標 x^k を極座標 (r, θ, ϕ) で書き直せば

$$\begin{aligned} ds^2 &= - \left(1 - \frac{a}{r}\right) (dx^0)^2 + (dr)^2 + r^2 \{(d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\phi)^2\} + \frac{a}{r^2(r-a)} (rdr)^2 \\ &= - \left(1 - \frac{a}{r}\right) (dx^0)^2 + \frac{1}{1 - \frac{a}{r}} dr^2 + r^2 \{(d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\phi)^2\} \end{aligned} \quad (C.19)$$

となる。 A, B が正であるためには $r > a$ でなければならないとわかる。最後に、積分定数 a を決めるには $r \rightarrow \infty$ における g_{00} の漸近形を調べればいい。 $r \rightarrow \infty$ では

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x) \quad |h_{\mu\nu}(x)| \ll 1 \quad (C.20)$$

とニュートン極限の要求

$$h_{00} = -2\Phi \quad (C.21)$$

により (c,G を戻すと)

$$g_{00} \rightarrow \eta_{00} - \frac{2}{c^2} \Phi \quad , \quad \Phi = -\frac{GM}{r} \quad (C.22)$$

となる。ここで M は原点にある物質の静止質量である。この境界条件を満たすためには、

$$\frac{a}{r} = \frac{2}{c^2} \frac{GM}{r} \quad \therefore a = \frac{2GM}{c^2} \quad (C.23)$$

とらねばならない。 a を源の物質の重力半径という。

Schwarzschild の解を求めるのに、 $g_{\mu\nu}$ が時間に無関係という過程を設けた。これをしなくとも、源の物質が球対称の質量分布をしているならば、たとえ物質が時間とともに動径方向の運動をしているとしても、球対称性が破られない限り、物質の存在しない領域の ds^2 は上の形になる。これを Birkhoff の定理という。この定理の帰結として、源の物質の r 方向の振動に対して、空間の計量は静的な物質の場合と変わらないから、重力波は放出されないとわかる。

Appendix D

Kerr解の導出

回転するブラックホールを考える。まず、AINシュタイン方程式を書き換えることから始める。計量 $g_{\mu\nu}$ を

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + al_{\mu}l_{\nu} \quad (\text{D.1})$$

とおく。 $\eta_{\mu\nu}$ はミンコフスキーメトリクスである。また、 $l_{\mu}(x)$ は

$$\eta^{\mu\nu}l_{\mu}(x)l_{\nu}(x) = 0 \quad (\text{D.2})$$

という条件を満たす量である。あるいは、

$$l^{\mu}(x) \equiv \eta^{\mu\nu}l_{\nu}(x) \quad (\text{D.3})$$

とおけば

$$l^{\mu}l_{\mu} = 0 \quad (\text{D.4})$$

が成り立つ。また (D.1) の a は任意パラメータである。 l_{μ} のこの性質を使うと

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - al^{\mu}l^{\nu} \quad (\text{D.5})$$

となる。さらに (D.4) から

$$l^{\mu} = g^{\mu\nu}l_{\nu} \quad (\text{D.6})$$

も成り立つ。(D.1),(D.5) から定義に従って $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ を作ると

$$\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha}l^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}(\partial_{\beta}g_{\mu\lambda} + \partial_{\mu}g_{\beta\lambda} - \partial_{\lambda}g_{\beta\mu})l^{\mu} \quad (\text{D.7})$$

となる。ここで (D.4) を微分して

$$\partial_{\nu}(l_{\mu}l^{\mu}) = 2l^{\mu}\partial_{\nu}l_{\mu} = 2l_{\mu}\partial_{\nu}l^{\mu} = 0 \quad (\text{D.8})$$

であるから

$$\begin{aligned} \Gamma_{\beta\mu}^{\alpha}l^{\mu} &= \frac{1}{2}(\eta^{\alpha\lambda} - al^{\alpha}l^{\lambda})\{\partial_{\beta}(\eta_{\mu\lambda} + al_{\mu}l_{\lambda}) + \partial_{\mu}(\eta_{\beta\lambda} + al_{\beta}l_{\lambda}) - \partial_{\lambda}(\eta_{\beta\mu} + al_{\beta}l_{\mu})\}l^{\mu} \\ &= \frac{a}{2}\eta^{\alpha\lambda}(\partial_{\beta}l_{\mu}l_{\lambda} + \partial_{\mu}l_{\beta}l_{\lambda} - \partial_{\lambda}l_{\beta}l_{\mu})l^{\mu} \\ &= \frac{a}{2}(\partial_{\mu}l_{\beta}l^{\alpha})l^{\mu} = \frac{a}{2}\partial_{\mu}(l^{\alpha}l_{\beta})l^{\mu} \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

となる。また、

$$l_\mu \nabla_\lambda l^\mu = l^\mu \nabla_\lambda l_\mu = l^\mu (\partial_\lambda l_\mu - \Gamma_{\lambda\mu}^\nu l_\nu) \quad (\text{D.10})$$

は上の関係式から

$$\begin{aligned} l_\mu \nabla_\lambda l^\mu &= l^\mu \nabla_\lambda l_\mu = -l^\mu \Gamma_{\lambda\mu}^\nu l_\nu \\ &= -\frac{a}{2} \partial_\mu (l^\nu l_\lambda) l^\mu l_\nu = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

となる。さて、 $\det \{g_{\mu\nu}(x)\}$ を計算するために点 x において空間軸の回転を行う。なぜなら、空間回転に対して $\det(g_{\mu\nu})$ は不変だからである。そこで、回転後の 1 点 x' における l'_μ の成分を

$$l'_\mu = \{l'_0 = l'_1 = l, l'_2 = l'_3 = 0\} \quad (\text{D.12})$$

とする。このような l'_μ に対する $g'_{\mu\nu}(x')$ は

$$g'_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 + al^2 & al^2 & 0 & 0 \\ al^2 & 1 + al^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{D.13})$$

となる。これから、 $g(x) = g'(x') = -1$ と求まる。すなわち、 g はベクトル l_μ の成分の大きさや方向に無関係であるとわかる。これを使うと

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\lambda = \partial_\mu \{\ln \sqrt{-g}\} = 0 \quad (\text{D.14})$$

となる。そこで、物質のない領域におけるAINシュタイン方程式は

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= R^\lambda_{\mu\nu\lambda} = \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda - \partial_\mu \Gamma_{\nu\lambda}^\lambda + \Gamma_{\mu\lambda}^\tau \Gamma_{\nu\tau}^\lambda - \Gamma_{\tau\lambda}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\tau \\ &= -\partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \Gamma_{\mu\lambda}^\tau \Gamma_{\nu\tau}^\lambda = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

