

重い singlet fermion の崩壊による レプトジェネシス

平成 22 年度修了
物理機能系専攻
物理学コース
09MP103 太田慎吾

2011 年 2 月 8 日

目次

1	導入	2
2	宇宙のバリオン非対称	3
3	レプトジェネシス	4
3.1	ニュートリノ質量	4
3.2	シーソー機構	5
3.3	$B + L$ の破れとスファレロン過程	6
3.4	B と $B - L$ の関係	9
3.5	N_1 の崩壊における CP 非対称	11
3.6	バリオン非対称	13
3.6.1	Y_{N_1} に関する Boltzmann 方程式	15
3.6.2	Y_{Δ_α} に関する Boltzmann 方程式	16
3.6.3	バリオン非対称	23
3.7	熱的效果による補正	24
3.8	フレーバー効果による補正	28
4	まとめ	31
A	Notations	32
B	Boltzmann 方程式	34
C	崩壊パラメータ K	36

1 導入

現在の宇宙では、通常物質（バリオン）に比べて反物質（反バリオン）が明らかに少ないことが分かっている。地球にあるのは通常物質ばかりで、それは太陽系、銀河系などと視野を広げていっても変わらない。例えば、太陽系外から来る宇宙線の観測によると、宇宙線に含まれる陽子と反陽子の比が $1 : 10^{-4}$ 程度であることが分かっている [1]。そして、これまでに、通常物質に匹敵する量の反物質が存在する証拠は発見されていない。従って、今日の宇宙のこのようなバリオン非対称は、初期条件で与えられるか、宇宙が始まって以来ある時期に何らかの機構によって生まれたものと考えられる。

このようなバリオン非対称の生成を記述するシナリオは、標準模型の枠内で考えられるものや超対称標準模型に拡張して考えられるものなど、これまでにいくつも考えられてきた。本論文では、それらの中で、特に標準模型に3つのゲージ相互作用をしない非常に重いフェルミオン（右巻きニュートリノと呼び、レプトン2重項とヒッグス2重項に崩壊する）を加えた模型に基づいてバリオン非対称の生成を説明する、レプトジェネシスと呼ばれるシナリオ [2] に注目し、概説する。具体的には、右巻きニュートリノが崩壊してレプトン数（レプトン2重項が持つ量子数）が生成され、それがスファレロン [3] と呼ばれる場の配位を通してバリオン数（バリオンを成すクォークが持つ量子数）に転換されることで、現在の宇宙のバリオン非対称が説明される。その他に、大きな特長としてシーソー機構 [4] がある。標準模型においてはニュートリノが質量を持たないが、観測的には、ニュートリノ振動実験の結果 [5] から小さな質量を持つことが分かっている。その点に関して、このシナリオでは、右巻きニュートリノが非常に重いことにより働くシーソー機構によって、ニュートリノに対して観測値による制限を満たすような小さな質量が与えられる。そして、得られる宇宙のバリオン非対称の大きさと観測値との整合性から、ニュートリノセクターのパラメータに対して制限を与えられる。

本論文で主に扱うのは最も単純化されたレプトジェネシスのシナリオで、ゼロ温度の場の理論に基づき、右巻きニュートリノの崩壊で作られるレプトン2重項は単一のフレーバーであるとして考える。そして、このような単純化されたシナリオで、おおよそ現在の宇宙のバリオン非対称を説明できる。また、より定量的には、有限温度の場の理論に基づく補正や、右巻きニュートリノがどのフレーバーに崩壊するかを考慮する必要がある。このような補正に関してもこれまでに研究がなされており、本論文では、最後にそれらの補正が与える影響についても触れる。

以下では、特に明示する必要がない限り $\hbar = c = k_B = 1$ とする自然単位系を用いる。

2 宇宙のバリオン非対称

宇宙のバリオン非対称の大きさは、次のような二つの物理量のいずれでも定義できる：

$$\eta_B \equiv \frac{n_B - n_{\bar{B}}}{n_\gamma}, \quad Y_{\Delta B} \equiv \frac{n_B - n_{\bar{B}}}{s} = \frac{n_\gamma}{s} \eta_B \quad (2.1)$$

ここで、 $n_B, n_{\bar{B}}, n_\gamma$ はそれぞれバリオン、反バリオン、光子の数密度を表し、 s はエントロピー密度を表す。これらの現在値（下付きの”0”で表す）は $s_0/n_{\gamma 0} \simeq 7.04$ という関係で結び付いている。そして、次のような現在の観測値が得られている [6]：

$$\eta_{B0} = \left. \frac{n_B - n_{\bar{B}}}{n_\gamma} \right|_0 = (6.225 \pm 0.170) \times 10^{-10} \quad (2.2)$$

一方で、バリオン非対称が作られるための条件として、Sakharov は次のような3つの条件を挙げた [7]：

- (1) バリオン数の破れ
- (2) C, CP の破れ
- (3) 熱平衡からの離脱

宇宙が始まった時刻には非対称がなかったと考えているので、(1)「バリオン数の破れ」が要求されるのは自明である。また、(2)「 C, CP の破れ」の両方がなければバリオンと反バリオンが等しい割合で作られてしまい、結局バリオン数としてはゼロのままとなる。そして、バリオン数を破る反応があっても、それが熱平衡状態にあったら逆反応が起きて消えてしまう。従って、そのような反応は(3)「熱平衡から離脱」した状況で起きなければならない。

宇宙のバリオン数生成シナリオは、以上の3つの条件が満たした上で、観測されるバリオン非対称の度合い(2.2)を説明でき、十分な大きさの CP 非対称を作れなければならない。宇宙のバリオン非対称に関しては、これまで数多くの研究がなされ、特徴的なシナリオが提唱されてきた。例えば、標準模型の枠組みで直接的にバリオン数を生成する電弱バリオジェネシスと呼ばれるものがある [8]。このシナリオでは、電弱相転移（ただし強い一次相転移）の際に相境界でバリオン数を生成する。また、標準模型の拡張として、大統一理論の枠組みでもバリオン数生成のシナリオが考えられた。そこでは、バリオン数とレプトン数を変えるような相互作用によって、バリオン数が生成される。

以下の節では、このようなバリオン数生成シナリオの中で、特にレプトジェネシスと呼ばれるものに注目する。導入で述べたように、このシナリオではバリオン数が直接生成されるわけではない。このシナリオでは、標準模型に新たに加えられる粒子の崩壊が生成されたレプトン数が基になり、それがスファレロン過程を通してバリオン数に変換されることで生じる。

3 レプトジェネシス

このシナリオでは、標準模型に対して、3つのゲージ相互作用をしない非常に重いフェルミオン（以下、右巻きニュートリノと呼ぶ）を加える。この粒子の崩壊により、バリオン数の生成条件に関して標準模型に不足していたバリオン数の破れやCP非対称の大きさが補われる。そして、ニュートリノ質量の存在を説明できるようになる。これらがこのシナリオの主な特長となる。

3.1節では、ニュートリノ振動現象とニュートリノ質量の関係を示す。3.2節では右巻きニュートリノの導入し、後述するシーソー機構を通して実験からの制限と合うような軽いニュートリノ質量を与えることができるのを見る。3.3節では、バリオン数 B 、レプトン数 L の破れと、 $B-L$ を保存するスファレロンと呼ばれる場の配位の存在を見る。3.4節では、標準模型に含まれる相互作用の化学平衡条件などから、 B 、 $B-L$ の間に単純な関係が成り立つのを見る。3.5節では、このシナリオで新たに加えられた右巻きニュートリノの崩壊によって作られるCP非対称の表式を示す。この崩壊によって L が生成され、それがこのシナリオにおいて最終的な B を与える源となる。3.6節では、 N_1 が関与する過程に注目し、 $B-L(B/3-L_\alpha)$ の存在量に関する Boltzmann 方程式を考える。最終的な B は $B-L$ を通じてCP非対称の大きさを parametrize されることになる。この節の最後で、単純化された状況での B の存在量の表式を与える。より定量的には、有限温度の補正や、右巻きニュートリノがどのフレーバーに崩壊するかを考慮した補正が考えられ、それぞれの影響を3.7節、3.8節でいくつか紹介する。

3.1 ニュートリノ質量

現在、実験的に最もよく確かめられ信頼されている素粒子模型は、標準模型と呼ばれるもので、 $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ 対称性を持つゲージ場の理論に基づく。しかし、現実には標準模型で説明できないような実験事実も存在する。その中の一つが、ニュートリノ質量である。標準模型において、ニュートリノは質量を持たないが、実験的にはニュートリノは非常に小さな質量を持つことが分かっている。具体的には、ニュートリノの持つフレーバーが時間変化し混合（振動）することが実験的に確かめられたことで、ニュートリノが質量を持つことが確かめられた。このように、ニュートリノフレーバーの振動が、ニュートリノが質量を持つ証拠となるのは、次のように理解できる。

簡単のため、ニュートリノが2世代の場合を考える。ニュートリノのフレーバー固有状態 $|\nu_\alpha\rangle$ ($\alpha = e, \mu$) と、質量固有状態 $|\nu_i\rangle$ ($i = 1, 2$) の間の関係は次のように表される：

$$|\nu_\alpha\rangle = U_{\alpha i} |\nu_i\rangle \quad (3.1)$$

ここで、 $U_{\alpha i}$ はユニタリー行列である。混合角を θ で表すと、フレーバー固有状態は次のように表される：

$$|\nu_e\rangle = \cos\theta |\nu_1\rangle + \sin\theta |\nu_2\rangle \quad (3.2)$$

$$|\nu_\mu\rangle = -\sin\theta |\nu_1\rangle + \cos\theta |\nu_2\rangle \quad (3.3)$$

従って、時間発展をこれらの右辺に $\exp(-iE_i t)$ を掛けて表すと、時刻 $t = 0$ で e フレーバーだったニュートリノが後のある時刻 t で μ フレーバーに変化する確率が次のように得られる：

$$P_{e \rightarrow \mu}(t) = |\langle \nu_\mu | \nu_e(t) \rangle|^2 = \sin^2 2\theta \sin^2 \left[1.27 \frac{\Delta m^2 (\text{eV})^2}{E (\text{GeV})} L (\text{km}) \right] \quad (3.4)$$

ここで、 Δm^2 は ν_1, ν_2 の間の 2 乗質量差、 E は ν_1, ν_2 の間のエネルギー差、 $L = ct$ はニュートリノが走る距離を表す。このように、ニュートリノ振動が存在するということは、 $\theta, \Delta m^2$ が共に零ではないということの意味する。これは、3 世代まで拡張しても同様である。

実際に、太陽ニュートリノ、大気ニュートリノ、原子炉ニュートリノなどの観測実験によって、各世代間の混合角や 2 乗質量差の値が見積もられている [5]：

$$\sin^2 \theta_{12} = 0.25 - 0.37, \quad \Delta m_{21}^2 = (7.05 - 8.34) \times 10^{-5} \text{eV}^2 \quad (3.5)$$

$$\sin^2 \theta_{23} = 0.36 - 0.67, \quad \Delta m_{23}^2 = (2.07 - 2.75) \times 10^{-3} \text{eV}^2 \quad (3.6)$$

$$\sin^2 \theta_{13} < 0.15 \quad (3.7)$$

また、宇宙論的な観測から、各世代のニュートリノ質量の絶対値の総和に対しても上限がある [6]：

$$\sum m_\nu < 1.3 \text{eV} (95\% \text{CL}) \quad (3.8)$$

このように、ニュートリノは質量を持ち、その大きさは他の標準模型粒子に比べて非常に小さいことが分かっている。これは、次に述べるシーソー機構によって自然に説明される。

3.2 シーソー機構

標準模型に新たに加える右巻きニュートリノを $N_i (i = 1, 2, 3)$ と表す。すると、ラグランジアンのリプトンセクターは次のように表される：

$$\mathcal{L}_{\text{lepton}} = [\mathbf{h}]_\beta^* (\bar{\ell}_\beta \phi^{c*}) e_{R\beta} - [\lambda]_{\alpha k}^* (\bar{\ell}_\alpha \phi^*) N_k - \frac{1}{2} \bar{N}_j M_j N_j^c + \text{h.c.} \quad (3.9)$$

ここで、

$$(\bar{\ell}_\alpha, \phi^*) = (\bar{\nu}_{L\alpha}, \bar{e}_{L\alpha}) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^- \\ \phi^{0*} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

	q_{iL}	u_{iR}	d_{iR}	ℓ_{iL}	e_{iR}
B	$+1/3$	$+1/3$	$+1/3$	0	0
L	0	0	0	$+1$	$+1$

表 1: 標準模型粒子が持つ B, L の値。各世代で同じ値を持ち、反粒子は逆符号の値を持つ。バリオン (陽子, 中性子) は三つのクォークから成るため、クォークが持つ B はそれぞれ $+1/3$ となっている。

であり、以下では ϕ の真空期待値は $v \simeq 174\text{GeV}$ であるとする。このラグランジアンにおいて、ニュートリノの質量行列を右巻き, 左巻きに関して対角化すると、ニュートリノの有効質量行列が次のように表されることがわかる:

$$[m_\nu]_{\alpha\beta} \simeq \frac{[m_D]_{\alpha k} [m_D]_{\beta k}}{M_k}, \quad [m_D]_{\alpha k} = [\lambda]_{\alpha k} v \quad (3.11)$$

ここで、 m_D はニュートリノの Dirac 質量を表す。この表式から、右巻きニュートリノの質量が m_D に比べて十分に大きければ、観測からの制限に整合するような小さなニュートリノ質量を得ることができる。このようにして、大きな質量を持つ粒子を導入して小さなニュートリノ質量を得る機構は、シーソー機構と呼ばれる [4]。

有効質量行列 (3.11) は、 3×3 のユニタリー行列 U で世代に関して対角化される:

$$[m_\nu] = U^* D_m U^\dagger, \quad D_m = \text{diag}\{m_1, m_2, m_3\} \quad (3.12)$$

ここで、 U は次のように parametrize されているものとする:

$$U = \hat{U} \cdot \text{diag}\{1, e^{i\alpha}, e^{i\beta}\} \quad (3.13)$$

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} c_{13}c_{12} & c_{13}s_{12} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -c_{23}s_{12} - s_{23}s_{13}c_{12}e^{i\delta} & c_{23}c_{12} - s_{23}s_{13}s_{12}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{23}s_{12} - c_{23}s_{13}c_{12}e^{i\delta} & -s_{23}c_{12} - c_{23}s_{12}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

$c_{ij} \equiv \cos \theta_{ij}, \quad s_{ij} \equiv \sin \theta_{ij} \quad (\theta_{ij}: i, j \text{ 世代間の混合角})$

3.3 $B + L$ の破れとスファレロン過程

レプトジェネシスでは、バリオン数 B 、レプトン数 L の 2 つが非常に重要な量となる。ここでは、これらの量を理論の対称性に付随するチャージと見なし、 $B + L \neq 0$, $B - L = 0$ となることを見る。尚、標準模型粒子に対して、 B, L は表 1 のように割り当てられる。

まず、 $U(1)$ ゲージ相互作用をする無質量のフェルミオン ψ に対するラグランジアンを考える:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (3.15)$$

これは局所 $U(1)$ ゲージ変換の下で不変であり、さらに大局的なカイラル変換

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\gamma_5\phi}\psi(x) \quad (3.16)$$

の下でも不変である。この対称性に付随する保存カレントは次のように表される：

$$j_5^\mu = \bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\psi \quad (3.17)$$

しかし、これは tree レベルでは保存するものの 1 ループレベルでは保存しない。そして、対応するチャージはこのような可換ゲージ場に対しては消えてしまう。

一方で、非可換ゲージ場に対しては、チャージが零でなくなる。次は、フェルミオンの $SU(2)$ ゲージ相互作用に関するラグランジアンに注目する：

$$\mathcal{L} = \sum_{\text{doublets}} \bar{\psi}_L^i \gamma^\mu (\partial_\mu - ig\tau^A W_\mu^A) \psi_L^i \quad (3.18)$$

ここで、 g は $SU(2)$ ゲージ結合定数、 τ^A は $SU(2)$ の生成子、 W_μ^A は $SU(2)$ ゲージ場を表す。また、和はクォーク 2 重項とレプトン 2 重項 $\{\psi_L^i\} = \{q_L^{a,\beta}, \ell_L^\alpha\}$ に関してとっている。 a はカラー、 α, β は世代を表す。そして、これらの場はそれぞれに対する大局的な $U(1)$ 変換

$$\psi_L^i(x) \rightarrow e^{i\phi}\psi_L^i(x) \quad (3.19)$$

の下で不変で、その対称性に付随する保存カレントが存在する：

$$j_\mu^i = \bar{\psi}_L^i \gamma_\mu \psi_L^i \quad (3.20)$$

このようなカレントの形を用いて、一般に、標準模型におけるバリオン数、レプトン数カレントは次のように表される：

$$j_\mu^B = \frac{1}{3} \sum_{\text{generations}} (\bar{q}_{iL}\gamma_\mu q_{iL} + \bar{u}_{iR}\gamma_\mu u_{iR} + \bar{d}_{iR}\gamma_\mu d_{iR}) \quad (3.21)$$

$$j_\mu^L = \sum_{\text{generations}} (\bar{\ell}_{iL}\gamma_\mu \ell_{iL} + \bar{e}_{iR}\gamma_\mu e_{iR}) \quad (3.22)$$

これらのカレントは古典的には保存するが、量子異常により次のように破れる：

$$\partial^\mu j_\mu^B = \partial^\mu j_\mu^L = \frac{3}{32\pi} (g^2 \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} W_{\mu\nu}^a W_{\rho\sigma}^a - g'^2 \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} B_{\mu\nu} B_{\rho\sigma}) \quad (3.23)$$

つまり、バリオン数 B とレプトン数 L が別々に破れることになる。各辺を、時間に関して $[t_i, t_f]$ 、空間に関しては全空間で積分すると、

$$\begin{aligned} B(t_f) - B(t_i) &= L(t_f) - L(t_i) = 3(N_{\text{cs}}(t_f) - N_{\text{cs}}(t_i)) \\ \Leftrightarrow \Delta B &= \Delta L = 3\Delta N_{\text{cs}} \end{aligned} \quad (3.24)$$

を得る。ここで、

$$N_{\text{CS}} = \frac{1}{32\pi} \int d^3x (g^2 \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} W_{\mu\nu}^a W_{\rho\sigma}^a - g'^2 \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} B_{\mu\nu} B_{\rho\sigma}) \quad (3.25)$$

とした。これは、Chern-Simons 数と呼ばれる位相幾何学的な量で、整数値をとる。従って、 $\Delta N_{\text{CS}} = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ である。一般に、非可換ゲージ理論では無限に多くの縮退した真空が存在し、それぞれが異なる N_{CS} を持つ (図 1)。(3.24) は、それらの真空を遷移する際に、対応する N_{CS} の変化に対して B, L が 3 を単位として変化することを意味する。また、

$$\Delta(B - L) = 0, \quad \Delta(B + L) = 6\Delta N_{\text{CS}} \quad (3.26)$$

であることから、 $B - L$ は保存し、一方で $B + L$ は保存しないことが分かる。

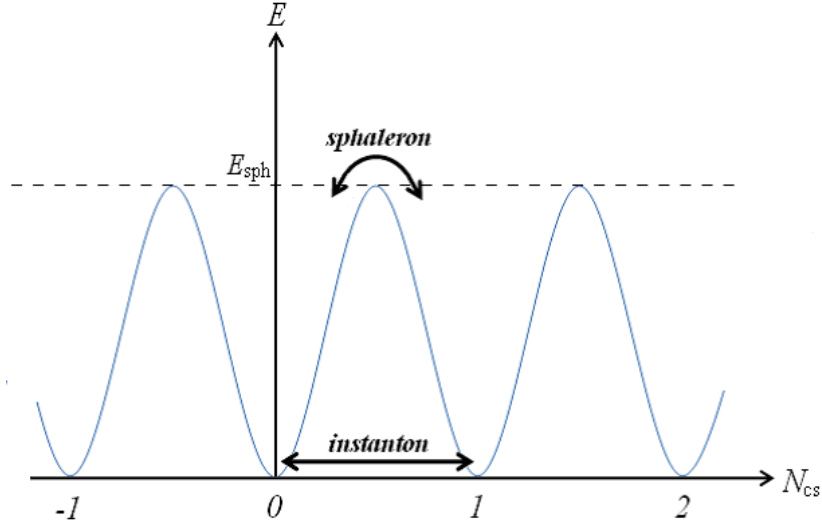


図 1: N_{CS} でラベルされた異なる真空間の遷移。

N_{CS} の変化が起こる割合は、対応する相互作用が起こる状況によって異なる。 $T = 0$ における $B + L$ の破れを与えるゲージ場の配位はトンネル効果を起こす真空の配位に対応し、インスタントンと呼ばれる。このような遷移が起こる確率は次のように与えられる [9] :

$$\Gamma_{\text{ins}} \sim e^{-4\pi/\alpha_W} \sim \mathcal{O}(10^{-165}), \quad \alpha_W = \frac{g^2}{4\pi}. \quad (3.27)$$

つまり、 $T = 0$ においては、ここで述べたようなバリオン数を破る過程はほとんど起こらない。

一方、図1にあるようなポテンシャルで隔てられた真空間の遷移は、トンネル効果だけでなく熱的な揺らぎによる遷移も考えられる。実際に、有限温度においてインスタントンに対応する場の配位として、スファレロンと呼ばれるものが見つかっている[3]。今考えているレプトジェネシスにおける $B+L$ の破れは、電弱相転移時よりも遙かに上の温度で起こるものである。この有限温度での場の配位はスファレロンと呼ばれる。 $T=0$ の場合のインスタントンが真空状態に対応していたのに対して、スファレロンは図1のようなポテンシャルの頂上に対応する。初期宇宙のように非常に高温な状況であれば、このような過程が頻繁に起こる。その確率は、電弱相転移の前後で次のように与えられる[10]：

$$\Gamma_{\text{sph}}^{\text{b}} \propto e^{-E_{\text{sph}}/T} \quad (\text{非対称相}) \quad (3.28)$$

$$\Gamma_{\text{sph}}^{\text{s}} \propto (\alpha_W T)^4 \quad (\text{対称相}) \quad (3.29)$$

ここで、 $E_{\text{sph}} = 2Bm_W/\alpha_W$ は $T=0$ におけるポテンシャル障壁の高さであり、 $1.5 \lesssim B \lesssim 2.75$ は ϕ の質量により異なる。

レプトジェネシスでは、右巻きニュートリノの崩壊により生成された L が $B+L$ を破る過程で B に転換されることが重要である。 $T \gg m_W$ で $B+L$ を破るゲージ場の配位が頻繁に生じ、そのレートが

$$\Gamma \simeq 250\alpha_W^5 T \quad (3.30)$$

で与えられる。これは、 $100\text{GeV} \lesssim T \lesssim 10^{12}\text{GeV}$ で $B+L$ を破る過程が平衡状態にあることを意味する[11]。

3.4 B と $B-L$ の関係

ここでは、 B と $B-L$ が標準模型の相互作用に対する化学平衡条件によって関係付けられるのを見る。この関係により、後に Boltzmann 方程式から $B-L$ を得ることで、このシナリオで得られる B の大きさを得ることができる。

相対論的な粒子 i の気体に関する粒子、反粒子数密度の非対称は次のように表される：

$$n_i - \bar{n}_i = \frac{gT^3}{6} \begin{cases} \beta\mu_i + \mathcal{O}((\beta\mu_i)^3) & (\text{フェルミオン}) \\ 2\beta\mu_i + \mathcal{O}((\beta\mu_i)^3) & (\text{ボゾン}) \end{cases} \quad (3.31)$$

ここで、 μ_i は粒子 i の化学ポテンシャル、 $\beta = T^{-1}$ である。以下では、 $\beta\mu_i \ll 1$ として考えていく：

$$n_i - \bar{n}_i = \begin{cases} \frac{gT^2\mu_i}{6} & (\text{フェルミオン}) \\ \frac{gT^2\mu_i}{3} & (\text{ボゾン}) \end{cases} \quad (3.32)$$

化学ポテンシャル	粒子
μ_{q_i}	quark doublets
μ_{u_i}	up-type quarks
μ_{d_i}	down-type quarks
μ_{ℓ_i}	lepton doublets
μ_{e_i}	charged leptons
μ_H	Higgs doublet

表 2: 化学ポテンシャルの notation。 $i = 1, 2, 3$ は世代を表し、一般にはそれぞれに対する化学ポテンシャルは異なる。

この関係から、バリオン数密度 $n_{\Delta B} \equiv g_B T^2/6$ とレプトン数密度 $n_{\Delta L_i} \equiv g_{L_i} T^2/6$ を通して、バリオン数とレプトン数はそれぞれ関連する粒子の化学ポテンシャルを用いて次のように表される：

$$B = \sum_i (2\mu_{q_i} + \mu_{u_i} + \mu_{d_i}), \quad L = \sum_i L_i; \quad L_i = 2\mu_{\ell_i} + \mu_{e_i} \quad (3.33)$$

ただし、化学ポテンシャルの notation は表 2 に従う。

次に、平衡条件から、表 2 で表した化学ポテンシャルが全て 1 つの化学ポテンシャルで表されるのを見る。初期宇宙において、標準模型の相互作用が十分に速く熱平衡にある場合は、相互作用する前後の粒子のもつ化学ポテンシャルが等しいという制限が与えられる。特に、いまはバリオン数とレプトン数に注目しているので、クォーク、レプトン、ヒッグスポソンのみが関係する相互作用を考える。

$SU(2)$ インスタントン過程が導く有効相互作用

$$O_{B+L} = \prod_i (q_i L q_i L q_i L \ell_i L) \quad (3.34)$$

の化学平衡より、次の関係が得られる：

$$\sum_i (3\mu_{q_i} + \mu_{\ell_i}) = 0 \quad (3.35)$$

また、それと同様に、QCD インスタントン過程 [12] が導く有効相互作用

$$O_A = \prod_i (q_i L q_i L u_{iR}^c d_{iR}^c) \quad (3.36)$$

の化学平衡より、次の関係が得られる：

$$\sum_i (2\mu_{q_i} - \mu_{u_i} - \mu_{d_i}) = 0 \quad (3.37)$$

3つ目の条件として、どのような温度においても全ハイパーチャージの neutrality から次の関係が成り立つ：

$$\sum_i (\mu_{q_i} + 2\mu_{u_i} - \mu_{d_i} - \mu_{\ell_i} - \mu_{e_i} + \frac{2}{3}\mu_H) = 0 \quad (3.38)$$

最後に、湯川相互作用に関連して、次のように右巻き、左巻きフェルミオンの化学ポテンシャルの間に3つの関係が成り立つ：

$$\mu_{q_i} - \mu_H - \mu_{d_j} = 0, \quad \mu_{q_i} + \mu_H - \mu_{u_j} = 0, \quad \mu_{\ell_i} - \mu_H - \mu_{e_j} = 0 \quad (3.39)$$

ここで、 $i, j = 1, 2, 3$ は任意にとれる。特に全ての湯川相互作用が平衡な場合、それぞれの化学ポテンシャルは世代に依らない：

$$\begin{aligned} \mu_{q_i} &\rightarrow \mu_q, & \mu_{u_i} &\rightarrow \mu_u, & \mu_{d_i} &\rightarrow \mu_d, \\ \mu_{\ell_i} &\rightarrow \mu_\ell, & \mu_{e_i} &\rightarrow \mu_e & (i = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (3.40)$$

すると、(3.35)~(3.39) より、全ての粒子の化学ポテンシャルは一種類の化学ポテンシャルで表すことができる：

$$\mu_e = \frac{3}{7}\mu_\ell, \quad \mu_d = -\frac{19}{21}\mu_\ell, \quad \mu_u = \frac{5}{21}\mu_\ell, \quad \mu_q = -\frac{1}{3}\mu_\ell, \quad \mu_H = \frac{51}{7}\mu_\ell \quad (3.41)$$

よって、(3.33) は

$$B = -4\mu_\ell, \quad L = \frac{51}{7}\mu_\ell \quad (3.42)$$

となり、最終的に次のような関係が得られる：

$$B = \frac{28}{79}(B - L) = \frac{84}{79}\left(\frac{B}{3} - L_i\right) \quad (3.43)$$

$B - L$ カレントは保存するため、この表式から、レプトジェネシス完了時の $B - L$ の大きさが現在の宇宙の B の大きさが決まることが分かる。

3.5 N_1 の崩壊における CP 非対称

次に、このシナリオにおける CP 非対称の源を考える。

標準模型における CP 非対称の大きさは、バリオン数生成の条件を満たすには小さすぎることが分かっている [13]。今考えているシナリオでは、まず新たに模型に加えた N_1 が逆崩壊や散乱で生成され (図 2)、温度が下がって非平衡下で崩壊することで CP 非対称が生じ、それによって Sakharov の 3 条件 (2) (3) が満たされる。その CP 非対称の度合いは次のように定義される：

$$\epsilon_{\alpha\alpha} \equiv \frac{\Gamma(N_1 \rightarrow \phi\ell_\alpha) - \Gamma(N_1 \rightarrow \bar{\phi}\bar{\ell}_\alpha)}{\Gamma(N_1 \rightarrow \phi\ell) + \Gamma(N_1 \rightarrow \bar{\phi}\bar{\ell})} \quad (3.44)$$

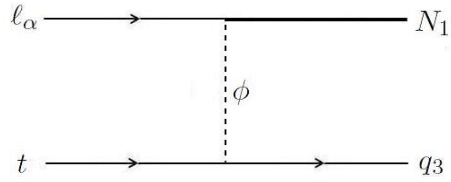


図 2: N_1 を生成する散乱過程の例。図 3 で時間の流れを右から左として見たものが逆崩壊を表す。

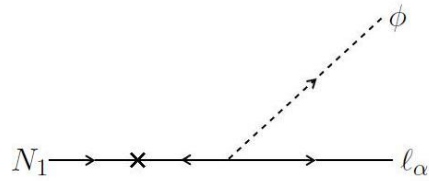


図 3: N_1 の 2 体崩壊の tree ダイアグラム。 N_1 の 2 体崩壊モードは $N_1 \rightarrow \phi l_\alpha, \bar{\phi} \bar{l}_\alpha$ しかない。

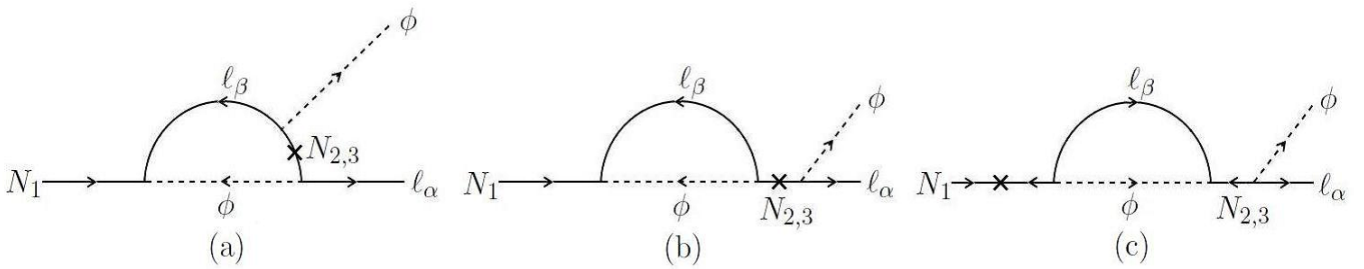


図 4: N_1 崩壊の 1 ループダイアグラム。 tree ダイアグラムとこれらの干渉項から CP 非対称が生じる。

これは、崩壊過程 $N_1 \rightarrow \phi\ell_\alpha$ に対する崩壊幅とその過程を CP 変換した過程に対する崩壊幅の差を取ることで、 N_1 崩壊に関して生成される CP 非対称の大きさを表している（ただし、全崩壊幅で規格化した）。最終的に生成されるバリオン数の大きさは、この量に依存することになる。