となるとわかる。

さて、 $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ の定義から $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = a^2 A + aB$ のような形であることがわかる。 A, B は l や l の一階微分からなる量で a には無関係である。これを (D.15) に代入すると、 $R_{\mu\nu} = a^4 () + a^3 () + a^2 () + a ()$ の形になる。 $()$ はいずれも $l, \frac{\partial l}{\partial x}, \frac{\partial^2 l}{\partial x \partial x}$ の関数であるが、 a には無関係である。 a は任意のパラメータであるから、(D.15) が成立するためには、 a の各べきの係数が 0 となる必要がある。それを以下に並べて書く：

$$a^1 \text{の係数} : \quad \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Gamma_{\beta,\mu\nu} = 0 \quad (\text{D.16})$$

$$a^2 \text{の係数} : \quad 2\partial_\alpha (l^\alpha l^\beta \Gamma_{\beta,\mu\nu}) + \frac{2}{a} \eta^{\alpha\rho} \eta^{\beta\sigma} \Gamma_{\rho,\mu\beta} \Gamma_{\sigma,\nu\alpha} = 0 \quad (\text{D.17})$$

$$a^3 \text{の係数} : \quad (l^\alpha l^\rho \eta^{\beta\sigma} + l^\beta l^\sigma \eta^{\alpha\rho}) \Gamma_{\rho,\mu\beta} \Gamma_{\sigma,\nu\alpha} = 0 \quad (\text{D.18})$$

$$a^4 \text{の係数} : \quad l^\alpha l^\rho l^\beta l^\sigma \Gamma_{\rho,\mu\beta} \Gamma_{\sigma,\nu\alpha} = 0 \quad (\text{D.19})$$

以上の 4 組の式がAINシュタイン方程式である。まず 4 番目の式の左辺は l_μ が (D.2) を満たす限り、どんなものでも恒等的に 0 となる。なぜなら、(D.7), (D.8) を使うと、

$$\Gamma_{\rho,\mu\beta} l^\rho l^\beta = \eta_{\sigma\rho} \Gamma_{\mu\beta}^\rho l^\rho l^\beta = \eta_{\sigma\rho} l^\rho \frac{a}{2} \partial_\beta (l^\rho l_\mu) l^\beta = 0 \quad (\text{D.20})$$

となるからである。3番目の式は

$$l^\alpha l^\rho \eta^{\beta\sigma} (\Gamma_{\rho,\mu\beta} \Gamma_{\sigma,\nu\alpha} + \Gamma_{\rho,\nu\beta} \Gamma_{\sigma,\mu\alpha}) = 0 \quad (\text{D.21})$$

と書き換えることができる。この Γ を l を用いて書き表し、さらに(D.4),(D.8)を使うと

$$l^\alpha \partial_\alpha l^\beta \cdot l^\rho \partial_\rho l_\beta \cdot l_\mu l_\nu = 0 \quad (\text{D.22})$$

となる。あるいは、

$$v^\beta \equiv l^\alpha \partial_\alpha l^\beta \quad (\text{D.23})$$

と書くことにすれば

$$v_\lambda \equiv g_{\lambda\beta} v^\beta = \eta_{\lambda\beta} v^\beta = l^\alpha \partial_\alpha l_\lambda \quad (\text{D.24})$$

となる。したがって、(D.22)は

$$(v^\beta v_\beta) l_\mu l_\nu = 0 \quad (\text{D.25})$$

つまり

$$(v^\beta v_\beta) = 0 \quad (\text{D.26})$$

が成立する。 v^α はさらに l_α とも直交する。すなわち(D.8)により

$$v^\alpha l_\alpha = l^\mu \partial_\mu l^\alpha \cdot l_\alpha = 0 \quad (\text{D.27})$$

いま

$$l^0 = (l^0, \mathbf{l}) \quad , \quad v^\alpha = (v^0, \mathbf{v})$$

とおけば、(D.2)および(D.26)から

$$|l^0| = |\mathbf{l}| \quad , \quad |v^0| = |\mathbf{v}|$$

である。さらに(D.27)から

$$v^\alpha l_\alpha = -v^0 l^0 + (\mathbf{l} \cdot \mathbf{v}) = 0$$

あるいは \mathbf{l} と \mathbf{v} の間の角を θ とすると、

$$v^0 l^0 = |l^0| |v^0| \cos \theta$$

したがって、 l^0 と v^0 が同符号ならば $\theta = 0$ だし、異符号ならば $\theta = \pi$ である。つまり四元ベクトルとして l^μ と v^μ は平行である。そこで

$$l^\mu \partial_\mu l^\alpha \equiv v^\alpha \equiv -A(x) l^\alpha \quad (\text{D.28})$$

とおくことができる。もし $l_\mu(x)$ がわかっていていれば、 $A(x)$ はそれを用いて書き表される。(D.28)が3番目の式から導かれる結論である。次に一番目の式を l を用いて具体的に書くと

$$\begin{aligned} \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha (\eta_{\sigma\beta} \Gamma_{\mu\nu}^\sigma) &= \eta^{\alpha\beta} \eta_{\sigma\beta} \left\{ \frac{a}{2} (\partial_\mu l_\nu l^\sigma + \partial_\nu l^\sigma l_\mu - \eta^{\sigma\lambda} \partial_\lambda l_\mu l_\nu) + \frac{a^2}{2} l^\sigma l^\lambda \partial_\lambda l_\mu l_\nu \right\} \\ &= \frac{a}{2} \{ \partial_\alpha (l_\mu \partial_\nu l^\alpha + l^\alpha \partial_\nu l^\mu) + \partial_\alpha (l^\alpha \partial_\mu l^\nu + l_\nu \partial_\mu l^\alpha) \\ &\quad - \eta^{\alpha\beta} \eta_{\sigma\beta} \partial_\alpha \eta^{\sigma\lambda} \partial_\lambda (l_\mu l_\nu) \} + \frac{a^2}{2} \partial_\sigma l^\sigma l^\lambda \partial_\lambda l_\mu l_\nu \end{aligned}$$

$\therefore \partial_\alpha(l_\mu \partial_\nu l^\alpha + l^\alpha \partial_\nu l_\mu) + \partial_\alpha(l^\alpha \partial_\mu l_\nu + l_\nu \partial_\mu l^\alpha) - \square(l_\mu l_\nu) = 0$
となる。ここで $\square \equiv \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$ である。いま、

$$\nabla_\alpha l^\alpha \equiv \partial_\alpha l^\alpha + \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha l^\beta = \partial_\alpha l^\alpha \equiv -L \quad (\text{D.29})$$

とおけば、上式は

$$-\partial_\nu(Ll_\mu) - \partial_\mu(Ll_\nu) + \partial_\mu(Ll_\nu) + \partial_\mu v_\nu + \partial_\nu v_\mu - \square(l_\mu l_\nu) = 0 \quad (\text{D.30})$$

となる。 (D.28) を代入すると

$$-\square(l_\mu l_\nu) = \partial_\mu\{(L + A)l_\nu\} + \partial_\nu\{(L + A)l_\mu\} \quad (\text{D.31})$$

となる。最後に、 l_μ が (D.31) を満足するならば、そのような l_μ は 2 番目の式をも満たすことが証明できる。

(証明) まず 2 番目の式を l を用いて具体的に書く。 $\frac{\partial l}{\partial x^\alpha}$ を $l_{,\alpha}$ で表すと

$$\begin{aligned} & -l^\alpha l^\beta (l_\mu l_\nu)_{,\alpha\beta} - (l^\alpha l^\beta)_{,\alpha} (l_\mu l_\nu)_{,\beta} + l_\mu l_\nu l^{\alpha,\beta} (l_{\beta,\alpha} - l_{\alpha,\beta}) \\ & + (l_\mu l_{\nu,\alpha} + l_\nu l_{\mu,\alpha}) l^\beta l^{\alpha,\beta} + l_{\mu,\alpha} l_{\nu,\beta} l^\alpha l^\beta = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.32})$$

はじめの二項をまとめると、 v_μ の定義を用いて

$$l_\mu l_\nu (-2AL - 4A^2 + 2l^\alpha A_{,\alpha})$$

となる。

$$\begin{aligned} \therefore & -l^\alpha l^\beta (l_\mu l_\nu)_{,\alpha\beta} (l_\mu l_\nu) - (l^\alpha l^\beta)_{,\alpha} (l_\mu l_\nu)_{,\beta} \\ & = -l^\alpha l^\beta (l_{\mu,\alpha} l_{\nu,\beta} + l_{\mu,\beta} l_{\nu,\alpha} + l_\mu l_{\nu,\alpha\beta} + l_{\mu,\alpha\beta} l_\nu) \\ & = -(l^\alpha_{,\alpha} l^\beta + l^\alpha l^\beta_{,\alpha}) (l_{\mu,\beta} l_\nu + l_\mu l_{\nu,\beta}) \\ & \quad (l^\mu l^\alpha_{,\mu} = v^\alpha = -A(x)l^\alpha \text{を使うと}) \\ \\ \text{(右辺)} & = -v_\mu v_\nu - v_\mu v_\nu - l^\beta l_\mu v_{\nu,\beta} + l^\beta l_\mu l^\alpha_{,\beta} l_{\nu,\alpha} - l^\beta v_{\mu,\beta} l_\nu + l^\beta l_\nu l^\alpha_{,\beta} l_{\mu,\alpha} \\ & \quad - l^\alpha_{,\alpha} v_\mu l_\nu - l^\alpha_{,\alpha} l_\mu v_\nu - v^\beta l_{\mu,\beta} l_\nu - v^\beta l_\mu l_{\nu,\beta} \\ & = -2A^2 l_\mu l_\nu + l^\beta l_\mu (A_{,\beta} l_\nu + A l_{\nu,\beta}) + l^\beta l_\nu (A_{,\beta} l_\mu + A l_{\mu,\beta}) \\ & \quad - L A l_\mu l_\nu - L A l_\mu l_\nu + A v_\mu l_\nu + A v_\nu l_\mu \\ & = -4A^2 l_\mu l_\nu - 2A l_\mu l_\nu + 2l^\beta A_{,\beta} l_\mu l_\nu \\ \\ \therefore & (\text{はじめの二項}) = l_\mu l_\nu (-2AL - 4A^2 + 2l^\alpha A_{,\alpha}) \end{aligned}$$

また (D.32) の第四項は v_α の定義を使うと

$$\begin{aligned} (l_\mu l_{\nu,\alpha} + l_\nu l_{\mu,\alpha}) l^\rho l^{\alpha,\beta} & = (l_\mu l_{\nu,\alpha} + l_\nu l_{\mu,\alpha})(-A l^\alpha) \\ & = A^2 l_\mu l_\nu + A^2 l_\mu l_\nu = 2A^2 l_\mu l_\nu \end{aligned}$$

となる。最後の項は $A^2 l_\mu l_\nu$ に等しい。結局 (D.32) は

$$l_\mu l_\nu \{-AL - A^2 + l^\alpha (A + L)_{,\alpha} + l^\alpha \square l_\alpha\} = 0 \quad (\text{D.33})$$

となる。

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{l} \text{:(第三項)} = l_\mu l_\nu l^{\alpha, \beta} (l_{\beta, \alpha}) = l_\mu l_\nu (AL - l^\alpha A_{,\alpha} + l^\alpha L_{,\alpha} + l^\alpha \square l_\alpha) \\ \left(L_{,\alpha} = -(l^\beta_{,\beta})_{,\alpha} = -l^\beta_{,\beta\alpha} \quad , \quad l^\alpha \square l_\alpha = l^\alpha l_{\alpha\beta}^\beta \right) \end{array} \right. \\
 & \left. \begin{aligned} l^{\alpha, \beta} l_{\beta, \alpha} &= (l^\alpha l_{\beta, \alpha})_{,\beta} - l^\alpha l_{\beta, \alpha}^\beta = v_\beta_{,\beta} + l^\alpha L_{,\alpha} \\ &= -A^\beta l_\beta - Al_\beta^\beta + l^\alpha L_{,\alpha} \\ &= -A^\beta l_\beta + AL + l^\alpha L_{,\alpha} \end{aligned} \right. \\
 & \left. \begin{aligned} l^{\alpha, \beta} l_{\alpha, \beta} &= (l^\alpha l_{\alpha, \beta})_{,\beta} - l^\alpha l_{\alpha, \beta}^\beta = -l^\alpha l_{\alpha, \beta}^\beta = -l^\alpha \square l_\alpha \\ & \left((l^\alpha l_{\alpha, \beta})_{,\beta} = (l^\alpha l_\alpha)_{,\beta}^\beta - (l^\alpha_{,\beta} l_\alpha)_{,\beta}^\beta = 0 \right) \end{aligned} \right]
 \end{aligned}$$

ところで、(D.31) に l^ν を掛けると (D.2),(D.8) から

$$(左辺) = -l^\nu \square (l_\mu l_\nu) = -l_\mu l^\nu \square l_\nu$$

$$(右辺) = l_\mu \{ l^\nu (L + A)_{,\nu} - A(L + A) \}$$

となる。従って、(D.31) から

$$-l^\nu \square l_\nu = l^\nu (L + A)_{,\nu} - A(L + A) \quad (D.34)$$

が導かれる。これを使うと (D.33) は自動的に成立するとわかった。(証明終わり)
結局AINシュタイン方程式を解くには、(D.31) だけを解けばいい。

未だ $l(x)$ に対して (D.2) 以外は特別な制限を設けてはいない。そこで時空間が定常な場合 ; l_μ は x^0 に無関係な場合を考える。まず (D.2) から

$$l_\mu = ((l_0(x), \vec{l}_0(x))) \quad (D.35)$$

とおく。ただし

$$(\vec{l})^2 = 1 \quad (D.36)$$

である。解くべき方程式 (D.31) の 00 成分は

$$-\square \{(l_0)^2\} = 2\partial_0 \{(L + A)l_0\} \quad (D.37)$$

である。しかし、定常条件の為に時間微分は全て 0 となるから

$$\triangle \{(l_0)^2\} = 0 \quad (D.38)$$

つぎに $\mu = 0, \nu$ の代わりに $j (= 1, 2, 3)$ とおくと

$$-\triangle \{\lambda_j (l_0)^2\} = \partial_j \{(L + A)l_0\} \quad (D.39)$$

となる。最後に $i, j = 1, 2, 3$ に対して

$$-\triangle \{(l_0)^2 \lambda_i \lambda_j\} = \partial_i \{(L + A)l_0 \lambda_j\} + \partial_j \{(L + A)l_0 \lambda_i\} \quad (D.40)$$