N_1 の崩壊に関して tree レベルでは $\Gamma(N_1 \rightarrow \phi\ell_\alpha) = \Gamma(N_1 \rightarrow \bar{\phi}\bar{\ell}_\alpha)$ であるため、(3.44) の表式から、 CP 非対称は生じない。非対称が生じるのは、図 3 の tree diagram と図 4 の 1-loop diagram との干渉項からである。 N_1 崩壊による CP 非対称の大きさは、ニュートリノセクターのパラメータに関して次のように表される：

$$\epsilon_{\alpha\alpha} = \frac{1}{8\pi} \frac{1}{(\lambda^\dagger\lambda)_{11}} \sum_{j=2,3} \text{Im}\{\lambda_{\alpha 1}^* (\lambda^\dagger\lambda)_{1j} \lambda_{\alpha j}\} g(M_j^2/M_1^2) \quad (3.45)$$

$$g(x) = \sqrt{x} \left[\frac{1}{1-x} + 1 - (1+x) \ln\left(\frac{1+x}{x}\right) \right] \quad (3.46)$$

3.6 バリオン非対称

レプトジェネシスで生成されるバリオン非対称を得るため、 $N_1, B-L(B/3-L_\alpha)$ に対する Boltzmann 方程式を考える。ただし、レプトン非対称を生成するのは、右巻きニュートリノのうち最も軽い N_1 のみであるとし、 N_1 が関与する相互作用のみを考慮する。そして、最後にその解を CP 非対称の大きさ $\epsilon_{\alpha\alpha}$ を用いて表す parametrization を示す。尚、ここでの Boltzmann 方程式の導出は [14] に従う。

この節では、Boltzmann 方程式の記述を簡略化するため、付録 A にまとめられているような物理量の notation を用いる。それらの notation を用いて表した Boltzmann 方程式の例は、付録 B で導出されている。

以下では、次に挙げる条件の下で Boltzmann 方程式に関与する過程を考える：

1. $M_i (i = 1, 2, 3)$ が階層的である： $M_1 \ll M_{2,3}$.
2. N_1 は平衡状態で生成され、 $N_{2,3}$ の生成は無視される。
3. N_1 に関する相互作用で生成されるレプトンフレーバーは単一である。

これらに従い、具体的には次のような過程を考慮して Boltzmann 方程式を立てる：

- N_1 の 2 体、3 体崩壊・逆崩壊 [$\mathcal{O}(\lambda^2, \lambda^2 h_i^2)$]
- N_1 が仲介する $2 \leftrightarrow 2$ 散乱 [$\mathcal{O}(\lambda^4)$]
- ϕ が仲介し外線に N_1 を含む $2 \leftrightarrow 2$ 散乱 [$\mathcal{O}(\lambda^2 h_i^2, \lambda^2 g^2)$]
- N_1, ϕ が仲介する $2 \leftrightarrow 3$ の散乱 [$\mathcal{O}(\lambda^4 h_i^2, \lambda^4 g^2)$]

ここで、[] 内は反応率の結合定数に関するオーダーを表している。 λ はニュートリノ湯川結合、 h_t はトップ湯川結合、 g はゲージ結合を表す。以下では、このオーダーに応じて場合分けして Boltzmann 方程式に寄与する過程を考えていく。

Y_{Δ_α} に対する Boltzmann 方程式を考えるため、その変化に寄与する反応を考える。そのために、まずは $Y_L^{\alpha\alpha}$ の時間発展を考える。それは、反応率の結合定数に関するオーダー毎に、以下のようにして3つに分けられる：

$$\dot{Y}_L^{\alpha\alpha} = (\dot{Y}_L^{\alpha\alpha})_1 + (\dot{Y}_L^{\alpha\alpha})_2 + (\dot{Y}_L^{\alpha\alpha})_{\text{sph}} \quad (3.47)$$

ここで、第1項は、 $\mathcal{O}(\lambda^2, \lambda^4)$ の過程からの寄与を表す。そして、第2項は、 $\mathcal{O}(\lambda^2 y_t^2, \lambda^4 y_t^2)$ 、 $\mathcal{O}(\lambda^2 g^2, \lambda^4 g^2)$ の過程からの寄与を表す。最後に、第3項はスファレロン過程からの寄与を表す。スファレロン過程では $B/3 - L_\alpha$ が保存されるため、次のような関係が成り立つ：

$$(\dot{Y}_{\Delta L_\alpha})_{\text{sph}} = \frac{1}{3} (\dot{Y}_{\Delta B})_{\text{sph}} \quad (3.48)$$

そこで、いま、(3.47) と、それを \bar{L} に関して表した式

$$\dot{Y}_{\bar{L}}^{\alpha\alpha} = (\dot{Y}_{\bar{L}}^{\alpha\alpha})_1 + (\dot{Y}_{\bar{L}}^{\alpha\alpha})_2 + (\dot{Y}_{\bar{L}}^{\alpha\alpha})_{\text{sph}} \quad (3.49)$$

との差を取ると、(A.11) を用いて、

$$\begin{aligned} \dot{Y}_{\Delta L_\alpha} &= (\dot{Y}_{\Delta L_\alpha})_1 + (\dot{Y}_{\Delta L_\alpha})_2 + (\dot{Y}_{\Delta L_\alpha})_{\text{sph}} \\ \frac{\dot{Y}_{\Delta B}}{3} - \dot{Y}_{\Delta L_\alpha} &= -(\dot{Y}_{\Delta L_\alpha})_1 - (\dot{Y}_{\Delta L_\alpha})_2 - (\dot{Y}_{\Delta L_\alpha})_{\text{sph}} + \frac{\dot{Y}_{\Delta B}}{3} \\ \dot{Y}_{\Delta_\alpha} &= -(\dot{Y}_{\Delta L_\alpha})_1 - (\dot{Y}_{\Delta L_\alpha})_2 - (\dot{Y}_{\Delta L_\alpha})_{\text{sph}} + \frac{(\dot{Y}_{\Delta B})_{\text{sph}}}{3} \\ \dot{Y}_{\Delta_\alpha} &= -(\dot{Y}_{\Delta L_\alpha})_1 - (\dot{Y}_{\Delta L_\alpha})_2 \end{aligned} \quad (3.50)$$

が得られる。3行目の右辺において、バリオン数を破る過程がスファレロン過程しかないことから $\dot{Y}_{\Delta B} = (\dot{Y}_{\Delta B})_{\text{sph}}$ の関係を用い、最後の行で (3.48) を用いた。

最終的なバリオン非対称は N_1 からの寄与も受けるので、 Y_{N_1} に関する Boltzmann 方程式も考えなければならない。この場合も、上記のレプトンの場合と同様な notation を用いる：

$$\dot{Y}_{N_1} = (\dot{Y}_{N_1})_1 + (\dot{Y}_{N_1})_2 \quad (3.51)$$

ここで、右辺の2項は順に $\mathcal{O}(\lambda^2)$ 、 $\mathcal{O}(\lambda^2 h_t^2, \lambda^2 g^2)$ の過程からの寄与を表す。

以下では、3.6.1節と3.6.2節のそれぞれで、(3.50) と (3.51) のように結合定数のオーダー毎に分け、前者に関しては最後に CP 非対称の生成に関する source 項とレプトン非対称を消す washout 項に分けて Boltzmann 方程式を表す。そして、最後に3.6.3節である条件の下で解いた場合に得られる Y_{Δ_B} の表式を示す。

3.6.1 Y_{N_1} に関する Boltzmann 方程式

初めに、 Y_{N_1} に関する Boltzmann 方程式 (3.51) 右辺の項毎の寄与を考える。

(Y_{N_1})₁ に関する Boltzmann 方程式 [$\mathcal{O}(\lambda^2, \lambda^4)$]

(3.51) 右辺の第一項に寄与するのは、 N_1 の 2 体崩壊と逆崩壊のみである。従って、Boltzmann 方程式は (B.9) と同様に、次のように表される：

$$\begin{aligned}
s(\dot{Y}_{N_1})_1 &= \sum_{\beta} \{ [\ell_{\beta}\phi \leftrightarrow N_1] + [\bar{\ell}_{\beta}\bar{\phi} \leftrightarrow N_1] \} \\
&= - \sum_{\beta} [y_{N_1}(\gamma_{\phi\ell_{\beta}}^{N_1} + \gamma_{\bar{\phi}\bar{\ell}_{\beta}}^{N_1}) - y_{\phi}y_{\ell_{\beta}}\gamma_{N_1}^{\phi\ell_{\beta}} - y_{\bar{\phi}}y_{\bar{\ell}_{\beta}}\gamma_{N_1}^{\bar{\phi}\bar{\ell}_{\beta}}] \\
&\simeq -(y_{N_1} - 1)\gamma_{N_1 \rightarrow 2}
\end{aligned} \tag{3.52}$$

2 行目で (A.9) を用いて具体的に表し、最後に ϕ, ℓ_{β} の数密度を平衡状態のものに近似した。

$$\gamma_{N_1 \rightarrow 2} = \sum_{\beta} (\gamma_{\ell_{\beta}\phi}^{N_1} + \gamma_{\bar{\ell}_{\beta}\bar{\phi}}^{N_1}) \tag{3.53}$$

は N_1 の 2 体崩壊の全崩壊幅を表す。

(Y_{N_1})₂ に関する Boltzmann 方程式 [$\mathcal{O}(h_t^2\lambda^2)$]

(3.51) 右辺の第二項に寄与するのは、3 体崩壊と逆崩壊、外線に N_1 , 中間状態に ϕ を持つ $2 \leftrightarrow 2$ 散乱である：

$$\begin{aligned}
s(\dot{Y}_{N_1})_2 &= \sum_{\beta} \left[\underbrace{[\ell_{\beta}\bar{q}_3t \leftrightarrow N_1] + [\bar{\ell}_{\beta}q_3\bar{t} \leftrightarrow N_1]}_{\text{3 体崩壊}} + \underbrace{\{ [q_3\bar{t} \leftrightarrow N_1\ell_{\beta}] + [\bar{q}_3t \leftrightarrow N_1\bar{\ell}_{\beta}] \}}_{s\text{-channel}} \right. \\
&\quad \left. + \underbrace{[\ell_{\beta}t \leftrightarrow N_1q_3] + [\bar{\ell}_{\beta}\bar{t} \leftrightarrow N_1\bar{q}_3]}_{t\text{-channel}} + \underbrace{[\bar{\ell}_{\beta}q_3 \leftrightarrow N_1t] + [\ell_{\beta}\bar{q}_3 \leftrightarrow N_1\bar{t}]}_{u\text{-channel}} \right]
\end{aligned} \tag{3.54}$$

ここでも、(3.52) と同様にして次のような表式が得られる：

$$s(\dot{Y}_{N_1})_2 = -(y_{N_1} - 1)[\gamma_{N_1 \rightarrow 3} + \gamma_{\text{top}}^{2 \leftrightarrow 2}] \tag{3.55}$$

ただし、

$$\gamma_{N_1 \rightarrow 3} = \sum_{\beta} (\gamma_{\ell_{\beta}\bar{q}_3t}^{N_1} + \gamma_{\bar{\ell}_{\beta}q_3\bar{t}}^{N_1}) \tag{3.56}$$

$$\gamma_{\text{top}}^{2 \leftrightarrow 2} = \sum_{\beta} (\gamma_{q_3\bar{t}}^{N_1\ell_{\beta}} + \gamma_{\bar{q}_3t}^{N_1\bar{\ell}_{\beta}} + \gamma_{\ell_{\beta}t}^{N_1q_3} + \gamma_{\bar{\ell}_{\beta}\bar{t}}^{N_1\bar{q}_3} + \gamma_{\bar{\ell}_{\beta}q_3}^{N_1t} + \gamma_{\ell_{\beta}\bar{q}_3}^{N_1\bar{t}}) \tag{3.57}$$

と置いた。

Y_{N_1} に対する Boltzmann 方程式

最後にゲージ場を外線に持つ $\mathcal{O}(\lambda^2 g^2)$ の寄与を考える：

$$s(\dot{Y}_{N_1})_2^{\text{gauge}} = \sum_{\beta} \{ [A\bar{\phi} \leftrightarrow N_1 \ell_{\beta}] + [A\phi \leftrightarrow N_1 \bar{\ell}_{\beta}] + [A\ell_{\beta} \leftrightarrow N_1 \bar{\phi}] + [A\bar{\ell}_{\beta} \leftrightarrow N_1 \phi] \\ + [\ell_{\beta} \phi \leftrightarrow N_1 A] + [\bar{\ell}_{\beta} \bar{\phi} \leftrightarrow N_1 A] \} \quad (3.58)$$

ここで、 A は $SU(2)$ ゲージボソン $W_i (i = 1, 2, 3)$ または $U(1)$ ゲージボソンを表す。そして、ここでも (3.52) と同様に、

$$s(\dot{Y}_{N_1})_2^{\text{gauge}} = -(y_{N_1} - 1) \gamma_A^{2 \leftrightarrow 2} \quad (3.59)$$

を得る。ただし、

$$\gamma_A^{2 \leftrightarrow 2} = \sum_{\beta} (\gamma_{A\bar{\phi}}^{N_1 \ell_{\beta}} + \gamma_{A\phi}^{N_1 \bar{\ell}_{\beta}} + \gamma_{A\ell_{\beta}}^{N_1 \bar{\phi}} + \gamma_{A\bar{\ell}_{\beta}}^{N_1 \phi} + \gamma_{\ell_{\beta} \phi}^{N_1 A} + \gamma_{\bar{\ell}_{\beta} \bar{\phi}}^{N_1 A}) \quad (3.60)$$

である。

従って、(3.52) , (3.55) , (3.60) より、最終的に Y_{N_1} に対する Boltzmann 方程式 (3.51) は次のように表される：

$$s\dot{Y}_{N_1} = -(y_{N_1} - 1) [\gamma_{N \rightarrow 2} + \gamma_{N_1 \rightarrow 3} + \gamma_{\text{top}}^{2 \leftrightarrow 2} + \gamma_A^{2 \leftrightarrow 2}] \quad (3.61)$$

3.6.2 $Y_{\Delta_{\alpha}}$ に関する Boltzmann 方程式

次に、 $Y_{\Delta_{\alpha}}$ に関する Boltzmann 方程式 (3.50) 右辺の項毎の寄与を考える。

$(Y_{\Delta L_{\alpha}})_1$ に関する Boltzmann 方程式 [$\mathcal{O}(\lambda^4)$]

まず、 $\dot{Y}_L^{\alpha\alpha}$ に対する寄与を考え、後にその類似で $\dot{Y}_L^{\alpha\alpha}$ に対する表式を得て差をとることで、最終的に $(Y_{\Delta L_{\alpha}})_1$ に関する Boltzmann 方程式を得る。

ℓ_{α} が関係する過程の中で、 λ の結合定数のみを持つ、 $\mathcal{O}(\lambda^4)$ までの項に注目する。それらの過程を次のように分類し、以下でそれぞれの寄与を順に考えていく：

$$(\dot{Y}_L^{\alpha\alpha})_1 = (\dot{Y}_L^{\alpha\alpha})_{1 \leftrightarrow 2} + (\dot{Y}_L^{\alpha\alpha})_{2 \leftrightarrow 2}^{N_s} + (\dot{Y}_L^{\alpha\alpha})_{2 \leftrightarrow 2}^{N_t} \quad (3.62)$$

(1) $1 \leftrightarrow 2$ 崩壊・逆崩壊

$$s(\dot{Y}_L^{\alpha\alpha})_{1 \leftrightarrow 2} = [N_1 \leftrightarrow \ell_{\alpha} \phi] \quad (3.63)$$

(2) $2 \leftrightarrow 2$ 散乱 (s -channel、 N_1 が仲介)

$$s(\dot{Y}_L^{\alpha\alpha})_{2\leftrightarrow 2}^{N_s} = \sum_{\beta} [\bar{\ell}_{\beta}\bar{\phi} \leftrightarrow \ell_{\alpha}\phi]' + \sum_{\beta \neq \alpha} [\ell_{\beta}\phi \leftrightarrow \ell_{\alpha}\phi]' \quad (3.64)$$

(3) $2 \leftrightarrow 2$ 散乱 (t, u -channel、 N_1 が仲介)

$$s(\dot{Y}_L^{\alpha\alpha})_{2\leftrightarrow 2}^{N_{t,u}} = \sum_{\beta} \{[\phi\bar{\phi} \leftrightarrow \ell_{\alpha}\bar{\ell}_{\beta}] + (1 + \delta_{\alpha\beta})[\bar{\phi}\bar{\phi} \leftrightarrow \ell_{\alpha}\ell_{\beta}]\} \quad (3.65)$$

ここで、(1), (2) は CP 非対称のソースとなり、(3) は washout にのみ寄与する。(3.64) の右辺にプライムがついているのは、中間状態の N_1 が off-shell であるような場合の寄与のみを含むことを意味する。というのは、中間状態の N_1 が on-shell であるような場合の寄与は既に (1) でカウントしているためである。例えば、(3.64) の右辺第 1 項を具体的に表すと次のようになる：

$$[\bar{\ell}_{\beta}\bar{\phi} \leftrightarrow \ell_{\alpha}\phi]' = y_{\bar{\ell}_{\beta}} y_{\bar{\phi}} \gamma'_{\ell_{\alpha}\phi} \bar{\ell}_{\beta}\bar{\phi} - y_{\ell_{\alpha}} y_{\phi} \gamma'_{\bar{\ell}_{\beta}\bar{\phi}} \ell_{\alpha}\phi \quad (3.66)$$

ここで、

$$\gamma'_{\ell_{\alpha}\phi} \bar{\ell}_{\beta}\bar{\phi} = \gamma_{\ell_{\alpha}\phi} \bar{\ell}_{\beta}\bar{\phi} - \gamma_{N_1}^{N_1} B_{\ell_{\alpha}\phi}^{N_1} \bar{\ell}_{\beta}\bar{\phi} \quad (3.67)$$

$$\gamma'_{\bar{\ell}_{\beta}\bar{\phi}} \ell_{\alpha}\phi = \gamma_{\bar{\ell}_{\beta}\bar{\phi}} \ell_{\alpha}\phi - \gamma_{N_1}^{\ell_{\alpha}\phi} B_{\bar{\ell}_{\beta}\bar{\phi}}^{N_1} \ell_{\alpha}\phi \quad (3.68)$$

は off-shell 部分を表し、右辺の $B_{\ell_{\alpha}\phi}^{N_1}$ ($B_{\bar{\ell}_{\beta}\bar{\phi}}^{N_1}$) は N_1 から $\ell_{\alpha}\phi$ ($\bar{\ell}_{\beta}\bar{\phi}$) への分岐比を表す。つまり、 γ' を全体 (第 1 項) から on-shell 部分 (第 2 項) を差し引いたものとして表現している。(3.64) の第 2 項についても、具体的には (3.66) と同様に表される。

いま、関係するレプトンは 2 重項 ℓ のみなので、(A.10) より $Y_L^{\alpha\alpha} = Y_{\ell_{\alpha}}$ である。従って、(1), (2) からの寄与を全て y_a, γ_B^A, B_B^A で書き下すと、次のようにまとめることができる：

$$\begin{aligned} s(\dot{Y}_L^{\alpha\alpha})_{1\leftrightarrow 2} + s(\dot{Y}_L^{\alpha\alpha})_{2\leftrightarrow 2}^{N_s} &= s(\dot{Y}_{\ell_{\alpha}})_{1\leftrightarrow 2} + s(\dot{Y}_{\ell_{\alpha}})_{2\leftrightarrow 2}^{N_s} \\ &= \gamma_{\ell_{\alpha}\phi}^{N_1} \left(y_{N_1} - \sum_{\beta} [y_{\phi} y_{\ell_{\beta}} B_{\bar{\ell}_{\beta}\bar{\phi}}^{N_1} + y_{\bar{\phi}} y_{\bar{\ell}_{\beta}} B_{\ell_{\beta}\phi}^{N_1}] \right) \\ &\quad - y_{\phi} y_{\ell_{\alpha}} \gamma_{N_1}^{\ell_{\alpha}\phi} [1 - \sum_{\beta} (B_{\ell_{\beta}\phi}^{N_1} + B_{\bar{\ell}_{\beta}\bar{\phi}}^{N_1})] \\ &\quad - y_{\phi} y_{\ell_{\alpha}} \sum_{\beta} [\gamma_{\ell_{\beta}\phi}^{\ell_{\alpha}\phi} + \gamma_{\bar{\ell}_{\beta}\bar{\phi}}^{\ell_{\alpha}\phi}] + \sum_{\beta} [y_{\phi} y_{\ell_{\beta}} \gamma_{\ell_{\alpha}\phi}^{\ell_{\beta}\phi} + y_{\bar{\phi}} y_{\bar{\ell}_{\beta}} \gamma_{\ell_{\alpha}\phi}^{\bar{\ell}_{\beta}\bar{\phi}}] \end{aligned} \quad (3.69)$$

$$\begin{aligned} &= \gamma_{\ell_{\alpha}\phi}^{N_1} \left(y_{N_1} - \sum_{\beta} [y_{\phi} y_{\ell_{\beta}} B_{\bar{\ell}_{\beta}\bar{\phi}}^{N_1} + y_{\bar{\phi}} y_{\bar{\ell}_{\beta}} B_{\ell_{\beta}\phi}^{N_1}] \right) \\ &\quad - y_{\phi} y_{\ell_{\alpha}} \sum_{\beta} [\gamma_{\ell_{\beta}\phi}^{\ell_{\alpha}\phi} + \gamma_{\bar{\ell}_{\beta}\bar{\phi}}^{\ell_{\alpha}\phi}] + \sum_{\beta} [y_{\phi} y_{\ell_{\beta}} \gamma_{\ell_{\alpha}\phi}^{\ell_{\beta}\phi} + y_{\bar{\phi}} y_{\bar{\ell}_{\beta}} \gamma_{\ell_{\alpha}\phi}^{\bar{\ell}_{\beta}\bar{\phi}}] \end{aligned} \quad (3.70)$$

今考えているオーダーでは $\sum_{\beta} (B_{\ell_{\beta}\phi}^{N_1} + B_{\bar{\ell}_{\beta}\bar{\phi}}^{N_1}) = 1$ なので、最後の等式でこれを用いた。同様にして、 $(Y_{\bar{\ell}_{\alpha}})_1$ に関する寄与として次のような表式を得る：

$$\begin{aligned}
s(\dot{Y}_{\bar{L}}^{\alpha\alpha})_{1\leftrightarrow 2} + s(\dot{Y}_{\bar{L}}^{\alpha\alpha})_{2\leftrightarrow 2}^{N_s} &= s(\dot{Y}_{\bar{\ell}_{\alpha}})_{1\leftrightarrow 2} + s(\dot{Y}_{\bar{\ell}_{\alpha}})_{2\leftrightarrow 2}^{N_s} \\
&= \gamma_{\bar{\ell}_{\alpha}\bar{\phi}}^{N_1} \left(y_{N_1} - \sum_{\beta} [y_{\bar{\phi}} y_{\bar{\ell}_{\beta}} B_{\ell_{\beta}\phi}^{N_1} + y_{\phi} y_{\ell_{\beta}} B_{\bar{\ell}_{\beta}\bar{\phi}}^{N_1}] \right) \\
&\quad - y_{\bar{\phi}} y_{\bar{\ell}_{\alpha}} \gamma_{N_1}^{\bar{\ell}_{\alpha}\bar{\phi}} [1 - \sum_{\beta} (B_{\bar{\ell}_{\beta}\bar{\phi}}^{N_1} + B_{\ell_{\beta}\phi}^{N_1})] \\
&\quad - y_{\bar{\phi}} y_{\bar{\ell}_{\alpha}} \sum_{\beta} [\gamma_{\bar{\ell}_{\beta}\bar{\phi}}^{\bar{\ell}_{\alpha}\bar{\phi}} + \gamma_{\ell_{\beta}\phi}^{\bar{\ell}_{\alpha}\bar{\phi}}] + \sum_{\beta} [y_{\bar{\phi}} y_{\bar{\ell}_{\beta}} \gamma_{\bar{\ell}_{\alpha}\bar{\phi}}^{\bar{\ell}_{\beta}\bar{\phi}} + y_{\phi} y_{\ell_{\beta}} \gamma_{\bar{\ell}_{\alpha}\bar{\phi}}^{\ell_{\beta}\phi}]
\end{aligned} \tag{3.71}$$

$$\begin{aligned}
&= \gamma_{\bar{\ell}_{\alpha}\bar{\phi}}^{N_1} \left(y_{N_1} - \sum_{\beta} [y_{\bar{\phi}} y_{\bar{\ell}_{\beta}} B_{\ell_{\beta}\phi}^{N_1} + y_{\phi} y_{\ell_{\beta}} B_{\bar{\ell}_{\beta}\bar{\phi}}^{N_1}] \right) \\
&\quad - y_{\bar{\phi}} y_{\bar{\ell}_{\alpha}} \sum_{\beta} [\gamma_{\bar{\ell}_{\beta}\bar{\phi}}^{\bar{\ell}_{\alpha}\bar{\phi}} + \gamma_{\ell_{\beta}\phi}^{\bar{\ell}_{\alpha}\bar{\phi}}] + \sum_{\beta} [y_{\bar{\phi}} y_{\bar{\ell}_{\beta}} \gamma_{\bar{\ell}_{\alpha}\bar{\phi}}^{\bar{\ell}_{\beta}\bar{\phi}} + y_{\phi} y_{\ell_{\beta}} \gamma_{\bar{\ell}_{\alpha}\bar{\phi}}^{\ell_{\beta}\phi}]
\end{aligned} \tag{3.72}$$

最後に、(3.70) と (3.72) の差をとり、(3) の (3.65) からの寄与を併せてまとめると、 $(Y_{\Delta L_{\alpha}})_1$ に関する Boltzmann 方程式は次のように表される：

$$\begin{aligned}
s(\dot{Y}_{\Delta L_{\alpha}})_1 &= (y_{N_1} - 1) \Delta \gamma_{\ell_{\alpha}\phi}^{N_1} - (\Delta y_{\ell_{\alpha}} + \Delta y_{\phi}) \sum_{\beta} (\gamma_{\ell_{\beta}\phi}^{\ell_{\alpha}\phi} + \gamma_{\bar{\ell}_{\beta}\bar{\phi}}^{\ell_{\alpha}\phi}) \\
&\quad + \sum_{\beta} (\Delta y_{\ell_{\beta}} + \Delta y_{\phi}) (\gamma_{\ell_{\alpha}\phi}^{\ell_{\beta}\phi} + \gamma_{\bar{\ell}_{\alpha}\bar{\phi}}^{\ell_{\beta}\phi}) + (\dot{Y}_{\Delta L_{\alpha}})_{2\leftrightarrow 2}^{w, N_t, u}
\end{aligned} \tag{3.73}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
s(\dot{Y}_{\Delta L_{\alpha}})_{2\leftrightarrow 2}^{w, N_t, u} &= - \sum_{\beta} [(1 + \delta_{\alpha\beta}) (\Delta y_{\ell_{\alpha}} + \Delta y_{\ell_{\beta}} + 2\Delta y_{\phi}) \gamma_{\bar{\phi}\bar{\phi}}^{\ell_{\alpha}\ell_{\beta}} \\
&\quad + (\Delta y_{\ell_{\alpha}} - \Delta y_{\ell_{\beta}}) \gamma_{\bar{\phi}\bar{\phi}}^{\ell_{\alpha}\bar{\ell}_{\beta}}]
\end{aligned} \tag{3.74}$$

とした。

$(Y_{\Delta L_{\alpha}})_2$ に関する Boltzmann 方程式 $[\mathcal{O}(\lambda^4 h_t^2)]$

$(Y_{\Delta L_{\alpha}})_1$ の場合と同様に、まず $\dot{Y}_L^{\alpha\alpha}$ に対する寄与を考える。on-shell 部分を 2 重にカウントしないように注意すると、寄与する過程は次の 3 つに分けられる：

$$(\dot{Y}_L^{\alpha\alpha})_2 = (\dot{Y}_L^{\alpha\alpha})_{2\leftrightarrow 3}^{1\leftrightarrow 3} + (\dot{Y}_L^{\alpha\alpha})_{2\leftrightarrow 3}^{\text{sub, off}} + (\dot{Y}_L^{\alpha\alpha})_{2\leftrightarrow 3}^{\text{sub, } N_t} \tag{3.75}$$

(1) N_1 の 3 体崩壊・逆崩壊、外線に N_1 , 中間状態に ϕ を持つ $2 \leftrightarrow 2$ 散乱 [$\mathcal{O}(\lambda^2 h_t^2)$]

$$s(\dot{Y}_L^{\alpha\alpha})_{2 \leftrightarrow 3} = \underbrace{[N_1 \leftrightarrow \ell_\alpha \bar{q}_3 t]}_{(a)} + \underbrace{[q_3 \bar{t} \leftrightarrow N_1 \ell_\alpha]}_{(b)} + \underbrace{[N_1 \bar{t} \leftrightarrow \bar{q}_3 \ell_\alpha]}_{(c)} + \underbrace{[N_1 q_3 \leftrightarrow t \ell_\alpha]}_{(d)} \quad (3.76)$$

(2) $2 \leftrightarrow 3$ 散乱で (a) ~ (d) の部分を含む過程 ([] の右下の文字がどれを含むかを表す) の off-shell 部分からの寄与 [$\mathcal{O}(\lambda^4 h_t^2)$]

$$\begin{aligned} s(\dot{Y}_L^{\alpha\alpha})_{2 \leftrightarrow 3}^{\text{sub,off}} &= \sum_{\beta \neq \alpha} \{ [\ell_\beta \phi \leftrightarrow \bar{q}_3 t \ell_\alpha]'_{(a)} + [\ell_\beta \phi q_3 \leftrightarrow t \ell_\alpha]'_{(d)} + [\ell_\beta \phi \bar{t} \leftrightarrow \bar{q}_3 \ell_\alpha]'_{(c)} \\ &\quad + [\ell_\beta \bar{q}_3 t \leftrightarrow \ell_\alpha \phi]'_{(a)} + [\ell_\beta \bar{q}_3 \leftrightarrow \ell_\alpha \phi t]'_{(c)} + [\ell_\beta t \leftrightarrow \ell_\alpha \phi q_3]'_{(d)} \} \\ &+ \sum_{\beta} \{ [\bar{\ell}_\beta \bar{\phi} \leftrightarrow \ell_\alpha \bar{q}_3 t]'_{(a)} + [\bar{\ell}_\beta \bar{\phi} q_3 \leftrightarrow t \ell_\alpha]'_{(d)} + [\bar{\ell}_\beta \bar{\phi} \bar{t} \leftrightarrow \bar{q}_3 \ell_\alpha]'_{(c)} + [\bar{\ell}_\beta q_3 \bar{t} \leftrightarrow \ell_\alpha \phi]'_{(b)} \\ &\quad + [\bar{\ell}_\beta q_3 \leftrightarrow \ell_\alpha \phi t]'_{(d)} + [\bar{\ell}_\beta \bar{t} \leftrightarrow \ell_\alpha \phi \bar{q}_3]'_{(c)} + [\bar{q}_3 t \leftrightarrow \ell_\alpha \phi \bar{\ell}_\beta]'_{(b)} + [q_3 \bar{t} \leftrightarrow \ell_\alpha \phi \bar{\ell}_\beta]'_{(b)} \} \\ &+ \sum_{\beta} (1 + \delta_{\alpha\beta}) [q_3 \bar{t} \leftrightarrow \ell_\alpha \phi \bar{\ell}_\beta]'_{(b)} \end{aligned} \quad (3.77)$$