ここで

$$\begin{aligned} L &= -l^i_{,j} = -\partial_i(l_0\lambda_j) \\ Al_0 &= -l^k\partial_k l_0 = -l_0\lambda_k\partial_k l_0 \end{aligned} \quad (D.41)$$

すなわち

$$A = -\lambda_k\partial_k l_0 \quad (D.42)$$

である。さて、(D.38) を使うと (D.39) は

$$(l_0)^2\Delta\lambda_j + 2\partial_k\lambda_j\partial_k\{(l_0)^2\} = -\partial_j\{l_0(L + A)\} \quad (D.43)$$

また (D.40) の左辺に (D.39) を代入し、その結果を対してさらに (D.43) を使えば

$$\begin{aligned} -\Delta\{(l_0)^2\lambda_i\lambda_j\} &= \partial_i\partial_j(L + A)l_0 + \partial_j\lambda_i(L + A)l_0 \\ &\quad -\lambda_j\Delta\{\lambda_i(l_0)^2\} - \lambda_i\Delta\{\lambda_j(l_0)^2\} \\ &= l_0(L + A)(\partial_i\lambda_j + \partial_j\lambda_i) \\ &\quad -(l_0)^2\lambda_j\Delta\lambda_i - 2\lambda_j\partial_k\lambda_i\cdot\partial_k\{(l_0)^2\} \\ &\quad -(l_0)^2\lambda_i\Delta\lambda_j - 2\lambda_i\partial_k\lambda_j\cdot\partial_k\{(l_0)^2\} \\ (\text{左辺}) &= -\lambda_i\lambda_j\Delta\{(l_0)^2\} - (l_0)^2\lambda_i\Delta\lambda_j - (l_0)^2\lambda_j\Delta\lambda_i \\ &\quad -2\partial_k(l_0)^2\partial_k(\lambda_i\lambda_j) - 2(l_0)^2\partial_k\lambda_i\partial_k\lambda_j \\ \therefore \quad 2(l_0)^2\lambda_{i,k}\lambda_{j,k} &= -l_0(L + A)(\lambda_{j,i} + \lambda_{i,j}) \end{aligned}$$

となる。あるいは

$$\lambda_{j,i} + \lambda_{i,j} = \frac{1}{p}\lambda_{i,k}\lambda_{j,k} \quad (D.44)$$

となる。ここで

$$2l_0p \equiv -(L + A) = (l_0\lambda_j)_{,j} + \lambda_k l_{0,k} \quad (D.45)$$

あるいは、三次元ベクトルで書くと

$$2l_0p = 2\vec{\lambda}\text{grad}l_0 + l_0\text{div}\vec{\lambda} \quad (D.46)$$

となる。以上で l_0 と $\vec{\lambda}$ を決める方程式は (D.38), (D.39), (D.44) である。なお、ニュートンポテンシャル Φ に対し

$$g_{00} = \eta_{00} - 2\Phi$$

とおけば (D.1) から

$$(l_0)^2 = -\frac{2}{a}\Phi$$

従って (D.2) は物質のない場所におけるポアソン方程式

$$\Delta\Phi = 0$$

に相当するとわかる。

さて、 $\vec{\lambda}$ は

$$\lambda_i\lambda_i = 1$$

であるから

$$\lambda_i \lambda_{i,k} = 0 \quad (\text{D.47})$$

そこで (D.44) に λ_j を掛けると

$$\lambda_j \lambda_{i,j} = 0 \quad (\text{D.48})$$

となる。ここで 3×3 行列 \mathbf{M} の ij 要素を

$$(\mathbf{M})_{ij} \equiv \lambda_{i,j} \quad (\text{D.49})$$

と定義すれば (D.44) は

$$(\mathbf{M})_{ij} + (\mathbf{M})_{ji} = \frac{1}{p} (\mathbf{M})_{ik} (\mathbf{M})_{jk}$$

あるいは

$$(\mathbf{M}^t + \mathbf{M})_{ij} = \frac{1}{p} (\mathbf{M} \mathbf{M}^t)_{ij} \quad (\text{D.50})$$

となる。ここで \mathbf{M}^t は \mathbf{M} の転置行列である。また

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}^t &= (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3) \\ \hat{\lambda} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と書くことすれば、(D.47) は

$$\hat{\lambda} \mathbf{M} = 0$$

または全体の転置をとると

$$\mathbf{M}^t \hat{\lambda} = 0 \quad (\text{D.51})$$

同様に (D.48) は

$$\mathbf{M} \hat{\lambda} = 0 \quad (\text{D.52})$$

そこで (D.50),(D.51),(D.52) から \mathbf{M} を $\hat{\lambda}$ の関数として求めることを考える。まず 1 点 x において、空間座標系を直交回転して

$$\vec{\lambda}(x) \rightarrow \vec{\lambda}'(x) = (1, 0, 0) \quad (\text{D.53})$$

となるようにする。この回転の行列を \mathbf{R} とすれば

$$\mathbf{R} \hat{\lambda} = \hat{\lambda}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.54})$$

\mathbf{R} は直交行列であるから

$$\mathbf{R} \mathbf{R}^t = \mathbf{R}^t \mathbf{R} = \mathbf{1}$$

従って

$$\hat{\lambda} = \mathbf{R}^t \hat{\lambda}'$$

そこで (D.52) は

$$\mathbf{M} \mathbf{R}^t \hat{\lambda}' = 0$$

あるいは

$$\mathbf{M}' \equiv \mathbf{R} \mathbf{M} \mathbf{R}^t \quad (D.55)$$

とおけば

$$\mathbf{M}' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (D.56)$$

となる。同様に (D.51) から

$$\mathbf{R} \mathbf{M}^t \mathbf{R}^t \hat{\lambda}' = 0$$

あるいは

$$(\mathbf{M}')^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (D.57)$$

(D.56),(D.57) から

$$\mathbf{M}' \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & d \\ 0 & e & f \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{N}' \end{pmatrix} \quad (D.58)$$

という形をしていることがわかる。 \mathbf{N}' は 2×2 行列である。従って

$$\mathbf{M} = \mathbf{R}^t \mathbf{M}' \mathbf{R} = \mathbf{R}^t \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{N}' \end{pmatrix} \mathbf{R} \quad (D.59)$$

ところで、(D.50) に左から \mathbf{R} 、右から \mathbf{R}^t を掛けると

$$\mathbf{M}'^t + \mathbf{M}' = \frac{1}{p} \mathbf{M}' (\mathbf{M}')^t$$

あるいは 2 行 2 列の部分行列で書くと

$$\mathbf{N}'^t + \mathbf{N}' = \frac{1}{p} \mathbf{N}' (\mathbf{N}')^t \quad (D.60)$$