(3) $2 \leftrightarrow 3$ 散乱で N_1 を中間状態とする t -channel を含む過程からの寄与 [$\mathcal{O}(\lambda^4 h_t^2)$]

$$\begin{aligned} s(\dot{Y}_L^{\alpha\alpha})_{2 \leftrightarrow 3}^{\text{sub}, N_t} &= \sum_{\beta \neq \alpha} \{ [\ell_\beta q_3 \bar{t} \leftrightarrow \ell_\alpha \bar{\phi}] + [\ell_\beta \bar{\phi} \leftrightarrow \ell_\alpha q_3 \bar{t}] + [\ell_\beta \bar{\phi} t \leftrightarrow \ell_\alpha q_3] + [\ell_\beta \bar{\phi} \bar{q}_3 \leftrightarrow \ell_\alpha \bar{t}] \} \\ &+ \sum_{\beta} \{ [q_3 \bar{t} \bar{\phi} \leftrightarrow \bar{\ell}_\beta \ell_\alpha] + [\bar{q}_3 t \bar{\phi} \leftrightarrow \bar{\ell}_\beta \ell_\alpha] + [\bar{q}_3 \bar{\phi} \leftrightarrow \bar{\ell}_\beta \ell_\alpha \bar{t}] + [t \bar{\phi} \leftrightarrow \bar{\ell}_\beta \ell_\alpha \bar{q}_3] \} \\ &+ \sum_{\beta} (1 + \delta_{\alpha\beta}) \{ [\bar{t} \bar{\phi} \leftrightarrow \ell_\alpha \bar{q}_3 \bar{\ell}_\beta] + [q_3 \bar{t} \bar{\phi} \leftrightarrow \ell_\alpha \bar{\ell}_\beta] + [q_3 \bar{\phi} \leftrightarrow \ell_\alpha t \bar{\ell}_\beta] \} \end{aligned} \quad (3.78)$$

ここで、逆崩壊によって on-shell な N_1 が生成された後、再び崩壊する前に他の粒子と散乱する可能性がある。例えば、 $\ell_\beta \phi \bar{t} \leftrightarrow \bar{q}_3 \ell_\alpha$ ((3.77) 第3項, 図5) は、まず $\ell_\alpha \phi \rightarrow N_1$ により on-shell な N_1 が生成され、崩壊せずに $N_1 \bar{t} \leftrightarrow \ell_\beta \bar{q}_3$ で散乱される。可能な N_1 崩壊後の状態を A 、その他の任意の状態を X, Y とすると、このような過程は一般に

$$AX \rightarrow Y \quad (3.79)$$

と表される。そして、 $P_Y^{N_1 X}$ を、 N_1 が X と散乱して Y となる確率とすると、(3.79) の過程に対する反応率の on-shell 部分は次のように表される：

$$\gamma_Y^{\text{on}AX} = \gamma_{N_1}^A P_Y^{N_1 X} \quad (3.80)$$

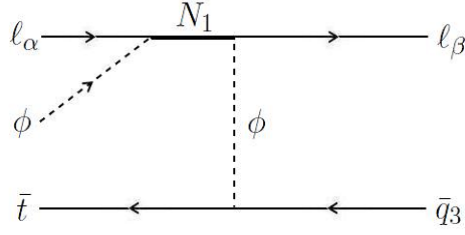


図 5: on-shell な N_1 が生成された後、崩壊する前に散乱される例 ((3.77) 第 3 項)。

また、生成された on-shell な N_1 が崩壊する過程は一般に

$$A \rightarrow B \quad \text{or} \quad X \rightarrow BY \quad (3.81)$$

と表される。ここで、 B は A と異なる可能な N_1 崩壊後の状態を表す。このような過程に対して、反応率の on-shell 部分は次のように表される：

$$\gamma_B^{\text{on}A} = \gamma_{N_1}^A P_B^{N_1}, \quad \gamma_{BY}^{\text{on}X} = \gamma_{N_1 Y}^X P_B^{N_1} \quad (3.82)$$

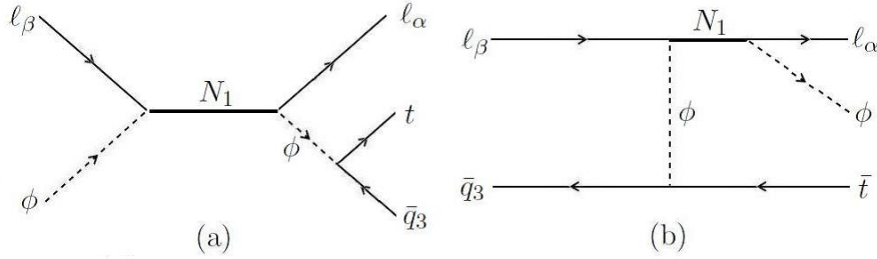


図 6: on-shell な N_1 が生成された後、崩壊で消える過程の例 ((3.77)(a) 第 1 項, (b) 第 5 項)。

ここで定義してきた確率は、分岐比と同様に規格化されているものとする。具体的には、各反応に対する反応率を用いて次のように表す：

$$P_{l_\alpha \phi}^{N_1} = \frac{\gamma_{l_\alpha \phi}^{N_1}}{\gamma_{\text{all}}}, \quad P_{l_\alpha \bar{q}_3 t}^{N_1} = \frac{\gamma_{l_\alpha \bar{q}_3 t}^{N_1}}{\gamma_{\text{all}}}, \quad P_{q_3 \bar{t}}^{N_1 l_\alpha} = \frac{\gamma_{q_3 \bar{t}}^{N_1 l_\alpha}}{\gamma_{\text{all}}}, \quad P_{t l_\alpha}^{N_1 q_3} = \frac{\gamma_{t l_\alpha}^{N_1 q_3}}{\gamma_{\text{all}}}, \quad P_{\bar{q}_3 l_\alpha}^{N_1 \bar{t}} = \frac{\gamma_{\bar{q}_3 l_\alpha}^{N_1 \bar{t}}}{\gamma_{\text{all}}} \quad (3.83)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \gamma_{\text{all}} = \sum_{\beta} & (\gamma_{\ell_{\alpha}\phi}^{N_1} + \gamma_{\bar{\ell}_{\alpha}\bar{\phi}}^{N_1} + \gamma_{\ell_{\alpha}\bar{q}_3 t}^{N_1} + \gamma_{\bar{\ell}_{\alpha}q_3\bar{t}}^{N_1} \\ & + \gamma_{q_3\bar{t}}^{N_1\ell_{\alpha}} + \gamma_{\bar{q}_3 t}^{N_1\bar{\ell}_{\alpha}} + \gamma_{\bar{\ell}_{\alpha}\bar{t}}^{N_1\bar{q}_3} + \gamma_{\ell_{\alpha}t}^{N_1q_3} + \gamma_{\ell_{\alpha}\bar{q}_3}^{N_1\bar{t}} + \gamma_{\bar{\ell}_{\alpha}q_3}^{N_1t}) \end{aligned} \quad (3.84)$$

$$\sum_{X,Y} P_Y^{N_1 X} = 1 \quad (3.85)$$

である。

これから、前節と同様に (3.76) ~ (3.78) とそれらに対応する $Y_L^{\alpha\alpha}$ に関する式との差をとり、 $(Y_{\Delta L_{\alpha}})_2$ に関する式を導く。そのために、 CP 非対称のソースとなる部分と washout に関連する部分の寄与に分けて考えることにする：

$$(\dot{Y}_{\Delta L_{\alpha}})_2 = (\dot{Y}_{\Delta L_{\alpha}})_2^s + (\dot{Y}_{\Delta L_{\alpha}})_2^w \quad (3.86)$$

まず、前者の寄与をまとめると次のように表される：

$$(\dot{Y}_{\Delta L_{\alpha}})_2^s = (\dot{Y}_{\Delta L_{\alpha}})_{1\leftrightarrow 3}^s + (\dot{Y}_{\Delta L_{\alpha}})_{2\leftrightarrow 3}^{\text{s,sub}} \quad (3.87)$$

(1) (3.76) からの寄与 [$\mathcal{O}(\lambda^2 h_t^2)$]

$$s(\dot{Y}_{\Delta L_{\alpha}})_{1\leftrightarrow 3}^s = (y_{N_1} + 1) [\Delta\gamma_{\ell_{\alpha}\bar{q}_3 t}^{N_1} + \Delta\gamma_{\ell_{\alpha}q_3\bar{t}}^{N_1\bar{t}} + \Delta\gamma_{\ell_{\alpha}t}^{N_1q_3} - \Delta\gamma_{q_3\bar{t}}^{N_1\ell_{\alpha}}] \quad (3.88)$$

(2) (3.77) からの寄与 [$\mathcal{O}(\lambda^4 h_t^2)$]

$$\begin{aligned} s(\dot{Y}_{\Delta L_{\alpha}})_{2\leftrightarrow 3}^{\text{s,sub}} = & -2\Delta\gamma_{\ell_{\alpha}\phi}^{N_1} [1 - \sum_{\beta} (P_{\ell_{\beta}\phi}^{N_1} + P_{\bar{\ell}_{\beta}\bar{\phi}}^{N_1})] \\ & -2[\Delta\gamma_{\ell_{\alpha}\bar{q}_3 t}^{N_1} + \Delta\gamma_{\ell_{\alpha}q_3\bar{t}}^{N_1\bar{t}} + \Delta\gamma_{\ell_{\alpha}t}^{N_1q_3} - \Delta\gamma_{q_3\bar{t}}^{N_1\ell_{\alpha}}] \end{aligned} \quad (3.89)$$

ただし、ここでは結合定数の高次項 (3.78) のからの寄与は無視する。

これらの他に、(3.70) と (3.72) において $\mathcal{O}(\lambda^2 h_t^2)$ まで考慮すると、それらの差から新たにソース項が現れる。 $\mathcal{O}(\lambda^2 h_t^2)$ まで考慮すると N_1 の 3 体崩壊が可能になり

$$\sum_{\beta} (B_{\ell_{\beta}\phi}^{N_1} + B_{\bar{\ell}_{\beta}\bar{\phi}}^{N_1}) < 1 \quad (3.90)$$

となるため、(3.70) , (3.72) それぞれの 1 行目の項は $(y_{N_1} - 1)$ に比例する形にはならず、2 行目の項は消えずに残る。最終的に、その部分から来る新たなソース項は次のように表される：

$$s(\dot{Y}_{\Delta L_{\alpha}})_1^s = (y_{N_1} + 1 - 2 \sum_{\beta} [P_{\ell_{\beta}\phi}^{N_1} + P_{\bar{\ell}_{\beta}\bar{\phi}}^{N_1}]) \Delta_{\ell_{\alpha}\phi}^{N_1} \quad (3.91)$$

従って、 $\mathcal{O}(\lambda^4 h_t^2)$ までの CP 非対称のソースとして、(3.88) , (3.89) , (3.91) の和が次のように表される：

$$s(\dot{Y}_{\Delta\alpha})_{1+2}^s = (y_{N_1} - 1)[\Delta\gamma_{\ell_\alpha\phi}^{N_1} + \Delta\gamma_{\ell_\alpha\bar{q}_3t}^{N_1} + \Delta\gamma_{\ell_\alpha\bar{q}_3}^{N_1\bar{t}} + \Delta\gamma_{\ell_\alpha t}^{N_1q_3} - \Delta\gamma_{q_3\bar{t}}^{N_1\ell_\alpha}] \quad (3.92)$$

次に、(3.86) の washout への寄与を見る。washout に関しては、leading の $\mathcal{O}(\lambda^2 y_t^2)$ の寄与 (3.76) だけを残し、 $\mathcal{O}(\lambda^4 h_t^2)$ の寄与 (3.77), (3.78) は全て無視する。これまでと同様に $Y_{\bar{L}}^{\alpha\alpha}$ に対する式との差をとると、 $\mathcal{O}(\lambda^2 y_t^2)$ の寄与は次のように表される：

$$\begin{aligned} s(\dot{Y}_{\Delta L_\alpha})_2^w &\simeq s(\dot{Y}_{\Delta L_\alpha})_{1\leftrightarrow 3}^{2\leftrightarrow 2} \\ &= (\Delta y_{q_3} - \Delta y_t - \Delta y_{\ell_\alpha})\gamma_{\ell_\alpha\bar{q}_3t}^{N_1} + (\Delta y_{q_3} - \Delta y_{y_t} - y_{N_1}\Delta y_{\ell_\alpha})\gamma_{N_1\ell_\alpha}^{q_3\bar{t}} \\ &\quad + (\Delta y_{q_3} - y_{N_1}\Delta y_t - \Delta y_{\ell_\alpha})\gamma_{\bar{q}_3\ell_\alpha}^{N_1\bar{t}} + (y_{N_1}\Delta y_{q_3} - \Delta y_t - \Delta y_{\ell_\alpha})\gamma_{t\ell_\alpha}^{N_1q_3} \end{aligned} \quad (3.93)$$

$Y_{\Delta\alpha}$ に対する Boltzmann 方程式

これまで導いた式をまとめると、 $Y_{\Delta\alpha}$ に対する方程式は次のように表される：

$$\dot{Y}_{\Delta\alpha} = -(\dot{Y}_{\Delta L_\alpha})_1 - (\dot{Y}_{\Delta L_\alpha})_2 = (\dot{Y}_{\Delta\alpha})_{1+2}^s + (\dot{Y}_{\Delta\alpha})_{1+2}^w \quad (3.94)$$