となる。いま、 2×2 行列 \mathbf{U} を

$$\mathbf{U} = \mathbf{1}_2 - \frac{1}{p} \mathbf{N}' \quad (D.61)$$

と定義する。 $\mathbf{1}_2$ は 2×2 単位行列である。この \mathbf{U} は直交行列となる。なぜなら

$$\mathbf{U} \mathbf{U}^t = \left(\mathbf{1}_2 - \frac{1}{p} \mathbf{N}' \right) \left(\mathbf{1}_2 - \frac{1}{p} (\mathbf{N}')^t \right) = \mathbf{1}_2 - \frac{1}{p} (\mathbf{N}' + (\mathbf{N}')^t) + \frac{1}{p^2} \mathbf{N}' \mathbf{N}'^t$$

(D.60) を使うと

$$\mathbf{U} \mathbf{U}^t = \mathbf{1}_2$$

従って

$$\mathbf{U}^t = \mathbf{U}^{-1} \quad , \quad \mathbf{U}^t \mathbf{U} = \mathbf{1}_2$$

だからである。 \mathbf{U} の定義式 (D.61) でもし $\mathbf{N}' \rightarrow 0$ とすれば $\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{1}_2$ となることを考えると二次元の直交行列としては

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

だけである。 θ は \vec{x} のある関数である。そこで \mathbf{N}' は

$$\mathbf{N}' = p(\mathbf{1}_2 - \mathbf{U}) = p \begin{pmatrix} 1 - \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & 1 - \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\text{D.62})$$

従って

$$\mathbf{M} = \mathbf{R}^t \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{N}' \end{pmatrix} \mathbf{R}$$

となる。これを要素で書くと、 $i, k = 1, 2, 3$ に対して

$$\begin{aligned} (\mathbf{M})_{ik} &= \sum_{j,l=2}^3 (R^t)_{ij} (N')_{jl} R_{lk} \\ &= p(1 - \cos \theta) \sum_{j=2}^3 R_{ji} R_{jk} + p \sin \theta (R_{2i} R_{3k} - R_{3i} R_{2k}) \quad (\text{D.63}) \end{aligned}$$

となる。ところで $\hat{\lambda} = \mathbf{R}^t \hat{\lambda}'$ であるから

$$\lambda_i = (R^t)_{i1} = R_{1i}$$

従って、

$$\sum_{j=2}^3 R_{ji} R_{jk} = \sum_{j=1}^3 (R^t)_{ij} R_{jk} - R_{1i} R_{1k} = \delta_{ik} - \lambda_i \lambda_k \quad (\text{D.64})$$

また $\det(\mathbf{R}) = 1$ であるから

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & : (i, j, k) \rightarrow (1, 2, 3) \text{ が偶置換} \\ -1 & : (i, j, k) \rightarrow (1, 2, 3) \text{ が奇置換} \\ 0 & : \text{その他} \end{cases}$$

を使うと

$$1 = \varepsilon_{ijk} R_{1i} R_{2j} R_{3k}$$

あるいは

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} &= \varepsilon_{abc} R_{ai} R_{bj} R_{ck} \\ &= \lambda_i (R_{2j} R_{3k} - R_{3j} R_{2k}) + \lambda_j (R_{2k} R_{3i} - R_{3k} R_{2i}) + \lambda_k (R_{2i} R_{3j} - R_{3i} R_{2j}) \end{aligned}$$

ところで $\mathbf{R} \hat{\lambda} = \hat{\lambda}'$ から

$$R_{1k} \lambda_k = \lambda_k \lambda_k = 1 \quad , \quad R_{2k} \lambda_k = 0 \quad , \quad R_{3k} \lambda_k = 0$$

であるから、上の ε_{ijk} に λ_k を掛けると

$$\varepsilon_{ijk} \lambda_k = R_{2i} R_{3j} - R_{3i} R_{2j} \quad (\text{D.65})$$

(D.64),(D.65) を使うと、(D.63) は

$$M_{ik} = p(1 - \cos \theta)(\delta_{ik} - \lambda_i \lambda_k) + p \sin \theta \varepsilon_{ikl} \lambda_l \quad (D.66)$$

となる。あるいは p, θ の代わりに

$$\alpha \equiv p(1 - \cos \theta), \quad \beta \equiv p \sin \theta \quad (D.67)$$

とおけば、

$$M_{ik} \equiv \lambda_{i,k} = \alpha(\delta_{ik} - \lambda_i \lambda_k) + \beta \varepsilon_{ikl} \lambda_l \quad (D.68)$$

となる。 i, k を縮約すれば

$$\operatorname{div} \vec{\lambda} = 2\alpha \quad (D.69)$$

となる。また

$$\lambda_{i,k} - \lambda_{k,i} = 2\beta \varepsilon_{ikl} \lambda_l$$

であり、ベクトル記号を使うと

$$\operatorname{rot} \vec{\lambda} = -2\beta \vec{\lambda} \quad (D.70)$$

と表される。また (D.68) に ∂_k を掛け、さらに (D.70) を使うとベクトル記号では

$$\Delta \vec{\lambda} = \operatorname{grad} \alpha - \vec{\lambda}(\vec{\lambda} \cdot \operatorname{grad} \alpha) - 2(\alpha^2 + \beta^2) \vec{\lambda} - \vec{\lambda} \times \operatorname{grad} \beta \quad (D.71)$$

となる。

$$\begin{aligned} \left[\begin{aligned} \therefore (\Delta \vec{\lambda})_i &= \partial_k \lambda_{i,k} = \partial_k \{\alpha(\delta_{ik} - \lambda_i \lambda_k)\} + \partial_k \{\beta \varepsilon_{ikl} \lambda_l\} \\ &= (\operatorname{grad} \alpha)_i - \lambda_i \lambda_k (\operatorname{grad} \alpha)_k - \alpha(\lambda_{i,k} \lambda_k + \lambda_i \lambda_{k,k}) + (\operatorname{grad} \beta \times \vec{\lambda})_i - \beta(\operatorname{rot} \vec{\lambda})_i \\ &= (\operatorname{grad} \alpha)_i - \lambda_i \lambda_k (\operatorname{grad} \alpha)_k - \alpha \lambda_i \operatorname{div} \vec{\lambda} - (\vec{\lambda} \times \operatorname{grad} \beta)_i - 2\beta^2 \lambda_i \\ \therefore \Delta \vec{\lambda} &= \operatorname{grad} \alpha - \vec{\lambda}(\vec{\lambda} \cdot \operatorname{grad} \alpha) - 2(\alpha^2 + \beta^2) \vec{\lambda} - \vec{\lambda} \times \operatorname{grad} \beta \end{aligned} \right] \end{aligned}$$

一方、(D.70) から

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{\lambda}) = -2\operatorname{rot}(\beta \vec{\lambda})$$

これに (D.69),(D.70) を代入すると

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\lambda} - \Delta \vec{\lambda} &= -2\{-\vec{\lambda} \times \operatorname{grad} \beta + \beta \operatorname{rot} \vec{\lambda}\} \\ \Leftrightarrow \\ 2\operatorname{grad} \alpha - \Delta \vec{\lambda} &= 2\vec{\lambda} \times \operatorname{grad} \beta + 4\beta^2 \vec{\lambda} \\ \therefore \Delta \vec{\lambda} &= 2\operatorname{grad} \alpha - 2\vec{\lambda} \times \operatorname{grad} \beta - 4\beta^2 \vec{\lambda} \end{aligned} \quad (D.72)$$