(1) CP 非対称のソース [(3.92), ゲージ場を含む過程からの寄与]

$$\begin{aligned} s(\dot{Y}_{\Delta\alpha})_{1+2}^s &= -(y_{N_1} - 1)[\Delta\gamma_{\ell_\alpha\phi}^{N_1} + (\Delta\gamma_{\ell_\alpha\bar{q}_3}^{N_1\bar{t}} + \Delta\gamma_{\ell_\alpha t}^{N_1q_3} - \Delta\gamma_{q_3\bar{t}}^{N_1\ell_\alpha}) \\ &\quad + (-\Delta\gamma_{A\bar{\phi}}^{N_1\ell_\alpha} + \Delta\gamma_{A\ell_\alpha}^{N_1\bar{\phi}} + \Delta\gamma_{\ell_\alpha\phi}^{N_1A})] \\ &= -(y_{N_1} - 1)\left[\gamma_{N\rightarrow 2} \frac{\Delta\gamma_{\ell_\alpha\phi}^{N_1}}{\gamma_{N\rightarrow 2}} + \left((\gamma_{\ell_\alpha\bar{q}_3}^{N_1\bar{t}} + \gamma_{\bar{\ell}_\alpha q_3}^{N_1t}) \frac{\Delta\gamma_{\ell_\alpha\bar{q}_3}^{N_1\bar{t}}}{\gamma_{\ell_\alpha\bar{q}_3}^{N_1\bar{t}} + \gamma_{\bar{\ell}_\alpha q_3}^{N_1t}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\gamma_{\ell_\alpha t}^{N_1q_3} + \gamma_{\bar{\ell}_\alpha\bar{t}}^{N_1\bar{q}_3}) \frac{\Delta\gamma_{\ell_\alpha t}^{N_1q_3}}{\gamma_{\ell_\alpha t}^{N_1q_3} + \gamma_{\bar{\ell}_\alpha\bar{t}}^{N_1\bar{q}_3}} + (\gamma_{q_3 t}^{N_1\ell_\alpha} + \gamma_{\bar{q}_3\bar{t}}^{N_1\bar{\ell}_\alpha}) \frac{-\Delta\gamma_{q_3\bar{t}}^{N_1\ell_\alpha}}{\gamma_{q_3 t}^{N_1\ell_\alpha} + \gamma_{\bar{q}_3\bar{t}}^{N_1\bar{\ell}_\alpha}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left((\gamma_{A\bar{\phi}}^{N_1\ell_\alpha} + \gamma_{A\phi}^{N_1\bar{\ell}_\alpha}) \frac{-\Delta\gamma_{A\bar{\phi}}^{N_1\ell_\alpha}}{\gamma_{A\bar{\phi}}^{N_1\ell_\alpha} + \gamma_{A\phi}^{N_1\bar{\ell}_\alpha}} + (\gamma_{A\ell_\alpha}^{N_1\bar{\phi}} + \gamma_{A\bar{\ell}_\alpha}^{N_1\phi}) \frac{\Delta\gamma_{A\ell_\alpha}^{N_1\bar{\phi}}}{\gamma_{A\ell_\alpha}^{N_1\bar{\phi}} + \gamma_{A\bar{\ell}_\alpha}^{N_1\phi}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\gamma_{\ell_\alpha\phi}^{N_1A} + \gamma_{\bar{\ell}_\alpha\bar{\phi}}^{N_1\bar{A}}) \frac{\Delta\gamma_{\ell_\alpha\phi}^{N_1A}}{\gamma_{\ell_\alpha\phi}^{N_1A} + \gamma_{\bar{\ell}_\alpha\bar{\phi}}^{N_1\bar{A}}} \right) \right] \\ &\simeq -(y_{N_1} - 1)[\gamma_{N\rightarrow 2} + \gamma_{\text{top}}^{2\leftrightarrow 2} + \gamma_A^{2\leftrightarrow 2}] \epsilon_{\alpha\alpha} = \dot{Y}_{N_1} \epsilon_{\alpha\alpha} \end{aligned} \quad (3.95)$$

(2) washout に対する寄与 [(3.73),(3.93), ゲージ場を含む過程からの寄与]

$$\begin{aligned}
& s(\dot{Y}_{\Delta\alpha})_{1+2}^w \\
&= \sum_{\beta} [(\Delta y_{\ell\alpha} + \Delta y_{\phi})(\gamma_{\ell\beta\phi}^{\ell\alpha\phi} + \gamma_{\ell\beta\phi}^{\ell\alpha\phi}) + (\gamma_{\ell\beta\phi}^{\ell\beta\phi} - \gamma_{\ell\beta\phi}^{\ell\alpha\phi})] \\
&+ \sum_{\beta} [(1 + \delta_{\alpha\beta})(\Delta y_{\ell\alpha} + \Delta y_{\ell\beta} + 2\Delta y_{\phi})\gamma_{\phi\bar{\phi}}^{\ell\alpha\ell\beta} + (\Delta y_{\ell\alpha} - \Delta y_{\ell\beta})\gamma_{\phi\bar{\phi}}^{\ell\alpha\bar{\ell}\beta}] \\
&+ \{ (y_{N_1}\Delta y_{\ell\alpha} - \Delta y_{q_3} + \Delta y_t)\gamma_{q_3\bar{t}}^{N_1\ell\alpha} + [2\Delta y_{\ell\alpha} - (y_{N_1} + 1)(\Delta y_{\phi} + \Delta y_{\ell\alpha})]\gamma_{t\ell\alpha}^{N_1q_3} \} \\
&+ \{ -(y_{N_1}\Delta y_{\ell\alpha} + \Delta y_t)\gamma_{A\phi}^{N_1\ell\alpha} + (y_{N_1}\Delta y_{\phi} + \Delta y_{\ell\alpha})\gamma_{A\ell\alpha}^{N_1\phi} + (\Delta y_{\phi} + \Delta y_{\ell\alpha})\gamma_{\phi\ell\alpha}^{N_1A} \} \\
& \hspace{15em} (3.96)
\end{aligned}$$

ここでは、3 体崩壊からの寄与は無視し、(3.95) の最後で近似的に CP 非対称の生成に対する散乱と崩壊の寄与が等しい [14] ものとした。以上より、最終的な $Y_{\Delta\alpha}$ に関する方程式はまとめて次のように表される：

$$\dot{Y}_{\Delta\alpha} = \dot{Y}_{N_1}\epsilon_{\alpha\alpha} + (\dot{Y}_{\Delta\alpha})^w \quad (3.97)$$

ただし、この 3.6 節の冒頭で述べたように、これまで考えてきたのは N_1 が関与する過程のみである。

3.6.3 バリオン非対称

最後に、この節の冒頭で仮定したような単純化された状況で与えられる $Y_{\Delta B}$ の表式と N_1 , $B-L$ の量に関する数値解の例を示す。Boltzmann 方程式 (3.61), (3.97) を連立して解くことで $Y_{\Delta\alpha}$ が得られ、予め得られている B と $B-L$ の関係 (3.43) を通して $Y_{\Delta B}$ を得ることになる。

バリオン非対称の大きさ $Y_{\Delta B}$ は、いずれもニュートリノセクターのパラメータで表される 2 つの因子で次のように記述される [14]：

$$Y_{\Delta B} \sim 10^{-3}\epsilon\eta \quad (3.98)$$

ここで、 ϵ は CP 非対称の大きさと、これまでの表記から $\epsilon_{\alpha\alpha} \rightarrow \epsilon$ と置き替えたものである。また、 η は逆崩壊など washout に寄与する過程の効果を表す因子で $0 < \eta < 1$ をとり、 ϵ に依存しない。例えば、 N_1 の相互作用が完全に平衡であるような極限では 0 をとり、バリオン非対称が作られない。

図 7 はこの節で仮定した条件と同様な状況における Boltzmann 方程式の数値解の例である。黒線と赤線がそれぞれ N_1 と $B-L$ の変化を表す。(2.2) と $\eta_{B0} \sim 10^{-2}N_{B-L}^0$ [15] から、ここまで考えてきた場合で、おおよそ現在の宇宙のバリオン非対称を説明することができる。

より定量的には、上で挙げた仮定が成り立たない場合など、これまでの内容に加えて考慮し得る補正が存在する。以下では、それらの補正のうちいくつかを紹介し、最後にニュートリノ質量に対する制限に関して上記のような場合と比較する。

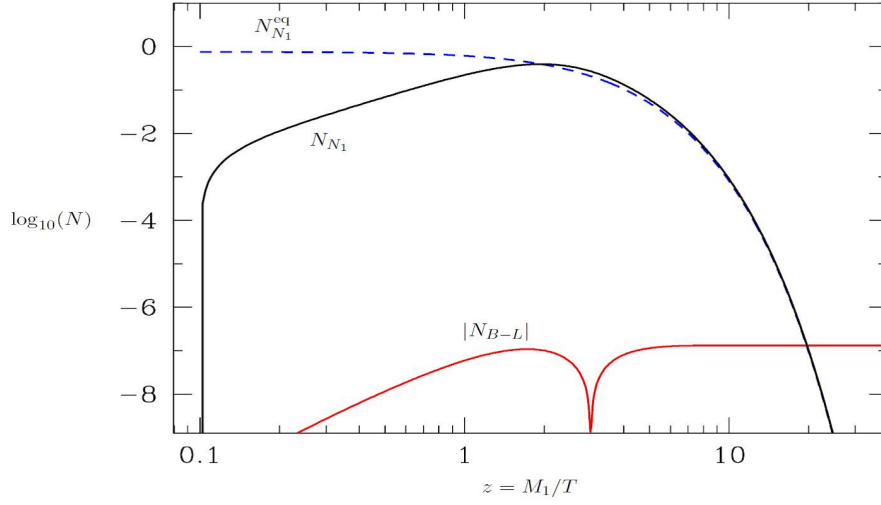


図 7: Boltzmann 方程式から得られる N_1 (黒線) と $B-L$ (赤線) の $z = M_1/T$ に関する変化の様子。パラメータは $M_1 = 10^{10}\text{GeV}$, $\epsilon = 10^{-6}$, $\tilde{m}_1 = 10^{-3}\text{eV}$, $(\sum_i m_i^2)^{1/2} = 0.5\text{eV}$ としている。 ([15] より)

3.7 熱的效果による補正

一般に、物理量は定数ではなく、温度（エネルギー）スケールによって異なる値をとり得る。宇宙初期に起こるレプトン数非対称の生成は熱平衡状態にあるプラズマ中で起こるため、レプトジェネシスに関連する物理量も、基準とする温度スケールにおける値とは異なる値をとる。

例えば、ニュートリノ結合、つまりニュートリノ質量に対しては次のような補正が与えられる [16] :

$$m_\nu(\mu) = r \cdot m_\nu \quad (3.99)$$

ここで、 r はレプトジェネシスが起るスケール $10^8\text{GeV} \lesssim \mu \lesssim 10^{16}\text{GeV}$ に応じて $1.2 \lesssim r \lesssim 1.3$ の値をとり得る (図 8)。

また、温度スケールによる結合定数の変化とは別に、背景粒子との大きな結合を持つ粒子はプラズマ温度に比例する thermal mass と呼ばれる質量に対する熱的補正を受ける。 N_i はゲージ相互作用をせず関連する湯川結合も小さいため、 N_i の質量に対する補正は良い近似で無視できる。それに対して、レプトン 2 重項、第 3 世代のクォーク、ヒッグス粒子、ゲージボソンに関してはそれらの間で相互作用するので、thermal mass の影響は重要になる。特にレプトジェネシスの温度領域では、図 9 のように

$$m_\phi(T) \gtrsim m_{q_3,t}(T) \gg m_\ell(T) \quad (3.100)$$

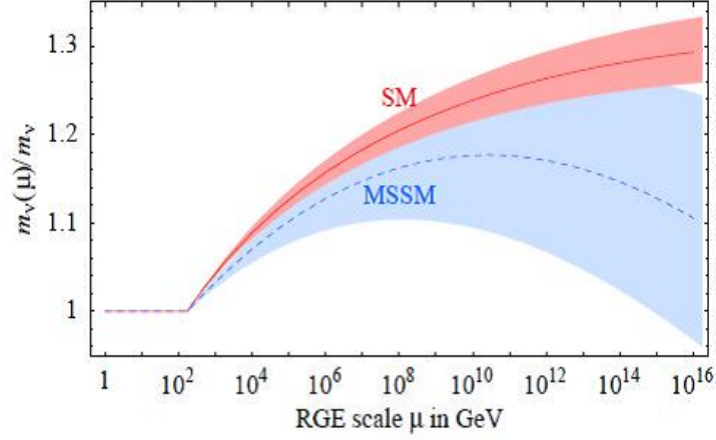


図 8: 標準模型 (Standard Model; SM) の場合、低エネルギースケールにおける値に比べてレプトジェネシスが起るスケールでは 20~30% 増加している。 ([16] より)

という関係がある。 N_1 が関係する反応過程は、このような質量の変化による影響を受ける。

いま、次のような関係を満たす温度領域を考える：

$$m_\phi(T) - m_\ell(T) < M_1 < m_\phi(T) + m_\ell(T) \quad (3.101)$$

このような関係があるとすると、 N_1 の崩壊や逆崩壊は運動学的に禁止される。大まかには、 $2 \lesssim T/M_1 \lesssim 5$ が禁止領域となる。 CP 非対称は N_1 の崩壊により生じるため、この禁止領域では CP 非対称が作られないことになる。また、より低温では通常の N_1 の崩壊、逆崩壊が起こり、より高温の状況では $\phi \leftrightarrow \ell N_1$ が可能になる。

ϕ が崩壊できるほど T が大きい状況では、 ϕ 崩壊が新たなレプトン数非対称の源となる。そして、 ϕ 崩壊で生じる CP 非対称の大きさ

$$\epsilon_\phi \equiv \frac{\Gamma(\phi \rightarrow N_1 \ell) - \Gamma(\bar{\phi} \rightarrow N_1 \bar{\ell})}{\Gamma(\phi \rightarrow N_1 \ell) + \Gamma(\bar{\phi} \rightarrow N_1 \bar{\ell})} \quad (3.102)$$

は、 N_1 崩壊で生じるものと同じオーダーまで大きくなり得る [16]。ただし、図 10 から分かるように、 ϵ_ϕ の寄与が存在するのは $T \gtrsim T_\phi \sim 5M_1(m_\phi(T) > m_\ell(T) + M_1)$ のときだけである。従って、strong washout ($K > 1$; 付録 C 参照) の場合はこの寄与は存在しないことになる。一方で、温度が下がって phase space が閉じる前に ϕ の崩壊が起きるには、かなり大きな λ が要求される。 ϕ の崩壊は、

$$\tilde{m} \gtrsim \left(\frac{T_\phi}{M_1} \right)^2 m_* \gg m_*, \quad (3.103)$$

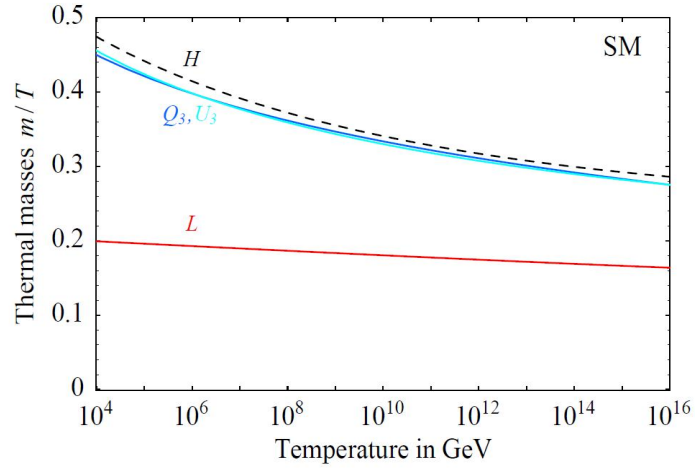


図 9: 標準模型におけるヒッグス粒子 ($H[\phi]$)、第 3 世代のクォーク 2 重項 ($Q_3[q_3]$)、レプトン 2 重項 ($L[\ell]$) の thermal mass の温度変化。([16] より)

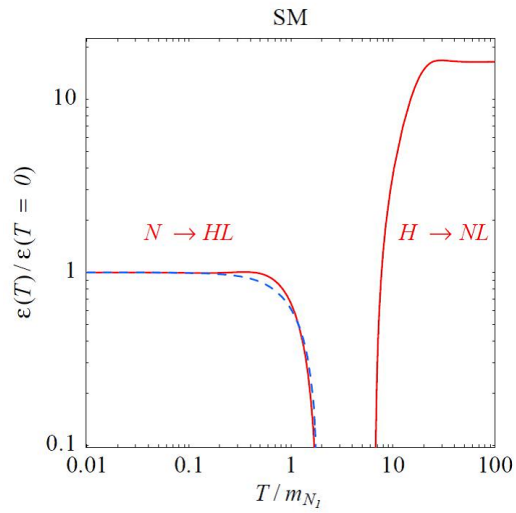


図 10: ゼロ温度と有限温度での CP 非対称の大きさの比較。禁止領域 (3.101) を挟んで、低温側では通常の N_1 崩壊による CP 非対称、高温側では ϕ の崩壊による CP 非対称が生成される。([14] より)

つまり strong washout ($K > 1$) のときだけ熱平衡に達し、weak washout ($K < 1$) では平衡から外れている。これは、崩壊する時間のある ϕ はわずかしかないことを意味する。以上より、この方法で生成されるレプトン非対称は suppress される。

図 11 の (a),(b) は、それぞれ $\Delta L = 2$ の散乱に対する反応率

$$\gamma_{N_1} \equiv \gamma(\ell\bar{\ell} \leftrightarrow \bar{\phi}\phi) \quad (3.104)$$

と、 t を含む $\Delta L = 1$ の散乱に対する反応率

$$\gamma_{\phi_s}^{\text{top}} \equiv \gamma(q_3\bar{t} \leftrightarrow \ell N_1) \quad (3.105)$$

$$\gamma_{\phi_{t+u}}^{\text{top}} \equiv \gamma(q_3 N_1 \leftrightarrow \ell t) + \gamma(\bar{t} N_1 \leftrightarrow \ell \bar{q}_3) \quad (3.106)$$

に関する thermal mass による補正の効果を表す。ただし、それぞれ $n_\ell H, n_{N_1} H$ で規格化されている。点線は補正が無い場合、実線は補正を加えた場合の振舞いである。 $\Delta L = 2$ の散乱に関しては、 $z < 1$ の高温領域においてのみ補正の影響が大きい。strong washout ($K > 1$) では無視できる。 t を含む $\Delta L = 1$ の散乱に関しては、 $\gamma_{\phi_s}^{\text{top}}, \gamma_{\phi_{t+u}}^{\text{top}}$ のいずれに関しても、高温での補正は小さい。一方、低温では、補正を考慮することで反応率が減少し、対応する washout への寄与が抑えられる。

また、ゲージボソンを含む $\Delta L = 1$ の過程では、 t, u -channel で無質量の ℓ, ϕ の交換があるとき、その伝播関数部分に起因する赤外発散を避けるために thermal mass を含めることを要求される。

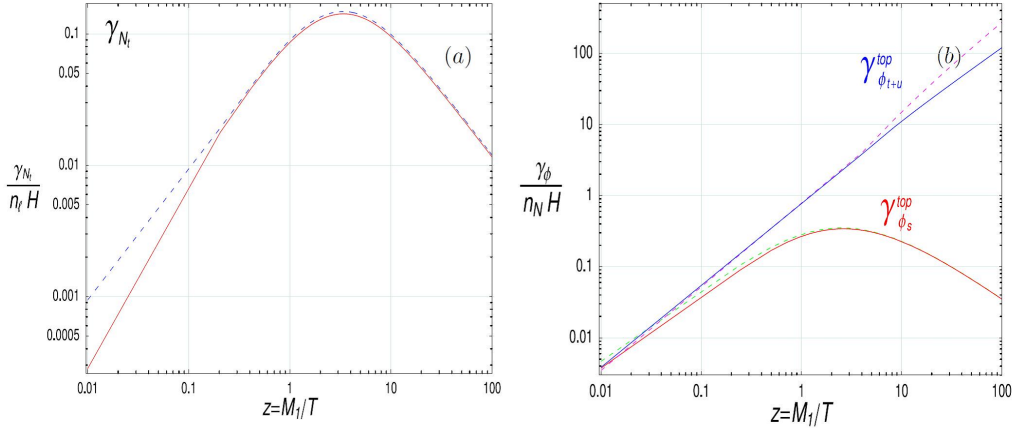


図 11: (a) t -channel での N_1 交換 ($\ell\bar{\ell} \leftrightarrow \bar{\phi}\phi$) の反応率 ($/n_\ell H$)、(b) s -channel での ϕ 交換 ($q_3\bar{t} \leftrightarrow \ell N_1$) の反応率 ($/n_{N_1} H$)、 t, u -channel での ϕ 交換 ($q_3 N_1 \leftrightarrow \ell t, \bar{t} N_1 \leftrightarrow \ell \bar{q}_3$) の反応率 ($/n_{N_1} H$) に対する、thermal mass による補正がある場合 (実線) と無い場合 (点線) の比較。 $\tilde{m} = 0.06\text{eV}, M_1 = 10^{10}\text{GeV}$ としている。 ([14] より)

その他に、熱的效果によって CP 非対称の大きさ ϵ も補正を受ける。既に述べたように、 ϕ, ℓ は背景粒子と相互作用するため、それらの粒子が関係する ϵ は温度依存す

ることが分かる。3.5 節で述べたように、 ϵ は N_1 の崩壊率を用いて定義され、特に、tree ダイアグラムと 1 ループダイアグラムの干渉項から零でない寄与が得られる。3.5 節で扱ったループ部分の伝播関数は、一般的な標準模型におけるゼロ温度の場の理論に基づくものである。伝播関数に関して考えられる補正は、有限温度の場の理論を考慮し、さらに thermal mass を含めることによる影響である。そして、ダイアグラムにおいてそのような伝播関数の部分をカットし、対応する粒子に対して on-shell 条件を課すことでフェルミオンとボソンの分散関係に影響が与えられる [16]。

3.8 フレーバー効果による補正

これまで、 N_1 は必ず単一のフレーバーに崩壊することを仮定してきた。より定量的には、単一のフレーバーに限らず、どのフレーバーに崩壊するかを考慮することによる補正が考えられる。既に単一のフレーバーの場合に関して見たように、最終的には、Boltzmann 方程式を解くことでバリオン非対称の大きさ $Y_{\Delta B}$ が CP 非対称の大きさ $\epsilon_{\alpha\alpha}$ と washout の効率を表す因子 η_α に関して表されることになる。ここでは、これら 2 つの因子 $\epsilon_{\alpha\alpha}$, η_α 、Boltzmann 方程式で言えば注目している粒子の相互作用を説明する右辺がフレーバー効果によって受ける補正を考える。そして、最後にその補正によってパラメータに対する制限がどの程度修正されるのかを見る。

フレーバー効果を考慮して Boltzmann 方程式を立てる際に重要なのは、考える相互作用とレプトジェネシス（宇宙膨張）の時間スケールである。時間スケールが宇宙膨張のそれと非常に異なる相互作用は、Boltzmann 方程式から落ちる。ここで言う「フレーバー効果を考慮する」ということは、具体的には「レプトジェネシスが起こるエネルギースケールで、どのフレーバーを区別できるかを考慮する」ということを意味する。あるフレーバーを区別できるためには、その相互作用が宇宙膨張の時間スケールよりも十分短い時間スケールで起こっていなければならない。今注目するのは N_1 の崩壊による生成物であるフレーバー α を持つレプトン 2 重項 $\ell_\alpha (\alpha = e, \mu, \tau)$ である。そして、各荷電レプトン湯川結合 $h_\alpha (\alpha = e, \mu, \tau)$ が仲介する相互作用の時間スケールと宇宙膨張のそれとの大小関係によって、区別できるフレーバーの数が異なる。あるフレーバー α を持つ荷電レプトンが関係する 2 体散乱の反応率を全て足し上げると、次のような結果が得られる [17]：

$$\Gamma_\alpha \simeq 5 \times 10^{-3} h_\alpha^2 T \quad (3.107)$$

これと膨張率 H (C.4) との比較により、フレーバーをどのように区別できるかが決まる。具体的には、レプトジェネシスが起こるエネルギースケールの範囲で、温度が高い方から順に、フレーバーの区別がつかない場合（単一フレーバー）、 τ フレーバーのみを区別できる場合、さらに μ フレーバーも区別できる場合、が考えられる。

実際に、フレーバーを区別するかしないかで生成されるバリオン非対称の大きさは異なる。図 12 は [18] に示されている 2 例では、黒線が単一フレーバーの場合、赤線が 2 つのフレーバーに区別した場合のバリオン非対称の大きさの時間変化を表す。

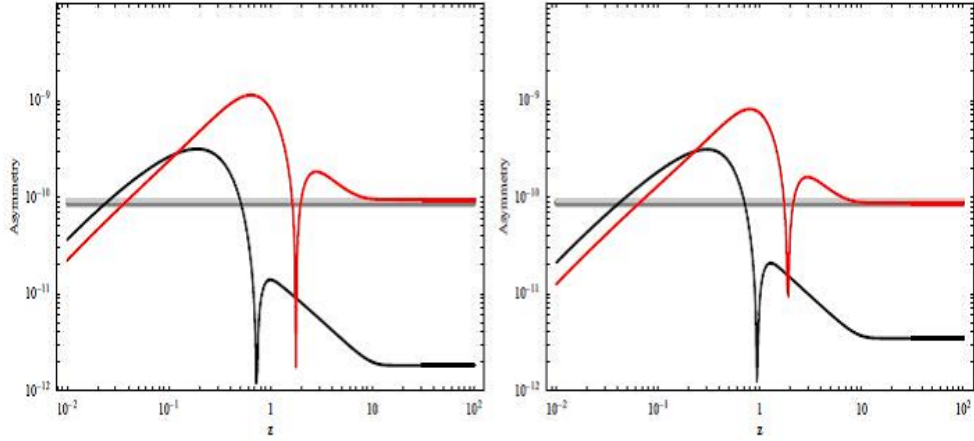


図 12: バリオン非対称の $z = M_1/T$ に関する変化の様子。黒線と赤線は、それぞれフレーバー効果を考慮しない場合と 2 つのフレーバーに区別できる場合を表す。右と左では washout パラメータが異なり、左は $\tilde{m}_{\tau\tau}/m_* = 10, \tilde{m}_{\mu\mu}/m_* = 30, \tilde{m}_{ee}/m_* = 30$ 、右は $\tilde{m}_{\tau\tau}/m_* = 10, \tilde{m}_{\mu\mu}/m_* = 30, \tilde{m}_{ee}/m_* = 10^{-7}$ で、 $\epsilon_{\tau\tau} = 2.5 \times 10^{-6}, \epsilon_{\mu\mu} = -2 \times 10^{-6}, \epsilon_{ee} = 10^{-7}, M_1 = 10^{10} \text{ GeV}$ は共通である。([18] より)

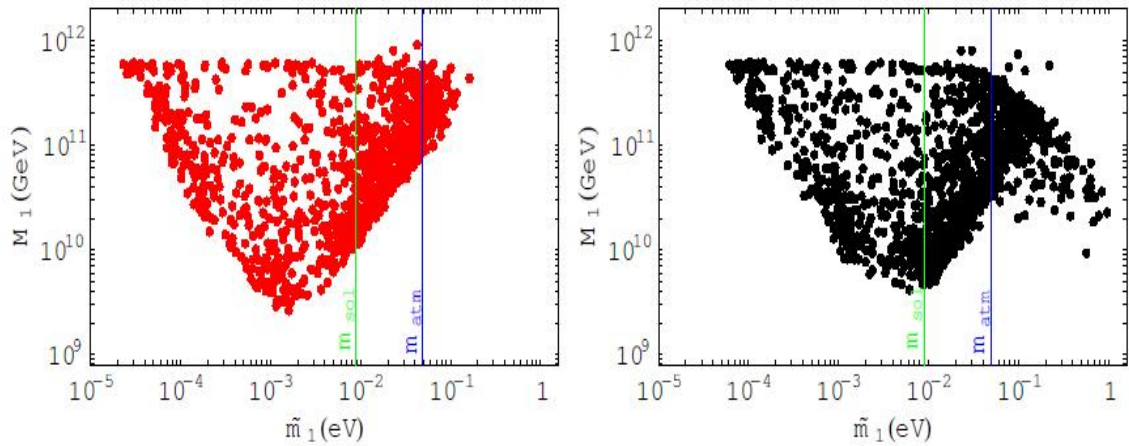


図 13: レプトジェネシスにより、現在のバリオン非対称を説明するのに十分なバリオン数を生成できる $M_1 - \tilde{m}_1$ 平面の領域。左が単一フレーバーの場合、右がフレーバー効果を考慮した場合の結果を表す。緑、青の縦線は、それぞれ太陽ニュートリノ、大気ニュートリノの観測から来る有効質量に対する上限 ($m_{\text{sol}} = \sqrt{\Delta m_{12}^2}, m_{\text{atm}} = \sqrt{\Delta m_{23}^2}$) を表す。([19] より)

補正に関する最後の例として、上で述べたようなフレーバー効果がニュートリノセクターのパラメータに対する制限に与える影響を見る [19]。図 13 は、Casas, Ibarra[20] による parametrization に基づき、ニュートリノセクターにおけるフリーパラメータをランダムに選んで $M_1 - \tilde{m}_1$ のパラメータ空間に表している。ただし、レプトジェネシスが成功するように十分なバリオン数を生成でき [19]、フレーバー効果が関連するように制限している。具体的には、宇宙初期の軽元素合成、宇宙マイクロ波背景放射の観測からくる η_B に対する制限 $5.2 \times 10^{-10} \lesssim 7.04 \times Y_B \lesssim 7.2 \times 10^{-10}$ と、フレーバー効果に関連して $M_1 \lesssim 5.8 \times 10^{11} \text{ GeV}$ が課されている。左図がフレーバー効果を含まない場合で、右図がフレーバー効果を含めた場合に対する最も軽いニュートリノ質量に対する制限の結果を表す。図から、フレーバー効果を含めた場合の方が \tilde{m}_1 の上限が高いことが分かる。

4 まとめ

本論文では、現在の宇宙のバリオン非対称を説明するシナリオの一つとしてレプトジェネシスを概観してきた。特に、標準模型に3つのゲージ相互作用をしない右巻きニュートリノと呼ばれるフェルミオンを加えたモデルに基づくシナリオを扱った。バリオン数生成には Skharov が提示した3つの条件を満たす必要があり、このシナリオでは、それらが右巻きニュートリノの存在によって満たされる。右巻きニュートリノは標準模型粒子の逆崩壊や散乱により生成され、その後、温度が下がって非平衡状態において崩壊することで、 L が生成される。一方で B は生成されないため、結果として $B - L$ が生成され、 CP 非対称が生じる。そして、そこで生成された $B - L$ が保存され、標準模型粒子の相互作用の平衡条件から B と関係付けられるのを見た。その関係を介してこのシナリオで生成される B の表式を得るため、 N_1 が関わる過程に注目し、 $N_1, B - L(B/3 - L_\alpha)$ に関する Boltzmann 方程式を立てた。最終的に、生成される B はニュートリノセクターのパラメータを用いて表され、 $B(\eta_B)$ の観測値やニュートリノ振動実験の結果から、ニュートリノ質量に制限がつけられる。

また、有限温度の補正や、右巻きニュートリノの崩壊で作られるレプトン2重項がどのフレーバーを持つかを考慮することによる補正の影響もいくつか見た。これらの補正以外にも、 N_1 と相互作用する粒子の N_1 以外の標準模型粒子との相互作用 (“spectator process” と呼ばれる) による影響も考えられる [21]。

A Notations

ここでは、Boltzmann 方程式の記述を簡略化するための notation を導入する。

まず、始状態 A が相互作用を通して終状態 B に至る反応率密度（本文中を含め、以下では単に「反応率」と呼ぶ）を次のように表す：

$$\gamma_B^A \equiv \gamma(A \rightarrow B) \quad (\text{A.1})$$

具体的に $\psi + a + b + \dots \rightarrow i + j + \dots$ という反応に対して書き下すと次のように表されるものとする：

$$\begin{aligned} \gamma_{ij\dots}^{\psi ab\dots} &\equiv \gamma(\psi + a + b + \dots \rightarrow i + j + \dots) \\ &= \int d\Pi_\psi f_\psi^{\text{eq}} d\Pi_a f_a^{\text{eq}} d\Pi_b f_b^{\text{eq}} \dots \\ &\quad \times |\mathcal{M}(\psi + a + b + \dots \rightarrow i + j + \dots)|^2 \tilde{\delta} d\Pi_i d\Pi_j \dots \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