となる。(D.71) と比べると

$$\operatorname{grad} \alpha = \vec{\lambda} \times \operatorname{grad} \beta - \vec{\lambda}(\vec{\lambda} \cdot \operatorname{grad} \alpha) - 2(\alpha^2 - \beta^2) \vec{\lambda} \quad (D.73)$$

であるとわかる。これと $\vec{\lambda}$ の内積をとると

$$\begin{aligned} (\vec{\lambda} \cdot \operatorname{grad} \alpha) &= \vec{\lambda} \cdot (\vec{\lambda} \times \operatorname{grad} \beta) - \vec{\lambda} \cdot \vec{\lambda}(\vec{\lambda} \cdot \operatorname{grad} \alpha) - 2(\alpha^2 - \beta^2) \vec{\lambda} \cdot \vec{\lambda} \\ \therefore (\vec{\lambda} \cdot \operatorname{grad} \alpha) &= \beta^2 - \alpha^2 \end{aligned} \quad (D.74)$$

従って、(D.73) は

$$\text{grad}\alpha = \vec{\lambda} \times \text{grad}\beta - (\alpha^2 - \beta^2)\vec{\lambda} \quad (\text{D.75})$$

となる。次に (D.70) の div を求める

$$\text{div}(\text{rot}\vec{\lambda}) = -2\text{div}(\beta\vec{\lambda}) \quad \therefore \text{div}(\beta\vec{\lambda}) = 0$$

となる。(D.69) を代入すると

$$\vec{\lambda} \cdot \text{grad}\beta + \beta \text{div}\vec{\lambda} = 0 \quad (\vec{\lambda} \cdot \text{grad}\beta) = -2\alpha\beta \quad (\text{D.76})$$

また (D.75) と $\vec{\lambda}$ のベクトルの積をとり、少し書き直しをすれば

$$\text{grad}\beta = -(\vec{\lambda} \times \text{grad}\alpha) - 2\alpha\beta\vec{\lambda} \quad (\text{D.77})$$

となる。

$$\begin{aligned} \vec{\lambda} \times \text{grad}\alpha &= \vec{\lambda} \times (\vec{\lambda} \times \text{grad}\beta) - (\alpha^2 - \beta^2)\vec{\lambda} \times \vec{\lambda} \\ &= (\vec{\lambda} \cdot \text{grad}\beta)\vec{\lambda} - (\vec{\lambda} \cdot \vec{\lambda})\text{grad}\beta \\ &= -2\alpha\beta\vec{\lambda} - \text{grad}\beta \end{aligned}$$

以上をまとめると

$$\begin{aligned} \text{grad}\alpha &= \vec{\lambda} \times \text{grad}\beta - (\alpha^2 - \beta^2)\vec{\lambda} \\ \text{grad}\beta &= -(\vec{\lambda} \times \text{grad}\alpha) - 2\alpha\beta\vec{\lambda} \\ (\vec{\lambda} \cdot \text{grad}\alpha) &= \beta^2 - \alpha^2 \\ (\vec{\lambda} \cdot \text{grad}\beta) &= -2\alpha\beta \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\gamma(x) \equiv \alpha + i\beta$$

という複素関数を導入し、両辺の grad をとると上の関係式から

$$\text{grad}\gamma = -i\vec{\lambda} \times \text{grad}\gamma - \gamma^2\vec{\lambda} \quad (\text{D.78})$$

となる。また残りの二つは

$$(\vec{\lambda} \cdot \text{grad}\gamma) = -\gamma^2 \quad (\text{D.79})$$

(D.78) の両辺の div をとり、(D.69),(D.70),(D.79) を使うと

$$\begin{aligned} \text{div grad}\gamma &= -i\text{div}(\vec{\lambda} \times \text{grad}\gamma) - \text{div}(\gamma^2\vec{\lambda}) \\ &\Leftrightarrow \\ \triangle\gamma &= -i\text{grad}\gamma \cdot (\text{rot}\vec{\lambda}) + i\vec{\lambda} \cdot \text{rot grad}\gamma - \gamma^2\text{div}\vec{\lambda} - \vec{\lambda} \cdot \text{grad}\gamma^2 \\ &= 2i\beta\vec{\lambda} \cdot \text{grad}\gamma - 2\alpha\gamma^2 - 2\gamma\vec{\lambda} \cdot \text{grad}\gamma \\ &= -2i\beta\gamma^2 - 2\alpha\gamma^2 + 2\gamma\gamma^2 = 0 \\ &\therefore \triangle\gamma^2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.80})$$

が導かれる。また (D.78) の 2 乗を計算すると

$$\begin{aligned}
 (\text{grad}\gamma)^2 &= (i\vec{\lambda} \times \text{grad}\gamma + \gamma^2 \vec{\lambda})^2 \\
 &= -(\vec{\lambda} \times \text{grad}\gamma) \cdot (\vec{\lambda} \times \text{grad}\gamma) + 2i\gamma^2 \vec{\lambda} \cdot (\vec{\lambda} \times \text{grad}\gamma) + \gamma^4 \\
 &= \vec{\lambda} \cdot \{(\vec{\lambda} \times \text{grad}\gamma) \times \text{grad}\gamma\} + 0 + \gamma^4 \\
 &= -\vec{\lambda} \cdot \{(\text{grad}\gamma)^2 \vec{\lambda} - (\vec{\lambda} \cdot \text{grad}\gamma) \text{grad}\gamma\} + \gamma^4 \\
 &= -(\text{grad}\gamma)^2 + \gamma^4 + \gamma^4 \\
 \therefore (\text{grad}\gamma)^2 &= \gamma^4
 \end{aligned} \tag{D.81}$$

となる。ここで

$$\omega \equiv \frac{1}{\gamma} \tag{D.82}$$

とおけば (D.81) は

$$(\text{grad}\omega)^2 = 1 \tag{D.83}$$

となる。そこで (D.87) により γ を決め、その大きさを (D.81) により規格化すれば、この α, β を用いて $\vec{\lambda}$ が以下のように決まる。

まず、(D.78) を $-\gamma^2$ で割ると

$$\text{grad}\omega = -i\vec{\lambda} \times \text{grad}\omega + \vec{\lambda} \tag{D.84}$$

従って

$$(\vec{\lambda} \cdot \text{grad}\omega) = 1 \tag{D.85}$$

複素共役をとると

$$(\vec{\lambda} \text{grad}\omega^*) = 1 \tag{D.86}$$

また

$$\text{grad}\omega \times \text{grad}\omega^* = B\vec{\lambda} - i(\text{grad}\omega + \text{grad}\omega^*) \tag{D.87}$$

となる。

$$\begin{aligned}
 (\text{grad}\omega \times \text{grad}\omega^*) &= -(-i\vec{\lambda} \times \text{grad}\omega + \vec{\lambda}) \times (i\vec{\lambda} \times \text{grad}\omega^* + \vec{\lambda}) \\
 &= -(\vec{\lambda} \times \text{grad}\omega) \times (\vec{\lambda} \times \text{grad}\omega^*) - (i\vec{\lambda} \times \text{grad}\omega) \times \vec{\lambda} + \vec{\lambda} \times (i\vec{\lambda} \times \text{grad}\omega^*) \\
 &= \{(\vec{\lambda} \times \text{grad}\omega) \cdot \text{grad}\omega^*\} \vec{\lambda} - \{(\vec{\lambda} \times \text{grad}\omega) \cdot \vec{\lambda}\} \text{grad}\omega^* \\
 &\quad + i(\vec{\lambda} \cdot \text{grad}\omega) \vec{\lambda} - i\text{grad}\omega + i(\vec{\lambda} \cdot \text{grad}\omega^*) - i\text{grad}\omega^* \\
 &= 2i\vec{\lambda} - \text{grad}\omega^* \cdot (\text{grad}\omega \times \vec{\lambda}) \vec{\lambda} - i(\text{grad}\omega + \text{grad}\omega^*)
 \end{aligned}$$

ここで

$$B \equiv 2i - \{\text{grad}\omega^* \cdot (\text{grad}\omega \times \vec{\lambda})\} \tag{D.88}$$

である。 (D.87) と $\text{grad}\omega$ との内積をとると (D.83), (D.85) から

$$\begin{aligned}
 B &= 2i + \{\text{grad}\omega^* \cdot (i\text{grad}\omega - i\vec{\lambda})\} \\
 &= i(1 + \text{grad}\omega^* \cdot \text{grad}\omega)
 \end{aligned} \tag{D.89}$$

これを (D.87) に代入すると

$$\begin{aligned}
 \vec{\lambda} &= \frac{1}{B} \{\text{grad}\omega \times \text{grad}\omega^* + i(\text{grad}\omega + \text{grad}\omega^*)\} \\
 &= \frac{\text{grad}\omega + \text{grad}\omega^* - i\text{grad}\omega \times \text{grad}\omega^*}{1 + \text{grad}\omega^* \cdot \text{grad}\omega}
 \end{aligned} \tag{D.90}$$

そこで γ あるいはその逆数 ω さえわかれば $\vec{\lambda}$ が決まる。最後にやることは、 l_0 を α, β から決めることである。まず

$$\Delta(l_0)^2 = 0$$

および

$$\Delta(l_0^2 \lambda_j) = -\partial_j \{l_0(L + A)\}$$

の解で、さらに (D.40) と矛盾しないものは

$$(l_0)^2 = C \operatorname{Re}(\gamma) = C\alpha \quad (\text{D.91})$$

である。 C は任意の定数。これが解であることを示し、その後で解の一意性を証明すれば十分である。

(証明) $\Delta\gamma = 0$ だから $\Delta\alpha = 0$ 。従って、(D.38) は満たされている。次に、(D.39) の左辺に $C\alpha$ を代入すると

$$(\text{左辺}) = C\Delta(\alpha\lambda_j) = C\alpha\Delta\lambda_j + 2C\partial_k\alpha\partial_k\lambda_j$$

ところで (D.68),(D.72) を使い、さらに

$$(\operatorname{grad}\omega)^2 = 1 \quad (\text{D.92})$$

から導かれる関係式

$$\begin{aligned} \alpha^4 - 6\alpha^2\beta^2 + \beta^4 &= (\operatorname{grad}\alpha)^2 - (\operatorname{grad}\beta)^2 \\ 2\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2) &= (\operatorname{grad}\alpha \cdot \operatorname{grad}\beta) \end{aligned} \quad (\text{D.93})$$

$$\left[\begin{aligned} \therefore (\operatorname{grad}\alpha)^2 &= (\vec{\lambda} \times \operatorname{grad}\beta - (\alpha^2 - \beta^2)\vec{\lambda})^2 \\ &= (\vec{\lambda} \times \operatorname{grad}\beta) \cdot (\vec{\lambda} \operatorname{grad}\beta) - 2\vec{\lambda} \cdot (\vec{\lambda} \times \operatorname{grad}\beta)(\alpha^2 - \beta^2) + (\alpha^2 - \beta^2)^2 \\ &= \vec{\lambda} \cdot \{(\operatorname{grad}\alpha \cdot \operatorname{grad}\beta)\vec{\lambda} - (\operatorname{grad}\beta \cdot \vec{\lambda})\operatorname{grad}\beta\} + (\alpha^2 - \beta^2)^2 \\ &= (\operatorname{grad}\beta)^2 - 4\alpha^2\beta^2 + (\alpha^2 - \beta^2)^2 \\ \\ \therefore (\operatorname{grad}\alpha)^2 - (\operatorname{grad}\beta)^2 &= \alpha^4 - 6\alpha^2\beta^2 + \beta^4 \\ \\ \operatorname{grad}\alpha \cdot \operatorname{grad}\beta &= \{\vec{\lambda} \times \operatorname{grad}\beta - (\alpha^2 - \beta^2)\vec{\lambda}\}\operatorname{grad}\beta \\ &= -(\alpha^2 - \beta^2) \cdot (-2\alpha\beta) = 2\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2) \end{aligned} \right]$$

を使うと、

$$(\text{D.39}) \text{ の左辺} = C\partial_j(\alpha^2 + \beta^2) \quad (\text{D.94})$$

となる。次に、(D.39) の右辺は (D.72),(D.42) を使うと

$$-\partial_j\{l_0(L + A)\} = \partial_j\partial_k(l_0^2\lambda_k) = C\partial_j\partial_k(\alpha\lambda_k)$$

これに (D.69),(D.74) を代入すると (D.94) に一致する。従って $(l_0)^2 = C\alpha$ は (D.38) を満足する。(証明終わり)

これで解は完全に求まった。 $C\alpha$ を改めて α とおく。まとめると

$$\Delta\gamma = 0$$

を満たし、 $\{\text{grad} \left(\frac{1}{\gamma} \right)\}^2 = 1$ に規格化された $\gamma = \alpha + i\beta$ を用いると、 $g_{\mu\nu}$ を

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} + a l_\mu l_\nu \\ l_\mu &= l_0(1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \\ (\vec{\lambda})^2 &= 1 \end{aligned}$$

のように書くとき、 l_0 は

$$(l_0)^2 = \text{Re}(\gamma) = \alpha$$

また $\vec{\lambda}$ は (D.90) で与えられる ($\omega = \frac{1}{\gamma}$)。これを α, β で書き直すと

$$\vec{\lambda} = \frac{(\beta^2 - \alpha^2)\text{grad}\alpha - 2\alpha\beta\text{grad}\beta - \text{grad}\alpha \times \text{grad}\beta}{(\alpha^2 - \beta^2)^2 + (\text{grad}\beta)^2} \quad (\text{D.95})$$