ここで、

$$\tilde{\delta} = (2\pi)^4 \delta^4(p_\psi + p_a + p_b + \dots - p_i - p_j - \dots) \quad (\text{A.3})$$

$$d\Pi_X = \frac{d^3 p_X}{2E_X (2\pi)^3} \quad (X = \psi, a, b, \dots, i, j, \dots) \quad (\text{A.4})$$

とした。これを用いて、 CP 共役な過程の反応率との差を

$$\Delta\gamma_B^A \equiv \gamma_B^A - \gamma_{\bar{B}}^{\bar{A}} \quad (\text{A.5})$$

と表す。

共動体積当たりの粒子種 a の数密度をエントロピー密度 s を用いて

$$Y_a \equiv \frac{n_a}{s} \quad (\text{A.6})$$

で表し、それと平衡状態における量 $Y_a^{\text{eq}} = n_a^{\text{eq}}/s$ との比を次のように表す：

$$y_a \equiv \frac{Y_a}{Y_a^{\text{eq}}} \quad (\text{A.7})$$

そして、反粒子に対する量との差を次のように表す：

$$\Delta y_a \equiv y_a - y_{\bar{a}} \quad (\text{A.8})$$

粒子種 a_1, a_2, \dots, a_n が存在する状態を A 、粒子種 b_1, b_2, \dots, b_m が存在する状態を B とした時、 $A \rightarrow B, B \rightarrow A$ の過程に対して次のような量を定義する：

$$[A \leftrightarrow B] \equiv \left(\prod_{i=1}^n y_{a_i} \right) \gamma_B^A - \left(\prod_{i=1}^m y_{b_i} \right) \gamma_A^B \quad (\text{A.9})$$

共動体積当たりのフレーバー α のレプトン数を

$$Y_L^{\alpha\alpha} \equiv Y_{\ell_\alpha} + Y_{e_\alpha} \quad (\text{A.10})$$

で表し、その非対称を次のように表す：

$$Y_{\Delta L_\alpha} \equiv Y_L^{\alpha\alpha} - Y_{\bar{L}}^{\alpha\alpha} \quad (\text{A.11})$$

これと、共動体積当たりのバリオン数

$$Y_{\Delta B} \equiv Y_B - Y_{\bar{B}} \quad (\text{A.12})$$

を用いて、共動体積当たりの $B/3 - L_\alpha$ を次のように表す：

$$Y_{\Delta\alpha} \equiv \frac{Y_{\Delta B}}{3} - Y_{\Delta L_\alpha} \quad (\text{A.13})$$

B Boltzmann 方程式

ここでは、一般的な Boltzmann 方程式から始めて本文で扱うような状況に則した近似、notation を用いた表式を導く。

ある分布 f を持つ粒子に対する最も一般的な Boltzmann 方程式は次のように表される：

$$\hat{\mathbf{L}}[f] = \mathbf{C}[f] \quad (\text{B.1})$$

ここで、左辺は Liouville 演算子、右辺は衝突項と呼ばれる。 f は分布関数を表す。特に、分布が空間的に一様等方であること、すなわち Friedmann-Robertson-Walker 時空を仮定すると、相対論的な Liouville 演算子は次のように表される ($f = f(|\mathbf{p}|, t) = f(E, t)$):

$$\hat{\mathbf{L}}[f(E, t)] = E \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\dot{R}}{R} |\mathbf{p}|^2 \frac{\partial f}{\partial E} \quad (\text{B.2})$$

ここで、 R はスケール因子を表す。これを粒子の数密度

$$n(t) = \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3p f(E, t) \quad (\text{B.3})$$

(g は粒子の内部自由度) で表すと、Boltzmann 方程式 (B.1) は次のように表される：

$$\dot{n} + 3Hn = \frac{g}{(2\pi)^3} \int \mathbf{C}[f] \frac{d^3p}{E} \quad (\text{B.4})$$

ここで、左辺第 1 項は数密度の時間変化、第 2 項は宇宙の膨張 $H (= \dot{R}/R)$ による数密度の薄まりを表す。そして、それが、注目している粒子と他の粒子との相互作用の影響を表す右辺と等しいことを表している。

いま、注目している粒子を ψ とすると、一般に、それを含む複数の粒子間の相互作用 $\psi + a + b + \dots \leftrightarrow i + j + \dots$ に対して (B.4) の右辺は次のように表される [22]：

$$\begin{aligned} & \frac{g}{(2\pi)^3} \int \mathbf{C}[f] \frac{d^3p_\psi}{E_\psi} \\ &= - \int d\Pi_\psi f_\psi d\Pi_a f_a d\Pi_b f_b \dots |\mathcal{M}(\psi ab \dots \rightarrow ij \dots)|^2 \tilde{\delta} \\ & \quad \times d\Pi_i (1 \pm f_i) d\Pi_j (1 \pm f_j) \dots \\ &+ \int d\Pi_i f_i d\Pi_j f_j \dots |\mathcal{M}(ij \dots \rightarrow \psi ab \dots)|^2 \tilde{\delta} \\ & \quad \times d\Pi_\psi (1 \pm f_\psi) d\Pi_a (1 \pm f_a) d\Pi_b (1 \pm f_b) \dots \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

ここで、 \pm は終状態粒子がボソン (+) かフェルミオンか (-) で異なる。ただし、以下ではこれらの区別を無視でき ($1 \pm f_X \simeq 1$)、分布関数に対して

$$f_X(E, t) \simeq \frac{n_X(t)}{n_X^{\text{eq}}} f_X^{\text{eq}}(E) \quad (\text{B.6})$$

が成り立つことを仮定する。すると、(B.5) は次のように表される：

$$\begin{aligned}
& \frac{g}{(2\pi)^3} \int \mathbf{C}[f] \frac{d^3 p_\psi}{E_\psi} \\
& \simeq -\frac{n_\psi}{n_\psi^{\text{eq}}} \frac{n_a}{n_a^{\text{eq}}} \frac{n_b}{n_b^{\text{eq}}} \cdots \int d\Pi_\psi f_\psi^{\text{eq}} d\Pi_a f_a^{\text{eq}} d\Pi_b f_b^{\text{eq}} \cdots \\
& \quad \times |\mathcal{M}(\psi ab \cdots \rightarrow ij \cdots)|^2 \tilde{\delta} d\Pi_i d\Pi_j \cdots \\
& \quad + \frac{n_i}{n_i^{\text{eq}}} \frac{n_j}{n_j^{\text{eq}}} \cdots \int d\Pi_i f_i^{\text{eq}} d\Pi_j f_j^{\text{eq}} \cdots \\
& \quad \times |\mathcal{M}(ij \cdots \rightarrow \psi ab \cdots)|^2 \tilde{\delta} d\Pi_\psi d\Pi_a d\Pi_b \cdots \\
& = -\frac{Y_\psi}{Y_\psi^{\text{eq}}} \frac{Y_a}{Y_a^{\text{eq}}} \frac{Y_b}{Y_b^{\text{eq}}} \cdots \gamma(\psi ab \cdots \rightarrow ij \cdots) + \frac{Y_i}{Y_i^{\text{eq}}} \frac{Y_j}{Y_j^{\text{eq}}} \cdots \gamma(ij \rightarrow \psi ab \cdots) \\
& = -y_\psi y_a y_b \cdots \gamma(\psi ab \cdots \rightarrow ij \cdots) + y_i y_j \cdots \gamma(ij \rightarrow \psi ab \cdots) \\
& = [ij \cdots \leftrightarrow \psi ab \cdots] \tag{B.7}
\end{aligned}$$

一方、(B.5) の左辺は

$$\begin{aligned}
\dot{n}_\psi + 3Hn_\psi &= (\dot{s}Y_\psi + s\dot{Y}_\psi) + 3\frac{\dot{R}}{R}sY_\psi \\
&= -3\frac{C}{R^4}\dot{R}Y_\psi + s\dot{Y}_\psi + 3\frac{\dot{R}}{R} \cdot \frac{C}{R^3}Y_\psi \\
&= s\dot{Y}_\psi \tag{B.8}
\end{aligned}$$

と表される。ただし、共動体積当たりのエントロピー保存 $sR^3 = \text{Const}$ を用いた。従って、(B.4) は次のように表される：

$$s\dot{Y}_\psi = [ij \cdots \leftrightarrow \psi ab \cdots] \tag{B.9}$$

C 崩壊パラメータ K

ここでは、 N_1 の崩壊が熱平衡にあるかどうかの指標となる崩壊パラメータ K の具体的な表式を導く。

まず、tree レベルでの全崩壊率は次のように表される：

$$\Gamma_D = \sum_{\alpha} \Gamma_{\alpha\alpha} = \sum_{\alpha} \Gamma(N_1 \rightarrow \phi l_{\alpha}, \bar{\phi} \bar{l}_{\alpha}) = \frac{[\lambda^{\dagger} \lambda]_{11} M_1}{8\pi} \quad (\text{C.1})$$

また、輻射優勢期における Friedmann 方程式

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_r \quad (\text{C.2})$$

と相対論的極限におけるエネルギー密度

$$\rho_r = \frac{\pi^2}{30} \left(\sum_{\text{boson}} g_b T_b^4 + \frac{7}{8} \sum_{\text{fermion}} g_f T_f^4 \right) = \frac{\pi^2}{30} g_* T^4 \quad (\text{C.3})$$

(g_* は相対論的粒子の自由度で、考えているエネルギースケールでは全ての標準模型粒子が相対論的であると考え、 $g_* = 106.75$) より、宇宙の膨張率が次のように求まる：

$$H = \frac{2}{3\sqrt{5}} \pi^{3/2} g_*^{1/2} \frac{T^2}{m_{\text{Pl}}} \simeq 1.66 g_*^{1/2} \frac{T^2}{m_{\text{Pl}}} \quad (\text{C.4})$$

ここで、 m_{Pl} は Planck 質量を表す。

これら (C.1) と (C.4) を用いて次のような2つのパラメータを定義する：

$$\tilde{m} \equiv \sum_{\alpha} \tilde{m}_{\alpha\alpha} \equiv \sum_{\alpha} \frac{\lambda_{\alpha 1}^* \lambda_{\alpha 1} v^2}{M_1} = 8\pi \frac{v^2}{M_1^2} \Gamma_D \quad (\text{C.5})$$

$$m_* \equiv 8\pi \frac{v^2}{M_1^2} H|_{T=M_1} \simeq 1.1 \times 10^{-3} \text{eV} \quad (\text{C.6})$$

\tilde{m} は $T = 0$ でのニュートリノの有効質量を表す。 m_* は (C.5) において $\Gamma_D = H|_{T=M_1}$ としたもので、熱平衡状態におけるニュートリノの質量を表す。

$T \sim M_1$ の時代における N_1 崩壊の効率の指標を、崩壊率 $\Gamma_D(z \rightarrow \infty)$ ($T = 0$ における値) と膨張率 $H(z = 1)$ ($T = M_1$ における値) の比として定義できる。この比 K は崩壊パラメータと呼ばれる。特に、フレーバーが区別できる状況では、各フレーバーに対する崩壊パラメータが次のように表される：

$$K_{\alpha} \equiv \frac{\Gamma_{\alpha\alpha}(z = \infty)}{H(z = 1)} = \frac{\tilde{m}_{\alpha\alpha}}{m_*} \quad (\text{C.7})$$

一方、単一フレーバーの場合は、 $\Gamma_{\alpha\alpha} \rightarrow \Gamma_D, \tilde{m}_{\alpha\alpha} \rightarrow \tilde{m}$ として次のように表される：

$$K \equiv \frac{\Gamma_D(z = \infty)}{H(z = 1)} = \frac{\tilde{m}}{m_*} \quad (\text{C.8})$$

一般にこのパラメータ K に関して、 $K > 1$ である場合を strong washout、逆に $K < 1$ である場合を weak washout と呼ぶ。

謝辞

修士論文作成にあたり、指導教官である佐藤丈准教授には私のゼミや随時の質問などに多くの時間を割いてご指導していただいたことを大変感謝します。また、この修士論文のテーマの土台となる知識を養うゼミでは谷井義彰教授に大変お世話になりました。そして、研究室の仲間や自室を訪れる同期の仲間のお陰でよりやる気を出すことができ、息を抜くこともできました。深く感謝します。

参考文献

- [1] G. Steigman, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **14**, 339 (1976)
- [2] M. Fukugita and T. Yanagida, *Phys. Lett.* **B174**, 45 (1986)
- [3] F. R. Klinkhammer and N. S. Manton, *Phys. Rev.* **D36**, 2212 (1984);
N. S. Manton, *Phys. Rev.* **D28**, 2019 (1983)
- [4] P. Minkowski, *Phys. Lett.* **B67**, 421 (1977);
M. Gell-Mann, P. Ramond and R. Slansky, in *Supergravity*, eds. D.Z. Freedman and P. van Nieuwenhuizen (North-Holland, Amsterdam, 1979);
T. Yanagida, in *Proc. of the Workshop on the Unified Theory and the Baryon Number in the Universe*, Tsukuba, Japan, 1979, eds. O. Sawada and A. Sugamoto;
R. N. Mohapatra and G. Senjanović, *Phys. Rev. Lett.* **44**, 912 (1980)
- [5] Particle Data Group, *Nucl. Part. Phys.* **37**, 075021 (2010)
- [6] J. Dunkley *et al.*, *Astrophys. J. Suppl.* **180** (2009) 306
- [7] A. D. Sakharov, *JETP Lett.* **5**, 24 (1967)
- [8] V. A. Rubakov and M. S. Shaposhnikov, *Phys. Usp.* **39**, 461 (1996)
- [9] A. A. Belavin, Alexander M. Polyakov, A. S. Shvarts, and Yu. S. Tyupkin, *Phys. Lett.* **B59**, 85 (1975)
- [10] P. Arnold and L. McLerran, *Phys. Rev.* **D36**, 581 (1987)
- [11] Y. Burnier, M. Laine, and M. Shaposhnikov. *JCAP*, **0602**, 007 (2006)
- [12] R. N. Mohapatra, X. Zhang, *Phys. Rev.* **D45**, 2699 (1992)
- [13] M. E. Shaposhnikov, *Nucl. Phys.* **B299**, 797 (1988)

- [14] S. Davidson, E. Nardi, and Y. Nir, *Phys. Rept.* **466**, 105 (2008)
- [15] W. Buchmüller, P. Di Bari. *Nucl. Phys.* **B643**, 367 (2002)
- [16] G. F. Giudice, A. Notari, M. Raidal, A. Riotto, A. Strumia, *Nucl. Phys.* **B685**, 89 (2004)
- [17] J. M. Cline and K. A. Olive, *Phys. Rev.* **D49**, 6394 (1994)
- [18] A. Abada, S. Davidson, A. Ibarra, F. X. Josse-Michaux, *JHEP* **0609**, 010 (2006)
- [19] F. X. Josse-Michaux, A. Abada, *JCAP* **0710**, 009 (2007)
- [20] J. A. Casas and A. Ibarra, *Nucl. Phys.* **B618**, 171 (2001)
- [21] W. Buchmüller and M. Plümacher, *Phys. Lett.* **B511**, 74 (2001)
- [22] E. W. Kolb and M. S. Turner, **The Early Universe** (Addison Wesley, New York, 1990)