となる。

最後に $(l_0)^2 = C\alpha$ が唯一の解であることを示す。いま空間のある領域の表面上における (l_0^2) の境界値が与えられているものとする。また $\gamma = \alpha + i\beta$ は既にわかっているものとする。従って $\vec{\lambda}$ も既知量である。そこで、 $(l_0)^2$ が満たすべき式は

$$\begin{aligned} \Delta(l_0)^2 &= 0 \\ \Delta(l_0^2 \lambda_j) &= \partial_j \partial_k (l_0^2 \lambda_k) \\ \Delta(l_0^2 \lambda_i \lambda_j) &= \partial_i \{\lambda_j \partial_k (l_0^2 \lambda_k)\} + \partial_j \{\lambda_i \partial_k (l_0^2 \lambda_k)\} \end{aligned}$$

である。最後の式は λ_i を決定するのに使われた。(D.38),(D.39) を満たす限り $\lambda_{i,k}$ の形も一意的に決まる。それゆえに、(D.40) から決まる λ_i に対して (D.38),(D.39) を満たす $(l_0)^2$ が一通りしかないと示せばよい。いまそのような解が 2 個あるとして、これらを $l_{0(1)}, l_{0(2)}$ とする。その差を

$$\varphi \equiv (l_{0(1)})^2 - (l_{0(2)})^2$$

とおく。二つの解は同じ境界条件 $\varphi = 0$ を満たす。(D.38),(D.39) を $l_{0(1)}, l_{0(2)}$ に対して書き、(1) と (2) の差を求める

$$\Delta\varphi = 0, \quad \Delta(\varphi \lambda_j) = \partial_j \partial_k (\varphi \lambda_k) \quad (\text{D.96})$$

となる。ところで (D.96) の解で $\varphi = 0$ という境界条件を満足する φ は $\varphi = 0$ しかない。よって解は一意である。(証明終わり)

これから、方程式

$$\Delta\gamma = 0$$

ならびに規格化条件

$$(\text{grad}\omega)^2 = 1$$

を満たす解を求める。この特解として

$$\gamma = \{(\mathbf{x} - \mathbf{a})^2\}^{\frac{1}{2}}$$

が考えられる。 \mathbf{a} が実数ならば、これは重力場の中心が座標原点ではなく、点 \mathbf{a} にある場合の Schwarzschild の解である。しかし、 \mathbf{a} が複素数の成分を持つとき、すなわち

$$\mathbf{a} = (0, 0, ih) \quad h : \text{実数} \quad (\text{D.97})$$

とおくとき事情は異なる。これより

$$\gamma = \frac{1}{\{x^2 + y^2 + (z - ih)^2\}^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\{x^2 + y^2 + z^2 - h^2 - 2ihz\}^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{D.98})$$

そこで

$$\omega = \{x^2 + y^2 + z^2 - h^2 - 2ihz\}^{\frac{1}{2}} \equiv \rho + i\sigma \quad (\text{D.99})$$

とおく。あるいは、

$$\rho^2 - \sigma^2 = r^2 - h^2$$

$$\rho\sigma = -zh \quad (\text{D.100})$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

(D.99) から、 $r \gg h$ では $\rho \approx r$ となることがわかる。 ρ, σ を使って書くと

$$\gamma = \frac{\rho - i\sigma}{\rho^2 + \sigma^2}$$

従って

$$\alpha = (l_0)^2 = \frac{\rho}{\rho^2 + \sigma^2} = \frac{\rho^3}{\rho^4 + (zh)^2} \quad (\text{D.101})$$

$\vec{\lambda}$ を求めるためには $\text{grad}\omega$ を計算すればいい。それは (D.99) から求まる：

$$\text{grad}\omega = \frac{1}{\omega} \frac{1}{2} (2\mathbf{r} - 2ih\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{x} - ih\mathbf{k}}{\omega} \quad (\text{D.102})$$

ここで \mathbf{k} は z 軸の正の向きを指す単位ベクトルである。そこで (D.90) から

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\frac{x-ihk}{\omega} + \frac{x+ihk}{\omega^*} - i\frac{x-ihk}{\omega} \times \frac{x+ihk}{\omega^*}}{1 + \frac{r^2+h^2}{|\omega|^2}} \\ &= \frac{2\{\rho\mathbf{x} - h\sigma\mathbf{k} + h(\mathbf{x} \times \mathbf{k})\}}{|\omega|^2 + r^2 + h^2} \end{aligned} \quad (\text{D.103})$$

となる。これを成分で書くと

$$\lambda_1 = \frac{\rho x + hy}{\rho^2 + h^2} \quad , \quad \lambda_2 = \frac{\rho y - hx}{\rho^2 + h^2} \quad , \quad \lambda_3 = \frac{z}{\rho} \quad (\text{D.104})$$

となる。これを使うと線素は

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx)^2 + \frac{a\rho^3}{\rho^4 + (hz)^2} \left\{ dx^0 + \frac{\rho(xdx + ydy)}{\rho^2 + h^2} + \frac{h(ydx - xdy)}{\rho^2 + a^2} + \frac{zdz}{\rho} \right\}^2 \quad (\text{D.105})$$

ここで

$$\rho = \frac{r^2 - h^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{r^2 - h^2}{2}\right)^2 + (hz)^2} \quad (\text{D.106})$$

である。これが Kerr ブラックホールの計量である。ここから座標変換を施せば本論文で扱った形と一致する。

謝辞

本論文を作成するにあたってたくさんの手助けやご指導を享受してきました。本当に感謝しています。特に約4年間の学生ゼミには大変お世話になりました。様々な議題、討論を踏んで大いに成長することができたと実感しています。この場をお借りしてお礼を申し上げます。

Bibliography

- [1] 内山龍雄; 一般相対性理論, 裳華房 (2001)
- [2] P.A.M.Dirac[江沢洋 訳]; 一般相対性理論, 筑摩書房 (2009)
- [3] ランダウ, リフシツ [恒藤敏彦, 広重徹 訳]; 場の古典論 (原書第6版), 東京図書株式会社 (1978)
- [4] ジェームズ・B・ハートル [牧野伸義 訳]; 重力ーアインシュタインの一般相対性理論入門, ピアソン・エデュケーション (2008)
- [5] 須藤靖; 一般相対論入門, 日本評論社 (2005)
- [6] Sean Carroll; Spacetime and geometry, Addison Wesley (2004)
- [7] Luciano Rezzolla; Gravitational Waves from Perturbed Black Holes and Relative Stars, SISSA, International School for Advanced Studies, Trieste, Italy. INFN, Sezione di Trieste, Italy (2002)
- [8] Suphot Musiri, George Siopsis; On quasi-normal modes of Kerr black holes, Phys. Rev. Lett. B579 (2004) 25-30
- [9] 間野修平; Black Hole における場の方程式の性質, NII-Electronic Library Service, C166-C172
- [10] Charles W. Misner, Kip S. Thorne, John Arcibald Wheeler [若野省己 訳]; 重力理論, 丸善出版 (2011)
- [11] Norbert Straumann; General Relativity and Relativistic Astrophysics, Springer-Verlag (1984)
- [12] Steven Weinberg; Gravitation and Cosmology, John Wiley and Sons, Inc. (1971)